

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Теоретический базис	8
1.1 Поперечная функция когерентности и теорема Ван Циттерта - Цернике	8
1.2 О статистических свойства синхротронного излучения	11
Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от пучка с конечным эмиттансом	15
2.1 Расчёт ондуляторного излучения прямым моделированием методом Монте-Карло	16
2.1.1 Метод сложения амплитуд	18
2.1.2 Метод сложения интенсивностей	20
2.2 Учёт влияния размера электронного пучка на расходимость излучения при помощи прямых методов Монте-Карло	22
2.2.1 Влияние размера электронного пучка на расходимость излучения	22
2.2.2 Различие расходимости излучения для случая продольно когерентного и некогерентного излучения	24
2.3 Метод ограничения пространственных гармоник огибающими: СЕРВАЛ	26
2.3.1 Алгоритм создания поля	27
2.3.2 Выбор подходящих распределений для ограничения пространственных гармоник шума	30
Глава 3. Применение СЕРВАЛА	35
3.1 Фокусирующая система с конечной апертурой	36
3.2 Интерференционный эксперимент	42
3.3 Отражение от неидеального зеркала	45
Список литературы	52

Список рисунков	57
Список таблиц	61
Приложение А. Анализ подходящих огибающих для СЕРВАЛа	62
Приложение Б. Описание шероховатости поверхностей зеркал	63

Аннотация

Представленная работа посвящена разработке алгоритма моделирования частично когерентного синхротронного излучения и его апробации на примере нескольких рентгенооптических оптических схем. В работе рассматриваются теоретические основы процесса генерации и распространения частично когерентного синхротронного излучения, а также его статистические характеристики. По ходу изложения приводится описание двух известных методов моделирования частично когерентного излучения, первый из которых обсуждался в литературе, однако не был описан в программном коде и, соответственно, не применялся при расчёте рентгенооптических схем синхротронных источников излучения. С помощью этого метода в работе описан эффект влияния продольной когерентности излучения на его угловую расходимость. При этом второй метод широко используется, несмотря на то, что обладает рядом недостатков, обсуждаемых в работе. Оба метода дают физически достоверный результат для наблюдаемых интенсивностей синхротронного излучения, однако только первый метод даёт физически правильные поля излучения. На основе проведённой работы, был создан алгоритм, называемый СЕРВАЛ, качественно отличающийся от уже известных подходов. Была проведена перекрёстная проверка СЕРВАЛА на совпадение генерируемого поля в источнике и дальней зоне, а также соответствующих функций взаимной когерентности. Применение СЕРВАЛ показано на примере трёх оптических схем: фокусировка при наличии конечной входной апертуры, классический двухщелевой эксперимент (интерферометр Юнга) и фокусировка рентгеновским зеркалом при наличии шероховатостей. В работе проанализированы границы применимости СЕРВАЛА и описано его быстродействие.

Введение

Развитие источников синхротронного излучения (СИ), а именно магнито-оптических систем электронных накопительных колец [1], [2] источников СИ, дало возможность получать электронные пучки с малым эмиттансом, достигая дифракционного передела в широком диапазоне длин волн:

$$\epsilon_{x,y} < \sigma'_r \sigma_r = \lambda / 4\pi, \quad (1)$$

где λ – длина волны излучения, σ'_r и σ_r натуральная расходимость и размер излучения в перетяжке на источнике от электронного пучка с бесконечно малым эмиттансом. Дифракционно ограниченные источники обладают полной поперечной когерентностью, что выполняется в большинстве случаев для мягкого рентгеновского диапазона. По мере уменьшения длины волны степень поперечной когерентности излучения падает, излучение становится частично когерентным.

Задача моделирования поля частично когерентного излучения является основной при проектировании оптических линий источников СИ последнего, четвёртого, поколения, так как именно случай с частично когерентным излучением реализуется в большинстве практических случаев и важен, например, для задач имиджинга. Метод трассировки лучей, реализованный, например, в коде SHADOW [3], являлся подходом, рутинно использовавшимся при проектировании источников синхротронного излучения третьего и второго поколений. Предпосылки для использования метода трассировки лучей основываются на низкой поперечной когерентности синхротронных источников излучения прошлых поколений. Однако, уже для источников третьего поколения дифракционный предел достигался в вертикальном направлении и предпосылки к использованию метода трассировки лучей становятся сомнительными. В целом, подходы трассировки лучей не дают удовлетворительную модель физических процессов, происходящих при генерации синхротронного излучения и не описывают процессы дифракции. Следует придерживаться правила применения трассировки лучей: характерные размеры особен-

ностей оптики, должны быть много меньше размеров поперечной когерентности излучения на них. В ином случае необходимо принимать во внимание дифракционные эффекты. Для построения физической модели, соответствующей процессам генерации и распространения (пропагации) излучения, необходимо использовать подходы волновой оптики. При компьютерном моделировании под подходами волновой оптики подразумевается моделирование реальных электромагнитных полей, описываемых комплексными величинами и меняющихся при пропагации через оптические системы в соответствии с законами статистической оптики и Фурье оптики, [4], [5]. Подходы волновой оптики позволяют учесть дифракционные эффекты для полностью когерентного излучения, однако моделирование частично когерентного синхротронного излучения остаётся сложной задачей. Один из походов в решении этой задачи реализован в коде Synchrotron Radiation Workshop (SRW) [6], но этот подход обладает рядом недостатков, которые будут разобраны в Главе 2.

В литературе даны все теоретически основы статистической природе синхротронного излучения. Необходимые материалы о свойствах источников синхротронного излучения третьего поколения можно найти, например в [7]. Однако, алгоритм, основанный на выводах работы, не был имплементирован в известные коды моделирования синхротронного излучения. Описание процесса генерации синхротронного излучения, представленное в указанной работе, основывается на том, что дробовой шум в электронном пучке вызывает флуктуации электронной плотности, что в свою очередь привносит произвольные флуктуации амплитуды и фазы в распределение электромагнитного поля и является причиной характерной спайковой структуры одной реализации излучения. Под одной реализацией поля подразумевается идеально монохроматизированное¹ поле после пролёта одного электронного пучка через вставное устройство источника СИ. Флуктуации электронной плотности меняются от пучка к пучку, и для получения характерного значение интенсивности поля, необходимо произвести усреднение по статистическому ансамблю электронных пучков. Метод основывается на прямом моделиро-

¹достаточна монохроматизация меньшая чем $1/\sigma_T$, где σ_T длительность электронного пучка

вании излучения каждого электрона (макроэлектрона)², сложении полей от каждого из них и дальнейшем усреднении по статистическим реализациям. Для условности этот метод будет называться методом сложения амплитуд (МСА). В Главе 2 этот подход также будет обсуждаться более подробно.

Два приведённых метода основываются, по сути, на прямом моделировании излучения от каждого электрона (макроэлектрона) и последующем суммировании. Расчёт такого поля весьма трудоёмок и занимает значительное время. В представленной работе предложен новый численно эффективный и отличающийся быстродействием алгоритм моделирования частично когерентного синхротронного излучения, основанный на ограничении пространственных гармоник комплексного гауссова шума огибающими полями. Для определённости новый метод будет называться метод СЕРВАЛ. Метод предлагает оценочный алгоритм расчёта частично когерентного поля ондуляторного излучения в практических случаях не уступающий методу сложения амплитуд. В Главе 2 настоящей работы приводится соответствующий алгоритм и сравнительный анализ рассчитанных полей в дальней зоне, на источнике и функции взаимной когерентности, а также анализ границ применимости метода. В Главе 3 приведены примеры использования СЕРВАЛА в трёх случаях: фокусировка при наличии конечной входной апертуры, классический двухщелевой эксперимент (интерферометр Юнга) и фокусировка рентгеновским зеркалом при наличии шероховатостей. Разработанный алгоритм стал частью среды OCELOT (<https://github.com/ocelot-collab>) для моделирования излучения лазеров на свободных электронах и синхротронных источников излучения.

Целью представленной работы являлась разработка и применение нового численно эффективного метода моделирования частично когерентного синхротронного излучения. Поставленная цель является **актуальными** для научного сообщества в связи с развитием источников синхротронного излучения и строительством новых источников четвёртого

²Не представляется возможным моделировать излучения от каждого электрона отдельно, ввиду того, что число электронов в пучке относится к большим числам. Поэтому электронный пучок приходится разбивать на кластеры, называемые в представленной работе макроэлектронами. Ограничение на минимально возможное число макроэлектронов приводится в тексте работы

поколения. На данный момент имеется необходимость дальнейшего развития компьютерных кодов для моделирования излучения современных источников СИ. Научная **новизна** заключается в разработке уникального алгоритма расчёта частично когерентного поля. Предложенный алгоритм имеет **практическую ценность** и используется при проектировании рентгенооптических трактов источника синхротронного излучения четвёртого поколения ЦКП «СКИФ».

Глава 1. Теоретический базис

В настоящей главе будут разобраны элементы статистической оптики, а именно одна из основных теорем статистической оптики, теорема Ван Циттерта - Цернике. Используя вывод теоремы, в качестве примера оценивается пятно когерентности излучения для рентгеновской трубы – полностью некогерентного источника излучения, и далее даётся формулировка обобщённой теоремы Ван Циттерта - Цернике в случае, когда на источнике излучения есть конечная область когерентности, или другими словами источник частично когерентен. Так же в главе рассматриваются вопросы формирования синхротронного излучения от электронного пучка с конечным эмиттансом. Обсуждаются статистические свойства такого излучения и описывается характерная спайковая структура излучения для одной статистической реализации поля.

1.1 Поперечная функция когерентности и теорема Ван Циттерта - Цернике

Поперечная функция когерентности в плоскости $z = const$ имеет вид:

$$\Gamma_{\perp}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega, z) = \langle E^*(\vec{r}_1, \omega, z) E(\vec{r}_2, \omega, z) \rangle, \quad (1.1)$$

где – $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций спектральных амплитуд монохроматического поля $\bar{E}(\vec{r}, \omega, z)$ от некоторого некогерентного стационарного источника излучения. Связь функции поперечной когерентности $\Gamma_{\perp}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega, z)$ с распределением интенсивности источника излучения $I(\xi, \eta)$ даётся двумерным преобразованием Фурье, что яв-

ляется следствием теоремы Ван Циттерта - Цернике [8], [9]:

$$\Gamma_{\perp}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega, z) = \frac{\kappa e^{-i\psi}}{(\lambda z)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp \left[\left(i \frac{2\pi}{\lambda z} \right) (\Delta x \xi + \Delta y \eta) \right] d\xi d\eta, \quad (1.2)$$

где $\kappa = \lambda^2/\pi$, λ – длина волны монохроматического источника излучения¹, z – расстояние до плоскости наблюдения от источника излучения,

$\psi = \frac{\pi}{\lambda z} [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)]$, а $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, другие геометрические величины изображены на Рис. 1.1

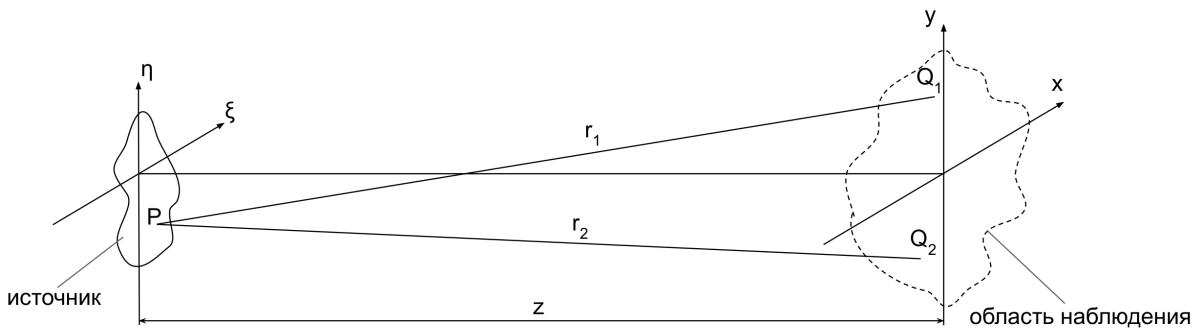


Рисунок 1.1 – К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике

Таким образом площадь пятна когерентности на расстоянии z от источника будет определяться следующим выражением

$$A_c = \frac{(\lambda z)^2}{A_s}. \quad (1.3)$$

Теорема может быть видоизменена и обобщена для частично когерентных источников излучения, достаточно лишь заменить κ на двойной интеграл [5]

$$\kappa(\bar{x}, \bar{y}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left[\left(i \frac{2\pi}{\lambda z} \right) (\bar{x}\Delta\xi + \bar{y}\Delta\eta) \right] d\Delta\xi d\Delta\eta, \quad (1.4)$$

¹В оригинальной работе теорема формулируется для квазимонохроматического источника. Для простоты мы опускаем эту общую формулировку и сужаем теорему для монохроматических источников.

где $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$, $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$ и $\mu(\Delta\xi, \Delta\eta)$ – комплексный коэффициент когерентности, являющийся областью когерентности на источнике. Физически это значит следующее: огибающая излучения в дальней зоне будет обратно пропорциональна пятну когерентности излучения на источнике, а характерный размер когерентности в плоскости xy на расстоянии z обратно пропорционален размеру источника излучения (Рис. 1.2).

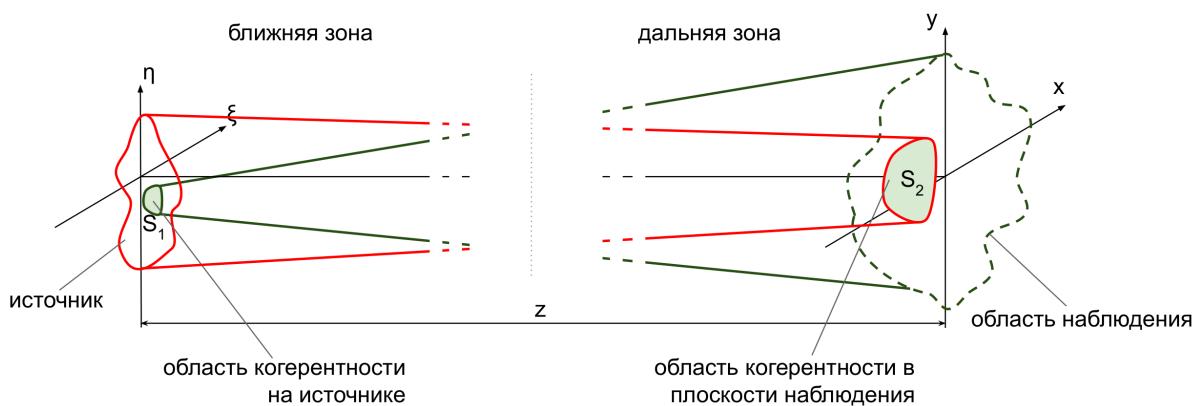


Рисунок 1.2 – К формулировке обобщённой теоремы Ван Циттерта-Цернике

В качестве примера распространения когерентности от полностью некогерентного источника можно оценить область когерентности излучения лабораторной рентгеновской трубы на некотором расстоянии z . Область когерентности от полностью некогерентного источника излучения квадратной формы получается напрямую из теоремы Ван Циттерта-Цернике. Подставляя в уравнение 1.3 $z = 1$ м, $\lambda \approx 0.7$ Å и площадь фокального пятна² $A_s = 1$ мм², [10], получаем, что линейный размер длины когерентности при отражении от кристалла будет порядка³ 0.1 мкм. Однако линейный размер пятна когерентности может быть увеличен до нескольких микрон при использовании трубы с вращающимся анодом, где характерный размер источника достигает 50 мкм [10].

Для синхротронных источников излучения область когерентности на источнике определяется натуральным размером излучения одного

²Площадь фокального пятна спроектирована на направление выхода излучения из рентгеновской трубы

³с учётом угла дифракции ($\sim 45^\circ$)

электрона при пролёте через вставное устройство. В случае ондуляторного источника, натуральный размер излучения определяется геометрическим размером перетяжки излучения в центре ондулятора – $\sigma_r = \sqrt{\lambda L}/4\pi$, где L длина ондулятора. Дальнейшие рассуждения о статистических свойствах синхротронного представлены в следующем разделе, а точные выражения представлены в [7].

1.2 О статистических свойства синхротронного излучения

Излучение от всего электронного пучка может быть представлено как сумма полей от каждого электрона, где k -ый электрон в пучке имеет свою координату – $\vec{\eta}_k$, угол – \vec{l}_k , отсчитываемые от проектной траектории, а также время прибытия t_k относительно некоторого времени t_0 . Ондуляторное излучение удобно рассматривать в ω -пространстве, т.е. $\bar{E}(\vec{r}, \omega)$, которое связано с полем $E(r, t)$ обратным преобразованием Фурье по времени. Вклад времени прибытия в $r\omega$ -пространстве будет простым умножением поля на фазовый фактор $\exp(i\omega t_k)$. Указанные величины $\vec{\eta}_k$, \vec{l}_k и t_k подчиняются некоторым распределениям плотности вероятности, для накопительных колец в модельных случаях это распределение Гаусса. В настоящей работе не рассматриваются эффекты, связанные с влиянием разброса электронов по энергии на когерентные свойства излучения, эти эффекты описаны в [11].

Результирующее поле от N_e электронов на расстоянии z от источника можно записать следующим образом:

$$\bar{E}_b(z, \vec{r}, \omega) = \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp(i\omega t_k), \quad (1.5)$$

для электронов в накопительных кольцах случайные величины $\vec{\eta}_k$ и \vec{l}_k не зависят от времени прибытия t_k и, в центре ондулятора, независимы друг от друга. Модуль поля $|\bar{E}_k|$ имеет одинаковое распределение для всех k со средним $\langle |\bar{E}_k| \rangle$ и конечным вторым моментом $\langle |\bar{E}_k|^2 \rangle$, где – $\langle \dots \rangle$ усреднение по статистическим реализациям.

