

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Теоретический базис	8
1.1 Поперечная функция когерентности и теорема Ван Циттерта - Цернике	8
1.2 О статистических свойства синхротронного излучения	11
Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от электронного сгустка с конечным эмиттансом	15
2.1 Расчёт ондуляторного излучения прямым моделированием методом Монте-Карло	16
2.1.1 Метод сложения амплитуд	18
2.1.2 Метод сложения интенсивностей	20
2.2 Учёт влияния размера электронного сгустка на расходимость излучения при помощи прямых методов Монте-Карло	22
2.2.1 Влияние размера электронного сгустка на расходимость излучения	22
2.2.2 Различие расходимости излучения для случая продольно когерентного и некогерентного излучения	24
2.3 Описание метода СЕРВАЛ	26
2.3.1 Алгоритм создания поля	26
2.3.2 Выбор подходящих распределений для ограничения пространственных гармоник шума	29
Глава 3. Применение СЕРВАЛА	34
3.1 Фокусирующая система с конечной апертурой	35
3.2 Интерференционный эксперимент	41
3.3 Отражение от неидеального зеркала	44
Список литературы	51

Список рисунков	56
Список таблиц	60
Приложение А. Анализ подходящих огибающих для СЕРВАЛа	61
Приложение Б. Описание шероховатости поверхностей зеркал	62

Аннотация

Представленная работа посвящена разработке алгоритма моделирования частично когерентного синхротронного излучения и его применения для расчёта нескольких рентгенооптических оптических схем. В работе рассматриваются теоретические основы процесса генерации и распространения частично когерентного синхротронного излучения, а также его статистические характеристики. По ходу изложения приводится описание двух известных методов моделирования частично когерентного излучения, первый из которых обсуждался в литературе, однако не был описан в программном коде и, соответственно, не применялся при расчёте рентгенооптических схем синхротронных источников излучения. С помощью этого метода в работе описан эффект влияния продольной когерентности излучения на его угловую расходимость. При этом второй метод широко используется, несмотря на то, что обладает рядом недостатков, обсуждаемых в работе. Оба метода дают физически достоверный результат для наблюдаемых интенсивностей синхротронного излучения, однако только первый метод даёт физически правильные поля излучения. На основе проделанной работы по изучению статистических свойств синхротронного излучения, был создан алгоритм, называемый СЕРВАЛ, качественно отличающийся от уже известных подходов. Была проведена перекрёстная проверка СЕРВАЛА на совпадение генерируемого поля в источнике и дальней зоне, а также соответствующих функций поперечной когерентности. Применение СЕРВАЛ показано на примере трёх оптических схем: фокусировка при наличии конечной входной апертуры, классический двухщелевой эксперимент (интерферометр Юнга) и фокусировка рентгеновским зеркалом при наличии шероховатостей. В работе проанализированы границы применимости СЕРВАЛА и описано его быстродействие.

Введение

Развитие источников синхротронного излучения (СИ), а именно магнито-оптических систем электронных накопительных колец [1], [2] источников СИ, дало возможность получать электронные сгустки с малым эмиттансом, достигая дифракционного передела в широком диапазоне длин волн:

$$\epsilon_{x,y} < \sigma'_r \sigma_r = \lambda / 4\pi, \quad (1)$$

где λ – длина волны излучения, σ'_r и σ_r натуральная расходимость и размер излучения в перетяжке на источнике от электронного сгустка с бесконечно малым эмиттансом. Дифракционно ограниченные источники излучения обладают полной поперечной когерентностью, что выполняется в большинстве случаев для мягкого рентгеновского диапазона. По мере уменьшения длины волны степень поперечной когерентности излучения падает, излучение становится частично когерентным.

Задача моделирования поля частично когерентного излучения является основной при проектировании оптических линий источников СИ последнего, четвёртого, поколения, так как именно случай с частично когерентным излучением реализуется в большинстве практических случаев и важен, например, для задач имиджинга. Метод трассировки лучей, реализованный в коде SHADOW [3], являлся подходом, рутинно использовавшимся при проектировании источников синхротронного излучения третьего и второго поколений. Предпосылки для использования метода трассировки лучей основываются на низкой поперечной когерентности синхротронных источников излучения прошлых поколений. Однако, уже для источников третьего поколения дифракционный предел достигался в вертикальном направлении и основания использования метода трассировки лучей становятся сомнительными. В целом, подходы трассировки лучей не дают удовлетворительную модель физических процессов, происходящих при генерации синхротронного излучения и не описывают процессы дифракции. Следует придерживаться правила применения трассировки лучей: характерные размеры особенностей оптики, долж-

ны быть много больше размеров поперечной когерентности излучения на них. В ином случае необходимо принимать во внимание дифракционные эффекты. Для построения физической модели, соответствующей процессам генерации и распространения излучения, необходимо использовать подходы волновой оптики. При компьютерном моделировании под подходами волновой оптики подразумевается моделирование комплексных амплитуд электромагнитных полей, которые меняются при распространении через оптическую систему в соответствии с законами статистической оптики и Фурье оптики, [4], [5]. Подходы волновой оптики позволяют учесть дифракционные эффекты для полностью когерентного излучения, однако моделирование частично когерентного синхротронного излучения остаётся сложной задачей. Один из походов в решении этой задачи реализован в коде Synchrotron Radiation Workshop (SRW) [6], но этот подход обладает рядом недостатков, которые разобраны в Главе 2.

В литературе даны все теоретически основы статистической природы синхротронного излучения. Необходимые материалы о свойствах источников синхротронного излучения третьего поколения можно найти, например, в [7]. Однако, алгоритм, основанный на выводах работы, не был имплементирован в известные коды моделирования синхротронного излучения. Описание процесса генерации синхротронного излучения представлено в указанной работе. Оно основывается на том, что дробовой шум в электронном сгустке вызывает флуктуации электронной плотности. Это, в свою очередь, привносит произвольные флуктуации амплитуды и фазы в распределение электромагнитного поля, что и является причиной характерной спайковой структуры одной реализации излучения. Под одной реализацией поля подразумевается идеально монохроматизированное¹ поле после пролёта одного электронного сгустка через вставное устройство источника СИ. Флуктуации электронной плотности меняются от сгустка к сгустку, и для получение характеристического значение интенсивности поля, необходимо произвести усреднение по статистическому ансамблю электронных сгустков. Метод основывается на прямом моделировании излучения каждого электрона (макроэлектро-

¹ достаточна монохроматизация меньшая чем $1/\sigma_T$, где σ_T длительность электронного сгустка

на)², сложении полей от каждого из них и дальнейшем усреднении по статистическим реализациям. Для условности этот метод будет называться методом сложения амплитуд (МСА). В Главе 2 этот подход также будет обсуждаться более подробно.

