МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **ФИЗИЧЕСКИ УСКОРИТЕЛЕЙ**

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Требушинин Андрей Евгеньевич

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Разработка рентгенооптических трактов экспериментальных станций первой очереди проекта ЦКП «СКИФ»

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

доктор физ.-мат. наук, профессор

гл. н.с. ИЯФ СО РАН

Тельнов В., И./…………..
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«……»………………20…г.

Научный руководитель

канд. физ.-мат. наук

Помощник директора по перспективным проектам, ИЯФ СО РАН

Ракшун Я., В./…………..
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«……»………………20…г.

Дата защиты: «……»………………20…г.

Новосибирск, 2019

Оглавление

Глава 1. Теория ондуляторного излучения и элементы фурье-оптики

В этой части мы дадим вывод излучения релятивистского электрона в $r\omega$-пространстве, движущегося в синусоидальном магнитном поле. Вывод замечателен тем, что даёт результаты из первых принципов — уравнений Максвелла, а точность используемых приближений можно наглядно проследить по ходу изложения. В выкладках мы следовали подходу разработанному в серии работ [1], [2], [3], [4]. В заключении главы, будет дан обзор на подход, который используется в симуляционном коде SRW [5], а также даны краткие описания других симуляционных кодов, которые активно используются в научном сообществе для расчёта синхротронного излечения. Так же будет приведёт пример учебного кода для распространения волнового фронта через оптическую систему, написанный автором в рамках одного из университетских курсов.

1.1 Излучение релятивистской электрона в синусоидальном магнитном поле

1.1.1 Уравнение движения электрона в ондуляторе

Выведем спектр излучения ондулятора. Вывод начнём с уравнения движение релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1.1}$$

где e — заряд электрона, а $\vec{v}$ и $\vec{B}$ — скорость частицы и магнитное поле, соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}[\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1.2}$$

где γ — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Отложим ось z вдоль направления релятивистского движения электрона и будем считать, магнитное поле в ондуляторе $B_0 \cos(k_w z)$ направлено вдоль оси y, где k_w связана с периодом ондулятора следующим образом $k_w = 2\pi/\lambda_w$. После этого уравнение 1.2 можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{eB_0}{\gamma m_e}\dfrac{dz}{dt}\cos(k_w z) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{eB_0}{\gamma m_e}\dfrac{dx}{dt}\cos(k_w z) \end{cases} \tag{1.3}$$

далее, один раз интегрируя первое уравнение системы с заменой $dz = \beta c dt$, где $\beta = \|\vec{v}\|/c$, можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w}\sin(k_w z) \tag{1.4}$$

Введём коэффициент ондуляторности — $K = \dfrac{eB_0\lambda_u}{2\pi m_e c}$, который показывает угол отклонения траектории электрона от оси z.

Подставляя получившийся результат 1.4 во второе уравнение системы 1.3 и интегрируя с пределами от 0 до некоторого z_0, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{Kc}{\gamma}\sin(k_w z) \\ \dfrac{dz}{dt} = \beta c - \dfrac{K^2 c}{2\gamma^2\beta}\sin^2(k_w z) \end{cases} \tag{1.5}$$

Чтобы получить уравнение на траекторию частицы, ещё раз проинтегрируем оба уравнения и получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Kc}{\gamma k_w \beta}\cos\big(k_w \overline{\beta} ct\big) \\ z = \overline{\beta} ct + \dfrac{K^2}{8\beta^2\gamma^2 k_w}\sin\big(2k_w \overline{\beta} ct\big) \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь мы ввели обозначение $\overline{\beta}$, которое определяется как $\overline{\beta}c = \beta c\left(1 - \dfrac{K^2}{4\beta^2\gamma^2}\right)$. Полученные решения мы будем использовать при интегрировании уравнений Максвелла.

1.1.2 Решение уравнений Максвелла в прааксиальном приближении

Вывод спектра излучения будем проводить в $r\omega$-пространстве. Начнём с уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ [\nabla \times \vec{E}] = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ [\nabla \times \vec{B}] = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.7}$$

Из уравнений тривиально можно получить неоднородное волновое уравнение:

$$c^2\nabla^2\vec{E} - \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi c^2\nabla\rho + 4\pi\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \tag{1.8}$$

Это же уравнение перепишем в $r\omega$-пространстве, определив преобразование Фурье следующим образом:

$$\begin{gathered} \vec{\tilde{E}}(r,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\vec{E}(r,t)\exp[i\omega t] \\ \vec{E}(r,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\vec{\tilde{E}}(r,t)\exp[-i\omega t] \end{gathered} \tag{1.9}$$

Применив к уравнению 1.8, получим:

$$\omega^2 \tilde{\vec{E}} + c^2 \nabla^2 \tilde{\vec{E}} = 4\pi c^2 \nabla \widetilde{\rho} - 4i\pi\omega \tilde{\vec{j}} \tag{1.10}$$

Перепишем это уравнение в приближении медленно меняющейся амплитуды в сравнение с частотой осцилляций, что есть $\tilde{\vec{E}} = \bar{\vec{E}} \exp[i\omega z/c]$, в приближении $\dfrac{\partial |\vec{E}|}{\partial z} \ll \dfrac{\omega}{c} |\vec{E}|$. Где временная зависимость разложена до нулевого порядка малости, исходя из уравнения 1.6 получим:

$$c^2 \left(\nabla^2 \tilde{\vec{E}} + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial z} \right) \exp[i\omega z/c] = 4\pi c^2 \nabla \widetilde{\rho} - 4i\pi\omega \tilde{\vec{j}} \tag{1.11}$$

Для электрона движущегося в вакууме ток и плотность заряда выражается через дельта-функцию Дирака:

$$\begin{aligned} &\rho(r,t) = -e\delta(\vec{r} - \vec{r'}(t)) = -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z)) \delta(\frac{s(z)}{v} - t) \\ &\vec{j}(r,t) = \vec{v} \rho(r,t) \end{aligned} \tag{1.12}$$