Результирующее монохроматическое поле \bar{E}_b является суммой вкладов от каждого электрона в пучке. В правой части уравнения 1.5 записан некоторый фазор. Следуя предпосылкам центральной предельной теоремы (ЦПТ), можно показать, что поле $\bar{E}_b(z, \vec{r}, \omega)$ в каждой точке \vec{r} подчиняется комплексному гауссовому распределению для двух практически значимых предельных случаев: случай «длинного» $\omega\sigma_T \gg 1$ и «короткого» $\omega\sigma_T \ll 1$ электронного пучка, где σ_T – длительность электронного сгустка. В случае длинного электронного сгустка величина ωt_k равномерно распределена в пределах от 0 до 2π и продольная длина когерентности излучения на фундаментальной гармонике определяется натуральной длительностью излучения от одного электрона $c/\lambda N_w = \omega/N_w$, где N_w количество периодов ондулятора. В большинстве случаев натуральная длина когерентности в рентгеновском диапазоне длин волн много меньше длительности электронного импульса. Этот случай будет, для определённости, называться продольно некогерентным. Для короткого электронного пучка фазовый множитель $\exp(i\omega t_k)$ равен единице и излучение является продольно когерентным. В целом, формула 1.5 даёт прямой путь моделирования синхротронного излучения с любой степенью когерентности, с учётом продольной когерентности/некогерентности излучения.

Амплитуда поля по формуле 1.5 обладает спайковой структурой как в ωt -пространстве, так и в поперечном направлении в rk -пространстве. В итоге, получается некая трёхмерная структура, изображённая на Рис. 1.3, с флюктуирующей амплитудой поля.

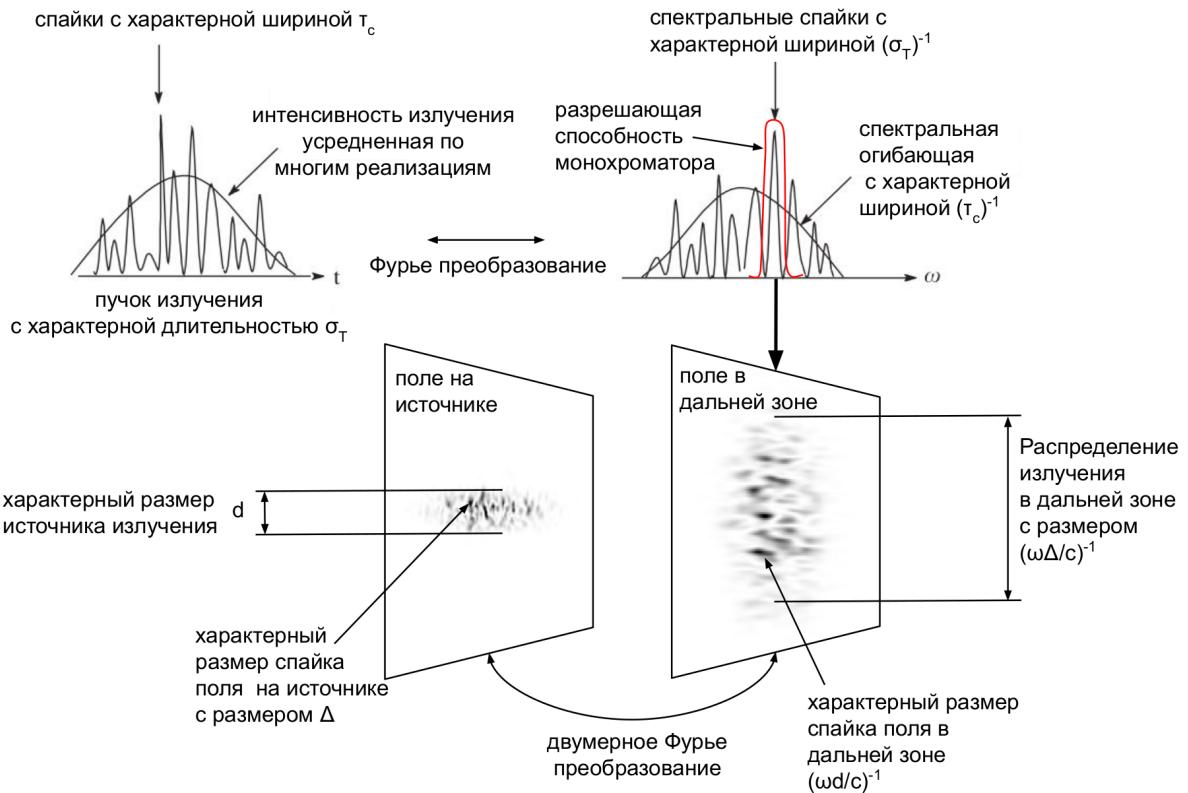


Рисунок 1.3 — Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Здесь красной линией показана полоса излучения, выделяемая монохроматором

В t -пространстве поле имеет внутреннюю структуру с характерным размером спайка, равным продольной длине когерентности излучения одного электрона, а характерная длительность импульса поля, усреднённого по многим реализациям, определяется длительностью электронного сгустка. В виду связи ωt -пространств, в ω -пространстве размер спайка в спектре обратно пропорционален длительности излучения. Характерная огибающая спектра, после усреднения по многим реализациям, обратно пропорциональна длине когерентности излучения, такое соотношение – следствие теоремы Винера-Хинчина. Если разрешить монохроматором спайк в ω -пространстве, то на двухмерном детекторе в дальней зоне можно увидеть поперечную спайковую структуру синхротронного излучения (Рис. 1.3). Это распределение с точностью до фазового фактора связано с распределением излучения на образце Фурье-преобразованием. В дальней зоне характерный размер спайка связан с размером источника излучения как: $(\omega d/c)^{-1}$, и огибающая поля в дальней зоне связана с

размером спайка на источнике как: $(\omega\Delta/c)^{-1}$, – что является следствием обобщённой теоремы Ван Циттерта - Цернике.

Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от пучка с конечным эмиттансом

При обсуждении методов моделирования будет рассматриваться только ондуляторное излучение. Отчасти это мотивировано относительной простотой рассмотрения ондуляторного излучения, по сравнению, например, с вигглерным [12]. С другой стороны, при рассмотрении излучения источников четвёртного поколения, излучение из ондуляторов обладает высокой степенью поперечной когерентности, что и представляет интерес в рамках представленной работы. Тем не менее, формула 1.5 применима и для вигглерного излучения и для излучения поворотного магнита. Для расчёта конечного поля по формуле 1.5, необходимо сгенерировать N_e полей от каждого электрона и сложить их. Таким образом получится одна реализация поля, далее необходимо повторить операцию генерации поля для N_b реализаций и усреднить модули квадратов полей по получившемуся статистическому ансамблю. Метод является крайне медленным, поэтому в случае продольно некогерентного источника подойдёт метод реализованный в коде SRW [6], [13]. Он основан на сложение интенсивностей полей от каждого электрона, где отсутствует необходимость усреднять по статистическому ансамблю, что ускоряет процесс вычисления. Оба метода будут обсуждаться в настоящей Главе.

Альтернативный подход в моделировании частично когерентного излучения основывается на декомпозиции функции взаимной когерентности синхротронного излучения на Гаусс-Шелл моды (разложение по полиномам Эрмита) описываемый в работах [14], [15], [16], [17]. Однако, как отмечают сами авторы в [16], [17] и аналитически описывается в [7], разложение по полиномам Эрмита не применимо в случае, когда источник имеет высокую степень когерентности. Так как область когерентности на источнике весьма высока, то функции, которые описывают поведение ондуляторного излучения и в дальней зоне, и на источнике, имеют не гауссову природу.

В текущей главе описывается новый алгоритм моделирования синхротронного излучения, для краткости называемый СЕРВАЛ. Алго-

ритм основывается на прямом моделировании стохастических процессов при генерации синхротронного излучения, вызванных дробовым шумом в электронном пучке, с последующим ограничением пространственных гармоник шума огибающими излучения. По своей природе алгоритм имеет оценочный характер, именно поэтому в главе приведён сравнительный анализ результатов СЕРВАЛА с методом сложения амплитуд, на примере некоторых оптических систем. СЕРВАЛ показал себя как мощный инструмент для оценки когерентных свойств синхротронного излучения, точность которого мало уступает методу сложения амплитуд, но имеющий преимущество в быстродействии.

2.1 Расчёт ондуляторного излучения прямым моделированием методом Монте-Карло

Формула 1.5 используется напрямую при моделирования ондуляторного излучения, как продольно когерентного, так и некогерентного. Распределение поля $\bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega)$ может быть получено как аналитически, так и численно, взятием интеграла по траекториям электрона в ондуляторе. В случае численного подхода излучение может быть рассчитано на любой частоте из первых принципов. При аналитическом подходе выражение для излучения на резонансной частоте ω фундаментальной гармоники от одного электрона¹ с некоторыми углом $\vec{\eta}_k$ и координатой \vec{l}_k на входе в идеальный планарный ондулятор может быть записано как:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{\theta}) = & -\frac{\omega e A_{JJ} L_w K}{2c^2 z_0 \gamma} \exp \left[i \frac{\omega z_0}{2c} \left| \vec{\theta} - \vec{l}/z_0 \right|^2 \right] \\ & \times \text{sinc} \left[\frac{\omega L_s |\vec{\theta} - (\vec{l}/z_0) - \vec{\eta}|^2}{4c} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\vec{\theta} = \vec{r}/z_0$, e – заряд электрона, γ – Лоренц-фактор, K – параметр ондуляторности, $k_w = 2\pi/\lambda_w$, где λ_w – период ондулятора. $A_{JJ} =$

¹более общая формула для поля с некоторой отстройкой поля $\Delta\omega$ может быть найдена, например, в [18]

$J_0(\zeta) - J_1(\zeta)$, $\zeta = K^2/(4 + 2K^2)$ и J_n – функция Бесселя первого рода n порядка. Формула 2.1 даёт распределение амплитуды поля в дальней зоне. Определение дальней зоны для ондуляторного излучения обсуждается в [19]. Чтобы получить точное выражение, это поле должно быть распространено назад в центр ондулятора с помощью пропагатора свободного пространства [20], [21]. Распределение поля в мнимом источнике излучения:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp(0, \omega, \vec{\eta}, \vec{l}, \vec{r}_\perp) &= i \frac{e A_{JJ} \omega}{2c^2} \frac{K}{\gamma} \exp \left[i \frac{\omega}{c} (\vec{r}_\perp - \vec{l}) \right] \\ &\times \left[\pi - 2 \operatorname{Si} \left(\frac{i\omega |\vec{r}_\perp - \vec{l}|^2}{L_w c} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

после этого поле можно распространять на любую дистанцию вдоль оптической оси z_0 , что показано в [19], снова применяя пропагатор свободного пространства:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{r}) &= \frac{e A_{JJ} \omega}{2c^2} \frac{K}{\gamma} \exp \left[i \frac{\omega}{2z_0 c} (|\vec{r}_\perp - \vec{l}|^2 - |\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta}|^2) \right] \\ &\times \left\{ \operatorname{Ei} \left[\frac{i\omega (\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta})^2}{2z_0 c - L_w c} \right] - \operatorname{Ei} \left[\frac{i\omega (\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta})^2}{2z_0 c + L_w c} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассчитанное поле по формуле 2.3 может быть использовано для любого значения z_0 , кроме точки $z_0 = L_w/2$ и $r_\perp = 0$, см. [19], это выражение, таким образом, действительно как для дальней зоны, так и для ближней. Обе формулы 2.1 и 2.3 получены аналитически, взятием интеграла по траектории электрона в идеальном синусоидальном магнитном поле, при этом расчёт поля по формуле 2.3 значительно более трудоёмкий, чем по формуле 2.1². При использовании численных методик для взятия интеграла по траекториям в случае немодельных магнитных полей можно рассчитывать поля для любой частоты излучения. В итоге, рассчитанные поля $\bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{r})$ имеют практическую ценность при вычислении излучения от всего электронного сгустка по формуле 1.5. Для просто-

²Необходимо дважды численно взять интеграл $\operatorname{Ei}(\cdot)$

ты, в дальнейшем все расчёты ондуляторного излучения проведены для резонансной частоты фундаментальной гармоники.

2.1.1 Метод сложения амплитуд

После расчёта суммарного поля с N_e электронами по формуле 1.5, получившиеся монохроматическое поле по своей сути есть одна статистическая реализация. Физически это значит следующее: если экспериментатор измерит распределение интенсивности поля на детекторе от пролёта одного электронного сгустка, используя монохроматор с разрешением, которое позволит разрешить одну продольную моду излучения, то на детекторе будет распределение, эквивалентное по своим свойствам представленному на Рис. 2.1.

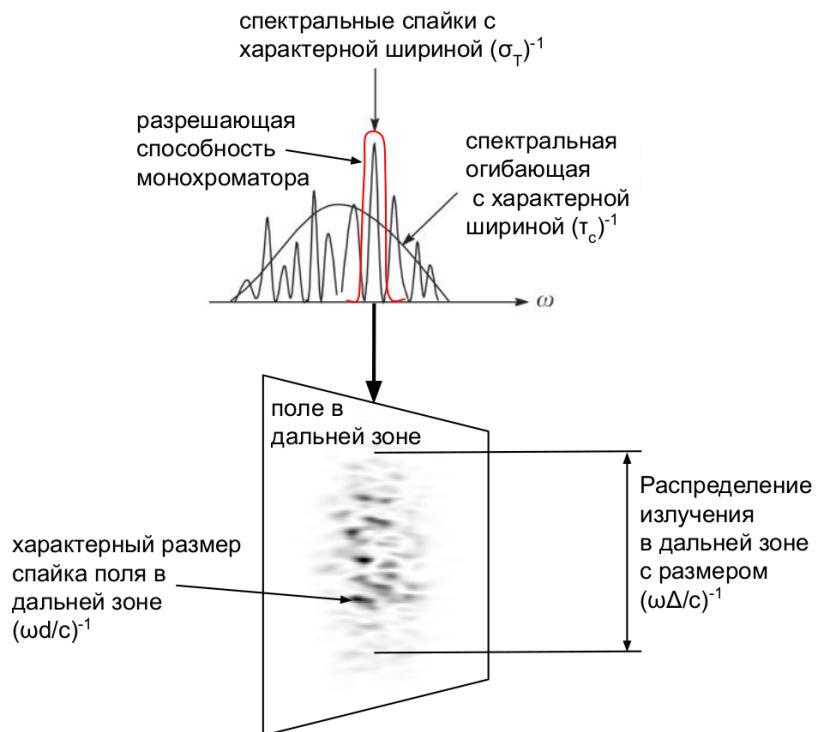


Рисунок 2.1 — Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Красной линией обозначена разрешающая способность монохроматора

После усреднения по N_b реализациям (с идеальным монохроматором³), наблюдаемая интенсивность даётся выражением:

$$I_\omega = \left\langle \left| \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp(i\omega t_k) \right|^2 \right\rangle, \quad (2.4)$$

результатирующая интенсивность будет сходиться к некоторой гладкой функции поперечных координат. В грубом приближении усреднённое угловое распределение интенсивности является свёрткой распределения расходимости излучения с распределением расходимости электронного пучка. Общая схема метода сложения амплитуд изображена на Рис. 2.2.

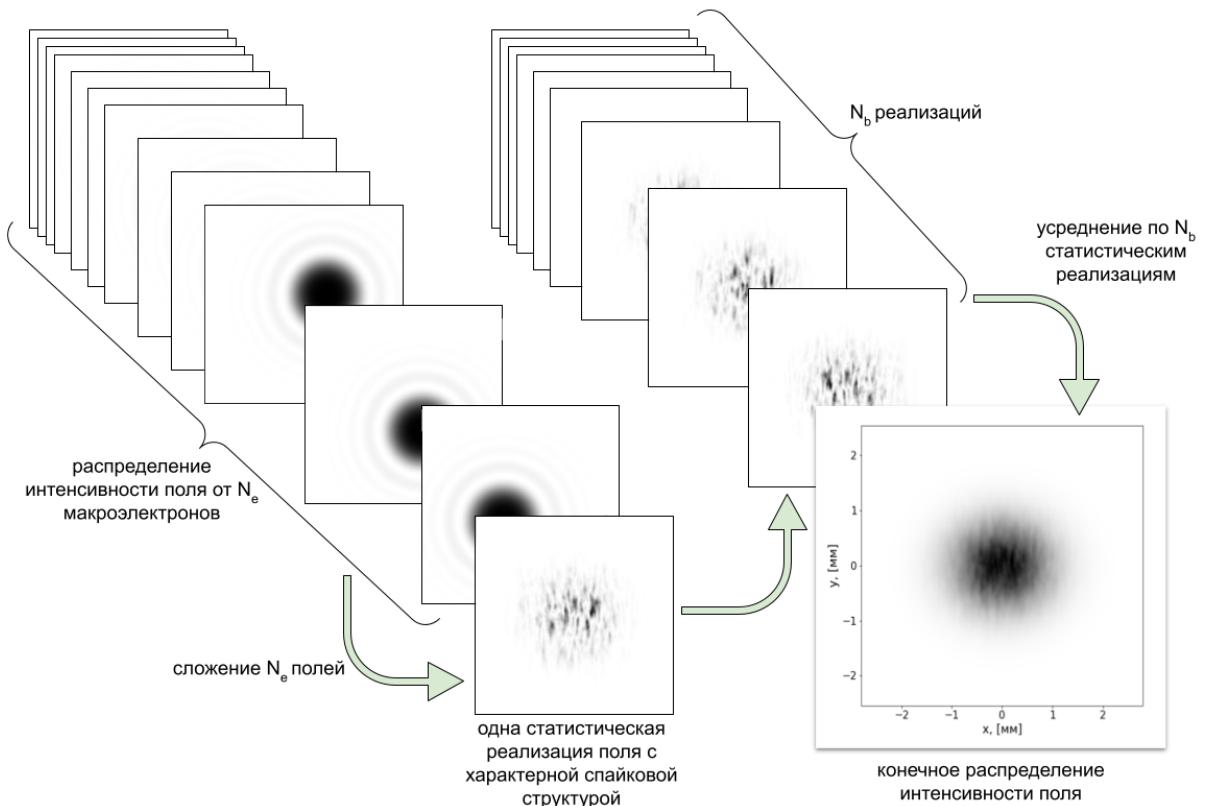


Рисунок 2.2 — Схема работы метода сложения амплитуд

Данный подход является наиболее прямым подходом в задаче моделирования частично когерентного излучения, однако время расчёта в таком случае может быть оценено как время затрачиваемое на расчёт одной одного поля N_e раз по формуле 2.1 или 2.3, в последней, как уже упоминалось, необходимо дважды численно взять интеграл $Ei(\cdot)$ и потом усреднить по N_b реализациям поля \bar{E}_b . Итого, если за τ_{calc} взять время

³другими словами, монохроматором разрешается одна поперечная мода

расчёта одного поля формуле 2.1 или 2.3, то расчёт одного результирующего поля \bar{E}_b в сумме займёт $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e \cdot N_b$.

