

Оглавление

	Стр.
Глава 1. Теоретическое обоснование используемых численных методов	2
1.1 Излучение релятивистской электрона в синусоидальном магнитном поле	2
1.1.1 Уравнение движения электрона в ондуляторе	2
1.1.2 Решение волнового уравнения в парааксиальном приближении	4
1.1.3 Излучение планарного ондулятора	7
1.1.4 Излучение клинообразного ондулятора	11
1.1.5 Учёт конечности эмиттанта	13
1.2 Фурье оптика	15
1.2.1 Распространение света в пустом пространстве	16
1.2.2 Действие тонкой линзы на волновой фронт	17
1.3 Краткий обзор дифракции на кристаллах	20
1.3.1 Симметричное брэгговское отражение от идеально кристалла	21
1.3.2 Поглощательные способности кристаллов	21
Глава 2. Проектирование рентгенооптических трактов для Сибирского Кольцевого Источника Фонов	23
2.1 Введение	23
Список рисунков	24
Список таблиц	25

Глава 1. Теоретическое обоснование используемых численных методов

1.1 Излучение релятивистского электрона в синусоидальном магнитном поле

В этой части мы дадим вывод излучения релятивистского электрона в $r\omega$ -пространстве, движущегося в синусоидальном магнитном поле. Единственно приближение, которым мы будем пользоваться, — прааксиальное приближение. Вывод интересен тем, что даёт наглядное представление о спектре частицы, угловом распределении интенсивности в зависимости от резонансной частоты. В заключении главы, будет приведён вывод распределения электромагнитного поля (в ближней зоне???) через потенциалы Лиенара-Вихерта, будет получен результат, который даст представление о методах используемых в численных симуляциях, на примере кода SRW. В наших рассуждениях мы следовали (Салдин Гелони)

1.1.1 Уравнение движения электрона в ондуляторе

Выведем спектр излучения из ондулятора. Вывод начнём с уравнения движения релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.1)$$

где e — заряд электрона, а \vec{v} и \vec{B} скорость частицы и магнитное поле соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.2)$$

где γ — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Направим ось z вдоль направления релятивистского движения электрона и введём магнитное поле в ондуляторе $B_0 \cos(k_w z)$, направленное вдоль оси y , где k_w связана с периодом ондулятора следующим образом $k_w = 2\pi/\lambda_w$.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e} \frac{dz}{dt} \cos(k_w z) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{eB_0}{\gamma m_e} \frac{dx}{dt} \cos(k_w z) \end{cases} \quad (1.3)$$

один раз интегрируя первой уравнение из системы с заменой $dz = \beta c dt$, где $\beta = \|\vec{v}\|/c$, можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w} \sin(k_w z) \quad (1.4)$$

Введём коэффициент ондуляторности — $K = \frac{eB_0 \lambda}{2\pi m_e k_w}$, который показывает угол отклонения электрона от оси z (????).

Подставляя получившийся результат 1.4 во второе уравнение системы 1.3 и интегрируя с пределами интегрирования от 0 до некоторого z_0 , получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_w z) \\ \frac{dz}{dt} = \beta c - \frac{K^2 c}{2\gamma^2 \beta} \sin^2(k_w z) \end{cases} \quad (1.5)$$

Проинтегрировав оба уравнения (в каких пределах?), получим (Wiedemann),

$$\begin{cases} x = \frac{Kc}{\gamma k_w \beta} \cos(k_w \bar{\beta} ct) \\ z = \bar{\beta} ct + \frac{K^2}{8\beta^2 \gamma^2 k_w} \sin(2k_w \bar{\beta} ct), \end{cases} \quad (1.6)$$

где было введено обозначение $\bar{\beta}$, которое определяется как $\bar{\beta}c = \beta c(1 - \frac{K^2}{4\beta^2\gamma^2})$. Из 1.5 видно, что продольная скорость испытывает осцилляции с удвоенной частотой...

1.1.2 Решение волнового уравнения в прааксиальном приближении

Вывод спектра излучения будем проводить в $r\omega$ -пространстве. Начнём с уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ [\nabla \times \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \\ [\nabla \times \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.7)$$

Из уравнений тривиально можно получить неоднородное волновое уравнение(какая калибровка?):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 4\pi c^2 \nabla \rho + 4\pi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (1.8)$$

Это же уравнение перепишем в $r\omega$ -пространстве, определив преобразование Фурье следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}(r, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{E}(r, t) \exp[-i\omega t] \\ \vec{E}(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{\tilde{E}}(r, t) \exp[i\omega t] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Применив к уравнению 1.8, получим:

$$\omega^2 \vec{\tilde{E}} + c^2 \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 4\pi c^2 \nabla \tilde{\rho} - 4i\pi\omega \vec{\tilde{j}} \quad (1.10)$$

Перепишем это уравнение в приближении медленно меняющейся амплитуды в сравнение с частотой осцилляций, что есть $\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}} \exp[i\omega z/c]$, в приближении $\frac{\partial |E|}{\partial z} \ll \frac{\omega}{c} |E|$. Где временная зависимость разложена до нулевого порядка малости, исходя из уравнения 1.6. Получим:

$$c^2 \left(\nabla^2 \vec{\tilde{E}} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial z} \right) \exp[i\omega z/c] = 4\pi c^2 \nabla \tilde{\rho} - 4i\pi\omega \vec{\tilde{j}} \quad (1.11)$$