В $r\omega$-пространстве:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\rho}(r,\omega) = -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z)) \exp\left[\frac{iws(z)}{v} \right] \\ &\tilde{\vec{j}}(r,\omega) = \vec{v} \widetilde{\rho}(r,\omega) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Подставим фурье-образы плотности тока и заряда в уравнение 1.11:

$$\nabla^2 \tilde{\vec{E}} + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[iw \left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c} \right) \right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}(z) - \nabla \right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z)) \tag{1.14}$$

Получившиеся уравнение является точным. Теперь мы можешь применить параксиальное приближение.

$$\nabla^2_\perp \tilde{\vec{E}}_\perp + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}_\perp}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[iw \left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c} \right) \right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_\perp(z) - \nabla_\perp \right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z)) \tag{1.15}$$

Перед нами неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое мы решим с помощью функции Грина. Для дифференциального оператора $\partial_t - k\nabla^2_{2D}$ функция Грина есть: $\dfrac{1}{4\pi kt}\exp\left[-\rho^2/4kt\right]$. В частности для уравнения 1.15

$$G(z_0 - z'; \vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp) = -\frac{1}{4\pi(z_0 - z')}\exp\left[i\omega\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp|^2}{2c(z_0 - z')}\right] \tag{1.16}$$

Получим решение для функции распределения поля:

$$\vec{\tilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = -\frac{e}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' d\vec{r'}\frac{1}{z_0 - z'}\left(\frac{i\omega}{c^2}\vec{v}_\perp(z') - \nabla'_\perp\right)\delta(\vec{r'}_\perp - \vec{r'}_\perp(z'))\times$$
$$\exp\left[iw\left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c}\right)\right] \tag{1.17}$$

Проинтегрировав по $d\vec{r'}$ получим общее решение уравнения 1.14 :

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = -\frac{i\omega e}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\frac{1}{z_0 - z'}\left(\frac{\vec{v}_\perp(z')}{c} - \frac{\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp(z')}{(z_0 - z')}\right)\times \\ \exp\left[iw\left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c}\right)\right].\end{aligned} \tag{1.18}$$

Итого, мы получили распределение электромагнитного поля в точке наблюдения $\vec{r}_0$, которое получит явный вид после интегрирования по траектории $\vec{r'}_\perp(z')$.

1.1.3 Излучение планарного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение планарного ондулятора, используя результаты 1.18 и 1.6. Сперва проанализируем получившиеся распределение поля 1.19: в случае ондулятора, член $(z_0 - z')^{-1}$ можно разложить около z', что всегда верно для дальней зоны, так как размер ондулятора много меньше расстояния, с которого наблюдается излучения: $\lambda_w N \ll z_0$, где N число периодов ондулятора.

Воспользовавшись решениями 1.5 и 1.6 и помня $\vec{r}_{\perp 0}/z_0 = \vec{\theta}$, преобразуем уравнение 1.18 к виду:

$$\vec{\bar{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \int\limits_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i\Phi_T]\left(\frac{K}{\gamma}\sin(k_w z)\vec{e}_x + \vec{\theta}\right) \tag{1.19}$$

Здесь мы отбросили члены первого и больших порядков малости по $1/z_0$. За Φ_T мы обозначили следующее выражение:

$$\Phi_T = \left(\frac{\omega}{2c\widetilde{\gamma}^2} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)z' - \frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\omega}{k_w c}\sin(2k_w z') - \frac{K\theta_x}{\gamma}\frac{\omega}{k_w c}\cos(k_w z'), \tag{1.20}$$

а $\widetilde{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$.

Пределы интегрирования ограничили длиной ондулятора от $-\lambda_w N/2$ до $\lambda_w N/2$, считая вклад в излучение ондулятора доминирующим над вкладами от остальных участков траектории. На этом шаге уже можно заметить, что излучение на оси будет линейно поляризованно. По ходу выкладок можно проследить, что это есть вклад токового члена из уравнения 1.10, вклад же плотности заряда или, как мы его назовём, градиентный член, даёт вариацию поляризации при наблюдении под некоторым углом θ к оси. Перепишем 1.19 в следующе виде:

$$\begin{gathered}\vec{\bar{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_m\left(-\frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\omega}{k_w c}\right) J_n\left(-\frac{K\theta_x}{\gamma}\frac{\omega}{k_w c}\right)\times \\ \exp\left[\frac{i\pi n}{2}\right] \int\limits_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i(2m+n)k_w z']\left(\frac{K}{2i\gamma}\big(\exp[2ik_w z'] - 1\big)\vec{e_x} + \vec{\theta}\exp[ik_w z']\right)\times \\ \exp\left[i\left(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)z'\right],\end{gathered} \tag{1.21}$$

Где мы ввели $\omega = \omega_r + \Delta\omega$, $\omega_r = 2c\widetilde{\gamma}^2 k_w$ и использовали формулу Якоби — Ангера:

$$\begin{aligned} \exp[iz\cos(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z)\exp[in\theta] \\ \exp[iz\sin(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\exp[in\theta] \end{aligned} \tag{1.22}$$

До сих пор мы пользовались только одним приближением при решении уравнения Максвелла — параксиальным приближением, теперь можем воспользоваться следующим параметром — количеством периодов ондулятора N. Для этого обратим внимание на первое слагаемое в фазовом множителе под интегралом и заметим, что если $k_w\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r} + \dfrac{\omega\vec{\theta}^2}{2c} \ll k_w$, то фаза меняется медленно на одном периоде и не занулит интеграл. Отметим, что для резонанса об слагаемых должны быть много меньше единицы, т.е. $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r} \ll 1$ и $\dfrac{\omega\vec{\theta}^2}{2c} \ll 1$, последнее соотношение даёт углы наблюдения вблизи резонанса: $\theta \ll \dfrac{1}{\widetilde{\gamma}}$. Теперь необходимо обратить внимание на аргументы функций Бесселя, а именно:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\omega}{k_w c} \\ v &= -\frac{K\theta_x}{\gamma}\frac{\omega}{k_w c} = -\frac{K\theta_x}{\gamma}\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right)2\widetilde{\gamma}^2 \lesssim \frac{2K\theta_x\widetilde{\gamma}}{\sqrt{1+K^2/2}} \lesssim \theta_x\widetilde{\gamma} \ll 1 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Зная, что $J_\alpha(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+\alpha}$, видим, что вклад нулевого порядка по $\theta_x\widetilde{\gamma}$, т.е. $J_\alpha(x) \sim 1$, даёт только функция Бесселя с индексом $n = 0$. Здесь мы пока не учитываем градиентный член пропорциональный $\vec{\theta}$, таким образом из оставшихся фазовых множителей можно выписать условия на индекс m. Они определяются нулями в аргументах соответствующих фаз или $m = -1$ и $m = 0$, оба оставшихся члена пропорциональны $\dfrac{K}{\gamma}$.