2.1.2 Метод сложения интенсивностей

В случае полностью некогерентного излучения время расчёта можно сократить за счёт фазового фактора $\exp(i\omega t_k)$, который эффективно приводит к тому, что излучение от отдельно электрона в электронном пучке коррелирует только с самим собой [7]. Если расписать выражение 2.4. получим:

$$I_\omega = \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \bar{E}^*(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) + \\ \left\langle \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{n=1 \atop k \neq n}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \bar{E}^*(\vec{\eta}_n, \vec{l}_n, z, \vec{r}, \omega) \exp[i\omega(t_k - t_n)] \right\rangle, \quad (2.5)$$

в котором после усреднения второе слагаемое будет равно нулю, так как t_k и t_n считаются независимыми случайными величинами. Таким образом формула 2.4 упрощается до

$$I_\omega = \sum_{k=1}^{N_e} \left| \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \right|^2, \quad (2.6)$$

а время расчёта уменьшается до $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e$. Этот метод, для условности, будет носить название метод сложения интенсивностей. Общая схема метода представлена на Рис. 2.3.

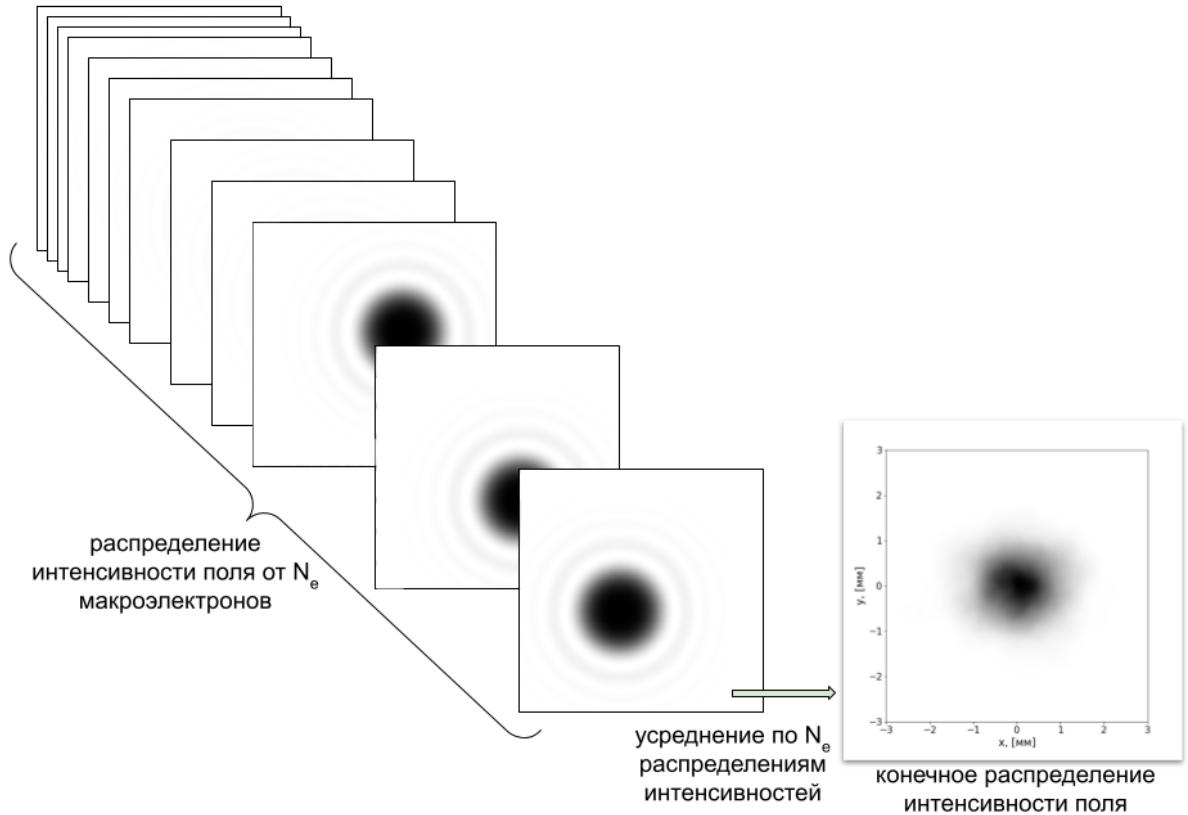


Рисунок 2.3 — Схема метода сложения интенсивностей

Недостатком такого подхода можно считать потерю фазовой информации об излучении и, следовательно, невозможности расчёта функции взаимной когерентности первого порядка. Тем не менее, подход основанный на формуле 2.6 даёт мощный метод расчёта наблюдаемых интенсивностей для частично когерентного излучения. Именно этот подход реализован в широко распространённом коде SRW.

В заключении к двум предыдущим разделам отдельно необходимо отметить: N_b – это физическая величина. Если разрешить монохроматором ровно одну продольную моду и набрать статистику, например, из 10 электронных пучков, полученная интенсивность на детекторе будет, очевидно, соответствовать 10 реализациям поля. Иначе дело обстоит с числом макроэлектронов – N_e . Для достоверного моделирования по-перечной спайковой структуры синхротронного излучения необходимо взять число N_e как минимум больше, чем характерное количество по-перечных пространственных гармоник. Иначе, мелкие детали спайковой структуры на разрешатся.

2.2 Учёт влияния размера электронного пучка на расходимость излучения при помощи прямых методов Монте-Карло

При помощи метода сложения амплитуд, можно получить поля, в которых видно влияние продольной когерентности⁴ и размера электронного пучка на расходимость излучения.

2.2.1 Влияние размера электронного пучка на расходимость излучения

Первый эффект – влияние размера электронного пучка на расходимость излучения и, следовательно на поперечный размер излучения в дальней зоне. Этот эффект обсуждается в работе [13] разработчиком кода SRW применительно к когерентному синхротронному излучению (англ. coherent synchrotron radiation (CSR)). Под CSR подразумевает продольно когерентное излучение, реализуемое, когда электронный пучок много меньше излучаемой длины волны. На примере CSR можно наблюдать следующий эффект: если электронный пучок меньше или сравним с размером перетяжки излучения на источнике, наблюдается обычная расходимость излучения, определяемая свёрткой натуральной расходимости синхротронного излучения с расходимостью электронного пучка.

⁴в смысле установленном в Главе 1

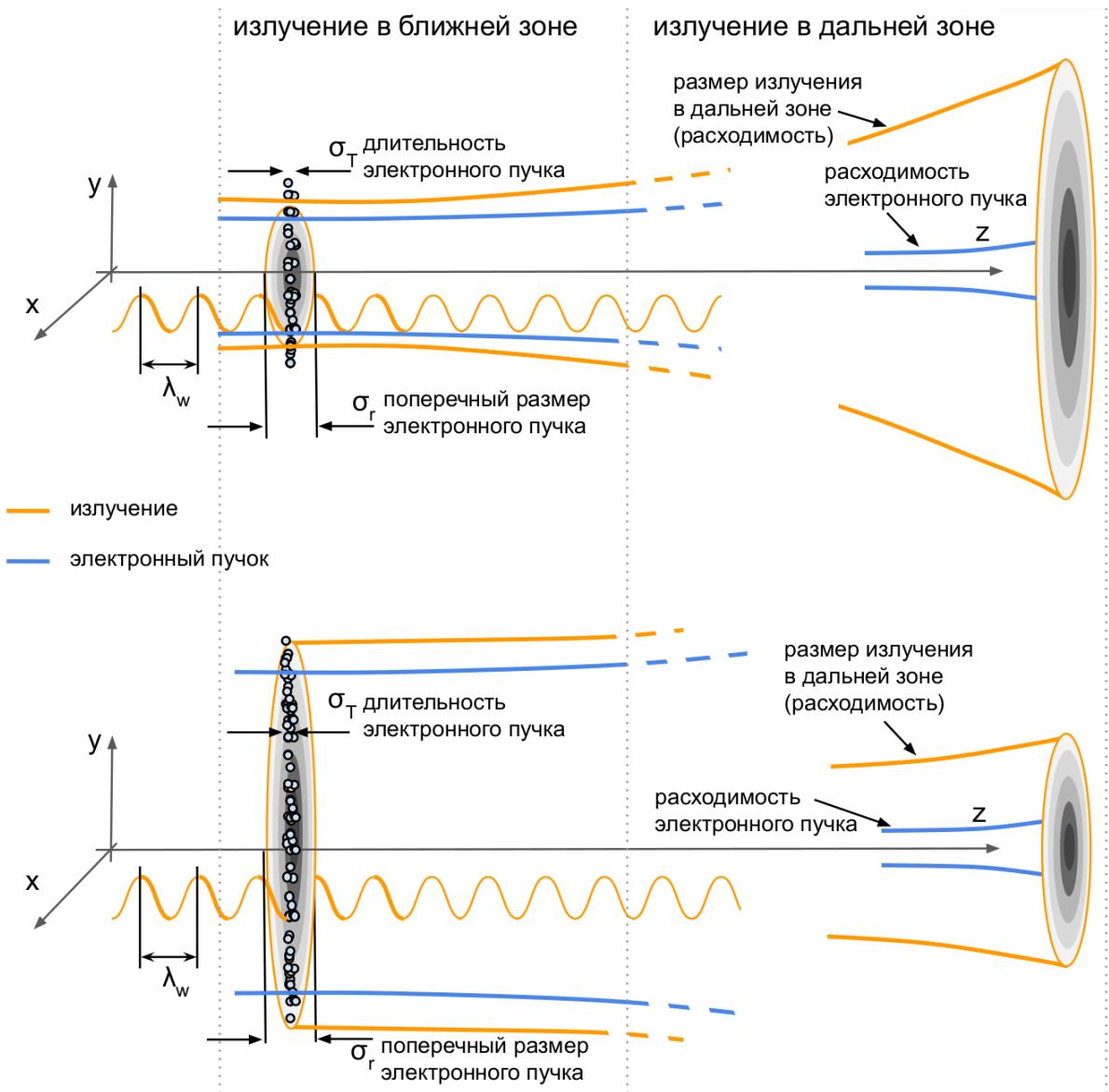


Рисунок 2.4 — Схема эффекта зависимости расходимости излучения от размера электронного пучка. Рисунок разделён на две части: ближняя зона, источник излучения – слева и дальняя зона – справа. Жёлтой линией схематично изображена характерный поперечный размер излучения, синей линией характерный поперечный размер электронного пучка, жёлтая волнистая линия символизирует длину волны излучения в сравнение с продольным размером электронного пучка. Важно отметить, что схематичный масштаб для обоих рисунков (верхнего и нижнего), – тот же. Расходимости электронных пучков (сверху и снизу) одинаковы.

Однако, при увеличении размера электронного пучка, при той же расходимости, наблюдается эффект уменьшения расходимости излучения. Как отмечает автор в [13], этот эффект объясняется с точки зрения гауссовой оптики: при увеличении размера источника, угловой размер

должен уменьшаться, формула 1. На Рис 2.4 изображена схема описывающая этот эффект.

При расчёте ондуляторного излучения методом сложения амплитуд этот эффект выглядит следующим образом, Рис. 2.7.

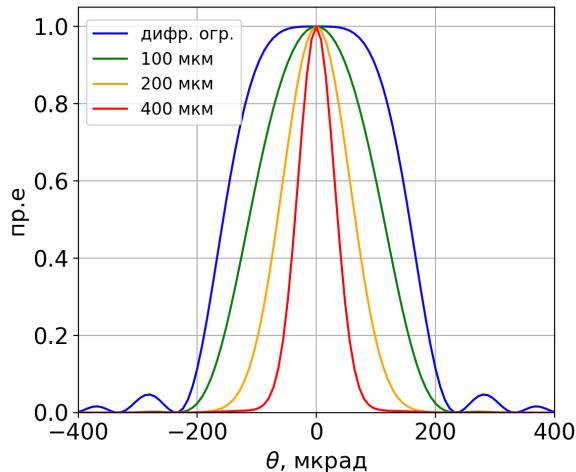


Рисунок 2.5 — Расходимость излучения от электронного пучка с размерами, указанными в легенде. Расходимость электронного пучка много меньше натуральной расходимости синхротронного излучения

Расчёт проводился для модельных параметрах электронного пучка: расходимость была взята много меньшей чем натуральная расходимость ондуляторного излучения, размеры электронного пучка указаны в легенде к Рис. 2.7, резонансная энергия на 12,4 эВ, ондулятор с 200 периодами, длина периода 18 мм. Синяя линия на Рис. 2.7 отвечает случаю электронного пучка с бесконечно малым эмиттансом.

2.2.2 Различие расходимости излучения для случая продольно когерентного и некогерентного излучения

В зависимости от длительности электронного пучка результирующее поле \bar{E}_b будет вести себя по-разному. В случае короткого электронного пучка: $\omega\sigma_T \ll 1$, где σ_T – длительность электронного сгустка, излучение будет продольно когерентным, а в случай длинного электрон-

ного пучка, а именно $\omega\sigma_T \gg 1$, соответствует продольно некогерентному излучению.

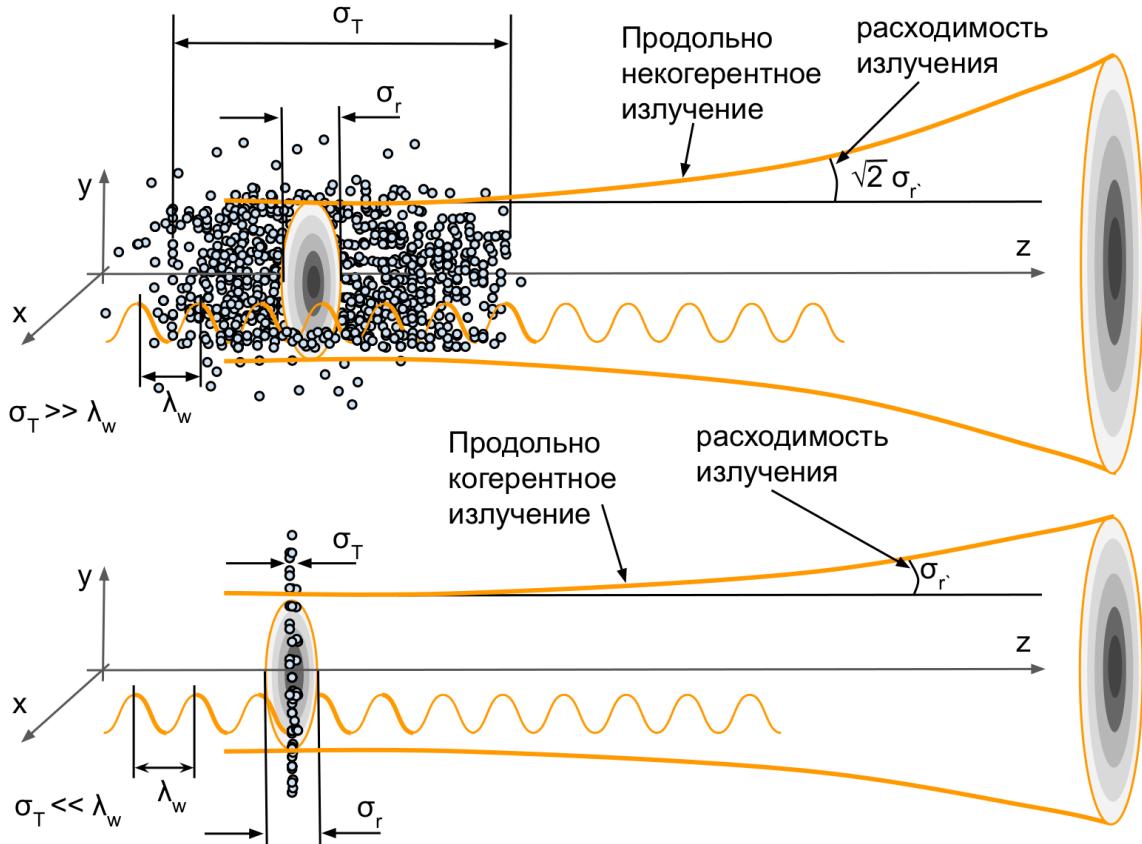


Рисунок 2.6 — Схема эффекта зависимости расходимости излучения от продольной когерентности излучения. Жёлтой линией обозначен характерный поперечный размер излучения, жёлтой волнистой длины волны излучения с сравнение в продольным размером электронного пучка. На рисунке обозначено, что в случае продольно некогерентного излучения расходимость в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в случае продольно когерентного излучения

Расчёт проводился для гипотетического случая электронного пучка с размерами пучка много меньшими натуральных размеров излучения в перетяжке⁵, $\sigma'_x = 20$ мкрад, $\sigma'_y = 20$ мкрад на резонансной энергии 300 эВ. Ондулятор с 200 периодами, длина периода 18 мм.

⁵Чтобы для когерентного случая избежать эффекта, описанного в предыдущем разделе

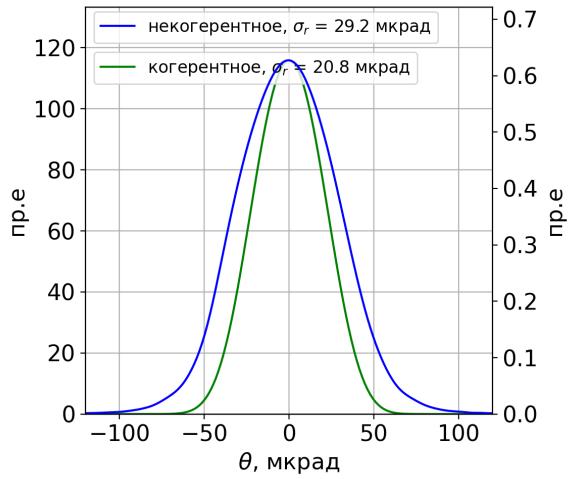


Рисунок 2.7 — Расходимость излучения в случае продольно когерентного излучения (зелёная линия), и продольно некогерентного излучения (синяя линия).

Этот эффект, по всей видимости, не обсуждался в литературе, однако заслуживает дальнейшего исследования.