Два приведённых метода основываются, по сути, на прямом моделировании излучения от каждого электрона (макроэлектрона) и последующем суммировании. Расчёт такого поля весьма трудоёмок и занимает значительное время. В представленной работе предложен новый численно эффективный и отличающийся быстродействием алгоритм моделирования частично когерентного синхротронного излучения, основанный на ограничении пространственных гармоник комплексного гауссова шума эффективным размером и расходностью электромагнитного поля. Для определённости новый метод будет называться метод СЕРВАЛ. Метод предлагает оценочный алгоритм расчёта частично когерентного поля ондуляторного излучения в практических случаях не уступающий методу сложения амплитуд. В Главе 2 настоящей работы приводится соответствующий алгоритм и сравнительный анализ рассчитанных полей в дальней зоне, на источнике и функции поперечной когерентности, а также анализ границ применимости метода. В Главе 3 приведены примеры использования СЕРВАЛА в трёх случаях: фокусировка при наличии конечной входной апертуры, классический двухщелевой эксперимент (интерферометр Юнга) и фокусировка рентгеновским зеркалом при наличии шероховатостей. Разработанный алгоритм стал частью среды OCELOT (<https://github.com/ocelot-collab>) для моделирования излучения лазеров на свободных электронах и синхротронных источников излучения.

Целью представленной работы являлась разработка и применение нового численно эффективного метода моделирования частично когерентного синхротронного излучения. Поставленная цель является **актуальными** для научного сообщества в связи с развитием источников синхротронного излучения и строительством новых источников четвёртого

²Не представляется возможным моделировать излучения от каждого электрона отдельно, ввиду того, что число электронов в сгустке относится к большим числам. Поэтому электронный сгусток приходится разбивать на кластеры, называемые в представленной работе макроэлектронами. Ограничение на минимально возможное число макроэлектронов приводится в тексте работы

поколения. На данный момент имеется необходимость дальнейшего развития компьютерных кодов для моделирования излучения современных источников СИ. Научная **новизна** заключается в разработке уникального алгоритма расчёта частично когерентного поля. Предложенный алгоритм имеет **практическую ценность** и используется при проектировании рентгенооптических трактов источника синхротронного излучения четвёртого поколения ЦКП «СКИФ».

Глава 1. Теоретический базис

В настоящей главе будут представлены элементы статистической оптики, а именно одна из основных теорем статистической оптики, теорема Ван Циттерта - Цернике. Используя вывод теоремы, в качестве примера оценивается пятно когерентности излучения для рентгеновской трубы – полностью некогерентного источника излучения. Далее даётся формулировка обобщённой теоремы Ван Циттерта - Цернике в случае, когда на источнике излучения есть конечная область когерентности, или, другими словами, источник частично когерентен. В главе рассматриваются вопросы формирования синхротронного излучения от электронного сгустка с конечным эмиттансом. Описываются статистические свойства такого излучения и характерная спайковая структура излучения для одной статистической реализации поля.

1.1 Поперечная функция когерентности и теорема Ван Циттерта - Цернике

Поперечная функция когерентности в плоскости $z = const$ имеет вид:

$$\Gamma_{\perp}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega, z) = \langle E^*(\vec{r}_1, \omega, z) E(\vec{r}_2, \omega, z) \rangle, \quad (1.1)$$

где – $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций спектральных амплитуд монохроматического поля $\bar{E}(\vec{r}, \omega, z)$ от некоторого некогерентного стационарного источника излучения. Связь функции поперечной когерентности $\Gamma_{\perp}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega, z)$ с распределением интенсивности источника излучения $I(\xi, \eta)$ даётся двумерным преобразованием Фурье, что яв-

ляется следствием теоремы Ван Циттерта - Цернике [8], [9]:

$$\Gamma_{\perp}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \omega, z) = \frac{\kappa e^{-i\psi}}{(\lambda z)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp \left[\left(i \frac{2\pi}{\lambda z} \right) (\Delta x \xi + \Delta y \eta) \right] d\xi d\eta, \quad (1.2)$$

где $\kappa = \lambda^2/\pi$, λ – длина волны монохроматического источника излучения¹, z – расстояние до плоскости наблюдения от источника излучения,

$\psi = \frac{\pi}{\lambda z} [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)]$, а $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, другие геометрические величины изображены на Рис. 1.1.

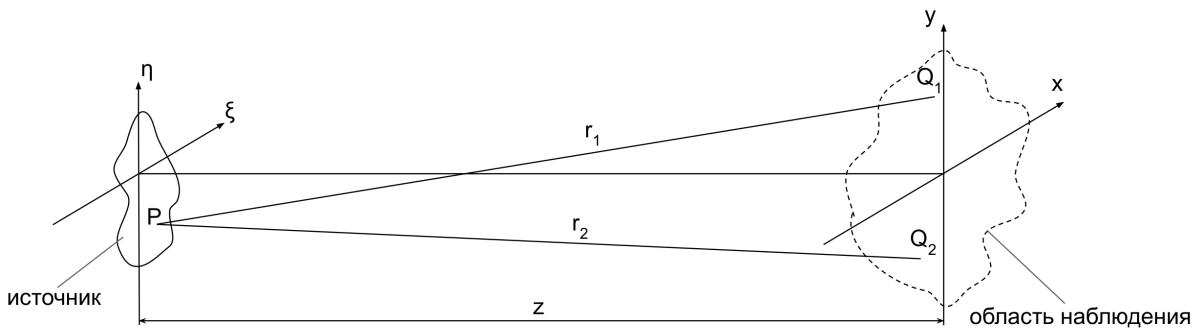


Рисунок 1.1 – К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике

Таким образом, площадь пятна когерентности на расстоянии z от источника будет определяться следующим выражением:

$$A_c = \frac{(\lambda z)^2}{A_s}. \quad (1.3)$$

Теорема может быть видоизменена и обобщена для частично когерентных источников излучения, достаточно лишь заменить κ на двойной интеграл [5]

$$\kappa(\bar{x}, \bar{y}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left[\left(i \frac{2\pi}{\lambda z} \right) (\bar{x}\Delta\xi + \bar{y}\Delta\eta) \right] d\Delta\xi d\Delta\eta, \quad (1.4)$$

¹В оригинальной работе теорема формулируется для квазимонохроматического источника. Для простоты мы опускаем эту общую формулировку и сужаем теорему для монохроматических источников.

где $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$, $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$ и $\mu(\Delta\xi, \Delta\eta)$ – комплексный коэффициент когерентности, являющийся областью когерентности на источнике. Физически это значит следующее: усреднённое распределение интенсивности излучения в дальней зоне будет обратно пропорциональна пятну когерентности излучения на источнике, а характерный размер когерентности в плоскости $z = \text{const}$ обратно пропорционален размеру источника излучения (Рис. 1.2).