Теперь вернёмся к градиентному члену, вклад от которого занулиться при усреднении по длине ондулятора при $n = 0$, этот вклад даст ненулевой вклад при $n = 1 - 2m$, таким образом в ход пойдут следующие члены разложения $J_m(v)$. Однако, помня интересующий нас диапазон углов, члены разложения будут порядка $\theta_x v^m$, очевидно, что их вклады пренебрежимо малы, и вклад токового члена $\vec{e}_x$ будет доминирующем. Учитывая вышесказанные приближения, перепишем 1.21

$$\vec{\widetilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e}{2c^2 z_0}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right]\Big(J_1(v) - J_0(v)\Big)\vec{e}_x \times$$
$$\int\limits_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp\left[i\left(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)z'\right], \tag{1.24}$$

Интеграл легко берётся:

$$\vec{\widetilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e L K}{c^2 z_0 \gamma}\exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right]\mathrm{sinc}\left[\left(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)L/2\right]\vec{e}_x, \tag{1.25}$$

где введено обозначение: $A_{JJ} = J_1(v) - J_0(v)$. В итоге мы получили распределение поля в $r\omega$-пространстве.

В следующем параграфе мы займёмся выводном влияния конечности эмиттанса на распределение излучения, чтобы облегчить выкладки мы введём нормализованные единицы.

$$\hat{E}_{\perp} = \frac{c^2 z_0 \gamma \widetilde{E}_{\perp}}{e\omega K L A_{JJ}}$$

$$\hat{\theta} = \theta\sqrt{\frac{\omega L}{c}} \tag{1.26}$$

$$\hat{z} = \frac{z}{L},$$

а также,

$$\hat{C} = CL = 2\pi N\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \tag{1.27}$$

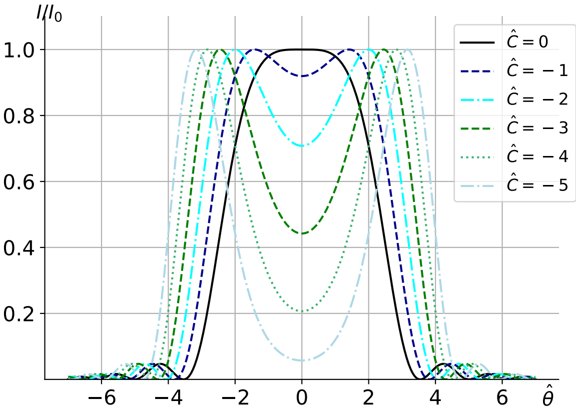

Рисунок 1.1 — Угловое распределение поля при отрицательной сдвижке частоты

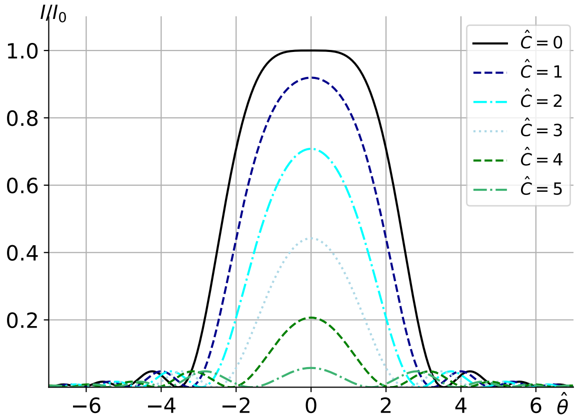

Рисунок 1.2 — Угловое распределение поля при положительной сдвижке частоты

Теперь уравнения 1.25 и 1.28 могут быть переписаны в нормализованных единицах.

$$\hat{E}_{\perp} = e^{i\Phi} \int_{-1/2}^{1/2} dz' \exp\left[i\left(\hat{C} + \frac{\hat{\theta}^2}{2}\right) z'\right], \tag{1.28}$$

$$\hat{E}_{\perp} = e^{i\Phi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{\theta}^2}{4}\right), \tag{1.29}$$

На рис. 1.1 и рис. 1.2 изображены угловые распределения излучения. Их структуру можно понять из рисунка 1.3. Конструктивная интерференция наблюдается на оси, где есть максимум интерференционной картины на резонансной частоте. Если произвести отрицательную сдвижку по частоте, то выполнение условия конструктивной интерференции: $n\lambda_{ph} = s_{ph} - \lambda_u \cos\theta$ будет наблюдаться при ненулевых углах наблюдения, и обратно, при положительной сдвижке частоты, интенсивность быстро падает, условие резонанса не может выполниться при меньших длинах волн на ненулевых углах, потому что в набег фазы на каждом периоде ондулятора, не укладывается целое число длин волн соответствующей гармоники излучения. Говорят, что электрон на каждом периоде ондулятора интерферирует сам с собой. Естественно, говорят о интерференции излучения, которое на оси обгоняет электрон на одну длину волны (или болеешее число волн, т.е. 1, 2, 3 и т.д.). На следующем периоде ондулятора, электрон снова излучает в фазе с излучённой на прошлом периоде волной. Важной характеристикой в приложениях является проинтегрированный по углам $\hat{\theta}$ спектр излучения, см. рис. 1.4. В некотором смысле, у спектра появляется широкий хвост. Форма спектра и единицы измерения для некоторой задачи должны обсуждаться отдельно.