2.3 Метод ограничения пространственных гармоник огибающими: СЕРВАЛ

Предлагаемый алгоритм основывается на моделировании стохастического характера ондуляторного синхротронного излучения комплексным гауссовым шумом с последующим его ограничением огибающими поля. Алгоритм описывает продольное некогерентное ондуляторное излучение. Для начала алгоритм будет представлен в общем виде, без уточнения чем определяются распределения огибающих, задающих размер и расходимость излучения.

2.3.1 Алгоритм создания поля

Алгоритм выполняется в три этапа: создание комплексного гауссова шума; его ограничение размерами излучения в перетяжке в r -пространстве; его ограничение расходимости излучения в k -пространстве⁶. Полное описание алгоритма приведено ниже:

1. Создание комплексного гауссова шума $Z = X + iY$ в $r\omega$ -пространстве, где величины X и Y подчиняются нормальному распределению.

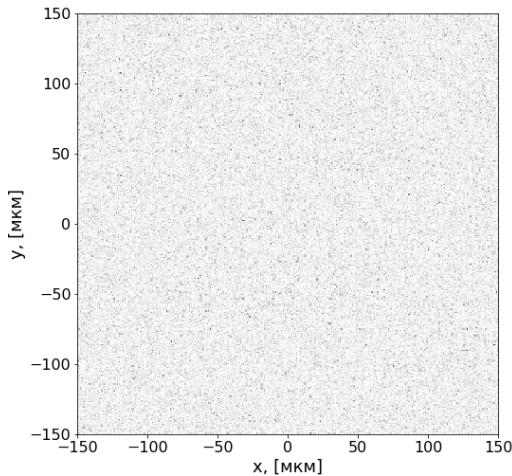


Рисунок 2.8 — Интенсивность комплексного гауссова шума

2. Ограничение шума эффективным размером электромагнитного излучения в источнике излучения в r -пространстве.

⁶Излучение от всего электронного пучка.

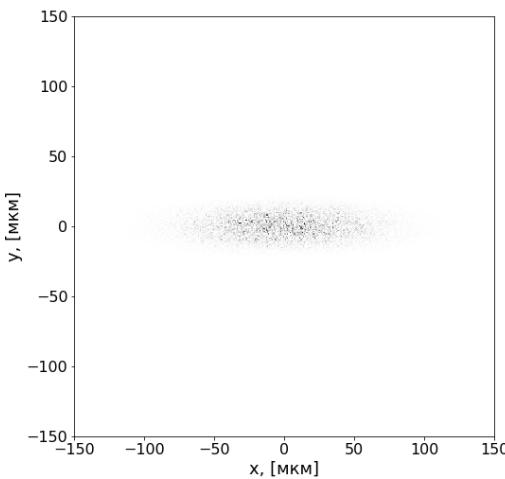


Рисунок 2.9 — Излучение с
наложенным шумом

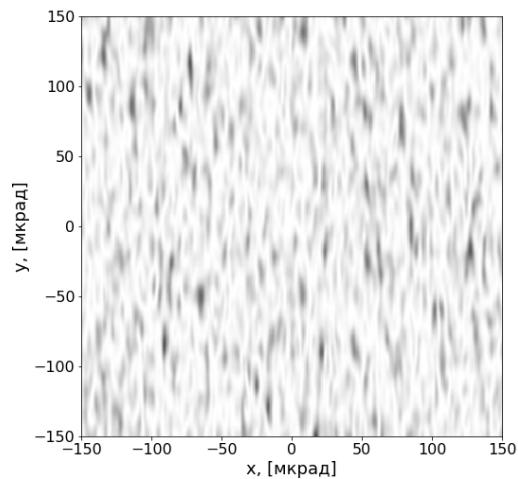


Рисунок 2.10 — Моды излучения
в k -пространстве на источнике

3. Ограничение пространственных частот эффективной расходимостью излучения в k -пространстве

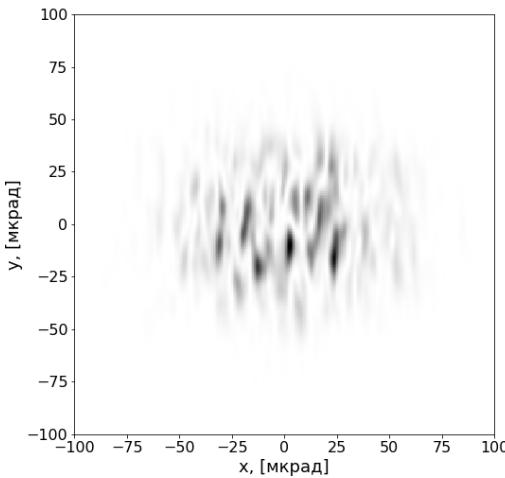


Рисунок 2.11 — Расходимость
излучения в источнике

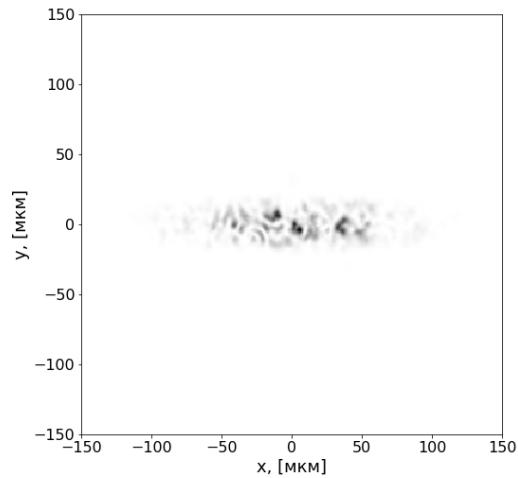


Рисунок 2.12 — Размер
излучения в источнике

Получившиеся распространение поля есть распределение поля в источнике излучения (центр ондулятора). Излучение монохроматично, т.е. продольно разрешён один спайк.

Быстродействие алгоритма можно оценить следующим образом: алгоритм генерирует $N_x \cdot N_y \cdot N_b$ случайных величин, подчиняющихся распределению Z , где N_b – количество реализаций поля, совершает одного преобразования Фурье поля (преобразование поля на Рис. 2.9 в

поле на Рис. 2.10) и два раза умножает на огибающие поля. Получившееся поле, представленное на Рис. 2.12, уже готово к распространению, так как пропагатор через свободное пространство работает именно в kf -пространстве.

Показательно сравнить быстродействие разобранных алгоритмов (Таблица 2.1). При сравнение использовалась поперечная сетка $N_x \times N_y = 501 \times 501$, для расчёта поля в дальней зоне использовалась формула 2.1. Сравнение производилось для разного количества макроэлектронов в методе сложения амплитуд.

Таблица 2.1

Быстродействие метода сложения амплитуд (МСА) и СЕРВАЛА

N_e	МСА, сек/реализация	СЕРВАЛ, сек/реализация
100	2.8	0.020
200	5.5	0.020
400	11	0.020

Быстродействие метода сложения амплитуд и СЕРВАЛА сравнивается напрямую, так как в обоих методах есть необходимость усреднять по реализациям. Однако, для метода сложения интенсивностей нет понятия реализации поля, если только количество макроэлектронов. Для прямого сравнения СЕРВАЛА и метода сложения интенсивностей необходимо сравнивать быстроту генерации одного поля. Для той же плотности точек поперечной сетки, при равном числе реализаций и количестве макроэлектронов – 400, расчёт поля СЕРВАЛОм занял **8 сек**, методом сложения интенсивностей⁷ **15 сек**.

⁷Здесь, снова, стоит отметить, при использовании метода сложения интенсивностей теряется вся фазовая информация о поле, метод позволяет моделировать только наблюдаемые интенсивности полей.

2.3.2 Выбор подходящих распределений для ограничения пространственных гармоник шума

До этого момента не обсуждался конкретный вид распределений, используемых для ограничения пространственных гармоник шума, при генерации поля методом СЕРВАЛ. Вопрос выбора таких распределений сводится к нахождению пространственного и углового распределения поля в центре ондулятора. Поле в центре ондулятора может быть получено обратным распространением излучения из дальней зоны обратно в центр ондулятора при помощи пропагатора излучения в свободном пространстве. Однако, нахождение аналитического решения уравнения Максвелла в дальней зоне от целого электронного пучка – не тривиальная задача. Для оценки можно предположить, что распределение поля ондуляторного излучения от электронного пучка с конечным эмиттансом, в целом, может быть представлено как свёртка распределения поля ондуляторного излучения от одного электрона с распределением фазового пространства электронного пучка [7], [13].

Для СЕРВАЛА можно предложить, как минимум, три вида таких распределений. Для пространственного распределения источника в r -пространстве:

$$\text{I. } A_b(\vec{r}_\perp) = (\bar{E}_\perp(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp) * f_l(\vec{l}))(\vec{l})$$

$$\text{II. } A_b(\vec{r}_\perp) = \sqrt{(\bar{E}_\perp^2(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp) * f_l^2(\vec{l}))(\vec{l})}$$

$$\text{III. } A_b(\vec{r}_\perp) = f_l(\vec{l}),$$

и для расходимости источника в k -пространстве:

$$\text{I. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = (\hat{\bar{E}}_\perp(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp) * \hat{f}_\eta(\vec{\eta}))(\vec{\eta})$$

$$\text{II. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = \sqrt{(\hat{\bar{E}}_\perp^2(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp) * \hat{f}_\eta^2(\vec{\eta}))(\vec{\eta})}$$

$$\text{III. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = \hat{f}_\eta(\vec{\eta}),$$

где $A_b(\vec{r})$ и $\hat{A}_b(\vec{\theta})$ огибающие в r - и k -пространствах, соответствующие шагам 2 и 3 в алгоритме, $f(\vec{l}, \vec{\eta}) = f_l(\vec{l})f_\eta(\vec{\eta})$ распределение фа-

зового пространства электронного пучка, и поле $\bar{E}_\perp(z = 0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp)$, $\hat{E}_\perp(z = 0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp)$ – распределение поля, взятого в центре ондулятора по формулам 2.1(или более точно 2.3) и 2.2.

При выборе подходящих распределений было проведено сравнение с эталонным в этой работе методом сложения амплитуд. Для начала необходимо проверить распределение интенсивности поля на источнике. Для метода сложения амплитуд поле было рассчитано в дальней зоне и распространено назад в центр ондулятора. Результаты сравнения приведены на Рис. 2.15 и представлены на Рис. 2.13, Рис. 2.14, Рис. 2.15. В работе использовались следующие параметры: для ондулятора Таблица. 2.2

Таблица 2.2

Параметры ондулятора

$E_{ph}, [\text{эВ}]/\lambda, [\text{\AA}]$	$\lambda_w, [\text{мм}]$	периодов
2167/5.72	18	200

Расчёты были проведены с использование параметров электронного пучка ЦКП «СКИФ» для одного из прямых промежутков (Таблице 2.3).

Таблица 2.3

Параметры электронного пучка

$E, [\text{GeV}]$	$\sigma_x, [\text{мкм}]$	$\sigma_y, [\text{мкм}]$	$\sigma_{x'}, [\text{мкрад}]$	$\sigma_{y'}, [\text{мкрад}]$
3	38	4.7	25	20

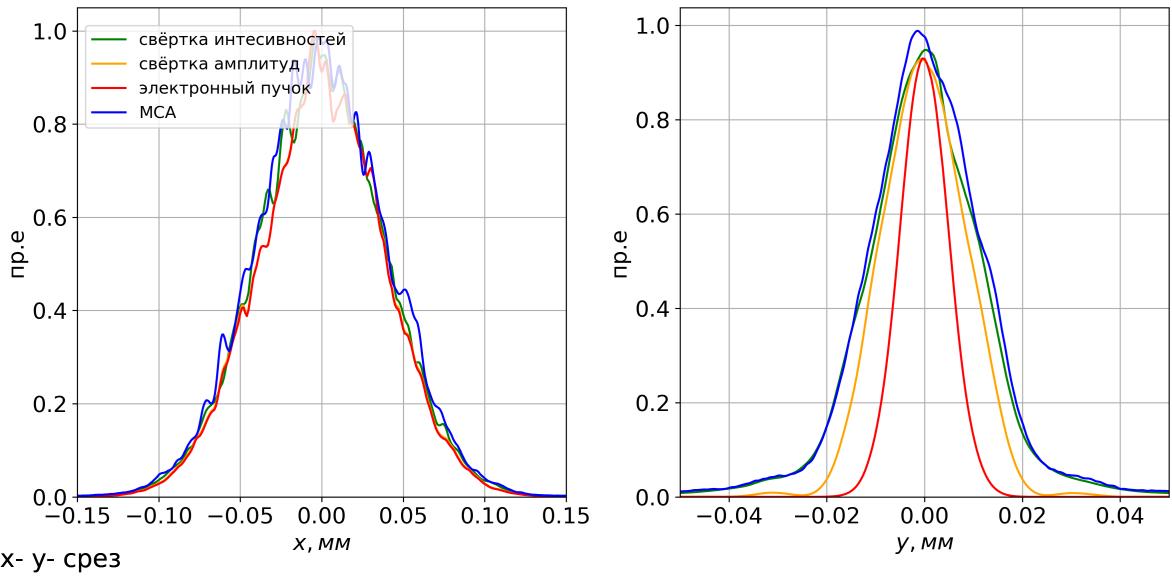


Рисунок 2.13 — Распределение поля на источнике излучения для разных огибающих в сравнении с распределением, даваемым методом сложения амплитуд

Видно, что оптимальные результаты достигаются при использовании свёртки II. Однако, если размер электронного пучка много больше или даже сравним с натуральным размером излучения в перетяжке, то можно использовать любые из представленных огибающих для r -пространства. Необходимо так же сравнить корреляционные функции получившихся полей 2.7 в дальней зоне на 25 метрах от ондулятора, используя формулу 1.1.

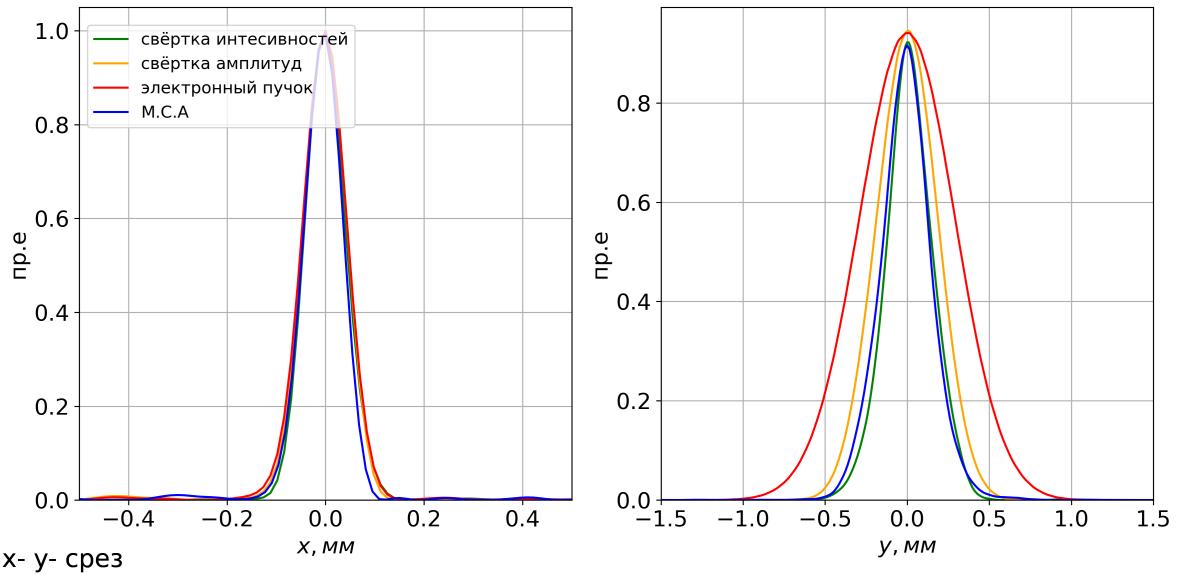


Рисунок 2.14 — Функция взаимной когерентности на расстоянии 25 м от источника

Для распределения расходимости следует использовать свёртку интенсивностей.

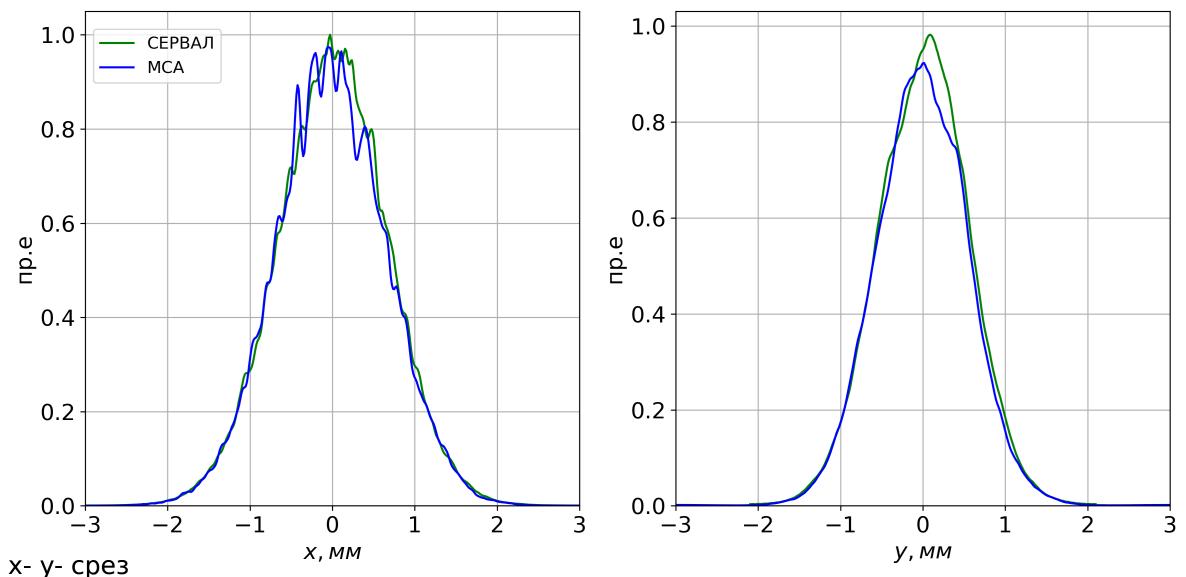


Рисунок 2.15 — Размеры излучения в дальней зоне (расходимость) на расстоянии 25 м

В большинстве случаев можно выбирать свёртку интенсивностей по II. Однако, стоит отметить, что СЕРВАЛ – это оценочный метод и, в случае дифракционного ограниченного источника, необходимо перед проведением расчётов сделать подобный анализ подходящих огибающих.