Для электрона движущегося в вакууме ток и плотность заряда выражается через дельта-функцию Дирака:

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= -e\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z))\delta\left(\frac{s(z)}{v} - t\right) \\ \vec{j}(r, t) &= \vec{v}\rho(r, t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

В $r\omega$ -пространстве:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(r, \omega) &= -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \exp\left[\frac{i\omega s(z)}{v}\right] \\ \vec{\tilde{j}}(r, \omega) &= \vec{v}\tilde{\rho}(r, \omega) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Подставим фурье-образы плотности тока и заряда в уравнение 1.11, (где производная по градиентному члену? добавить это)

$$\nabla^2 \vec{\tilde{E}} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[i\omega \left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}(z) - \nabla\right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \quad (1.14)$$

Получившиеся уравнение является точным. Теперь мы можем применить параксиальное приближение.

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{E}_{\perp} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{E}_{\perp}}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp \left[iw \left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c} \right) \right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_{\perp}(z) - \nabla_{\perp} \right) \delta(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}(z)) \quad (1.15)$$

Вторая производная по z , появляющаяся из оператора Лапласа полагается много меньшим по сравнению с первой производной по z в уравнении 1.15 исходя из предположения медленно меняющейся амплитуды.

Перед нами неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое решается с помощью функции Грина. Для дифференциального оператора $\partial_t - k\nabla_{2D}^2$ функция Грина есть: $\frac{1}{4\pi kt} \exp[-\rho^2/4kt]$. В частности для уравнения 1.15

$$G(z_0 - z'; \vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}) = -\frac{1}{4\pi(z_0 - z')} \exp \left[i\omega \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2c(z_0 - z')} \right] \quad (1.16)$$

Получим решение для функции распределения поля:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz' d\vec{r}' \frac{1}{z_0 - z'} \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_{\perp}(z') - \nabla'_{\perp} \right) \delta(\vec{r}'_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}(z')) \times \\ & \exp \left[iw \left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Проинтегрировав по $d\vec{r}'$ получим общее решение уравнения 1.14 :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{i\omega e}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{z_0 - z'} \left(\frac{\vec{v}_{\perp}(z')}{c} - \frac{\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')}{(z_0 - z')} \right) \times \\ & \exp \left[iw \left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Что есть распределение электромагнитного поля в точке наблюдения \vec{r}_0 .

1.1.3 Излучение планарного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение планарного ондулятора используя наши предыдущие результаты 1.19 и 1.6. Сперва проанализируем получившиеся распределение поля 1.19: в случае ондулятора, член $(z_0 - z')^{-1}$ можно разложить около точки z' , так как размер ондулятора много меньше чем расстояние, с которого мы наблюдаем излучение: $\lambda_w N \ll z_0$, где N число периодов ондулятора.

Воспользовавшись решениями 1.5 и 1.6 и помня $\vec{r}_{\perp 0}/z_0 = \vec{\theta}$ преобразуем уравнение 1.19 к виду:

$$\vec{E}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i\Phi_T] \left(\frac{K}{\gamma} \sin(k_w z) \vec{e}_x + \vec{\theta}\right) \quad (1.19)$$

Здесь мы отбросили члены первого и большего порядка малости по $1/z_0$.

Где за Φ_T мы обозначили:

$$\Phi_T = \left(\frac{\omega}{2c\tilde{\gamma}^2} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right) z' - \frac{K^2}{8\gamma^2 k_w c} \sin(2k_w z') - \frac{K\theta_x}{\gamma} \frac{\omega}{k_w c} \cos(k_w z'), \quad (1.20)$$

где $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$.

Пределы интегрирования ограничили по длиной ондулятора от $-\lambda_w N/2$ до $\lambda_w N/2$, считая вклад в излучение от ондулятора доминирующим надо остальными вкладами от соответствующих участков траектории. На это шаге уже можно заметить, что излучение на оси будет линейно поляризованно, это есть вклад члена с током, вклад же плотности заряда или градиентный член, даёт вариацию поляризации, при наблюдении под некоторым углом θ к оси.

Если переписать 1.19 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_m\left(-\frac{K^2 \omega}{8\gamma^2 k_w c}\right) J_n\left(-\frac{K\theta_x \omega}{\gamma k_w c}\right) \times \\ & \exp\left[\frac{i\pi n}{2}\right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i(2m+n)k_w z'] \left(\frac{K}{2i\gamma} (\exp[2ik_w z'] - 1) \vec{e}_x + \vec{\theta} \exp[ik_w z']\right) \times \\ & \exp\left[i\left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\theta^2}{2c}\right) z'\right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

Где мы ввели $\omega = \omega_r + \Delta\omega$, $\omega_r = 2c\tilde{\gamma}^2 k_w$ и использовали формулу Якоби — Ангера:

$$\begin{aligned} \exp[iz \cos(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) \exp[in\theta] \\ \exp[iz \sin(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp[in\theta] \end{aligned} \quad (1.22)$$