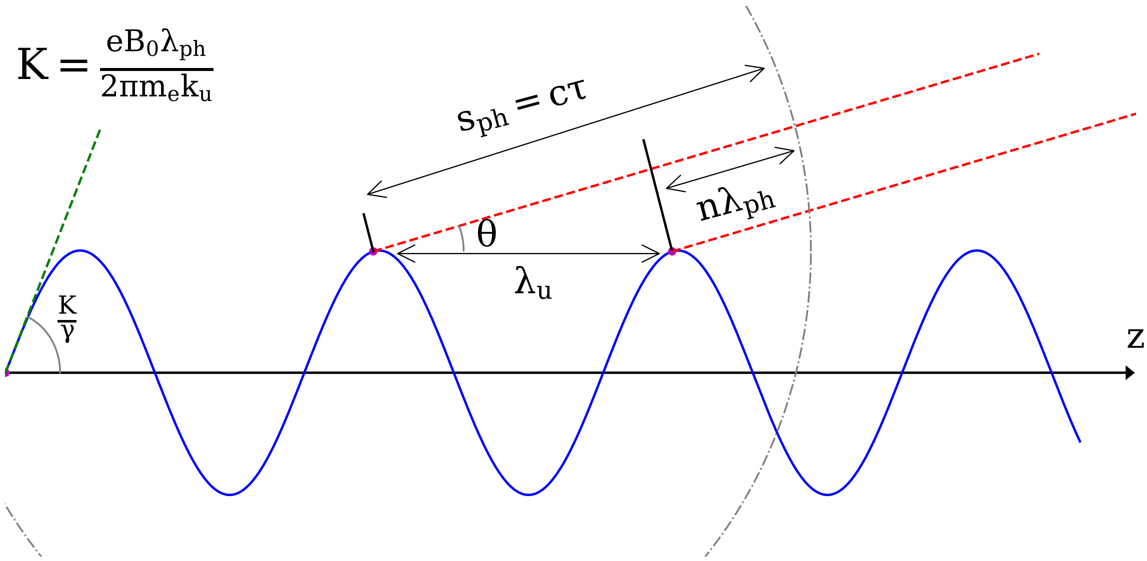

Рисунок 1.3 — Ондулятор как интерференционное устройство

1.2 Учёт конечности эмиттанса

В этом параграфе мы покажем влияние эмиттанса электронного пучка на спектр излучения и угловое распределение. Для начала перепишем уравнение 1.32 с учётом отклонения частиц от заданной траектории, — h_x и h_y и с некоторым дополнительным углом η_x и η_x. Сразу можно понять, что в уравнении 1.32 можно сделать замену $\theta_{x,y} \rightarrow \theta_{x,y} - \eta_{x,y} - \dfrac{l_{x,y}}{z_0}$ и переписать углы в нормализованных единицах аналогично с 1.26, с точностью до фазы:

$$\hat{E}_{\perp} \sim \operatorname{sinc}\left[\frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}\left(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x - \frac{l_x}{z_0}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\hat{\theta}_y - \hat{\eta}_y - \frac{l_y}{z_0}\right)^2\right], \tag{1.30}$$

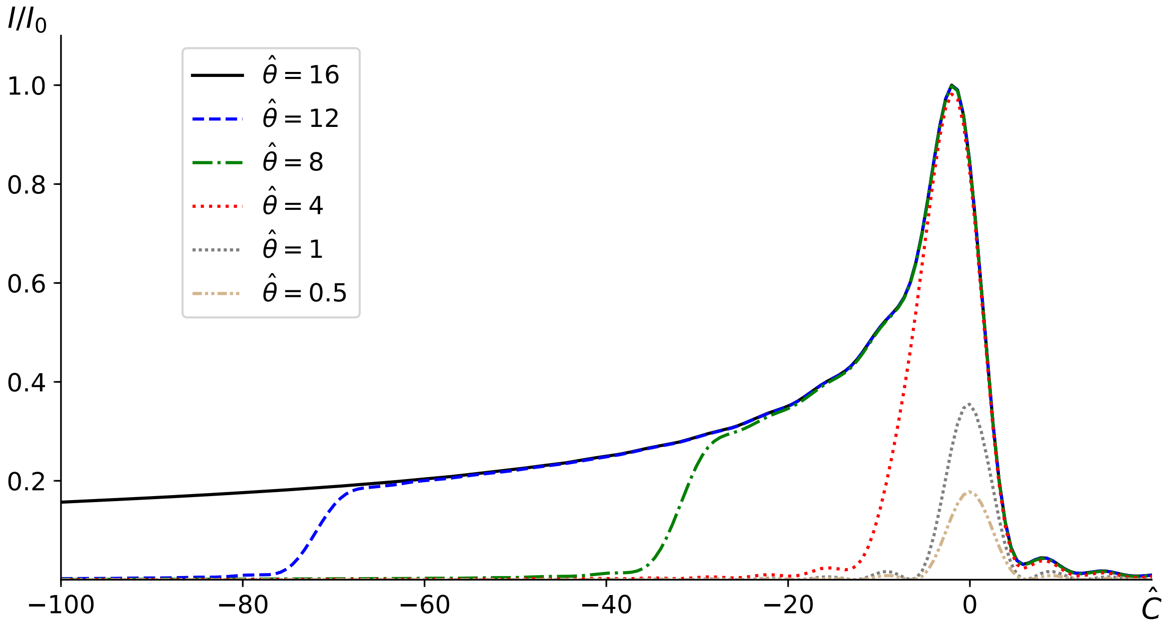

Рисунок 1.4 — Проинтегрированный по углам спектр излучения. За $\hat{\theta}$ в легенде обозначены пределы интегрирования по углам

При этом можно положить $\dfrac{l_{x,y}}{z_0} \ll 1$, что выполняется с очень высокой точностью.