Для примера, в Приложении А дан подобный анализ для электронных пучков в различных приближениях.

Глава 3. Применение СЕРВАЛа

СЕРВАЛ является эффективным алгоритмом для моделирования частично когерентного синхротронного излучения, в случаях когда есть заметная степень когерентности источника излучения. Уже было показано совпадение распределений интенсивности в дальней зоне и на источнике излучения, а так же совпадение корреляционных функций с методом сложения амплитуд, который может считаться методом, дающим результат «из первых принципов» во всех ситуациях¹. Этот сравнительный анализ свойств источника излучения показывает, что весьма ресурсозатратный по времени метод сложения амплитуд может быть заменён СЕРВАЛОм без потери точности и физичности результатов. В этой главе мы приведём ещё один сравнительный анализ СЕРВАЛА и метода сложения амплитуд на примере фокусирующей системы с конечной апертурой, а так же два практических применения СЕРВАЛА на примере эксперимента Юнга и нетривиальной задачи отражения частично когерентного излучения от рентгеновского зеркала с шероховатостями. Отдельно необходимо отметить, что в случае, когда источник дифракционно ограничен, целесообразно применять метод сложения амплитуд или метод сложения интенсивностей, которые очень быстро дадут сходимость. В этом случае для СЕРВАЛА потребуется тщательный анализ подходящих огибающих и, строго говоря, метод *не моделирует* фундаментальную моду ондуляторного излучения – случай излучения электронного пучка с бесконечно малым эмиттансом. Для источников с низкой степенью когерентности имеет смысл рассмотреть метод трассировки лучей, потому что все три волновых метода будут иметь весьма низкую сходимость и придётся моделировать большое число статистических реализаций для получения сходимости. В любом случае, прежде чем проводить оптический расчёт, необходимо изучить свойства источника излучения, например, при помощи программы SPECTRA [22], где можно оценить ожидаемую степень когерентности. Только исходя из свойств источника можно применять один из описанных методов моделирования. Именно такой подход даст

¹необходимо помнить, что число N_e должно быть достаточно велико для получения достоверного результата

оптимальный результат в смысле затраченного времени и достоверности полученных результатов.

3.1 Фокусирующая система с конечной апертурой

В представленном разделе будет рассматриваться оптическая схема, состоящая из источника излучения – ондулятора, апертуры и фокусирующего элемента. Параметры ондулятора и электронного пучка те же, что в Таблицах 2.2 и 2.3. Размер апертуры $1 \times 1 \text{ мм}^2$. Для SERVAL были выбраны огибающие II. Этот расчёт будет сопровождаться сравнением результатов метода СЕРВАЛ с результатами метода сложения амплитуд (МСА).

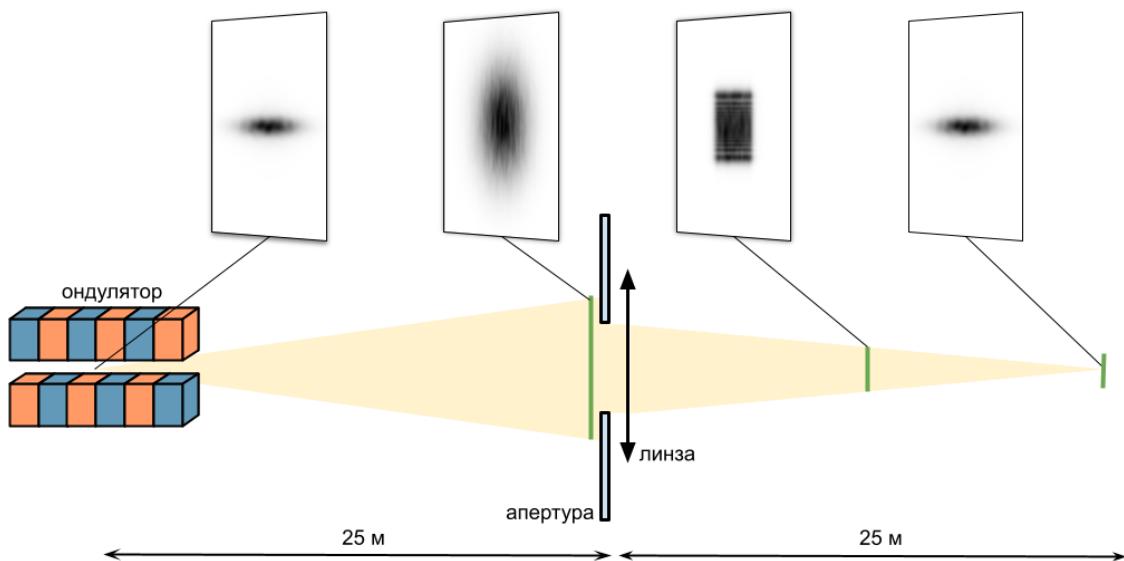


Рисунок 3.1 – Оптическая схема. Ондулятор в начале координат, апертура перед линзой на расстоянии 25 м от ондулятора, линза с фокусным расстоянием 12.5 м фокусирует излучение на образец, расположенный на 25 м от линзы. Распределения интенсивности смотрятся: на источнике, в дальней зоне перед апертурой, на половине пути к образцу и на самом образце.

Мнимое распределение интенсивности излучения на источнике представлено на Рис. 3.2

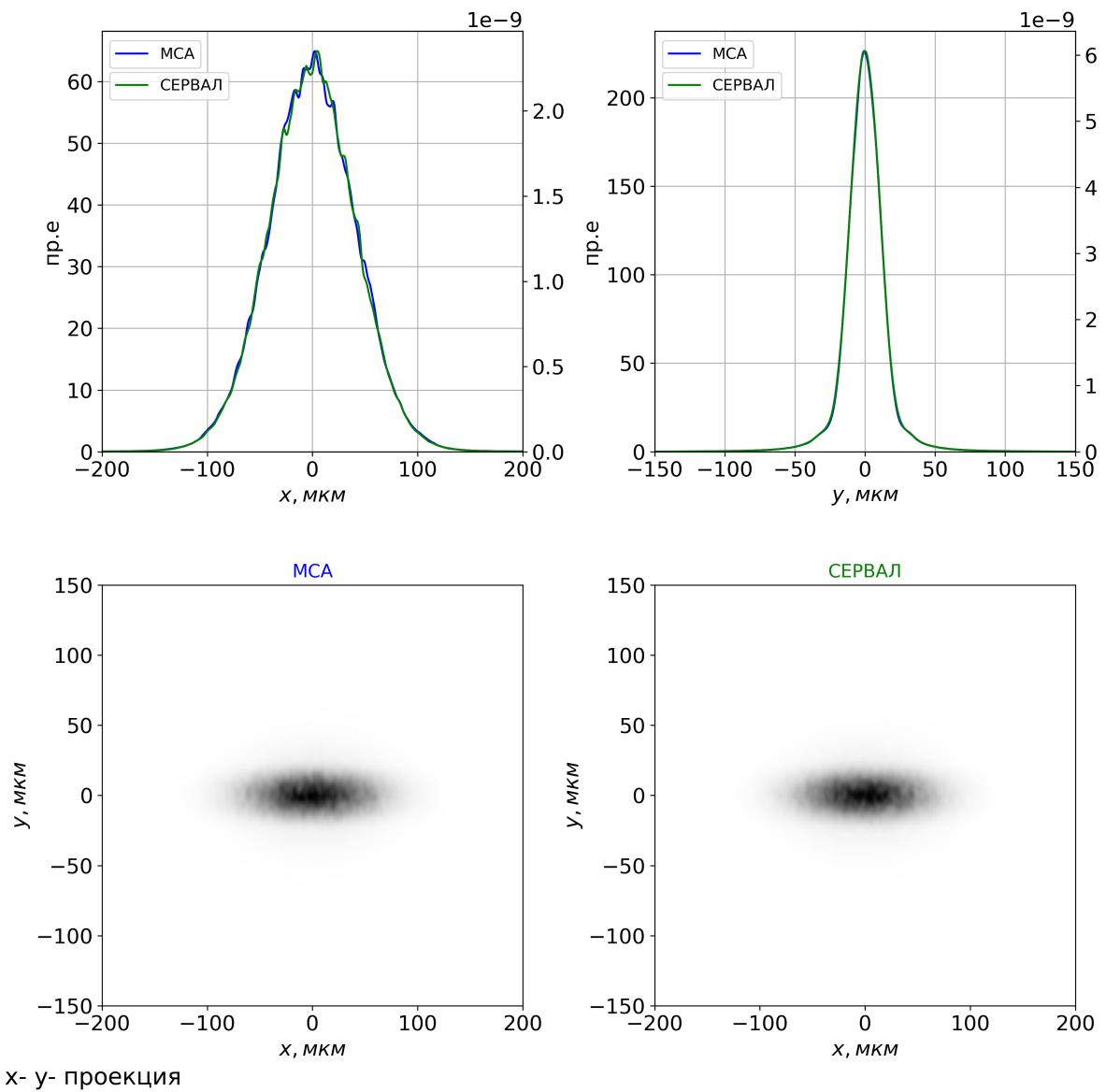
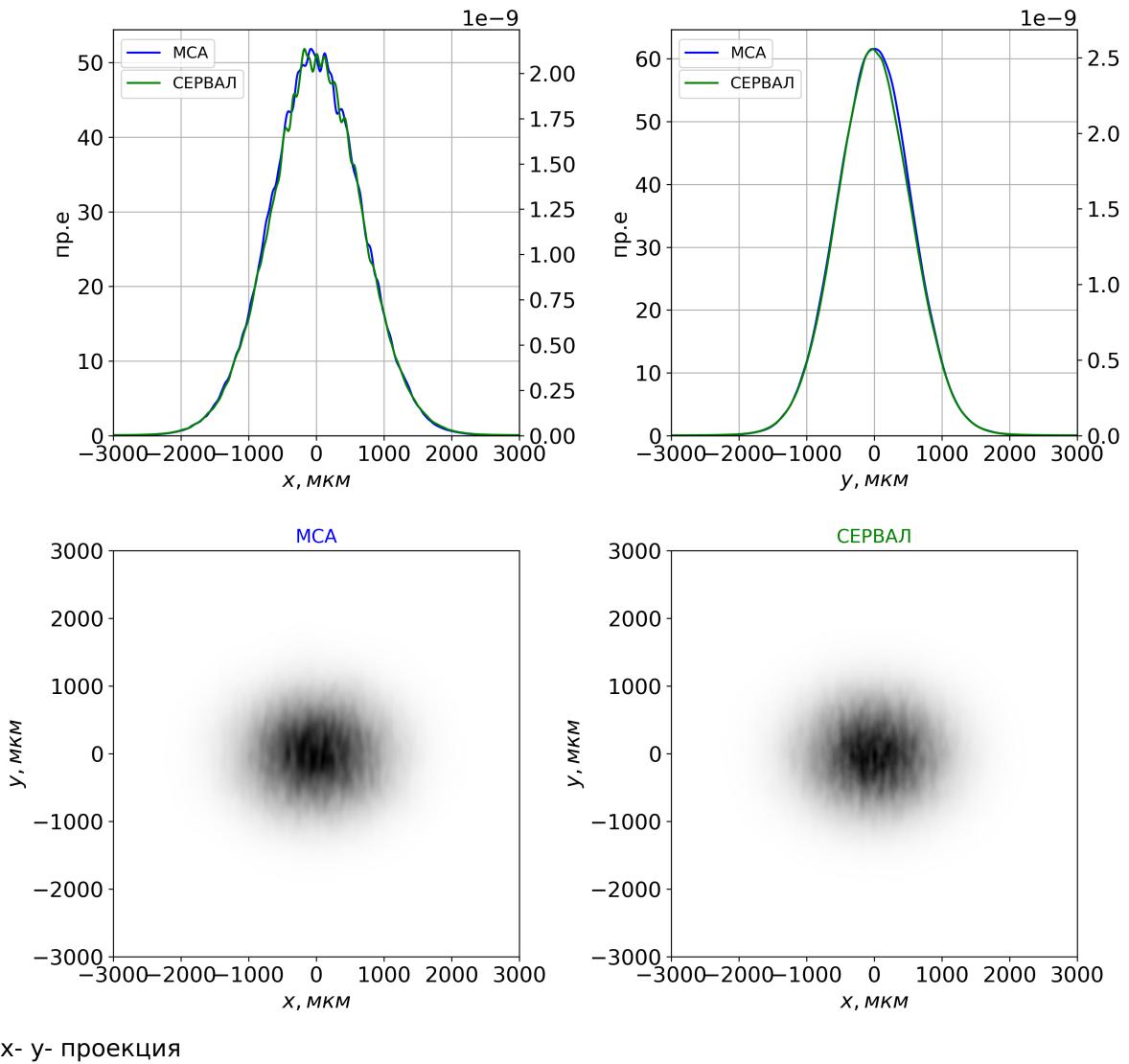


Рисунок 3.2 — Распределение интенсивности на источнике излучения с величиной среднеквадратичного отклонения $40.8 \times 10.8 \text{ мкм}^2$

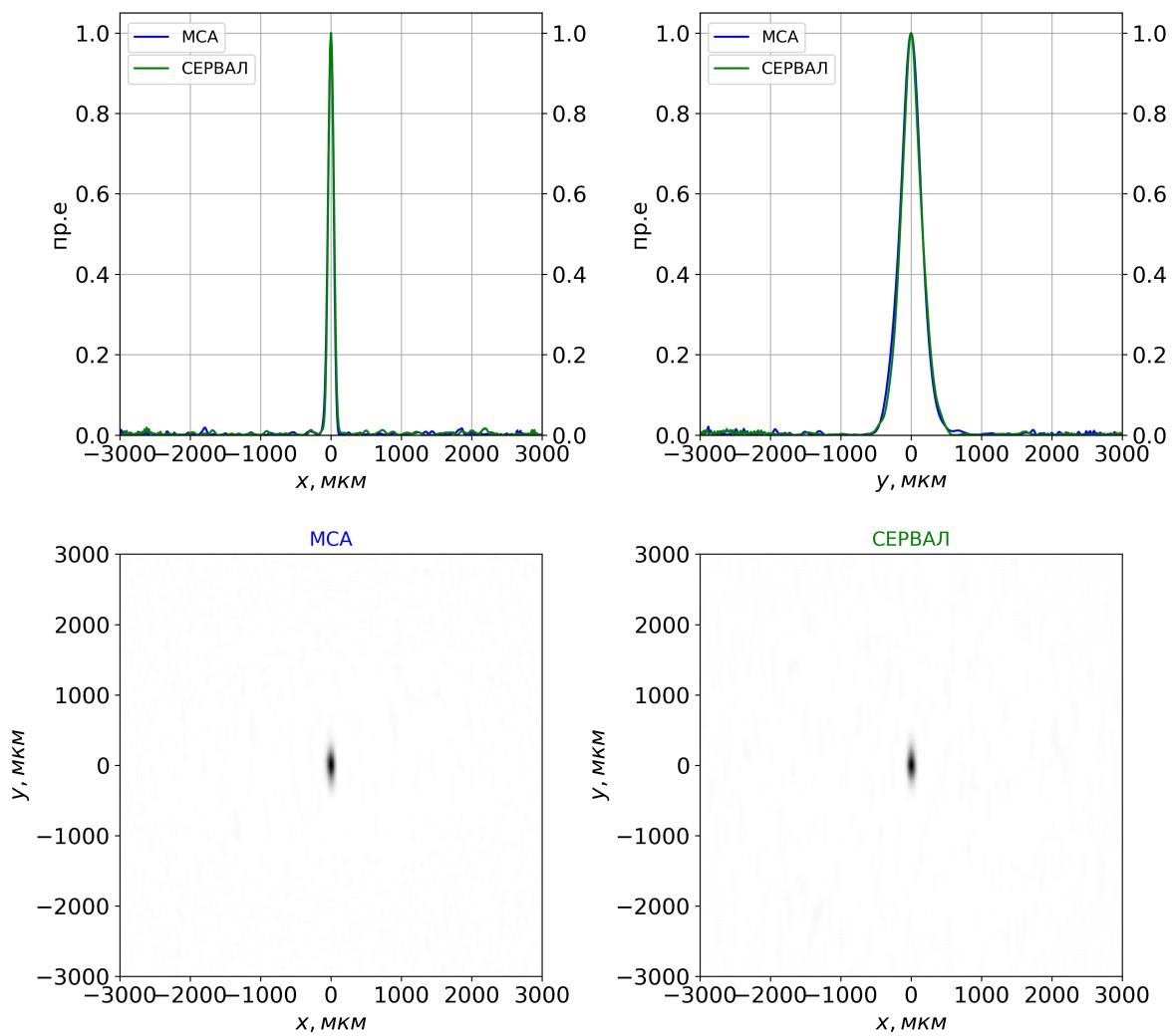
Распределение поля в дальней зоне на 25 м от ондулятора представлено на Рис. 3.3.



х-у- проекция

Рисунок 3.3 — Распределение интенсивности излучения в дальней зоне с величиной среднеквадратичного отклонения $750 \times 635 \text{ мкм}^2$.

Для усреднения было выбрано 300 реализаций, что даёт достаточную сходимость. Однако, в структуре излучения всё ещё видна характерная спайковая структура. Видно, что количество мод в вертикальном направлении меньше, чем в горизонтальном. Их типичный размер говорит о длине поперечной когерентности в соответствующих направлениях. Размер пятна когерентности представлен на Рис. 3.4.



х-у- срез

Рисунок 3.4 — Распределение функции взаимной когерентности, построенное по формуле 1.1 с величиной среднеквадратичного отклонения 40×150 мкм².