До сих пор мы пользовались только двумя приближениями, — медленно меняющейся амплитудой и параксиальным приближением, теперь можем воспользоваться следующим параметром — количеством периодов ондулятора, — N . Для этого обратим внимание на первой слагаемое в фазовом множителе под интегралом, и заметим, что если $k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\theta^2}{2c} \ll k_w$, то фаза меняется медленно на одном периоде и эта фаза не занулит интеграл. Отметим, что для резонанса условия должны выполняться по отдельности, т.е. $\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \ll 1$ и $\frac{\omega\theta^2}{2c} \ll 1$, последнее даёт углы наблюдения вблизи резонанса: $\theta^2 \ll \frac{1}{\tilde{\gamma}^2}$. Теперь необходимо обратить внимание на аргументы функций Бесселя, а именно:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{K^2 \omega}{8\gamma^2 k_w c} \\ v &= -\frac{K\theta_x \omega}{\gamma k_w c} = -\frac{K\theta_x}{\gamma} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) 2\tilde{\gamma}^2 \lesssim \frac{2K\theta_x \tilde{\gamma}}{\sqrt{1+K^2/2}} \lesssim \theta_x \tilde{\gamma} \ll 1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Зная, что $J_\alpha(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^{2\beta+\alpha}$, видим, что вклад нулевого порядка по $\theta_x \tilde{\gamma}$, т.е. $J_\alpha(x) \sim 1$ даёт только функция Бесселя с индексом $n = 0$. Здесь мы пока не учитываем градиентный член пропорциональный $\vec{\theta}$, таким образом из оставшихся фазовых множителей можно выписать условия на индекс m . Они определяются нулями в аргументах соответствующих фаз или $m = -1$ и $m = 0$, оба оставшихся члена пропорциональны $\frac{K}{\gamma}$.

Теперь вернёмся к градиентному члену, вклад от которого занулится при усреднении по длине ондулятора при $n = 0$, этот вклад даст ненулевой вклад при $n = 1 - 2m$, т.о. в ход пойдут следующие члены разложения $J_m(v)$. Однако, помня интересующий нас диапазон углов, члены разложения будут порядка $\theta_x v^m$, очевидно, что их вклады пренебрежимо малы по сравнению с вкладами токового члена \vec{e}_x . Учитывая выше сказанные приближения, перепишем 1.21

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e}{2c^2 z_0} \frac{K}{\gamma} \exp \left[i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c} \right] \left(J_1(v) - J_0(v) \right) \vec{e}_x \times \\ \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp \left[i \left(k_w \frac{\Delta \omega}{\omega_r} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c} \right) z' \right], \end{aligned} \quad (1.24)$$

Интеграл легко берётся:

$$\vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e L K}{c^2 z_0 \gamma} \exp \left[i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c} \right] \text{sinc} \left[\left(k_w \frac{\Delta \omega}{\omega_r} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c} \right) L/2 \right] \vec{e}_x, \quad (1.25)$$

где введено обозначение: $A_{JJ} = J_1(v) - J_0(v)$.

В следующем параграфе мы займёмся выводом влияния конченого эмиттанса на распределение излучения, чтобы облегчить выкладки

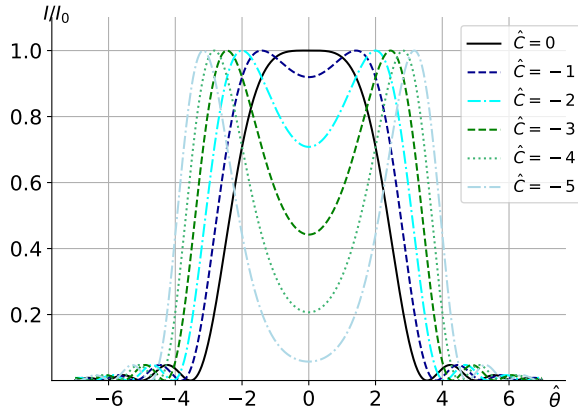


Рисунок 1.1

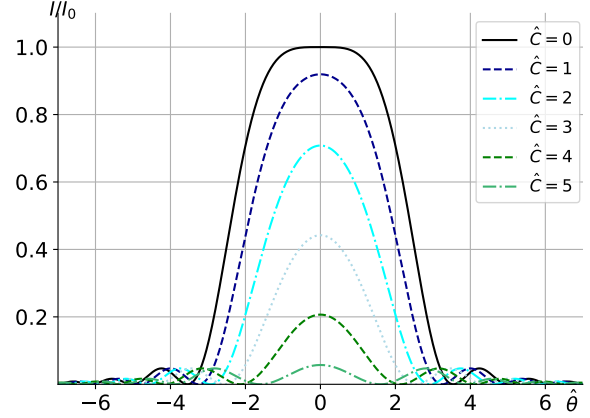


Рисунок 1.2

мы введём нормализованные единицы.

$$\begin{aligned}\hat{E}_{\perp} &= \frac{c^2 z_0 \gamma \tilde{E}_{\perp}}{e \omega K L A_{JJ}} \\ \hat{\theta} &= \theta \sqrt{\frac{\omega L}{c}} \\ \hat{z} &= \frac{z}{L},\end{aligned}\tag{1.26}$$

а также,

$$\hat{C} = CL = 2\pi N \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\tag{1.27}$$

Теперь уравнения 1.25 и 1.28 могут быть переписаны в нормализованных единицах.

$$\hat{E}_{\perp} = e^{i\Phi} \int_{-1/2}^{1/2} dz' \exp \left[i \left(\hat{C} + \frac{\hat{\theta}^2}{2} \right) z' \right],\tag{1.28}$$

$$\hat{E}_{\perp} = e^{i\Phi} \text{sinc} \left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{\theta}^2}{4} \right),\tag{1.29}$$

На рис. 1.1 и рис. 1.2 изображены угловые распределения излучения. Из них можно понять, что если сдвигка по спектру идёт в область меньших частот, то условие резонанса удовлетворяется на других углах и проинтегрированные по дадут некоторую интенсивность. Если же сдвигаться по спектру в область более высоких частот, то условие резонанса на углах не будет выполняться и интенсивность быстро упадёт. На рис. 1.3 представлен проинтегрированный по углам $\hat{\theta}$ спектр.