В наших рассуждениях мы будем использовать предельный случай: электронный пучок не симметричен его вертикальный размер много меньше размера по радиальному направлению. Распределение частиц будем считать гауссовым:

$$h_{x,y}(\eta_{x,y}) = \frac{N_e}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x',y'}} \exp\left[-\frac{\eta_{x,y}^2}{2\sigma_{x',y'}^2}\right] \tag{1.31}$$

Для удобства перепишем это распределение в нормализованных единицах, помня $\sigma_{x',y'} = \epsilon_{x',y'}/\beta_{x',y'}$, где $\epsilon_{x',y'}$ — вертикальный и горизонтальный эмиттансы, $\beta_{0x',y'}$ — бета-функция. Нормализованные единицы для $\hat{\beta}_0 = L_\omega^{-1}\beta_0$ и $\hat{\epsilon} = (\omega/c)\epsilon$

$$h(\hat{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \exp\left[-\frac{\hat{\eta}^2\hat{\beta}_0}{2\hat{\epsilon}^2}\right] \tag{1.32}$$

Как уже упоминалось мы будем рассматривать предельный случай $\epsilon_{y'}/\beta_{y'} \ll 1$, в то время как $\hat{\beta}_{0x,y} \sim 1$, поэтому просто $\epsilon_{y'} \ll 1$. Теперь можно записать интенсивность поля следующий образом:

$$\hat{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\eta}_x \operatorname{sinc}^2(\zeta) \exp\left[-\frac{\hat{\eta}_x^2 \hat{\beta}_{0x}}{2\hat{\epsilon}_x}\right], \tag{1.33}$$

Где мы ввели $\zeta = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x)^2 + \frac{1}{4}\hat{\theta}_y^2$. Здесь мы учли, что распределение по y действует как дельта-функция. Предыдущее уравнение упрощается дальше в пределе $\hat{\epsilon}_x \hat{\beta}_x \gg 1$, опять же помня, что и $\hat{\beta}_x \sim 1$, получается $\hat{\epsilon}_x \gg 1$. Ширина $\operatorname{sinc}^2(\zeta)$ много больше ширины гауссвоского распределения, ширина которого $\hat{\epsilon}_x$, поэтому интеграл будет набираться в пике кардинального синуса и экспоненту можно вынести с аргументом: $\hat{\eta}_x = \hat{\theta}_x$:

$$\hat{I} = \frac{\exp\left[-\hat{\theta}_x^2 \hat{\beta}_{0x}/2\hat{\epsilon}_x\right]}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\eta}_x \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x)^2 + \frac{1}{4}\hat{\theta}_y^2\right) \tag{1.34}$$

Этот интеграл можно взять числено. На 1.5 представлены: линия 1.: спектр излучения пучка с $\hat{\epsilon}_x \to \infty$ $\hat{\epsilon}_x \to 0$, линия 2.: спектр одиночного электрона как функция $\hat{C} + \hat{\theta}_y^2/2$ при $\hat{\theta}_x = 0$, на рис. 1.6 то же для распределения интенсивности по углам.

Итого, в этой главе мы привели один из случаев учёта конечности эмиттанса, который с хорошей точностью применим в современных источниках синхротронного излучения третьего и четвёртого поколений. В многом, данного подхода достаточно для того, чтобы интерпретировать резултаты вычислений кода SRW, при необходимости взятые нами приближения могут быть изменены и так же полученные результаты при помощи богатых вычислительных способностей современных ЭВМ.

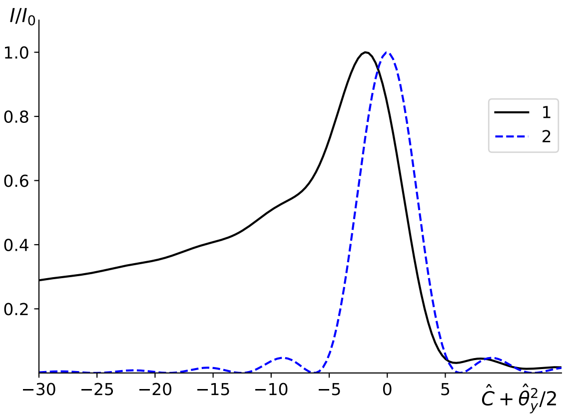

Рисунок 1.5 — Нормализованный спектр ондуляторного излучения. Линия 1 - спектр с учётом эмиттанса, линия 2 - спектр излучения уединённого электрона

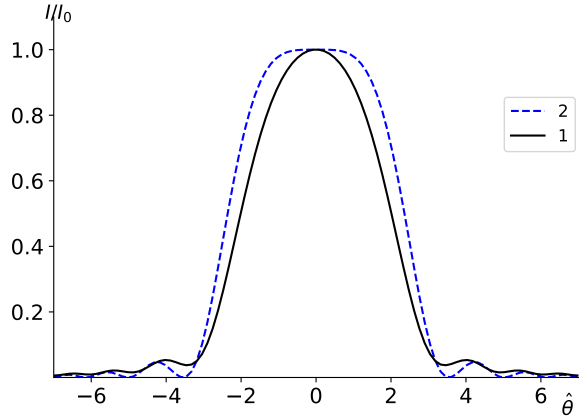

Рисунок 1.6 — Нормализованное угловое распределение излучения. Линия 1 - спектр с учётом эмиттанса, линия 2 - спектр излучения уединённого электрона

Глава 2. Элементы фурье оптики

В этой главе мы предложим наглядный подход к решению задачи о распространение волнового фронта в пустом пространстве, его прохождении через систему линзу. Приведённые результаты напрямую могут быть использованы в программном коде. Распределение поля в начальный момент времени будем считать гауссовским, однако, как будет видно из изложения, подход может быть использован для произвольного распределения поля. В наших выкладкам мы в полной мере следуем подходу [6] и [7], полное изложение фурье оптики и статистической оптики можно найти в замечательных книгах [8], [9].