Распределение интенсивности поля после дифракции на апертуре и 12.5 метрах распространения поля через пустое пространство приведено на Рис. 3.5

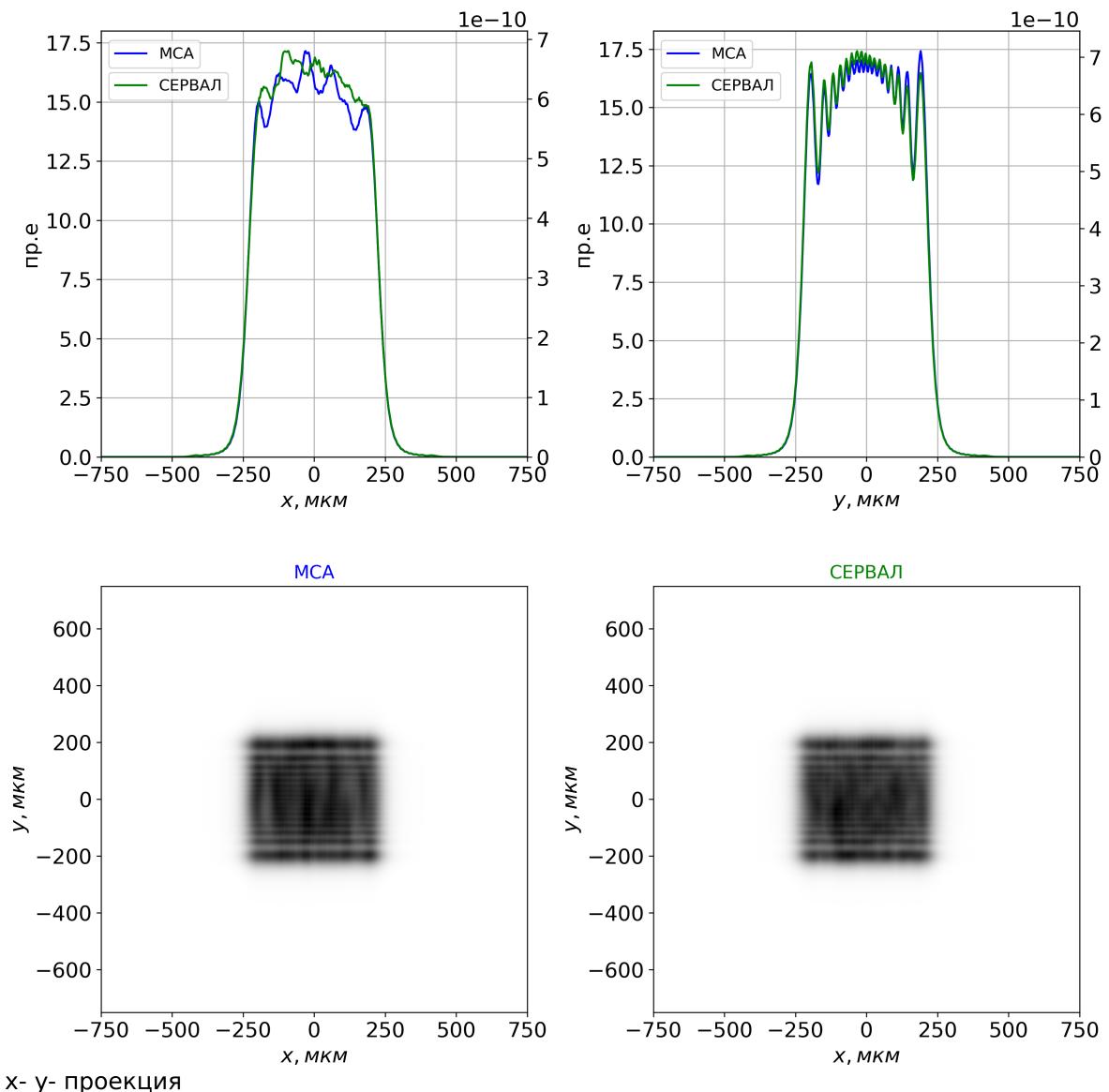


Рисунок 3.5 — Результат дифракции на апертуре и 12.5 м
распространения через пустое пространство, величина
среднеквадратичного отклонения представленных распределений

$$225 \times 222 \text{ } \mu\text{м}^2$$

Дифракционные картины отличаются для каждого из направлений: для вертикального дифракционные пики более выраженные ввиду большей длины когерентности, для горизонтального направления заметен только первый дифракционный максимум, что говорит о заметно меньшей степени когерентности.

Распределение поля на образце приведено на Рис. 3.6.

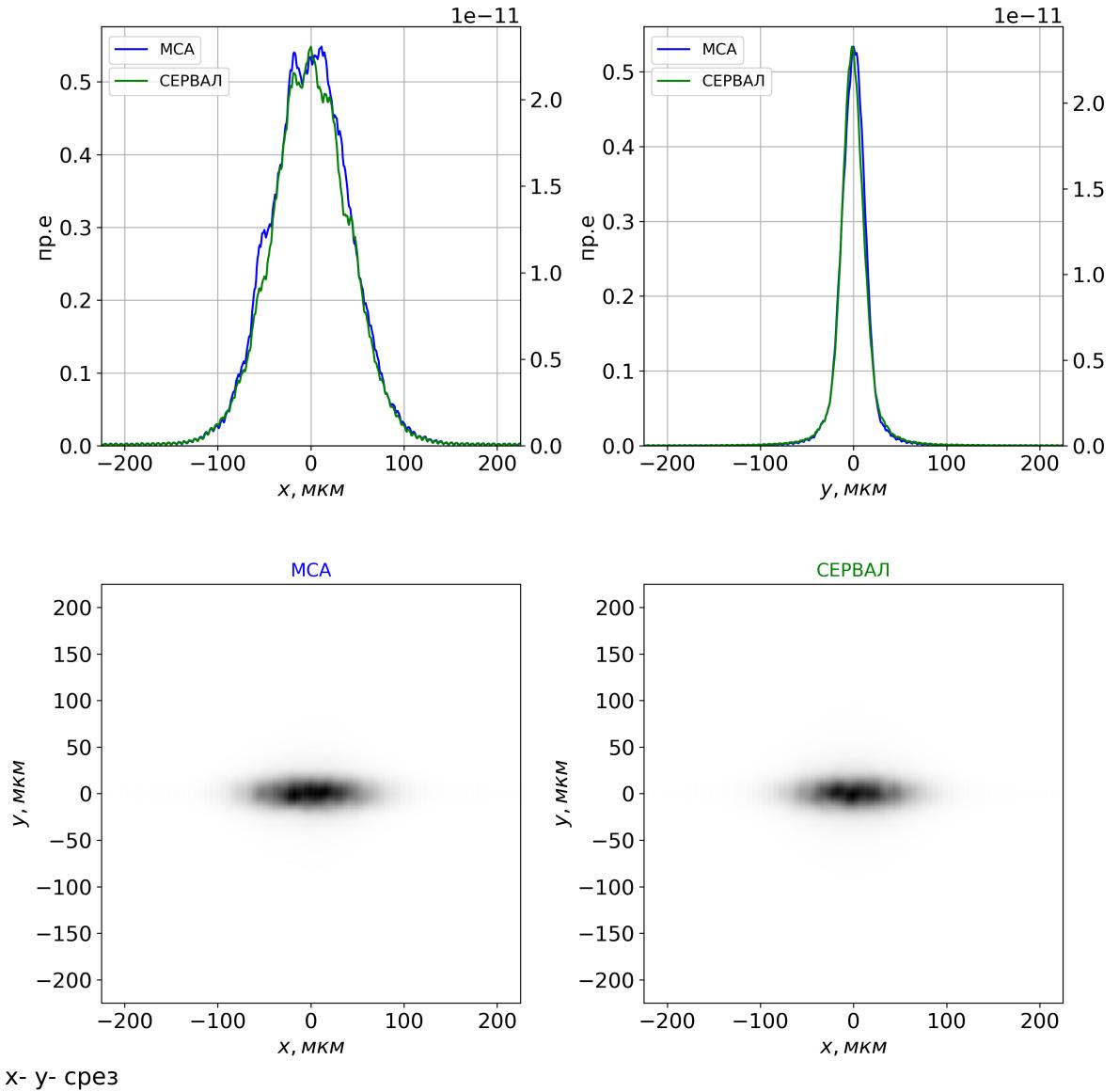


Рисунок 3.6 — Распределение излучения в фокусе, величина среднеквадратичного отклонения представленных распределений $42 \times 13.5 \text{ мкм}^2$

Для моделирования было выбрано соотношение плеч фокусирующей системы – 1 : 1. По критерию Рэлея, при размере апертуры $1 \times 1 \text{ мм}^2$, угловая разрешающая способность такой системы $\theta_{diff} = 1.22\lambda/D = 0.7 \text{ мкрад}$, где D размер апертуры. Угловой размер источника излучения θ_{source} для каждого из направлений $3.26 \times 0.86 \text{ мкрад}^2$. Размер изображения в фокусе определяется тогда как: $\sigma = f \sqrt{\theta_{source}^2 + \theta_{diff}^2}$, в горизонтальном направлении 42 мкм и в вертикальном направлении 14 мкм, что хорошо совпадает с результатами моделирования.

3.2 Интерференционный эксперимент

Чтобы наглядно продемонстрировать эффекты, связанные с частичной когерентностью, показательно будет провести классический опыт Юнга (двухщелевой интерферометр Юнга). Ниже на Рис. 3.7 приведён размер излучения на 25 м от источника излучения и распределение корреляционной функции в увеличенном масштабе с наложенными щелями. Щели на рисунках обозначены разными цветами: зелёный цвет – межщелевой зазор 75 мкм, красный – 150 мкм и оранжевый – 300 мкм, при среднеквадратичном отклонении функции взаимной когерентности 40×150 мкм².

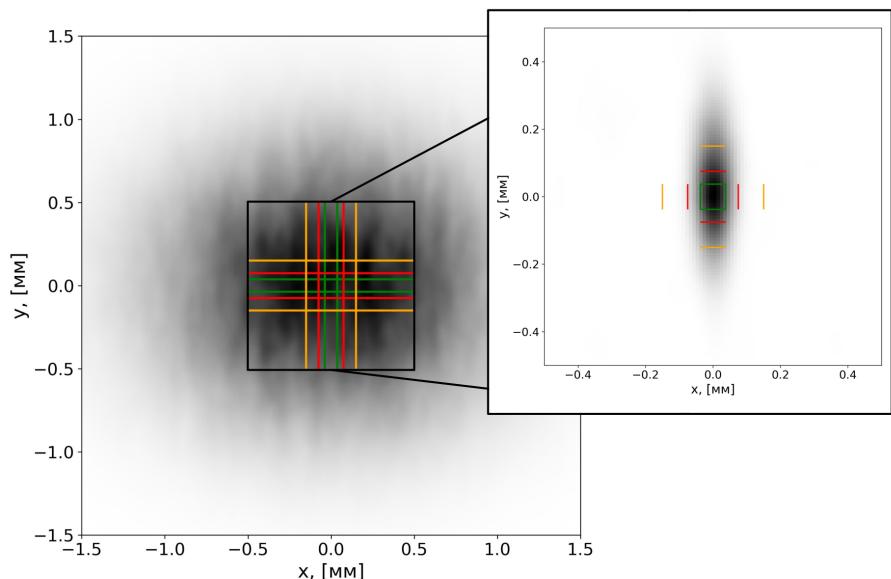


Рисунок 3.7 – Размер излучения на 25 м от источника (слева) и пятно когерентности на 25 м от источника с щелями (справа), щели обозначены цветными полосками. Три набора щелей для каждого из направлений. Межщелевые расстояния: зелёные полоски – 75 мкм, красные – 150 мкм и оранжевые – 300 мкм.

Схема эксперимента представлена на Рис. 3.8.

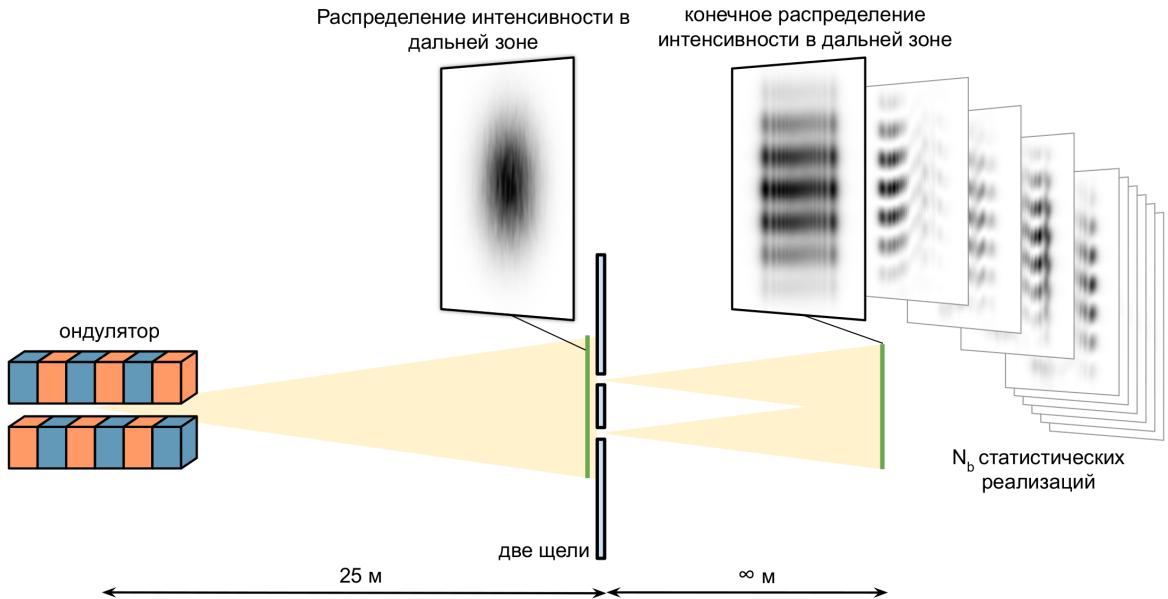


Рисунок 3.8 – Схема двухщелевого эксперимента. После щелей – интерферограмма усреднённа по 400 реализациям, а за ней интерферограммы для отдельных реализаций из статистического набора.

Интерферограммы приведены в дальней зоне. Примечательно, что видность каждой из реализаций равна единице, но при усреднении по многим реализациям видность падает из-за наличия частичной когерентности излучения

Как отмечает Дж. Гудмен, «Статистическая оптика», издательство «Мир», 1988, стр. 332 – 333 или зарубежное издание [5]: «Хотя видность любой из этих отдельных интерферограмм соответствует значению² $|\mu_{12}| = 1$, видность суперпозиции интерферограмм, вообще говоря, будет иной, поскольку фазы отдельных компонент будут изменяться от реализации к реализации. Таким образом, интерферограмма, усреднённая по ансамблю, вообще говоря, даст значения $|\mu_{12}|$, весьма отличные от единицы.»

Интерферограммы для различных межщелевых расстояний показаны на Рис. 3.9а, 3.9б, 3.9в. Распределения представлены для вертикального расположения щелей.

² μ_{12} – комплексный коэффициент когерентности, соответствующий $g^{(1)}$ в настоящей работе

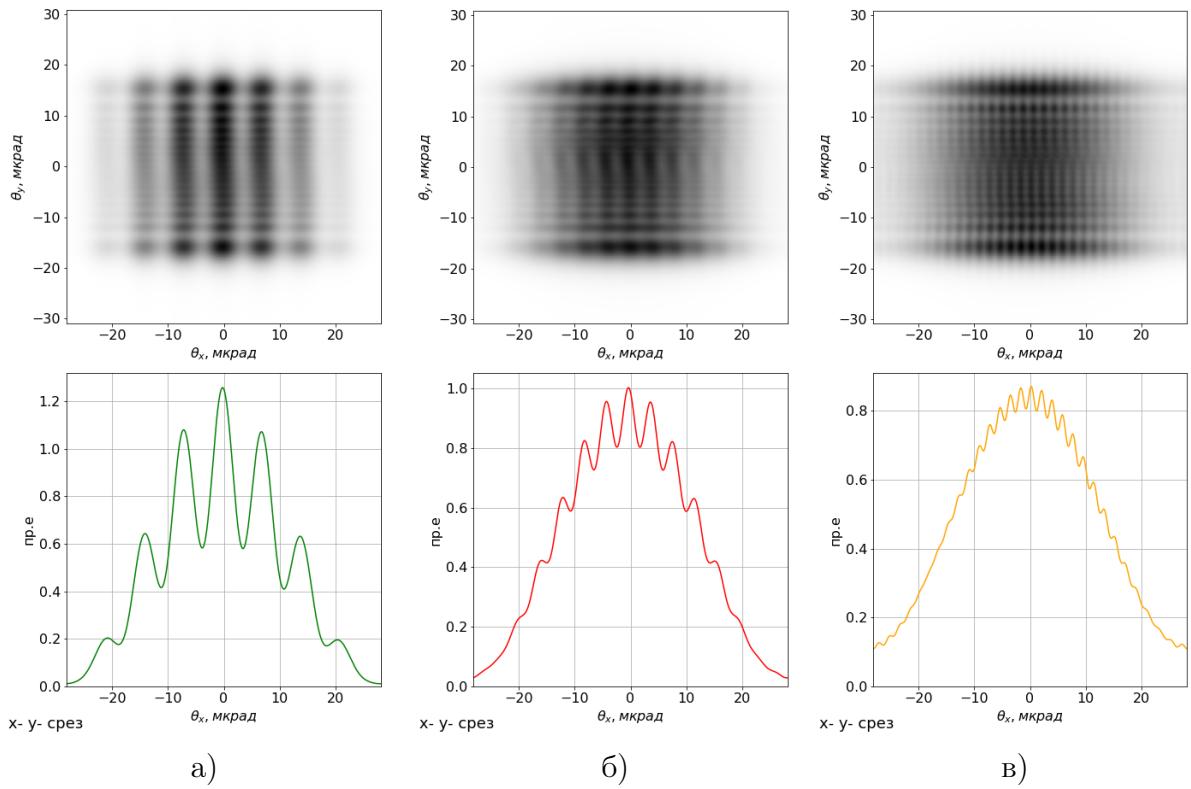


Рисунок 3.9 — Дифракционные картины для *вертикального* расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7

Необходимо заметить, что эти интерференционные картины представлены в k -пространстве или, другими словами, в дальней зоне на расстоянии $z \rightarrow \infty$ от щелей. Ещё одна особенность получившихся изображений: щели имеют конечный, в данном случае, горизонтальный размер равный 1 мм, именно поэтому в вертикальном направлении на Рис. 3.9а, 3.9б, 3.9в видна дифракция от полуплоскости.

Аналогичные интерферограммы построены для *горизонтальной* ориентации щелей (Рис. 3.10).