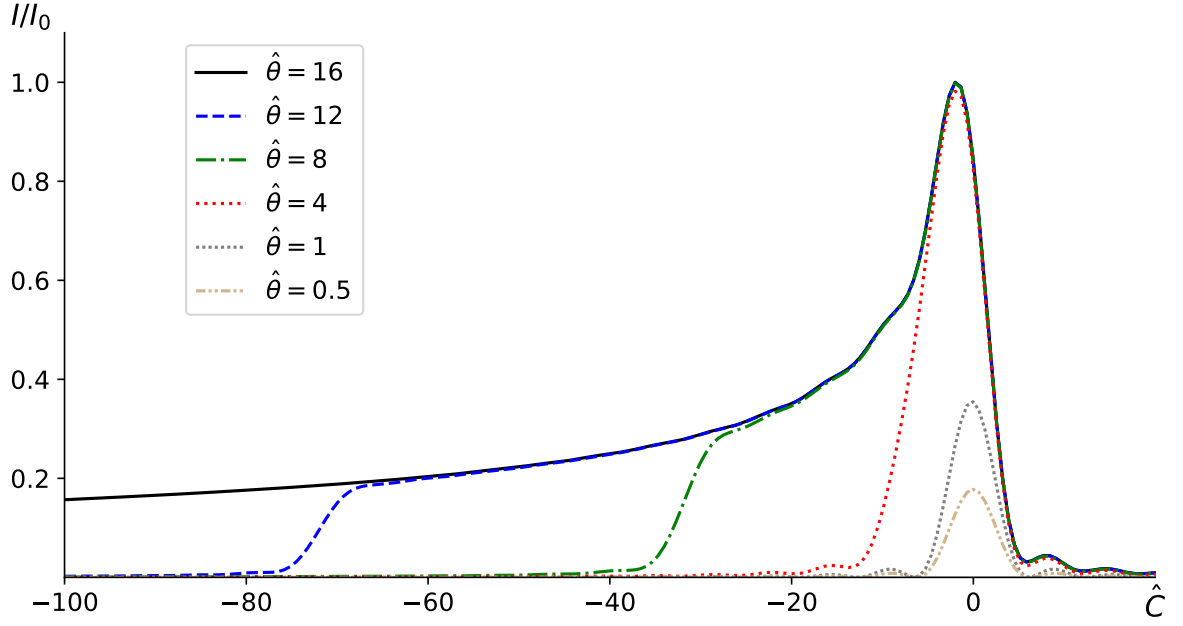


Рисунок 1.3

1.1.4 Излучение клинообразного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение из ондулятора специальной конструкции, который может дать широкий спектр. Идея в том, что разбить ондулятор на несколько секций с различным K в каждой из них. Такая расстановка в первом приближении должна дать набор резонансов, которые должны сложиться в один сплошной спектр. Более детальное рассмотрение покажет, что в зависимости от корреляции фазы электрона между этими сегментами, могут проявляться интерференционные эффекты, которые в значительной степени будут изменять форму спектра. В нашем рассмотрении мы покажем влияние указанных вкладов для случая скачкообразного изменения поля, а также для классического случая клинообразного, т.н. зарубежной литературе tapered undulator.

Свои выкладки начнём с модифицированного интеграла 1.28,

$$\vec{E}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ} K}{2c^2 z_0 \gamma} \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[iCz'] \vec{e}_x, \quad (1.30)$$

Здесь, для краткости выкладок, излучения мы сморим на оси, т.е. $\theta = 0$. В случае секционного ондулятора коэффициент ондуляторности меняется вдоль ондулятора, поэтому $K = K_0 + n\Delta K$, а также $C = C_0 + n\Delta C$, где n — это номер секции. ΔC введено следующим образом, помня $\omega_r = 2c\tilde{\gamma}^2 k_w$:

$$C = k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{\Delta\omega_r}{2c\gamma} \left(1 + \frac{(K_0 + n\Delta K)^2}{2} \right) \approx \frac{\Delta\omega_r}{2c\gamma} \left(1 + \frac{K_0^2}{2} \left(1 + \frac{n\Delta K}{K_0} \right) \right) = C_0 + \Delta C \quad (1.31)$$

Секций, для условности, мы возьмём пять, и для удобства нумерацию будем вести $-2, -1, \dots, 2$. Поэтому интеграл переписать в виде:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 \gamma z_0} \sum_{n=-2}^2 (K_0 + n\Delta K) \int_{(2n+1)L_s/2}^{(2n-1)L_s/2} dz' \exp[i(C_0 + n\Delta C)z'] \vec{e}_x, \quad (1.32)$$