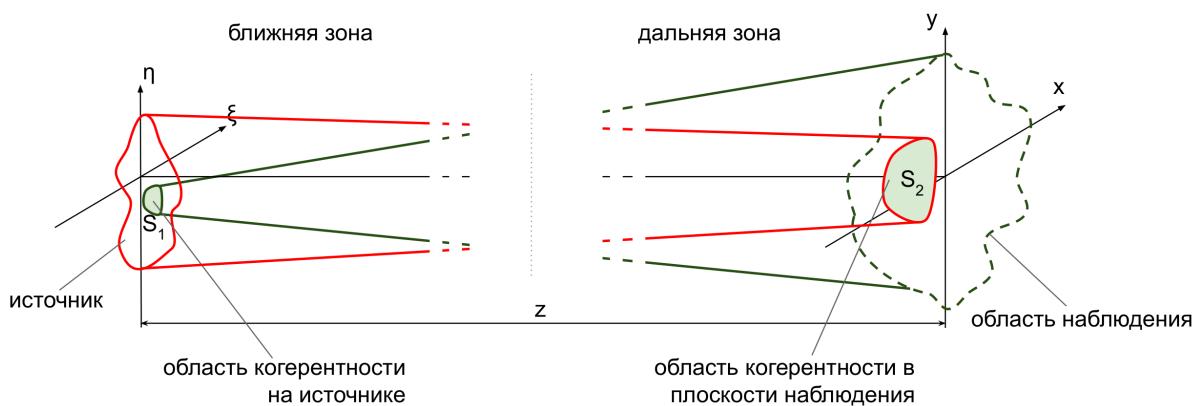


Рисунок 1.2 – К формулировке обобщённой теоремы
Ван Циттерта-Цернике

В качестве примера распространения когерентности от полностью некогерентного источника можно оценить область когерентности излучения лабораторной рентгеновской трубы на некотором расстоянии z . Область когерентности от полностью некогерентного источника излучения квадратной формы получается напрямую из теоремы Ван Циттерта-Цернике. Подставляя в уравнение 1.3 $z = 1$ м, $\lambda \approx 0.7$ Å и площадь фокального пятна² $A_s = 1$ мм², [10], получаем, что линейный размер длины когерентности при отражении от кристалла будет порядка³ 0.1 мкм. Линейный размер пятна когерентности может быть увеличен до нескольких микрон при использовании трубы с врачающимся анодом, где характерный размер источника достигает 50 мкм [10].

Для синхротронных источников излучения область когерентности на источнике определяется натуральным размером излучения одного

²Площадь фокального пятна спроектирована на направление выхода излучения из рентгеновской трубы.

³С учётом угла дифракции ($\sim 45^\circ$).

электрона при пролёте через вставное устройство. В случае ондуляторного источника, натуральный размер излучения определяется геометрическим размером перетяжки излучения в центре ондулятора – $\sigma_r = \sqrt{\lambda L}/4\pi$, где L длина ондулятора. Дальнейшие рассуждения о статистических свойствах синхротронного представлены в следующем разделе, а точные выражения представлены в [7].

1.2 О статистических свойства синхротронного излучения

Излучение от всего электронного сгустка может быть представлено, как сумма полей от каждого электрона, где k -ый электрон в сгустке имеет свою координату – $\vec{\eta}_k$, угол – \vec{l}_k , отсчитываемые от проектной траектории, а также время прибытия t_k относительно некоторого времени t_0 . Ондуляторное излучение удобно рассматривать в ω -пространстве, т.е. $\bar{E}(\vec{r}, \omega)$, которое связано с полем $E(\vec{r}, t)$ обратным преобразованием Фурье по времени. Вклад времени прибытия в $r\omega$ -пространстве будет простым умножением поля на фазовый фактор $\exp(i\omega t_k)$. Указанные величины $\vec{\eta}_k$, \vec{l}_k и t_k подчиняются некоторым распределениям плотности вероятности, для накопительных колец в модельных случаях это распределение Гаусса. В настоящей работе не рассматриваются эффекты, связанные с влиянием разброса электронов по энергии на когерентные свойства излучения, эти эффекты описаны в [11].

Результирующее поле от N_e электронов на расстоянии z от источника можно записать следующим образом:

$$\bar{E}_b(z, \omega, \vec{r}_\perp) = \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{r}_\perp) \exp(i\omega t_k), \quad (1.5)$$

для электронов в накопительных кольцах случайные величины $\vec{\eta}_k$ и \vec{l}_k не зависят от времени прибытия t_k и, в центре ондулятора, независимы друг от друга. Модуль поля $|\bar{E}_k|$ имеет одинаковое распределение для всех k со средним $\langle |\bar{E}_k| \rangle$ и конечным вторым моментом $\langle |\bar{E}_k|^2 \rangle$, где – $\langle \dots \rangle$ усреднение по статистическим реализациям.

Результирующее монохроматическое поле \bar{E}_b является суммой вкладов от каждого электрона в сгустке. В правой части уравнения 1.5 записан некоторый фазор. Следуя предпосылкам центральной предельной теоремы (ЦПТ), можно показать, что поле $\bar{E}_b(z, \vec{r}, \omega)$ в каждой точке \vec{r} подчиняется комплексному гауссовому распределению для двух практически значимых предельных случаев: случай «длинного» $\omega\sigma_T \gg 1$ и «короткого» $\omega\sigma_T \ll 1$ электронного сгустка, где σ_T – длительность электронного сгустка. В случае длинного электронного сгустка величина ωt_k равномерно распределена в пределах от 0 до 2π и продольная длина когерентности излучения на фундаментальной гармонике определяется натуральной длительностью излучения от одного электрона $c/\lambda N_w = \omega/N_w$, где N_w количество периодов ондулятора. В большинстве случаев натуральная длина когерентности в рентгеновском диапазоне длин волн много меньше длительности электронного сгустка. Этот случай будет, для определённости, называться продольно некогерентным. Для короткого электронного сгустка фазовый множитель $\exp(i\omega t_k)$ равен единице и излучение является продольно когерентным. В целом, формула 1.5 даёт прямой путь моделирования синхротронного излучения с любой степенью когерентности, с учётом продольной когерентности/некогрентности излучения.

Амплитуда поля по формуле 1.5 обладает спайковой структурой как в ωt -пространстве, так и в поперечном направлении в rk -пространстве. В итоге, получается некая трёхмерная структура, изображённая на Рис. 1.3, с флюктуирующей амплитудой поля.