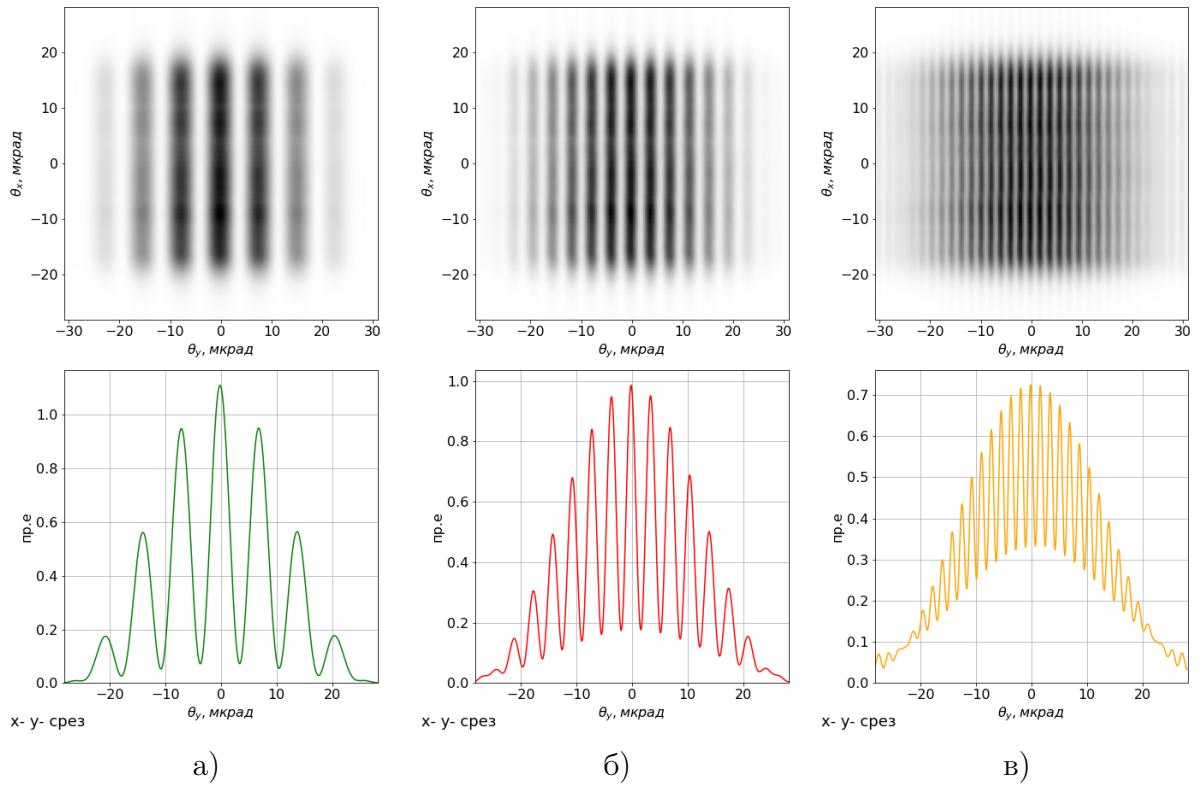


Рисунок 3.10 — Дифракционные картины для горизонтального расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7

В этом направлении излучение обладает большей степенью когерентности.

3.3 Отражение от неидеального зеркала

В этом разделе мы рассмотрим применение СЕРВАЛа при расчёте отражения частично когерентного излучения от зеркал с шероховатостями. При отражении от неидеального зеркала волновой фронт деформируется, что может в значительной степени влиять на размер и максимальную интенсивность излучения в фокусе, а также на когерентные свойства излучения. Ошибки по высоте δh вносят фазовый сдвиг:

$$\phi = \frac{4\pi\delta h}{\lambda} \sin(\theta_i), \quad (3.1)$$

где θ_i – угол падения на зеркало, отсчитываемый от поверхности.

Формула 3.1 даёт простой путь учёта шероховатости поверхностей при моделировании в волновом подходе. Таким образом действие неидеальной поверхности учитывается как фазовый фактор, модулирующий волновой фронт. Альтернативный подход – использование пошагового моделирования процесса отражения волнового фронта от поверхности зеркала с учётом прохождения излучения в вещество, так называемый англ. split-step method [23]. Сравнительный анализ этих двух походов приведён в работе [23], где показано совпадение оценки числа Штреля для различных величин шероховатостей. Вопросы моделирования профиля зеркала δh рассматриваются в Приложении Б

Для моделирования была выбрана та же оптическая схема, что и для фокусировки с апертурой в разделе 3.1. В данном примере в качестве фокусирующих элементов рассматриваются зеркала с тем же фокусным расстоянием – 12,5 метра. Апертура была исключена из рассмотрения, чтобы показать действие неидеального зеркала на свойства излучения при отражении.

На Рис. 3.11а и 3.11б представлены распределения излучения после отражения от неидеальных фокусирующих зеркал в *двух случаях*: вертикального расположения зеркала (Рис. 3.11а) и горизонтального (Рис. 3.11б). Среднеквадратичная амплитуда шероховатостей зеркала h_{rms} в каждом случае составляет 0,3 нм. Распределение излучения представлено после отражения и распространения волнового фронта на 12,5 м через пустое пространство.

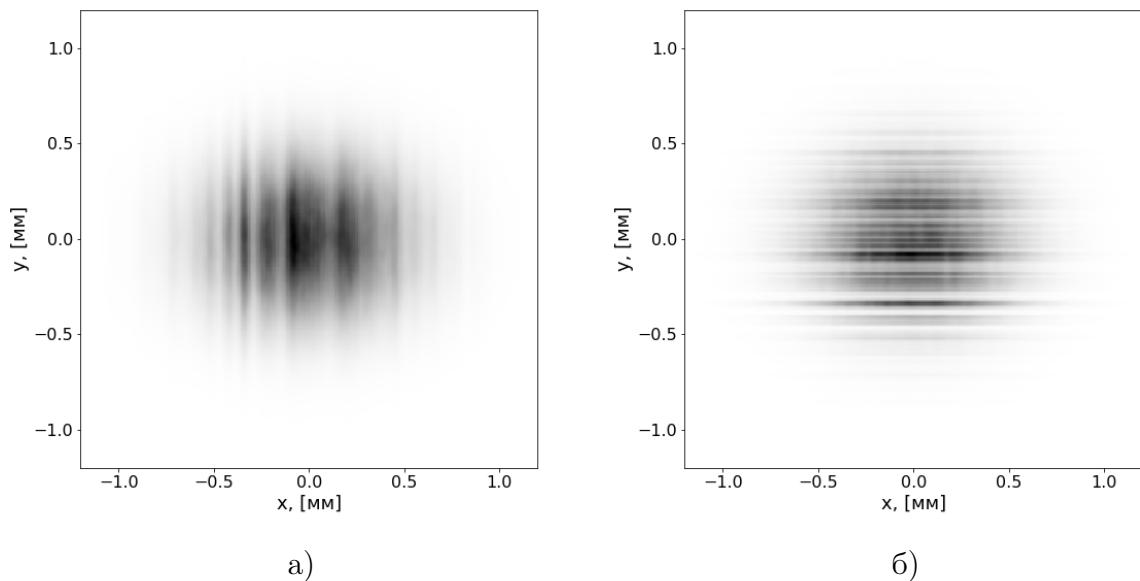


Рисунок 3.11 — Распределение интенсивности излучения после отражения от неидеального фокусирующего зеркала и распространение через 12,5 метров пустого пространства. На Рис. 3.11а зеркало ориентировано *вертикально*, на Рис. 3.11б зеркало ориентировано *горизонтально*.

Видно, при вертикальном расположении зеркала модуляции волнового фронта более сглажены из-за меньшей степени когерентности в горизонтальном направлении, в отличии горизонтального расположения зеркала – направление с большей степенью когерентности.

Для сравнения того, как влияют разные профили зеркала на свойства излучения после пропагации и в фокусе, на Рис. 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 представлены соответствующие распределения интенсивности излучения после отражения от зеркала со среднеквадратичными амплитудами шероховатостей равными 0,3 нм и 0,6 нм. Сравнение приведено для *двух* ориентаций моделируемого зеркала: зеркало ориентировано вертикально Рис. 3.12, 3.14. и, соответственно, горизонтально на Рис. 3.13, 3.15. Для всех случаев была выбрана *PSD* функция с коэффициентом $\beta = -1,8$, нормированная на соответствующие значения среднеквадратического отклонения ошибок профиля. Характер *PSD* функции разобран в Приложении Б.

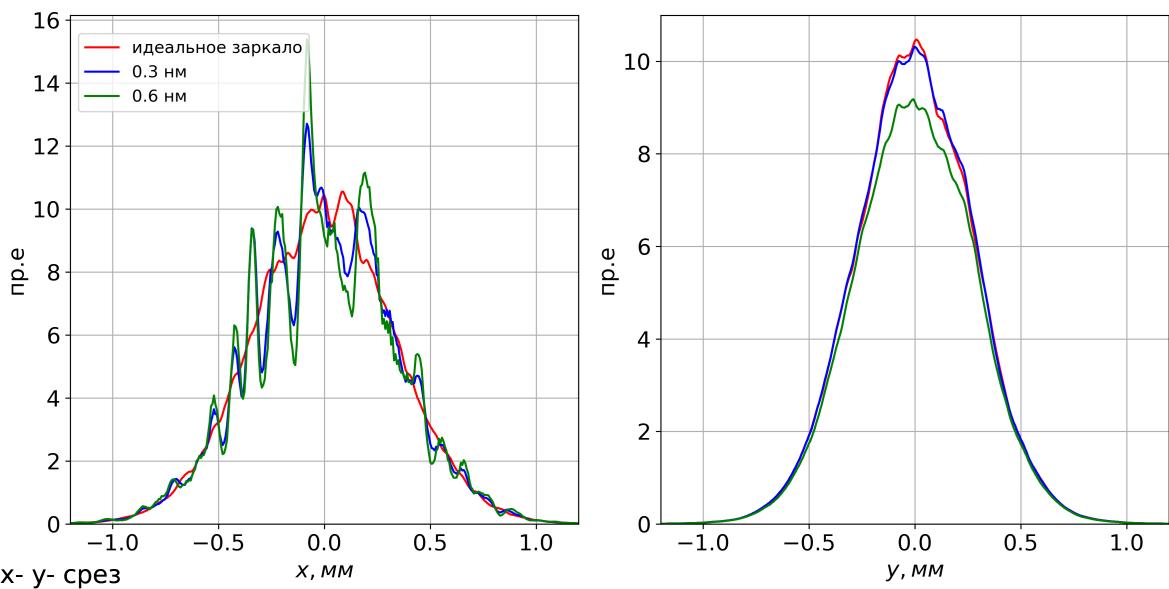


Рисунок 3.12 — Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12.5 от зеркала, зеркало ориентировано *вертикально*

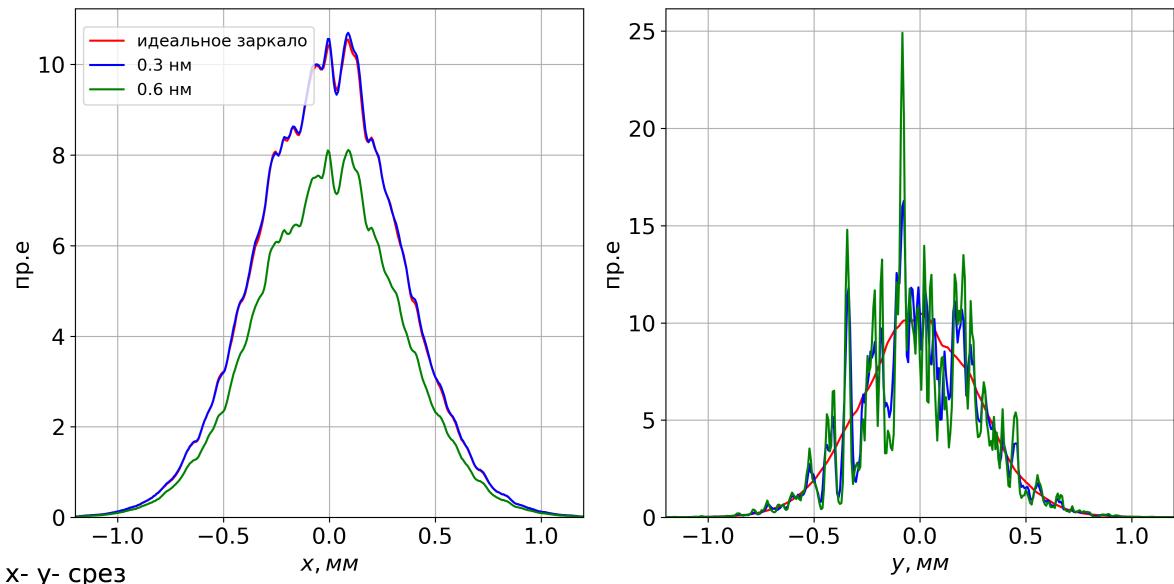


Рисунок 3.13 — Распределение интенсивности излучения после распространение на 12.5 от зеркала, зеркало ориентировано *горизонтально*

При генерации профиля зеркала выбиралось одинаковое начальное число (англ. seed) для генерации псевдослучайной величины, что делалось для воспроизводимости результатов. Именно поэтому модуляции распределение на Рис. 3.12 и 3.13 при увеличении величины шероховатости просто повторяют свою форму, но с большей амплитудой.

На Рис. 3.14 и 3.15 представлены распределения интенсивности излучения на образце (в фокусе).

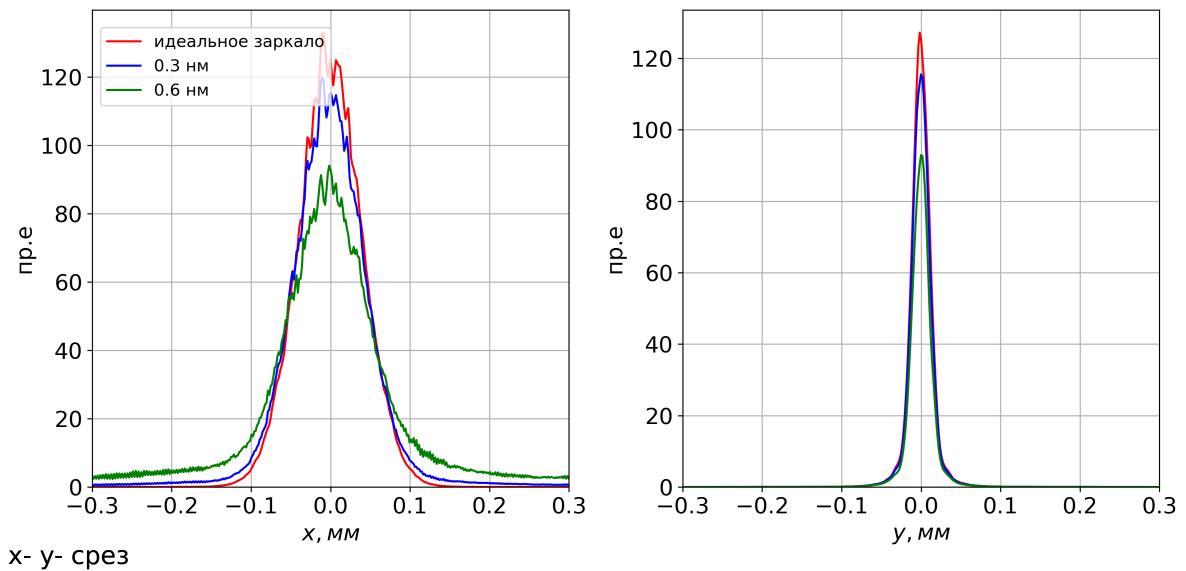


Рисунок 3.14 — Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало в данном случае ориентировано *вертикально*

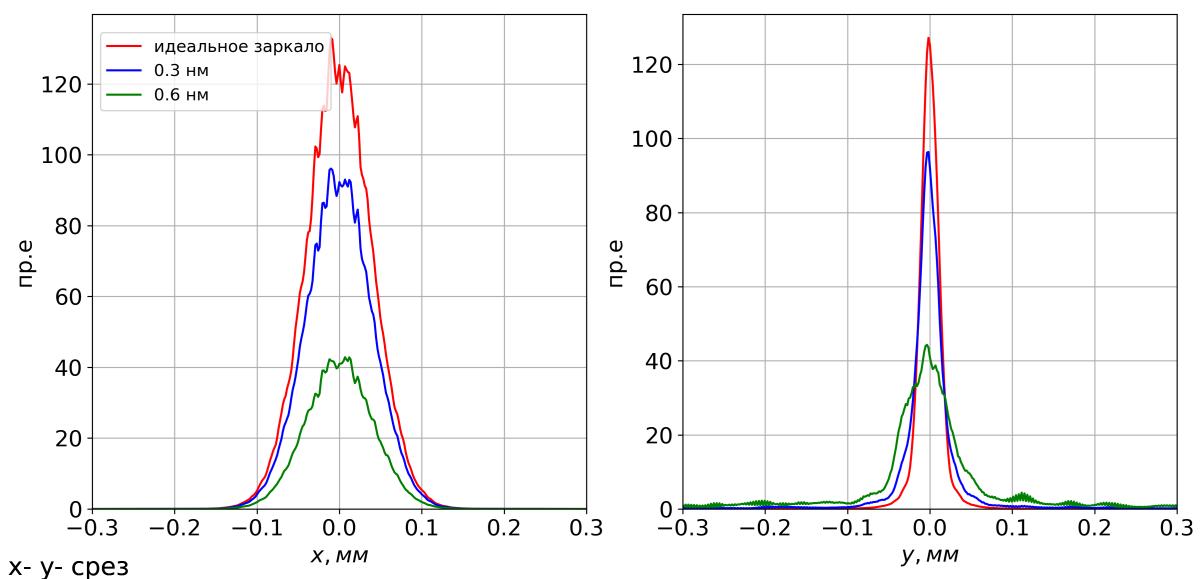


Рисунок 3.15 — Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало ориентировано *горизонтально*

Как видно на Рис. 3.14 и 3.15 шероховатости приводят к расплыванию фокусного пятна и, следственно, падению пиковой амплитуды интенсивности поля. Этот эффект играет критическую роль, например, для монохроматоров, основанных на дифракционных решётках, где размер

фокусного пятна определяет разрешающую способность монохроматора. Поэтому следует налагать довольно жёсткие требования на среднеквадратичные амплитуды шероховатостей рентгеновских зеркал, [24], [25].