Взяв интеграл, получим:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 \gamma z_0} \sum_{n=-2}^2 (K_0 + n\Delta K) \text{sinc}(\hat{C}/2) e^{in(C_0 + n\Delta C)L} \vec{e}_x, \quad (1.33)$$

Возведя в квадрат получим интенсивность:

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \left(\frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 \gamma z_0} \right)^2 \left[\sum_{n=-2}^2 (K_0 + n\Delta K)^2 \text{sinc}^2(\hat{C}_0 + n\Delta\hat{C}/2) + \right. \\ & \left. \sum_{\substack{n,m=-2 \\ n \neq m}}^2 K_0^2 \left(1 + n \frac{\Delta K}{K_0} + m \frac{\Delta K}{K_0} \right) \text{sinc}^2(\hat{C}/2) e^{i(n-m)\hat{C}_0 + (n^2-m^2)\Delta\hat{C}} \right], \end{aligned} \quad (1.34)$$

Данное выражение можно проинтерпретировать следующим образом: первая сумма есть сумма сдвинутых по соответствующим резонансам sinc^2 функций, вторая сумма отображает интерференцию между различными секциями ондулятора, и как кажется автору нежелательна. Данная комбинация приводит к хаотичным колебаниям в спектре, как показано на рис. 1.4 пунктирными линиями, черной линией отмечена сумма sinc^2 функций без учёта интерференционных слагаемых. На рис. 1.5 показан

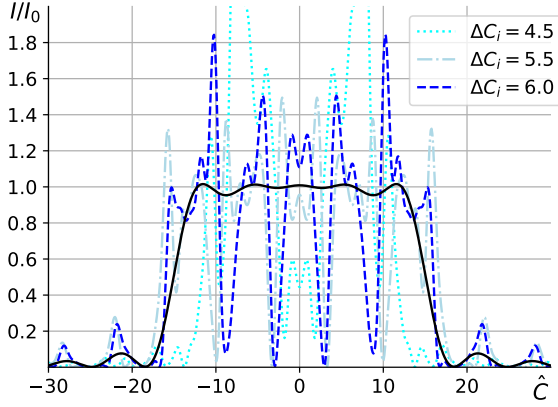


Рисунок 1.4

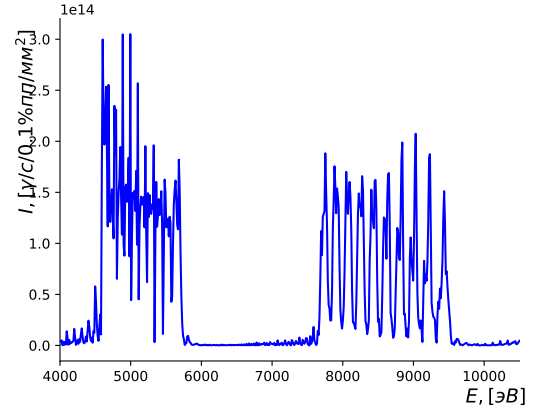


Рисунок 1.5

характерный спектр секционного ондулятора посчитанного при помощи симуляционного кода SRW. Сравнение формы синей пунктирной линии на рис. 1.4 и кривой на рис. 1.5 показывает, что были сделаны правильные предположения в нашей аналитической модели, происходит интерференция между различными частями ондулятора. Один из возможных путей, чтобы избавиться от интерференционных слагаемых в спектре ондуляторного излучения, добавить произвольную фазу между секциями ондулятора. Дело в том, что данные вычисления проводились для ондного электрона, если мы хотим получить спектр, который получится в точке наблюдения, то можно понять, что спектры на рис. 1.4 синими линиями необходимо усреднить по числу электронов в пучке, усреднение по большому числу электронов даст спектр, который будет являть собой сумму sinc^2 до каких либо дополнительных фаз, результат усреднения, приведёт к чёрной линии на рис. 1.4. Теперь здесь надо визуально показать процесс усреднения и заключить, что именно такой спектр будет наблюдаться на источнике.

1.1.5 Учёт конечности эмиттанса

В этом параграфе мы покажем влияние эмиттанса пучка на спектр излучения и угловое распределение. Для начала перепишем уравнение 1.37 с учётом отклонения частиц от заданной траектории, — h_x и

h_y и с некоторым дополнительным углом η_x и η_y . Сразу можно понять, что в уравнение 1.37 можно сделать замену $\theta_{x,y} \rightarrow \theta_{x,y} - \eta_{x,y} - \frac{l_{x,y}}{z_0}$ и переписать углы в нормализованных единицах аналогично с 1.26, с точностью до фазы:

$$\hat{E}_\perp \sim \text{sinc} \left[\frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4} \left(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x - \frac{l_x}{z_0} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\hat{\theta}_y - \hat{\eta}_y - \frac{l_y}{z_0} \right)^2 \right], \quad (1.35)$$

При этом можно положить $\frac{l_{x,y}}{z_0} \ll 1$, что выполняется с очень высокой точностью.