2.1 Распространение света в пустом пространстве

Наши рассуждения мы начнём с волнового уравнения в пустом пространстве, т.е. $\vec{j} = 0, \rho = 0$.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

В $r\omega$-пространстве уравнение приобретает знакомый вид уравнения Гельмгольца, где $k_0 = \omega / c$.

$$k_0^2 \vec{\tilde{E}} + \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 0 \tag{2.2}$$

Совершив фурье-преобразование в k-пространство по координатам x,y, которое определим схожим образом с 1.9:

$$\vec{\hat{E}}(\vec{k},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxdy\vec{E}(\vec{r},t)\exp[ik_x x + ik_x x]$$
$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \vec{\hat{E}}(\vec{k},t)\exp[-ik_x x - ik_x x], \tag{2.3}$$

получим:

$$k_0^2\Big(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\Big)\vec{\hat{E}} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{\hat{E}}}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{2.4}$$

Теперь можно напрямую можно получить решение этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,z) = \vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,0)\exp\left[ik_0 z\sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}}\right] \tag{2.5}$$

На основе уравнения 2.5 введём функцию отклика среды:

$$H(k_x,k_y,z) = \frac{\vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,z)}{\vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,0)} = \exp\left[ik_0 z\sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}}\right]$$
$$H(k_x,k_y,z) \approxeq \exp[k_0 z]\exp\left[-\frac{iz}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2)\right] \tag{2.6}$$

Видно, чтобы получить распределение электромагнитного поля на некотором расстоянии z, необходимо совершить обратное преобразование Фурье в xy-пространство. Таким образом решение волнового уравнения сводиться к трём относительно простым операциям: первое, — перевод начального распределения в $k_x k_y$-пространство, далее домножение получившегося распределения на функцию отклика среды, в нашем случае пустое пространство, и последний шаг, — обратное преобразование Фурье. Из вывода видно,что мы не накладывали никаких ограничений на начальное распределение поля, кроме, быть может, естественных ограничений, накладываемых на оригинал преобразованием Фурье.

2.2 Действие тонкой линзы на волновой фронт

В этом параграфе мы построим элементарную оптическую систему, состоящую из пустого промежутка, — d_1, тонкой линзы с оптической силой, — $1/f$ и ещё одного пустого промежутка до плоскости изображения. Действие тонкой линзы мы представим как домножение комплексной амплитуды поля на следующее выражение:

$$T_f(x,y) = \exp\left[-\frac{ik_0}{2f}(x^2+y^2)\right] \tag{2.7}$$

Для предметности обсуждения определим начальное распределение гауссовым пучком:

$$\overline{E}(x,y,0) = A\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right] \tag{2.8}$$

После преобразование Фурье в k_xk_y-пространстве мы получим:

$$\hat{E}(k_x,k_y,0) = A\pi w_0^2 \exp\left[-\frac{w_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right] \tag{2.9}$$

После домножения этого распределения поля в k_xk_y-пространстве на функцию отклика пустого промежутка, получим

$$\begin{aligned}\hat{E}(k_x,k_y,z) &= \hat{E}(k_x,k_y,z)H(k_x,k_y,z)\\ &= A\pi w_0^2 \exp\left[-\frac{w_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right]\exp[k_0z]\exp\left[-\frac{iz}{2k_0}(k_x^2+k_y^2)\right]\\ &= A\pi w_0^2\exp[k_0z]\exp\left[-\frac{iq}{2k_0}(k_x^2+k_y^2)\right],\end{aligned} \tag{2.10}$$

здесь мы ввели $q = z - iz_R$, где $z_R = \dfrac{k_0 w_0^2}{2}$. После перехода обратно в xy-пространство, получим:

$$\overline{E}(x, y, z) = \frac{iAk_0 w_0^2}{2q} \exp[k_0 z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q}(x^2 + y^2)\right], \tag{2.11}$$

Теперь можно воспользоваться выражением для тонкой линзы и получить:

$$\begin{aligned}
&\overline{E}_l(x, y, z) = T_f(x, y)\overline{E}(x, y, z) = \\
&\frac{iAk_0 w_0^2}{2q} \exp[k_0 z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik_0}{2f}(x^2 + y^2)\right] \\
&\frac{iAk_0 w_0^2}{2q} \exp[k_0 z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q_l}(x^2 + y^2)\right],
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\dfrac{1}{q_l} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{f}$.

Теперь можно подвести итог: после распространения волнового фронта на расстояние d_1 параметр q преобразуется:

$$q(d_1) = q(0) + d_1, \tag{2.13}$$

далее на него действует линза:

$$\frac{1}{q_l} = \frac{1}{q(0) + d_1} - \frac{1}{f}, \tag{2.14}$$

и ещё один пустой промежуток, до места, где волновой фронт опять будет плоским:

$$q(d_1 + d_2) = q_l + d_2, \tag{2.15}$$

Условие того, что волновой фронт плоский мы сформулируем так, что $q(d_1 + d_2) = -i\dfrac{k_0 w_2^2}{2}$, что легко проверятся подстановкой в 2.10. Получим уравнение:

$$-i\frac{k_0 w_2^2}{2} = q_l + d_2, \tag{2.16}$$

где, приравниванием мнимых частей получим:

$$w_2^2 = \frac{f^2 w_1^2}{(f-d_1)^2 + (k_0 w_1^2/2)^2} \tag{2.17}$$

то же для реальных частей:

$$d_2 = f + f^2 \frac{(d_1 - f)}{(d_1 - f)^2 + (k_0 w_1^2/2)^2} \tag{2.18}$$

Из последнего уравнения видно, что если положить перетяжку гауссового пучка раной нулю, то выражение переходит в обычное соотношение геометрической оптики.

В приведённой главе мы дали краткий путь того, как можно очень эффективно и относительно просто использовать Фурье оптику для написания симуляционных кодов при проектировании оптических систем. В качестве примера, для заинтересованных читателей на веб-странице (веб-страница) приведёт код простой оптической системы, который в полной мере используют результаты вышеприведённого параграфа. Код был написан автором данной рукописи рамках курса «Основы вычислительной физики», который читается на физическом факультете НГУ. Дальнейшие комментарии к коду можно найти в репозитории указанной по ссылке.