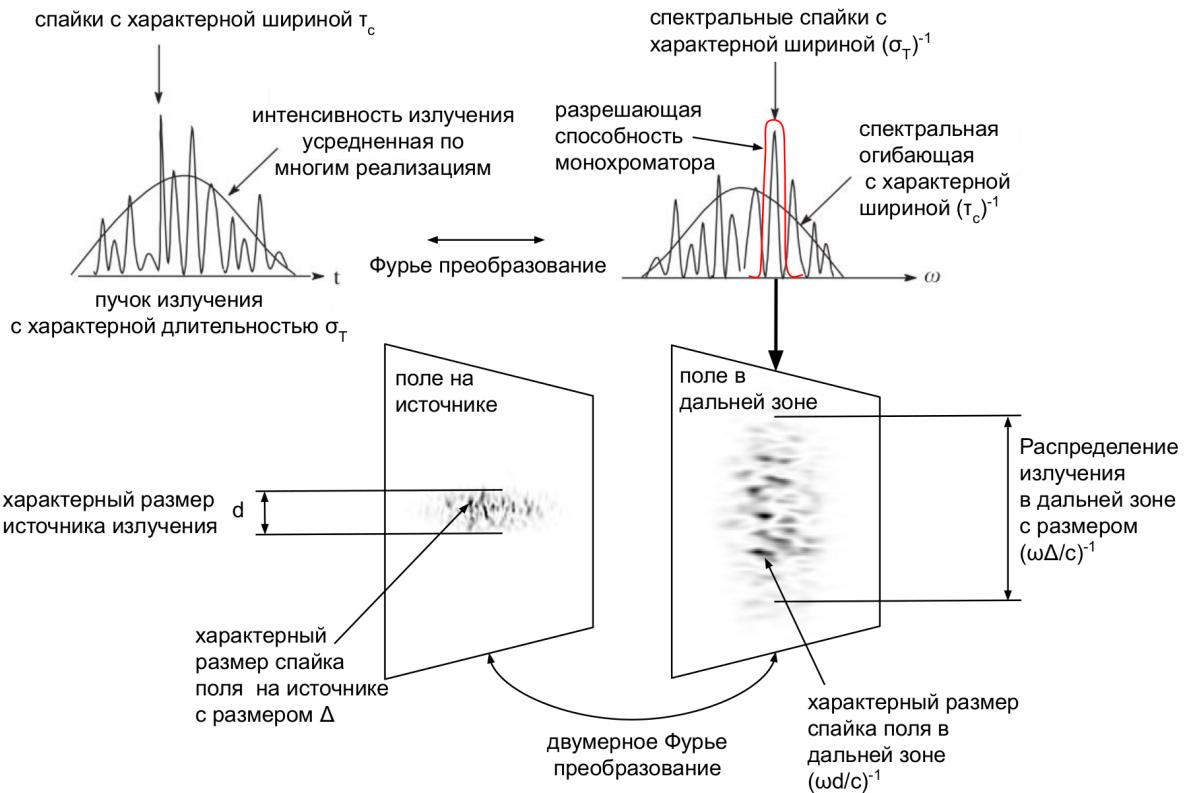


Рисунок 1.3 — Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Красной линией показана полоса излучения, выделяемая монохроматором

В t -пространстве поле имеет внутреннюю структуру с характерным размером спайка, равным продольной длине когерентности излучения одного электрона, а характерная длительность поля, усреднённого по многим реализациям, определяется длительностью электронного сгустка. Ввиду связи ωt -пространств, в ω -пространстве размер спайка в спектре обратно пропорционален длительности излучения. Характерная огибающая спектра, после усреднения по многим реализациям, обратно пропорциональна длине когерентности излучения, такое соотношение – следствие теоремы Винера-Хинчина. Если разрешить монохроматором спайк в ω -пространстве, то на двухмерном детекторе в дальней зоне можно увидеть поперечную спайковую структуру синхротронного излучения (Рис. 1.3). Это распределение с точностью до фазового фактора связано с распределением излучения на образце Фурье-преобразованием. В дальней зоне характерный размер спайка связан с размером источника излучения как: $(\omega d/c)^{-1}$, и огибающая поля в дальней зоне связана с размером спайка

на источнике как: $(\omega\Delta/c)^{-1}$, – что является следствием обобщённой теоремы Ван Циттерта - Цернике.

Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от электронного сгустка с конечным эмиттансом

При обсуждении методов моделирования рассматривается только ондуляторное излучение. Отчасти это мотивировано относительной простотой рассмотрения ондуляторного излучения, по сравнению, например, с вигглерным [12]. С другой стороны, при рассмотрении источников четвёртного поколения, излучение из ондуляторов обладает высокой степенью поперечной когерентности, что и представляет интерес в рамках данной работы. Тем не менее, формула 1.5 применима и для вигглерного излучения, и для излучения из поворотных магнитов. Для расчёта конечного поля по формуле 1.5 необходимо сгенерировать N_e полей от каждого электрона и сложить их. Таким образом получится одна реализация поля, далее необходимо повторить операцию генерации поля для N_b реализаций и усреднить модули квадратов полей по получившемуся статистическому ансамблю. Метод является крайне медленным, поэтому в случае продольно некогерентного источника подойдёт метод реализованный в коде SRW [6], [13]. Он основан на сложение интенсивностей полей от каждого электрона, где отсутствует необходимость усреднять по статистическому ансамблю, что ускоряет процесс вычисления. Оба метода будут обсуждаться в настоящей главе.

Альтернативный подход в моделировании частично когерентного излучения основывается на декомпозиции функции поперечной когерентности на Гаусс-Шелл моды (разложение по полиномам Эрмита) описываемый в работах [14], [15], [16], [17]. Однако, как отмечают сами авторы в [16], [17] и аналитически описывается в [7], разложение по полиномам Эрмита не применимо в случае, когда источник имеет высокую степень когерентности. Так как функции, которые описывают поведение ондуляторного излучения и в дальней зоне, и на источнике, имеют не гауссову природу.

В текущей главе описывается новый алгоритм моделирования синхротронного излучения, для краткости называемый СЕРВАЛ. Алгоритм основывается на прямом моделировании стохастических процессов при

генерации синхротронного излучения, вызванных дробовым шумом в электронном сгустке, с последующим ограничением пространственных гармоник шума эффективными размерами излучения. По своей природе алгоритм имеет оценочный характер, именно поэтому в главе приведён сравнительный анализ результатов СЕРВАЛА с методом сложения амплитуд, на примере ряда оптических систем. СЕРВАЛ показал себя как мощный инструмент для оценки когерентных свойств синхротронного излучения, точность которого мало уступает методу сложения амплитуд, но при этом метод имеет преимущество в быстродействии.

2.1 Расчёт ондуляторного излучения прямым моделированием методом Монте-Карло

Формула 1.5 используется напрямую при моделирования ондуляторного излучения, как продольно когерентного, так и некогерентного. Распределение поля $\bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}, \vec{l}, \vec{r}_\perp)$ может быть получено и аналитически, и численно, взятием интеграла по траекториям электрона в ондуляторе. В случае численного подхода излучение может быть рассчитано на любой частоте из первых принципов. При аналитическом подходе выражение для излучения на резонансной частоте ω фундаментальной гармоники от одного электрона¹ с некоторыми углом $\vec{\eta}_k$ и координатой \vec{l}_k на входе в идеальный планарный ондулятор может быть записано как:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{\theta}) = & -\frac{\omega e A_{JJ} L_w K}{2c^2 z_0 \gamma} \exp \left[i \frac{\omega z_0}{2c} \left| \vec{\theta} - \vec{l}/z_0 \right|^2 \right] \\ & \times \text{sinc} \left[\frac{\omega L_s |\vec{\theta} - (\vec{l}/z_0) - \vec{\eta}|^2}{4c} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\vec{\theta} = \vec{r}/z_0$, e – заряд электрона, γ – Лоренц-фактор, K – параметр ондуляторности, $k_w = 2\pi/\lambda_w$, где λ_w – период ондулятора. $A_{JJ} = J_0(\zeta) - J_1(\zeta)$, $\zeta = K^2/(4 + 2K^2)$ и J_n – функция Бесселя первого рода