В наших рассуждениях мы будем использовать один предельный случай: электронный пучок не симметричен его вертикальному размеру много меньше размера по радиальному направлению. Распределение частиц будем считать гауссовым:

$$h_{x,y}(\eta_{x,y}) = \frac{N_e}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x',y'}} \exp \left[-\frac{\eta_{x,y}^2}{2\sigma_{x',y'}^2} \right] \quad (1.36)$$

Для удобства перепишем это распределение в нормализованных единицах, помня $\sigma_{x',y'} = \epsilon_{x',y'}/\beta_{x',y'}$, где $\epsilon_{x',y'}$ — вертикальный и горизонтальный эмиттансы, $\beta_{0x',y'}$ — минимум бета-функции, обычно минимум бета-функции выбирают в середине ондулятора. Нормализованные единицы для $\hat{\beta}_0 = \beta_0$ и $\hat{\epsilon} = (\omega/c)\epsilon$

$$h(\hat{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \exp \left[-\frac{\hat{\eta}^2 \hat{\beta}_0}{2\hat{\epsilon}^2} \right] \quad (1.37)$$

Как уже упоминалось мы будем рассматривать предельный случай $\epsilon_{y'}/\beta_{y'} \ll 1$, в то время как $\hat{\beta}_{0x,y} \sim 1$, поэтому просто $\epsilon_{y'} \ll 1$. Теперь можно записать интенсивность поля следующий образом:

$$\hat{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}_{-\infty}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\eta}_x \text{sinc}^2(\zeta) \exp \left[-\frac{\hat{\eta}_x^2 \hat{\beta}_{0x}}{2\hat{\epsilon}_x} \right], \quad (1.38)$$

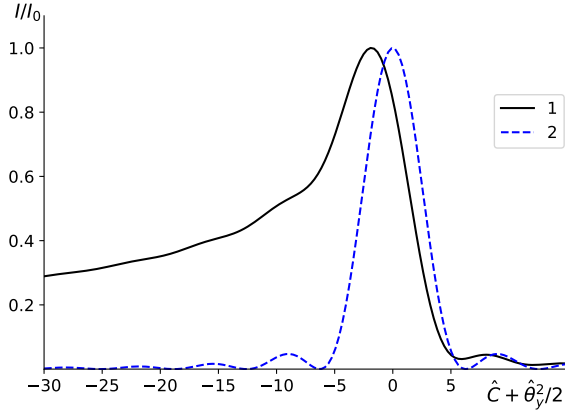


Рисунок 1.6

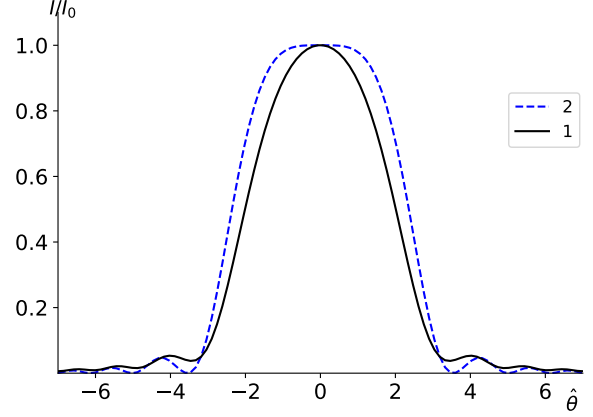


Рисунок 1.7

Где мы ввели $\zeta = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x)^2 + \frac{1}{4}\hat{\theta}_y^2$. Здесь мы учли, что распределение по y действует как дельта-функция. Предыдущее уравнение упрощается дальше в пределе $\hat{\epsilon}_x \hat{\beta}_x \gg 1$, опять же помня, что и $\hat{\beta}_x \sim 1$, получается $\hat{\epsilon}_x \gg 1$. Ширина $\text{sinc}^2(\zeta)$ много больше ширины гауссовского распределения, ширина которого $\hat{\epsilon}_x$, поэтому интеграл будет набираться в пике кардинального синуса и экспоненту можно вынести с аргументом: $\hat{\eta}_x = \hat{\theta}_x$:

$$\hat{I} = \frac{\exp\left[-\hat{\theta}_x^2 \hat{\beta}_{0x}/2\hat{\epsilon}_x\right]}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\eta}_x \text{sinc}^2\left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x)^2 + \frac{1}{4}\hat{\theta}_y^2\right) \quad (1.39)$$

Этот интеграл можно взять численно. На 1.6 представлены: линия 1.: спектр излучения пучка с $\hat{\epsilon}_x \rightarrow \infty$ $\hat{\epsilon}_x \rightarrow 0$, линия 2.: спектр одиночного электрона как функция $\hat{C} + \hat{\theta}_y^2/2$ при $\hat{\theta}_x = 0$, на рис. 1.7 тоже для распределения интенсивности по углам.