Глава 3. Краткий обзор дифракции на кристаллах

В это главе мы кратко дадим основные результаты кинетической и динамической теории дифракции. Основные кристаллы используемы на синхротронных источниках третьего и четвёртого поколений - это Si (кремний), C (алмаз) и реже Ge (германий), в виду свой кубической кристаллический решётки, эти кристаллы относительно просты для анализа. Для нас важны такие свойства кристаллов, как способность преобразовать относительно широкой спектр излучения ондулятора, в излучение с относительной монохроматичностью до $\Delta E/E \sim 10^{-4}$, а также поглощательные способности кристаллов, что в значительной степени снижает тепловые нагрузки на оптические элементы.

3.1 Симметричное брэгговское отражение от идеально кристалла

Длины волн, которые отвечают резонансу при отражении падающего под углом θ к плоскости кристалла излучения, даётся законом Брэгга:

$$m\lambda = 2d\sin\theta, \tag{3.1}$$

где d — расстояние между плоскостями от которых происходит отражение, а m — некоторое положительно целое число. Основной результат, который мы будем использовать, это кривая Дарвина, которая определяет угловой акцептанс излучения. Динамическая и кинематическая теории дифракции дают конечную ширину в, которую кристалл может принять излучение, а также некоторый сдвиг, относительно предполагаемого брэгговского угла. На рис. 3.1 показаны характерные кривые отражение. По ним видно, что чем больше энергия подающего пучка излучения, тем уже кривая и ближе к даваемому законом брэгга углу. При расчёте кристаллов монохроматоров этот факт необходимо учитывать,

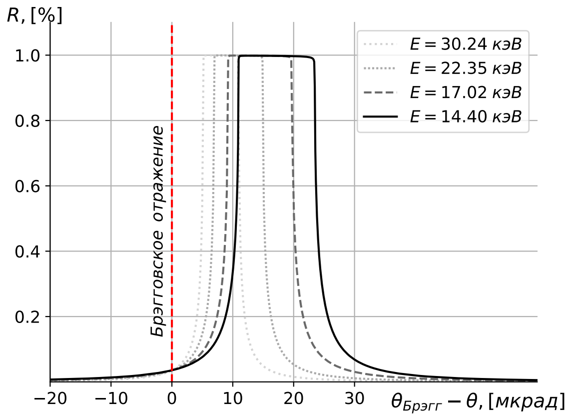

Рисунок 3.1

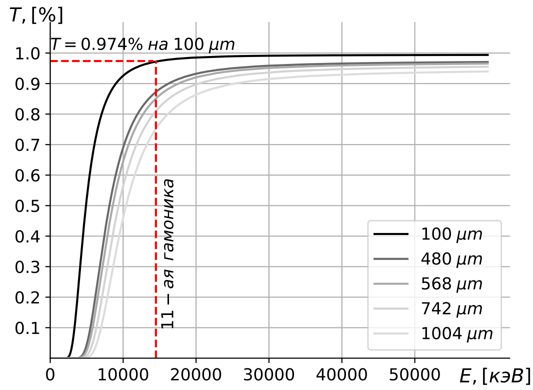

Рисунок 3.2

так как излучение не попавшее в акцептанс кристалла будет поглощаться и выделять в нем тепло.

3.2 Поглощательные способности кристаллов

Одним из полезных применение кристаллов в рентгеновском диапазоне есть их фильтрующая способность, отрезать низкие энергии, в особенности для алмазных кристаллов, которые, по мимо всего, имеют хорошую теплопроводность, что способствуют быстрому теплоотводу. На рис. 3.2 представлена кривая поглощения 100 мкм кристалла алмаза. Подобные кристаллы устанавливают перед первыми оптическими элементами, что в значительной степени снижает тепловые нагрузки, подавлением низших гармоник.

Глава 4. Проектирование рентгенооптических трактов для Сибирского Кольцевого Источника Фонтов

4.1 Введение

В данной главе мы рассмотрим схемы рентгенооптических трактов (здесь и далее, - бимлайнов), от источников высокого энергетических фотонов, - вставных устройств до деталей оптических компотен на билайне: фильтров, монохроматоров, рентгеновских зеркал. По большей части, будут обсуждаться станции первой очереди: 1-1 — «Микрофокус», 1-2 — «Структурная диагностика», 1-4 — «XAFS-спектроскопия и магнитный дихроизм».

4.2 Станция 1-4 — «XAFS-спектроскопия и магнитный дихроизм»

4.2.1 Излучение клинообразного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение из ондулятора специальной конструкции, который может дать широкий спектр. Идея в том, что разбить ондулятор на несколько секций с различным K в каждой из них. Такая расстановка в первом приближении должна дать набор резонансов, которые должны сложиться в один сплошной спектр. Более детальное рассмотрение покажет, что в зависимости от корреляции фазы электрона между этими сегментами, могут проявляться интерференционные эффекты, которые в значительной степени будут изменять форму спектра. В нашем рассмотрении мы покажем влияние указанных вкладов для случая скачкообразного изменения поля, а также для классического случая клинообразного, т.н. зарубежной литературе tapered undulator.

Свои выкладки начнём с модифицированного интеграла 1.28,

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 z_0}\frac{K}{\gamma}\int\limits_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[iCz']\vec{e}_x, \tag{4.1}$$

Здесь, для краткости выкладок, излучения мы сморим на оси, т.е. $\theta = 0$. В случае секционного ондулятора коэффициент ондуляторности меняется вдоль ондулятора, поэтому $K = K_0 + n\Delta K$, а также $C = C_0 + n\Delta C$, где n — это номер секции. ΔC введено следующим образом, помня $\omega_r = 2c\tilde{\gamma}^2 k_w$:

$$C = k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{\Delta\omega_r}{2c\gamma}\left(1+\frac{(K_0 + n\Delta K)^2}{2}\right) \approx \frac{\Delta\omega_r}{2c\gamma}\left(1+\frac{K_0^2}{2}(1+\frac{n\Delta K}{K_0})\right) = C_0 + \Delta C \tag{4.2}$$