¹более общая формула для поля с некоторой отстройкой поля $\Delta\omega$ может быть найдена, например, в [18]

n порядка. Формула 2.1 даёт распределение амплитуды поля в дальней зоне. Определение дальней зоны для ондуляторного излучения обсуждается в [19]. Чтобы получить точное выражение, это поле должно быть распространено назад в центр ондулятора с помощью пропагатора свободного пространства [20], [21], что даёт распределение поля в мнимом источнике излучения:

$$\bar{E}_\perp(0, \omega, \vec{\eta}, \vec{l}, \vec{r}_\perp) = i \frac{e A_{JJ} \omega K}{2c^2 \gamma} \exp \left[i \frac{\omega}{c} (\vec{r}_\perp - \vec{l}) \right] \times \left[\pi - 2 \operatorname{Si} \left(\frac{i \omega |\vec{r}_\perp - \vec{l}|^2}{L_w c} \right) \right], \quad (2.2)$$

после этого поле можно распространять на любое расстояние вдоль оптической оси z , что показано в [19]. Таким образом, снова применяя пропагатор свободного пространства, получается:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{r}_\perp) &= \frac{e A_{JJ} \omega K}{2c^2 \gamma} \exp \left[i \frac{\omega}{2z_0 c} (|\vec{r}_\perp - \vec{l}|^2 - |\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta}|^2) \right] \\ &\times \left\{ \operatorname{Ei} \left[\frac{i \omega (\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta})^2}{2z_0 c - L_w c} \right] - \operatorname{Ei} \left[\frac{i \omega (\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta})^2}{2z_0 c + L_w c} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассчитанное поле по формуле 2.3 может быть использовано для любого значения z_0 , кроме точки $z_0 = L_w/2$ и $r_\perp = 0$, см. [19], это выражение действительно как для дальней зоны, так и для ближней. Обе формулы 2.1 и 2.3 получены аналитически, взятием интеграла по траектории электрона в идеальном синусоидальном магнитном поле, при этом расчёт поля по формуле 2.3 значительно более трудоёмкий, чем по формуле 2.1². При использовании численных методик для взятия интеграла по траекториям в случае немодельных магнитных полей можно рассчитывать поля для любой частоты излучения. В итоге, рассчитанные поля $\bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{r}_\perp)$ имеют практическую ценность при вычислении излучения от всего электронного сгустка по формуле 1.5. Для простоты, в дальнейшем все расчёты ондуляторного излучения проведены для резонансной частоты фундаментальной гармоники.

²Необходимо дважды численно взять интеграл $\operatorname{Ei}(\cdot)$

2.1.1 Метод сложения амплитуд

После расчёта суммарного поля с N_e электронами по формуле 1.5, получившиеся монохроматическое поле по своей сути есть одна статистическая реализация. Это значит следующее: если измерить распределение интенсивности поля на детекторе от пролёта одного электронного сгустка, используя монохроматор, который позволит разрешить один спектральный спайк излучения в ω -пространстве, то на детекторе будет распределение, эквивалентное по своим свойствам представленному на Рис. 2.1.

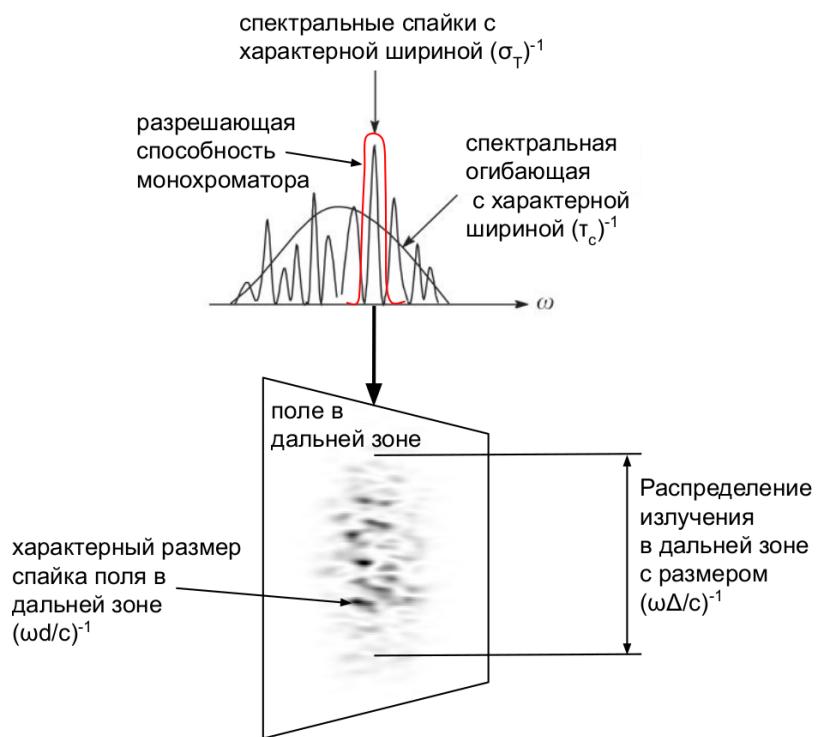


Рисунок 2.1 — Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Красной линией обозначена разрешающая способность монохроматора

После усреднения по N_b реализациям (с идеальным монохроматором³), наблюдаемая интенсивность даётся выражением:

$$I_\omega = \left\langle \left| \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp(i\omega t_k) \right|^2 \right\rangle, \quad (2.4)$$

результатирующая интенсивность будет сходиться к некоторой гладкой функции поперечных координат. В грубом приближении усреднённое угловое и пространственное распределение интенсивности излучения является свёрткой соответствующего распределения излучения от одного электрона с распределением всего электронного сгустка. Общая схема метода сложения амплитуд изображена на Рис. 2.2.