1.2 Фурье оптика

В этой главе мы предложим наглядный подход к решению задачи о распространении волнового фронта в пустом пространстве, его прохождении через систему линзу. Приведённые результаты напрямую могут быть использованы в программном коде. Распределение поля в началь-

ный момент времени будем считать гауссовским, однако, как будет видно из изложения, подход может быть использован для произвольного распределения поля. В наших выкладках мы в полной мере следуем подходу (Салдин, Serkez), более детальное описание можно найти в (Гудман)

1.2.1 Распространение света в пустом пространстве

Наши рассуждения мы начнём с волнового уравнения в пустом пространстве ($\vec{j} = 0, \rho = 0$).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (1.40)$$

В $r\omega$ -пространстве уравнение приобретает знакомый вид уравнения Гельмгольца, где $k_0 = \omega/c$.

$$k_0^2 \vec{\tilde{E}} + \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 0 \quad (1.41)$$

Совершив фурье-преобразование в k -пространство по координатам x, y , которое определим схожим образом с 1.9:

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{E}(\vec{r}, t) \exp[ik_x x + ik_y y] \quad (1.42)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \vec{\tilde{E}}(\vec{k}, t) \exp[-ik_x x - ik_y y],$$

получим:

$$k_0^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\right) \vec{\tilde{E}} + \frac{d^2 \vec{\tilde{E}}}{dz^2} = 0 \quad (1.43)$$

Теперь можно напрямую можно получить решение этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, z) = \vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, 0) \exp \left[ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \quad (1.44)$$

Введём функцию отклика среды:

$$H(k_x, k_y, z) = \frac{\vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, z)}{\vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, 0)} = \exp \left[ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \quad (1.45)$$

$$H(k_x, k_y, z) \cong \exp[k_0 z] \exp \left[-\frac{iz}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2) \right]$$

Видно, чтобы получить распределение электромагнитного поля на некотором расстоянии z , необходимо совершить обратное преобразование Фурье в xy -пространство. Таким образом решение волнового уравнения сводиться к трём относительно простым операциям: первое, — перевод начального распределения в $k_x k_y$ -пространство, далее домножение получившегося распределения на функцию отклика среды, в нашем случае пустое пространство, и последний шаг, — обратное преобразование Фурье.

1.2.2 Действие тонкой линзы на волновой фронт

В этом параграфе мы построим элементарную оптическую систему, состоящую из пустого промежутка, - d_1 , тонкой линзы с оптической силой, - $1/f$ и ещё одного пустого промежутка до плоскости изображения. Действие тонкой линзы мы представим как прибавление к фазе волны

следующего выражения:

$$T_f(x, y) = \exp \left[-\frac{ik_0}{2f}(x^2 + y^2) \right] \quad (1.46)$$

Для предметности обсуждения определим Гауссов пучок:

$$\bar{E}(x, y, 0) = A \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right] \quad (1.47)$$

После Фурье преобразования в $k_x k_y$ -пространстве мы получим:

$$\hat{E}(k_x, k_y, 0) = A\pi w_0^2 \exp \left[-\frac{w_0^2}{4}(k_x^2 + k_y^2) \right] \quad (1.48)$$

После домножения этого распределения поля в $k_x k_y$ -пространстве на функцию отклика пустого промежутка, получим

$$\begin{aligned} \hat{E}(k_x, k_y, z) &= \hat{E}(k_x, k_y, z)H(k_x, k_y, z) \\ &= A\pi w_0^2 \exp \left[-\frac{w_0^2}{4}(k_x^2 + k_y^2) \right] \exp[k_0 z] \exp \left[-\frac{iz}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2) \right] \\ &= A\pi w_0^2 \exp[k_0 z] \exp \left[-\frac{iq}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2) \right], \end{aligned} \quad (1.49)$$

здесь мы ввели $q = z - iz_R$, где $z_R = \frac{k_0 w_0^2}{2}$. После перехода обратно в xy -пространство, получим:

$$\bar{E}(x, y, z) = \frac{ik_0 w_0^2}{2q} \exp[k_0 z] \exp \left[-i\frac{k_0}{2q}(x^2 + y^2) \right], \quad (1.50)$$

Теперь можно воспользоваться выражением для тонкой линзы и получить:

$$\begin{aligned}\bar{E}_l(x, y, z) &= T_f(x, y) \bar{E}(x, y, z) = \\ &= \frac{iAk_0w_0^2}{2q} \exp[k_0z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik_0}{2f}(x^2 + y^2)\right] \\ &= \frac{iAk_0w_0^2}{2q} \exp[k_0z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q_l}(x^2 + y^2)\right],\end{aligned}\tag{1.51}$$

где $\frac{1}{q_l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{f}$. Теперь можно подвести итог: после распространения волнового фронта на расстояние d_1 параметр q преобразуется:

$$q(d_1) = q(0) + d_1,\tag{1.52}$$

далее на него действует линза:

$$\frac{1}{q_l} = \frac{1}{q(0) + d_1} - \frac{1}{f},\tag{1.53}$$

и ещё один пустой промежуток, до места, где волновой фронт опять будет плоским:

$$q(d_1 + d_2) = q_l + d_2,\tag{1.54}$$

Условие того, что волновой фронт плоский мы сформулируем так, что $q(d_1 + d_2) = -i\frac{k_0w_2^2}{2}$, что легко проверятся подстановкой в 1.49. Получим уравнение:

$$-i\frac{k_0w_2^2}{2} = q_l + d_2,\tag{1.55}$$

где, приравниванием мнимых частей получим:

$$w_2^2 = \frac{f^2w_1^2}{(f - d_1)^2 + (k_0w_1^2/2)^2}\tag{1.56}$$

то же для реальных частей:

$$d_2 = f + f^2 \frac{(d_1 - f)}{(d_1 - f)^2 + (k_0 w_1^2 / 2)^2} \quad (1.57)$$

Из последнего уравнения видно, что если положить перетяжку гауссового пучка раной нулю, то выражение переходит в обычное соотношение геометрической оптики.