Секций, для условности, мы возьмём пять, и для удобства нумерацию будем вести $-2, -1, ..., 2$. Поэтому интеграл перепишеться в виде:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2\gamma z_0}\sum_{n=-2}^{2}(K_0 + n\Delta K)\int\limits_{(2n+1)L_s/2}^{(2n-1)L_s/2} dz' \exp[i(C_0 + n\Delta C)z']\vec{e}_x, \tag{4.3}$$

Взяв интеграл, получим:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2\gamma z_0}\sum_{n=-2}^{2}(K_0 + n\Delta K)\,\mathrm{sinc}(\hat{C}/2)e^{in(C_0+n\Delta C)L}\vec{e}_x, \tag{4.4}$$

Возведя в квадрат получим интенсивность:

$$\tilde{I} = \left(\frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2\gamma z_0}\right)^2\Bigg[\sum_{n=-2}^{2}(K_0 + n\Delta K)^2\,\mathrm{sinc}^2(\hat{C}_0 + n\Delta\hat{C}/2) + \sum_{\substack{n,m=-2\\ n\neq m}}^{2} K_0^2\left(1 + n\frac{\Delta K}{K_0} + m\frac{\Delta K}{K_0}\right)\mathrm{sinc}^2(\hat{C}/2)e^{i(n-m)\hat{C}_0 + (n^2-m^2)\Delta\hat{C}}\Bigg], \tag{4.5}$$

Данное выражение можно проинтерпретировать следующим образом: первая сумма есть сумма сдвинутых по соответствующим резонансам

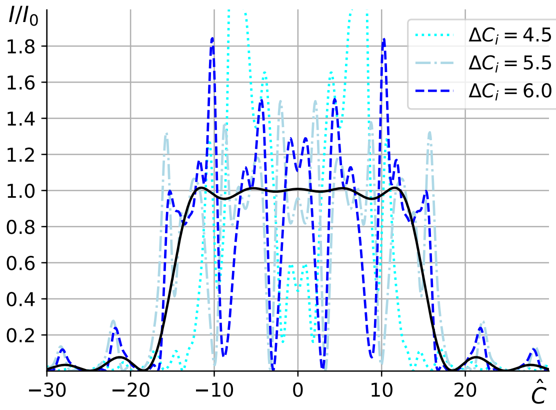

Рисунок 4.1

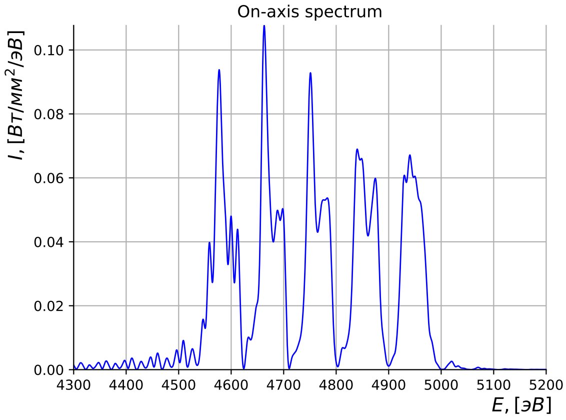

Рисунок 4.2

sinc^2 функций, вторая сумма отображает интерференцию между различными секциями ондулятора, и как кажется автору нежелательна. Данная комбинация приводит к хаотичным колебаниями в спектре, как показано на рис. 4.1 пунктирными линиями, черной линей отмечана сумма sinc^2 функций без учёта интерференционных слагаемых. На рис. 4.2 показан характерный спектр секционного ондулятора посчитанного при помощи симуляционного кода SRW. Сравнение формы синей пунктирной линии на рис. 4.1 и кривой на рис. 4.2 показывает, что были сделаны правильные предположения в нашей аналитической модели, происходит интерференция между различными частями ондулятора. Один из возможных путей, чтобы избавиться от интерференционных слагаемых в спектре ондуляторного излучения, добавить произвольную фазу между секциями ондулятора. Дело в том, что данные вычисления проводились для ондного электрона, если если мы хотим получить спектр, который получиться в точке наблюдения, то можно понять, что спектры на рис. 4.1 синими линиями необходимо усреднить по числу электронов в пучке, усреднение по большому числу электронов даст спектр, который будет являть простой суммой sinc^2 до каких либо дополнительных фаз, результат усреднения, приведёт к чёрной линии на рис. 4.1. Теперь здесь надо визуально показать процесс усреднения и заключить, что именно такой спектр будет наблюдаться на источнике.

Список литературы

1. Paraxial Green's functions in synchrotron radiation theory / Gianluca Geloni, Evgeni Saldin, Evgeni Schneidmiller, Mikhail Yurkov // *arXiv preprint physics/0502120*. — 2005.

2. Fourier treatment of near-field synchrotron radiation theory / Gianluca Geloni, Evgeni Saldin, Evgeni Schneidmiller, Mikhail Yurkov // *Optics communications*. — 2007. — Vol. 276, no. 1. — Pp. 167–179.

3. *Geloni Gianluca, Kocharyan Vitali, Saldin Evgeni*. Brightness of synchrotron radiation from undulators and bending magnets // *Journal of synchrotron radiation*. — 2015. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 288–316.

4. Fourier optics treatment of classical relativistic electrodynamics / Gianluca Geloni, Evgeni Saldin, Evgeni Schneidmiller, Mikhail Yurkov // *arXiv preprint physics/0608145*. — 2006.

5. *Chubar O, Elleaume P*. Proceedings of the 6th European Particle Accelerator Conference, Stockholm, 1998. — 1998.

6. Grating monochromator for soft X-ray self-seeding the European XFEL / Svitozar Serkez, Gianluca Geloni, Vitali Kocharyan, Evgeni Saldin // *arXiv preprint arXiv:1303.1392*. — 2013.

7. *Serkez Svitozar*. Design and Optimization of the Grating Monochromator for Soft X-Ray Self-Seeding FELs. — 2015.

8. *Goodman Joseph W*. Statistical optics. — John Wiley & Sons, 2015.

9. *Goodman Joseph W*. Introduction to Fourier optics. — Roberts and Company Publishers, 2005.

Список рисунков

Список таблиц