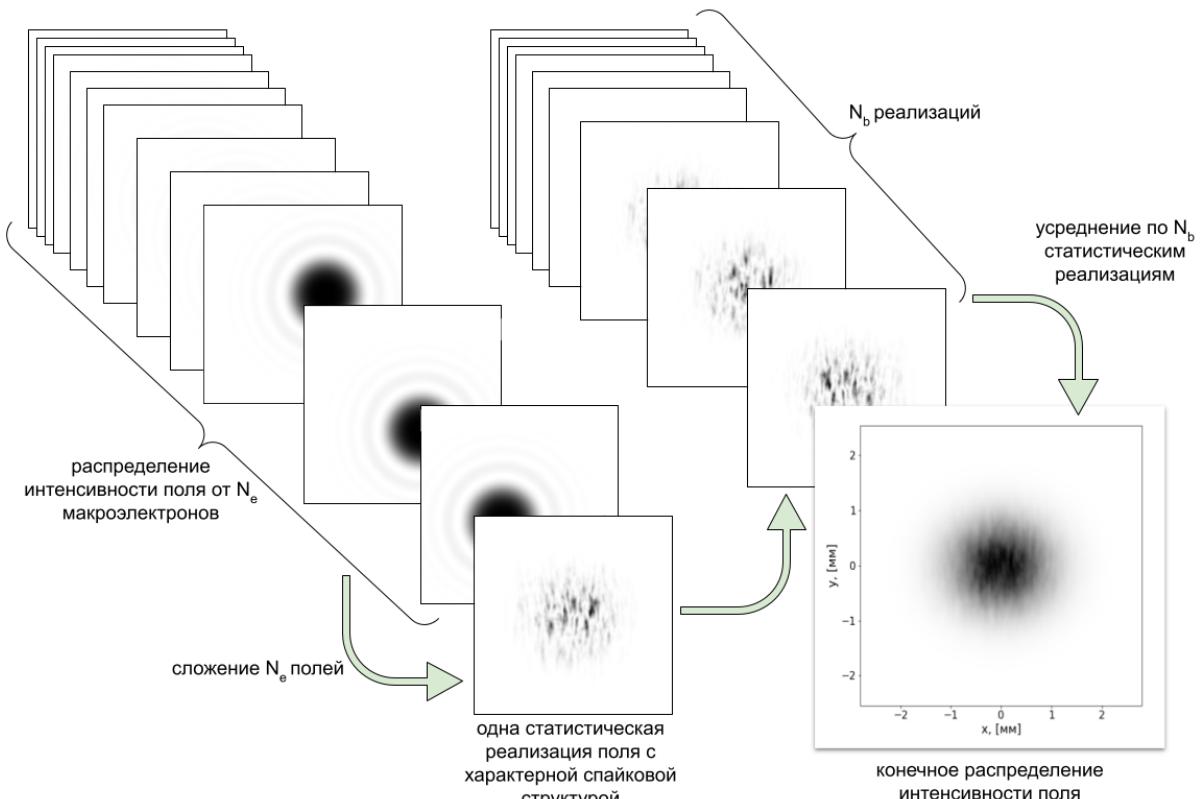


Рисунок 2.2 — Схема работы метода сложения амплитуд

Данный подход является наиболее прямым подходом в задаче моделирования частично когерентного излучения, однако время расчёта в таком случае может быть оценено как время затрачиваемое на расчёт одной реализации поля N_e раз по формуле 2.1 или 2.3, в последней, как уже упоминалось, необходимо дважды численно взять интеграл $Ei(\cdot)$ и

³другими словами, монохроматором разрешается один спектральный спайк

усреднить по N_b реализациям поля \bar{E}_b . Итого, если за τ_{calc} взять время расчёта одного поля формуле 2.1 или 2.3, то расчёт результирующего поля \bar{E}_b в сумме займёт $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e \cdot N_b$.

2.1.2 Метод сложения интенсивностей

В случае полностью некогерентного излучения время расчёта можно сократить за счёт фазового фактора $\exp(i\omega t_k)$, который эффективно приводит к тому, что излучение отдельного электрона в электронном сгустке на каждом периоде ондулятора коррелирует только само с собой, [7]. Если расписать выражение 2.4, получим:

$$I_\omega = \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \bar{E}^*(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) + \\ \left\langle \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{n=1, k \neq n}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \bar{E}^*(\vec{\eta}_n, \vec{l}_n, z, \vec{r}, \omega) \exp[i\omega(t_k - t_n)] \right\rangle, \quad (2.5)$$

в котором после усреднения второе слагаемое будет равно нулю, так как t_k и t_n считаются независимыми случайными величинами. Таким образом формула 2.4 упрощается до

$$I_\omega = \sum_{k=1}^{N_e} \left| \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \right|^2, \quad (2.6)$$

а время расчёта уменьшается до $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e$. Этот метод, для условности, будет носить название метод сложения интенсивностей. Общая схема метода представлена на Рис. 2.3.

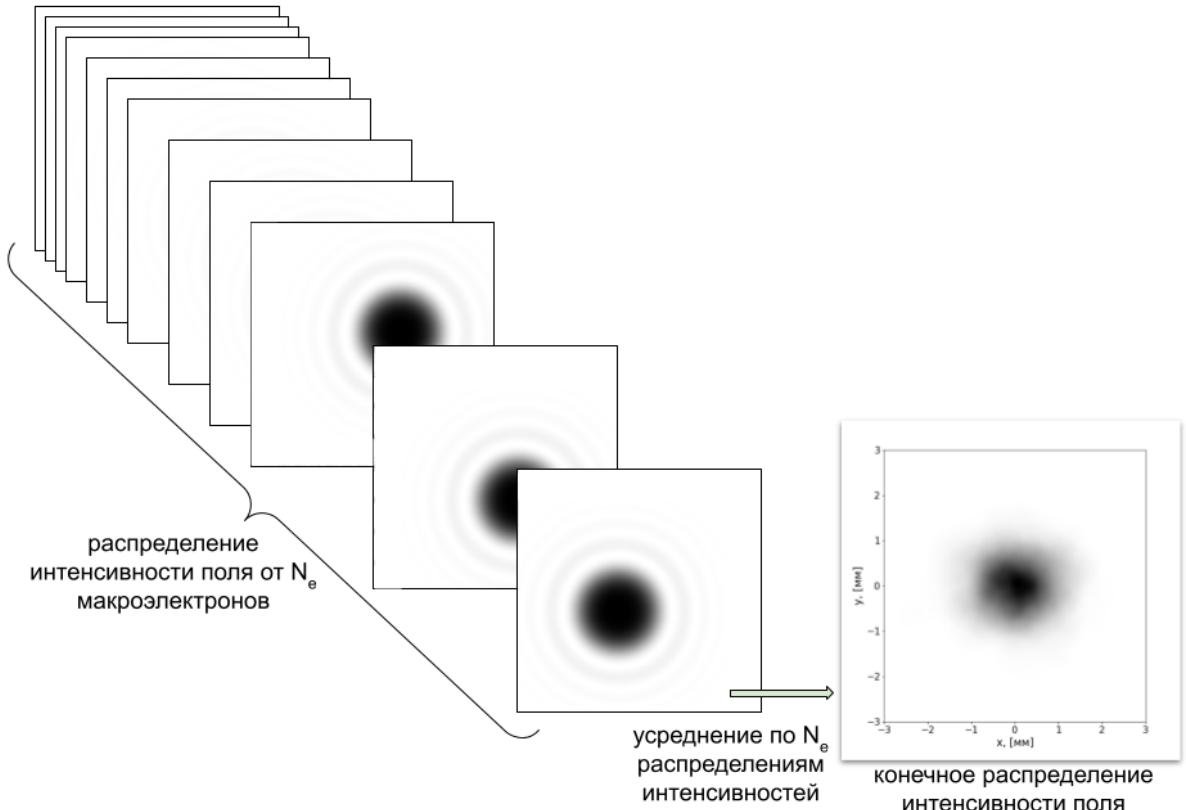


Рисунок 2.3 — Схема метода сложения интенсивностей

Недостатком такого подхода можно считать потерю фазовой информации об излучении и, следовательно, невозможности расчёта функции поперечной когерентности первого порядка. Тем не менее, подход, основанный на формуле 2.6, даёт мощный метод расчёта наблюдаемых интенсивностей для частично когерентного излучения. Именно этот подход реализован в широко распространённом коде SRW.

В заключении к двум предыдущим разделам необходимо отметить: N_b — это физическая величина. Если разрешить монохроматором один спектральный спайк и набрать статистику, например, из десять электронных сгустков, полученная интенсивность на детекторе будет соответствовать десяти реализациям поля. Иначе дело обстоит с числом макроэлектронов — N_e . Для достоверного моделирования поперечной спайковой структуры синхротронного излучения необходимо взять число N_e как минимум больше, чем характерное количество поперечных пространственных гармоник (спайков). Иначе, мелкие детали спайковой структуры на разрешатся.