В приведённой главе мы дали краткий путь того, как можно очень эффективно и относительно просто использовать Фурье оптику для написания симуляционных кодов при проектировании оптических систем. В качестве примера, для заинтересованных читателей на веб-странице (веб-страница) приведёт код простой оптической системы, который в полной мере используют результаты вышеприведённого параграфа. Код был написан автором данной рукописи рамках курса «Основы вычислительной физики», который читается на физическом факультете НГУ. Дальнейшие комментарии к коду можно найти в репозитории указанной по ссылке.

1.3 Краткий обзор дифракции на кристаллах

В этой главе мы кратко дадим основные результаты кинетической и динамической теории дифракции. Основные кристаллы используемые на синхротронных источниках третьего и четвёртого поколений - это *Si* (кремний), *C* (алмаз) и реже *Ge* (германий), ввиду своей кубической кристаллической решётки, эти кристаллы относительно просты для анализа. Для нас важны такие свойства кристаллов, как способность преобразовать относительно широкий спектр излучения ондулятора, в излучение с относительной монохроматичностью до $\Delta E/E \sim 10^{-4}$, а также поглощательные способности кристаллов, что в значительной степени снижает тепловые нагрузки на оптические элементы.

1.3.1 Симметричное брэгговское отражение от идеально кристалла

Длины волн, которые отвечают резонансу при отражении падающего под углом θ к плоскости кристалла излучения, даётся законом Брэгга:

$$m\lambda = 2d \sin \theta, \quad (1.58)$$

где d — расстояние между плоскостями от которых происходит отражение, а m — некоторое положительно целое число. Основной результат, который мы будем использовать, это кривая Дарвина, которая определяет угловой акцептанс излучения. Динамическая и кинематическая теории дифракции дают конечную ширину $\Delta\theta$, которую кристалл может принять излучение, а также некоторый сдвиг, относительно предполагаемого брэгговского угла. На рис. 1.8 показаны характерные кривые отражение. По ним видно, что чем больше энергия подающего пучка излучения, тем уже кривая и ближе к даваемому законом брэгга углу. При расчёте кристаллов монохроматоров этот факт необходимо учитывать, так как излучение не попавшее в акцептанс кристалла будет поглощаться и выделять в нем тепло.

1.3.2 Поглощательные способности кристаллов

Одним из полезных применение кристаллов в рентгеновском диапазоне есть их фильтрующая способность, отрезать низкие энергии, в особенности для алмазных кристаллов, которые, по мимо всего, имеют хорошую теплопроводность, что способствуют быстрому теплоотводу. На рис. 1.9 представлена кривая поглощения 100 мкм кристалла алмаза. Подобные кристаллы устанавливают перед первыми оптическими элементами, что в значительной степени снижает тепловые нагрузки, подавлением низших гармоник.

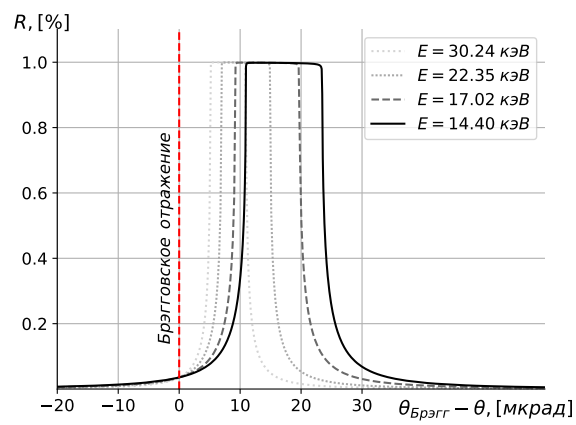


Рисунок 1.8

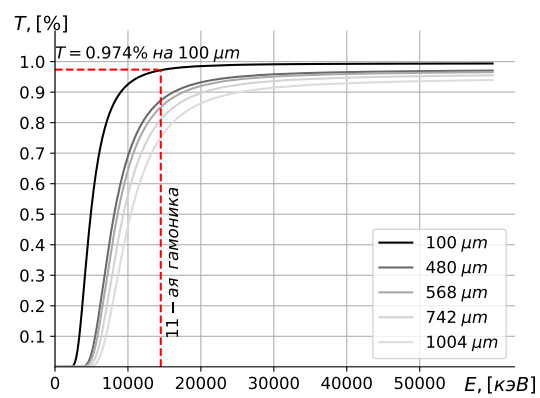


Рисунок 1.9

Глава 2. Проектирование рентгенооптических трактов для Сибирского Кольцевого Источника Фонов

2.1 Введение

В данной главе мы рассмотрим схемы рентгенооптических трактов (здесь и далее, - бимлайнов), от источников высокого энергетических фотонов, - вставных устройств до деталей оптических компотен на билайне: фильтров, монохроматоров, рентгеновских зеркал. По большей части, будут обсуждаться станции первой очереди: 1-1 — «Микрофокус», 1-2 — «Структурная диагностика», 1-4 — «XAFS-спектроскопия и магнитный дихроизм».

Список рисунков

1.1	10
1.2	10
1.3	11
1.4	13
1.5	13
1.6	15
1.7	15
1.8	22
1.9	22

Список таблиц