Заключение

В работе представлен новый метод моделирования частично когерентного синхротронного излучения, называемый СЕРВАЛ. Метод основан на ограничении пространственных гармоник комплексного гауссово го шума огибающими излучения. Метод даёт точную оценку для распределения поля частично когерентного синхротронного излучения в сравнении с описанным в работе методом сложения амплитуд. В работе проведён сравнительный анализ этих двух методов, а так же показано, что СЕРВАЛ имеет преимущество по быстродействию на два порядка. Так же в работе представлены примеры применения СЕРВАЛА для практических значимых оптических схем. Рассмотрено отражение частично когерентного излучения от рентгеновского зеркала с шероховатостями.

СЕРВАЛ нашёл применение при проектировании рентгенооптических трактов источника синхротронного излучения четвёртого поколения ЦКП «СКИФ». С помощью СЕРВАЛА было смоделировано прохождение частично когерентного синхротронного излучения через толстый образец с градиентом диэлектрической проницаемости. Решаемая задача представляет первое приближение численной модели рассеяния рентгеновского излучения на фронте ударной волны. Эта задача поставлена в рамках работы по проектированию станции 1-3 «Быстропротекающие процессы» ЦКП «СКИФ»

Список литературы

1. *Bartolini R.* Challenges in the design and construction of diffraction limited light sources. — Hamburg, 2021. — Conference talk at DESY users' meeting 2021.
2. *Hettel R.* Challenges in the Design of Diffraction-limited Storage Rings // Proceedings of the 5th Int. Particle Accelerator Conf. — 2014. — Vol. IPAC2014. — 5 pages, 0.551 MB. — DOI: 10.18429 / JACOW - IPAC2014-MOXBA01. — URL: <http://jacow.org/ipac2014/doi/JACoW-IPAC2014-MOXBA01.html> (visited on 04/22/2021) ; Artwork Size: 5 pages, 0.551 MB ISBN: 9783954501328 Medium: PDF Publisher: JACoW Publishing, Geneva, Switzerland.
3. SHADOW3: a new version of the synchrotron X-ray optics modelling package / M. Sanchez del Rio [et al.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2011. — Sept. — Vol. 18, no. 5. — P. 708–716. — DOI: 10.1107/S0909049511026306. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0909049511026306> (visited on 04/22/2021).
4. *Goodman J.* Introduction to Fourier Optics. — W. H. Freeman, 2005. — (McGraw-Hill physical and quantum electronics series). — ISBN 978-0-9747077-2-3. — URL: https://books.google.ru/books?id=ow5xs_Rtt9AC.
5. *Goodman J.* Statistical Optics. — Wiley, 2015. — (Wiley Series in Pure and Applied Optics). — ISBN 978-1-119-00946-7. — URL: <https://books.google.ru/books?id=9O18CAAAQBAJ>.
6. *Chubar O., Elleaume P.* Accurate and efficient computation of synchrotron radiation in the near field region // proc. of the EPAC98 Conference. — 1998. — c. 1177–1179.
7. Transverse coherence properties of X-ray beams in third-generation synchrotron radiation sources / G. Geloni [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2008. — Apr. — Vol. 588, no. 3. — P. 463–493. — DOI: 10.1016/j.nima.2008.

- 01.089. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900208001605> (visited on 02/22/2021).
8. *Cittert P. H. van.* Die Wahrscheinliche Schwingungsverteilung in Einer von Einer Lichtquelle Direkt Oder Mittels Einer Linse Beleuchteten Ebene // *Physica.* — 1934. — янв. — т. 1, № 1. — с. 201—210. — DOI: 10.1016/S0031-8914(34)90026-4. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891434900264> (дата обр. 20.04.2021).
 9. *Zernike F.* The concept of degree of coherence and its application to optical problems // *Physica.* — 1938. — Aug. — Vol. 5, no. 8. — P. 785—795. — DOI: 10.1016/S0031-8914(38)80203-2. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891438802032> (visited on 04/20/2021).
 10. *Cullity B. D.* Elements of X-ray Diffraction. — Addison-Wesley Publishing Company, 1956. — ISBN 978-0-201-01230-9. — Google-Books-ID: XJVCgGFTODMC.
 11. Effects of energy spread on Brightness and Coherence of undulator sources / G. Geloni [и др.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2018. — сент. — т. 25, № 5. — с. 1335—1345. — DOI: 10.1107/S1600577518010330. — URL: <http://arxiv.org/abs/1808.05019> (дата обр. 28.04.2021) ; arXiv: 1808.05019.
 12. *Geloni G., Kocharyan V., Saldin E.* Brightness of Synchrotron radiation from Undulators and Bending Magnets // arXiv:1407.4591 [physics]. — 2014. — июль. — URL: <http://arxiv.org/abs/1407.4591> (дата обр. 21.04.2021) ; arXiv: 1407.4591.
 13. *Chubar O.* Simulation of emission and propagation of coherent synchrotron radiation wave fronts using the methods of wave optics // Infrared Physics & Technology. — 2006. — Sept. — Vol. 49, no. 1. — P. 96—103. — (International Workshop on Infrared Microscopy and Spectroscopy with Accelerator-Based Sources). — DOI: 10.1016/j.infrared.2006.01.010. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350449506000120> (visited on 04/03/2021).

14. *Singer A., Vartanyants I. A.* Modelling of partially coherent radiation based on the coherent mode decomposition // Advances in Computational Methods for X-Ray Optics II. т. 8141. — International Society for Optics, Photonics, 09.2011. — с. 814106. — DOI: 10.1117/12.893618. — URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/8141/814106/Modelling-of-partially-coherent-radiation-based-on-the-coherent-mode/10.1117/12.893618.short> (дата обр. 28.04.2021).
15. Application of Gaussian Schell-Model and Its Coherent Mode Decomposition on Hard X-Ray Synchrotron Radiation / W. Q. Hua [и др.] // 2012 Symposium on Photonics and Optoelectronics. — 05.2012. — с. 1—6. — DOI: 10.1109/SOPO.2012.6270955. — ISSN: 2156-8480.
16. *Khubbudinov R., Menushenkov A. P., Vartanyants I. A.* Coherence properties of the high-energy fourth-generation X-ray synchrotron sources // Journal of Synchrotron Radiation. — 2019. — Nov. — Vol. 26, no. 6. — P. 1851–1862. — DOI: 10.1107/S1600577519013079. — URL: <https://journals.iucr.org/s/issues/2019/06/00/pp5149/> (visited on 04/28/2021) ; Number: 6 Publisher: International Union of Crystallography.
17. (IUCr) Genuine-field modeling of partially coherent X-ray imaging systems. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/iucr/doi/10.1107/S1600577520006979> (дата обр. 28.04.2021).
18. *Onuki H., Elleaume P.* Undulators, wigglers, and their applications. — London : Taylor & Francis, 2003. — ISBN 978-0-203-21823-5 978-0-203-27377-7. — URL: <http://www.crcnetbase.com/isbn/9780203218235> (visited on 03/29/2021) ; OCLC: 941215200.
19. Fourier treatment of near-field synchrotron radiation theory / G. Geloni [et al.] // Optics Communications. — 2007. — Aug. — Vol. 276, no. 1. — P. 167–179. — DOI: 10.1016/j.optcom.2007.03.051. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401807003367> (visited on 02/26/2021).
20. *Voelz D. G.* Computational fourier optics: a MATLAB tutorial. — Bellingham, Wash : SPIE Press, 2011. — ISBN 978-0-8194-8204-4.

21. *Schmidt J. D.* Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in MATLAB. — SPIE, 07/2010. — ISBN 978-0-8194-8327-0. — DOI: 10.1117/3.866274. — URL: <https://spiedigitallibrary.org/ebooks/PM/Numerical-Simulation-of-Optical-Wave-Propagation-with-Examples-in-MATLAB/eISBN-9780819483270/10.1117/3.866274> (visited on 05/20/2021).
22. *Tanaka T., Kitamura H.* SPECTRA: a synchrotron radiation calculation code // Journal of Synchrotron Radiation. — 2001. — Nov. — Vol. 8, no. 6. — P. 1221–1228. — DOI: 10.1107/S090904950101425X. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?wr2001> (visited on 05/14/2021) ; Number: 6 Publisher: International Union of Crystallography.
23. *Serkez S.* Design and Optimization of the Grating Monochromator for Soft X-Ray Self-Seeding FELs : PhD thesis / Serkez Svitozar. — Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron, 2015. — URL: <https://bib-pubdb1.desy.de/record/275967> (visited on 03/30/2021) ; Number: PUBDB-2015-04348.
24. High-resolution soft X-ray beamline ADRESS at the Swiss Light Source for resonant inelastic X-ray scattering and angle-resolved photoelectron spectroscopies / V. N. Strocov [et al.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2010. — Sept. — Vol. 17, no. 5. — P. 631–643. — DOI: 10.1107/S0909049510019862. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0909049510019862> (visited on 05/15/2021).
25. *Sankari R.* HIPPIE beamline at MAX IV: Detailed optical design report. —.
26. *Church E. L., Takacs P. Z.* Specification of surface figure and finish in terms of system performance // Applied Optics. — 1993. — July. — Vol. 32, no. 19. — P. 3344. — DOI: 10.1364/AO.32.003344. — URL: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ao-32-19-3344> (visited on 05/15/2021).
27. Fractal description of rough surfaces / O. V. Angeisky [et al.]. —.
28. Using the Power Spectral Density Method to Characterize and Evaluate the X-ray Mirrors Surfaces / W. Q. Hua [et al.]. — 2013.

29. Statistical measurement of mid-spatial frequency defects of large optics / J. Xu [et al.] // Measurement Science and Technology. — 2012. — Apr. — Vol. 23, no. 6. — P. 065201. — DOI: 10.1088/0957-0233/23/6/065201. — URL: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/23/6/065201> (visited on 05/15/2021) ; Publisher: IOP Publishing.
30. Predicting the coherent X-ray wavefront focal properties at the Linac Coherent Light Source (LCLS) X-ray free electron laser / A. Barty [и др.] // Optics Express. — 2009. — авг. — т. 17, № 18. — с. 15508—15519. — DOI: 10.1364/OE.17.015508. — URL: <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-17-18-15508> (дата обр. 15.05.2021) ; Publisher: Optical Society of America.

Список рисунков

1.1	К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике	9
1.2	К формулировке обобщённой теоремы Ван Циттерта-Цернике	10
1.3	Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Здесь красной линией показана полоса излучения, выделяемая монохроматором	13
2.1	Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Красной линией обозначена разрешающая способность монохроматора	18
2.2	Схема работы метода сложения амплитуд	19
2.3	Схема метода сложения интенсивностей	21
2.4	Схема эффекта зависимости расходимости излучения от размера электронного пучка. Рисунок разделён на две части: ближняя зона, источник излучения – слева и дальняя зона – справа. Жёлтой линией схематично изображена характерный поперечный размер излучения, синей линией характерный поперечный размер электронного пучка, жёлтая волнистая линия символизирует длину волны излучения в сравнение с продольным размером электронного пучка. Важно отметить, схематичный масштаб для обоих рисунков (верхнего и нижнего), – тот же. Расходимости электронных пучков (сверху и снизу) одинаковы.	23
2.5	Расходимость излучения от электронного пучка с размерами, указанными в легенде. Расходимость электронного пучка много меньше натуральной расходимости синхротронного излучения	23

2.6 Схема эффекта зависимости расходимости излучения от продольной когерентности излучения. Жёлтой линией обозначен характерный поперечный размер излучения, жёлтой волнистой длины волны излучения с сравнение в продольным размером электронного пучка. На рисунке обозначено, что в случае продольно некогерентного излучения расходимость в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в случае продольно когерентного излучения	25
2.7 Расходимость излучения в случае продольно когерентного излучения (зелёная линия), и продольно некогерентного излучения (синяя линия).	26
2.8 Интенсивность комплексного гауссова шума	27
2.9 Излучение с наложенным шумом	28
2.10 Моды излучения в k -пространстве на источнике	28
2.11 Расходимость излучения в источнике	28
2.12 Размер излучения в источнике	28
2.13 Распределение поля на источнике излучения для разных огибающих в сравнении с распределением, даваемым методом сложения амплитуд	32
2.14 Функция взаимной когерентности на расстоянии 25 м от источника	33
2.15 Размеры излучения в дальней зоне (расходимость) на расстоянии 25 м	33
 3.1 Оптическая схема. Ондулятор в начале координат, апертура перед линзой на расстоянии 25 м от ондулятора, линза с фокусным расстоянием 12.5 м фокусирует излучение на образец, расположенный на 25 м от линзы. Распределения интенсивности смотрятся: на источнике, в дальней зоне перед апертурой, на половине пути к образцу и на самом образце.	36
3.2 Распределение интенсивности на источнике излучения с величиной среднеквадратичного отклонения 40.8×10.8 мкм ²	37
3.3 Распределение интенсивности излучения в дальней зоне с величиной среднеквадратичного отклонения 750×635 мкм ² .	38

3.4	Распределение функции взаимной когерентности, построенное по формуле 1.1 с величиной среднеквадратичного отклонения $40 \times 150 \text{ мкм}^2$	39
3.5	Результат дифракции на апертуре и 12.5 м распространения через пустое пространство, величина среднеквадратичного отклонения представленных распределений $225 \times 222 \text{ мкм}^2$	40
3.6	Распределение излучения в фокусе, величина среднеквадратичного отклонения представленных распределений $42 \times 13.5 \text{ мкм}^2$	41
3.7	Размер излучения на 25 м от источника (слева) и пятно когерентности на 25 м от источника с щелями (справа), щели обозначены цветными полосками. Три набора щелей для каждого из направлений. Межщелевые расстояния: зелёные полоски – 75 мкм, красные – 150 мкм и оранжевые – 300 мкм.	42
3.8	Схема двухщелевого эксперимента. После щелей – интерферограмма усреднённа по 400 реализациям, а за ней интерферограммы для отдельных реализаций из статистического набора. Интерферограммы приведены в дальней зоне. Примечательно, что видность каждой из реализаций равна единице, но при усреднении по многим реализациям видность падает из-за наличия частичной когерентности излучения	43
3.9	Дифракционные картины для <i>вертикального</i> расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7	44
3.10	Дифракционные картины для <i>горизонтального</i> расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7	45

3.11 Распределение интенсивности излучения после отражения от неидеального фокусирующего зеркала и распространение через 12,5 метров пустого пространства. На Рис. 3.11а зеркало ориентировано <i>вертикально</i> , на Рис. 3.11б зеркало ориентировано <i>горизонтально</i>	47
3.12 Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12.5 от зеркала, зеркало ориентировано <i>вертикально</i> . . .	48
3.13 Распределение интенсивности излучения после распространение на 12.5 от зеркала, зеркало ориентировано <i>горизонтально</i>	48
3.14 Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало в данном случае ориентировано <i>вертикально</i>	49
3.15 Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало ориентировано <i>горизонтально</i>	49

Список таблиц

2.1	Быстродействие метода сложения амплитуд (МСА) и СЕРВАЛА	29
2.2	Параметры ондулятора	31
2.3	Параметры электронного пучка	31

Приложение А

Анализ подходящих огибающих для СЕРВАЛА

[В этом Приложении будут более подробно рассмотрены подходящие огибающие для СЕРВАЛА при различных параметрах электронного пучка]

Приложение Б

Описание шероховатости поверхностей зеркал

Число Штреля, упомянутое части 3.3, описывает относительное падение интенсивности излучения на оси из-за наличия в оптической системе aberrаций и может быть использовано для выдвижения критерия (критерий Марешала), налагающего ограничение на среднеквадратичное отклонение h_{rms} , а так же ошибку наклона μ_{rms} , [26]:

$$\frac{I(0)}{I_0(0)} = 1 - 8 \frac{\mu_{rms}^2}{\theta_i} - \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sin(\theta_i) \right)^2 h_{rms}^2 < 0,8. \quad (\text{Б.1})$$

Здесь $I(0)$ и $I_0(0)$ интенсивность излучения на оптической оси в фокусе при отражении от неидеального зеркала.

Как видно, формула Б.1 зависит от двух параметров h_{rms} и μ_{rms} . Полное описание поверхности зеркала возможно в обратном пространстве функцией спектральной плотности $PSD(k)$, которая определяется следующим образом:

$$PSD(k) = \frac{1}{L} \left| \int_{-L/2}^{L/2} \delta h(z) \exp(-ikz) dz \right|^2 \quad (\text{Б.2})$$

В показано [27], что профиль зеркала имеет фрактальную структуру с параметром D , удовлетворяющий условию $1 < D < 2$, что даёт линейный вид PSD -функции в лог-лог масштабе, описываемый двумя параметрами: свободным членом α и наклоном β , при $D = (5 - \alpha)/2$. Соответственно,

$$PSD(k) = \beta k - \alpha. \quad (\text{Б.3})$$

Через *PSD*-функцию удобно определять среднеквадратичные значения ошибок по высоте и наклону через интегралы по *PSD* функции:

$$\mu_{rms}^2 = (2\pi)^2 \int_{1/L}^{1/W} k^2 PSD(k) dk, \quad (\text{Б.4})$$

$$h_{rms}^2 = \int_{1/W}^{1/\lambda} PSD(k) dk, \quad (\text{Б.5})$$

где W длина когерентности излучения на зеркале. Видно, что при некоторых значениях W и параметрах оптической системы, величина μ_{rms} теряет свой смысл и равна нулю.

h_{rms} и μ_{rms} – некоторые средние, поэтому через них сложно полно описать профиль зеркала. При расчёте оптики необходимо знать саму *PSD* функцию.

Зная *PSD* функцию зеркала, можно, обращая формулу Б.2, моделировать профиль зеркала [28], [29], [30].

$$\delta h(z) = \frac{M}{L} F^{-1} \left\{ \sqrt{L \cdot PSD(k)} \exp[i\psi(k)] \right\}(z), \quad (\text{Б.6})$$

где $F^{-1}\{\cdot\}(z)$ обратное преобразование фурье, а M – количество точек вдоль оси z , $\psi(k)$ – случайно сгенерированная фаза, удовлетворяющая условию $-\pi < \psi(k) < \pi$, равномерно распределенная в этом промежутке. Таким образом, зная профиль зеркала $\delta h(z)$ и используя формулу 3.1, можно провести моделирование процесса отражения волнового фронта от неидеального зеркала.