2.2 Учёт влияния размера электронного сгустка на расходимость излучения при помощи прямых методов Монте-Карло

При помощи метода сложения амплитуд можно получить поля, в которых видно влияние продольной когерентности⁴ излучения и размера электронного сгустка на расходимость излучения.

2.2.1 Влияние размера электронного сгустка на расходимость излучения

Первый эффект – влияние размера электронного сгустка на расходимость излучения и, следовательно, на поперечный размер излучения в дальней зоне. Этот эффект обсуждается в работе [13] разработчиком кода SRW применительно к когерентному синхротронному излучению (англ. coherent synchrotron radiation (CSR)). Под CSR подразумевает продольно когерентное излучение, реализуемое, когда длина электронного сгустка много меньше излучаемой длины волны. На примере CSR можно наблюдать следующий эффект: если электронный сгусток меньше или сравним с размером перетяжки излучения на источнике, наблюдается обычная расходимость излучения, определяемая свёрткой натуральной расходимости синхротронного излучения с расходимостью электронного сгустка.

⁴В смысле установленном в Главе 1.

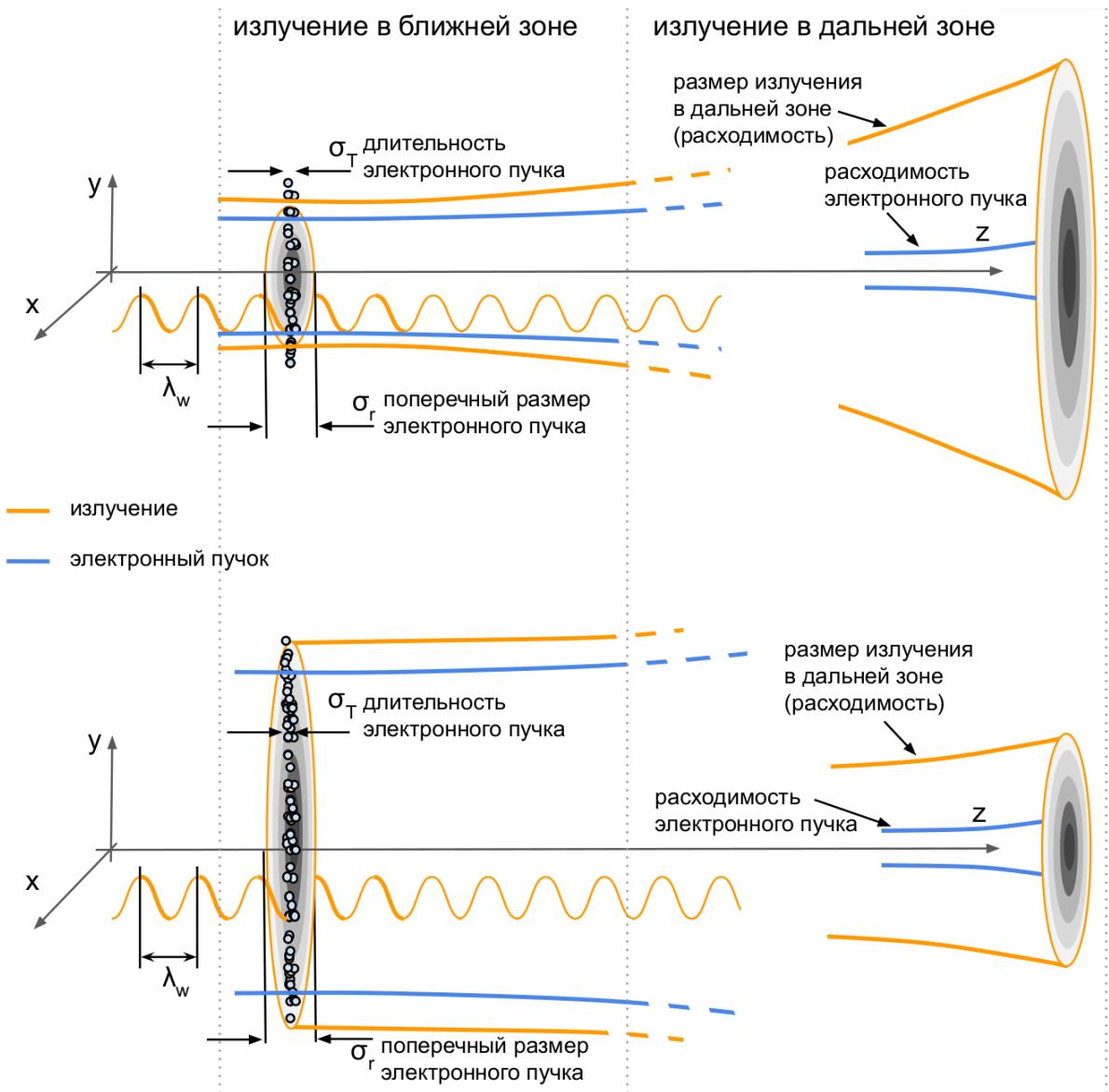


Рисунок 2.4 — Схема эффекта зависимости расходимости излучения от размера электронного сгустка. Рисунок разделён на две части: ближняя зона, источник излучения — слева и дальняя зона — справа. Жёлтой линией схематично изображён характерный поперечный размер излучения, синей линией характерный поперечный размер электронного сгустка, жёлтая волнистая линия символизирует длину волны излучения в сравнении с продольным размером электронного сгустка. Важно отметить, масштабы для обоих рисунков (верху и низу) — те же. Расходимости электронных сгустков (сверху и снизу) одинаковы.

Однако, при увеличении размера электронного сгустка, при той же расходимости, наблюдается эффект уменьшения расходимости излучения. Как отмечает автор в [13], этот эффект объясняется с точки зрения гауссовой оптики: при увеличении размера источника, угловой размер

должен уменьшаться, формула 1. На Рис 2.4 изображена схема описывающая этот эффект.

При расчёте ондуляторного излучения методом сложения амплитуд этот эффект выглядит следующим образом, Рис. 2.7.

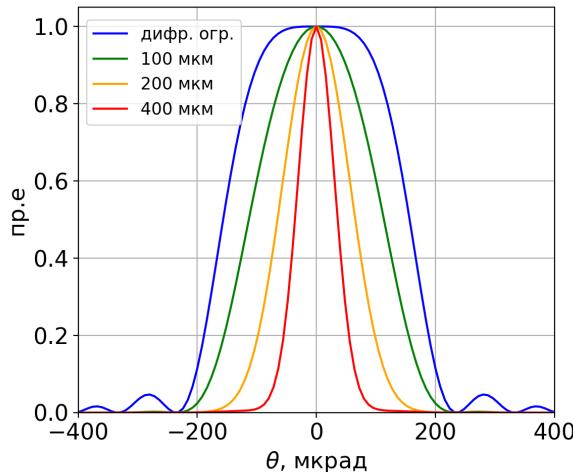


Рисунок 2.5 — Расходимость излучения от электронного сгустка с размерами, указанными в легенде. Расходимость электронного сгустка много меньше натуральной расходимости синхротронного излучения

Расчёт проводился для модельных параметров электронного сгустка: расходимость была взята много меньшей, чем натуральная расходимость ондуляторного излучения, размеры электронного сгустка указаны в легенде к Рис. 2.7, резонансная энергия на 12,4 эВ, ондулятор с 200 периодами, длина периода ондулятора 18 мм. Синяя линия на Рис. 2.7 отвечает случаю электронного сгустка с бесконечно малым эмиттансом.

2.2.2 Различие расходимости излучения для случая продольно когерентного и некогерентного излучения

В зависимости от длительности электронного сгустка результирующее поле \bar{E}_b будет вести себя по-разному. В случае короткого электронного сгустка: $\omega\sigma_T \ll 1$, где σ_T – длительность электронного сгустка, излучение будет продольно когерентным, а в случай длинного электронного

сгустка, а именно $\omega\sigma_T \gg 1$, соответствует продольно некогерентному излучению.

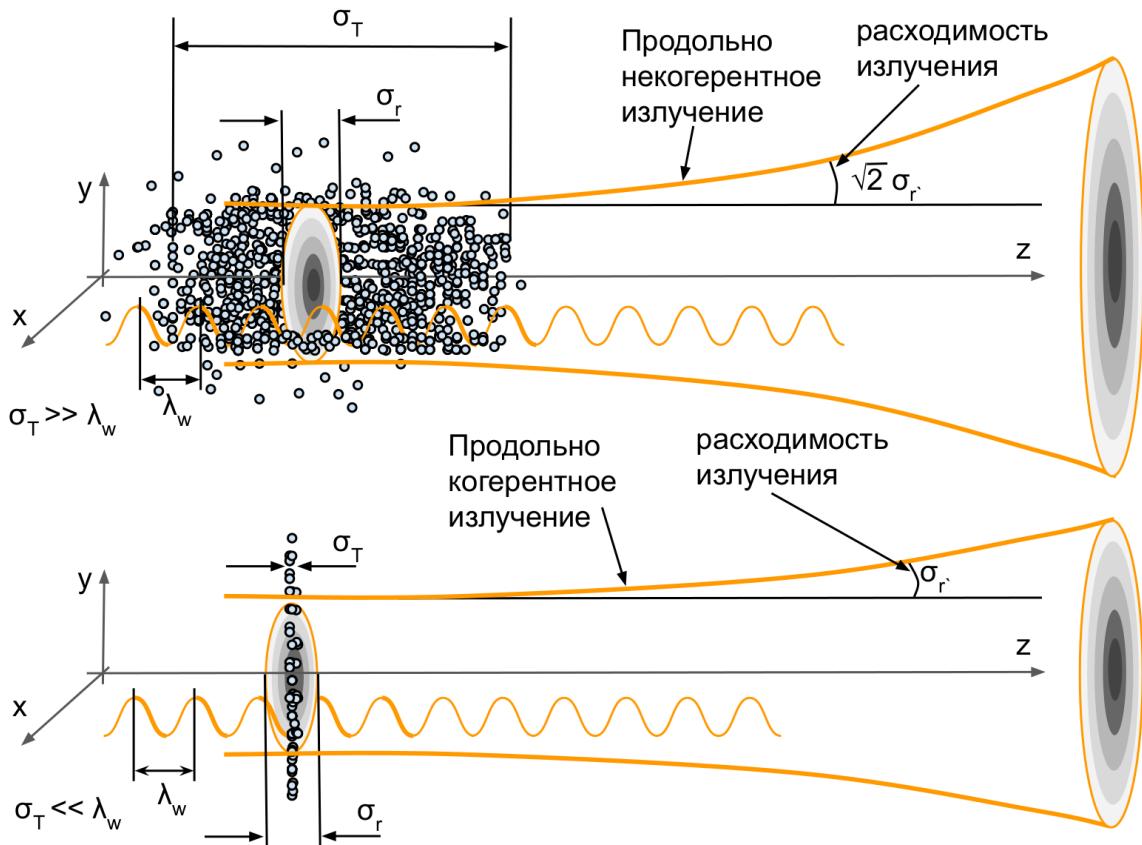


Рисунок 2.6 — Схема эффекта зависимости расходимости излучения от продольной когерентности излучения. Жёлтой линией обозначен характерный поперечный размер излучения, жёлтой волнистой длины волны излучения с сравнение в продольным размером электронного сгустка. На рисунке обозначено, что в случае продольно некогерентного излучения расходимость в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в случае продольно когерентного излучения

Расчёт проводился для гипотетического случая электронного сгустка с поперечными размерами электронного сгустка много меньшими натуральных размеров излучения в перетяжке⁵, $\sigma'_x = 20$ мкрад, $\sigma'_y = 20$ мкрад на резонансной энергии 300 эВ. Ондулятор с 200 периодами, длина периода ондулятора 18 мм.

⁵Чтобы для продольно когерентного случая избежать эффекта, описанного в предыдущем разделе

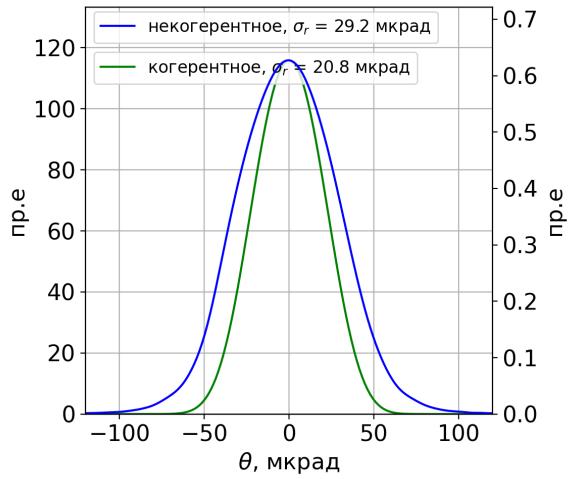


Рисунок 2.7 — Расходимость излучения в случае продольно когерентного излучения (зелёная линия), и продольно некогерентного излучения (синяя линия).

Этот эффект, по всей видимости, не обсуждался в литературе, однако, заслуживает дальнейшего исследования.

2.3 Описание метода СЕРВАЛ

Предлагаемый алгоритм основывается на моделировании стохастического характера ондуляторного синхротронного излучения комплексным гауссовым шумом с последующим его ограничением эффективным размером излучения на источнике. Алгоритм описывает продольное *некогерентное* ондуляторное излучение. Для начала алгоритм будет представлен в общем виде, без уточнения чем определяется вид гладких функций, задающих эффективный размер и расходимость излучения.

2.3.1 Алгоритм создания поля

Алгоритм выполняется в три этапа: создание комплексного гауссова шума; его ограничение размерами излучения в перетяжке

в r -пространстве; его ограничение расходимостью излучения в k -пространстве⁶. Полное описание алгоритма приведено ниже:

1. Создание комплексного гауссова шума $Z = X + iY$ в $r\omega$ -пространстве, где величины X и Y подчиняются нормальному распределению.

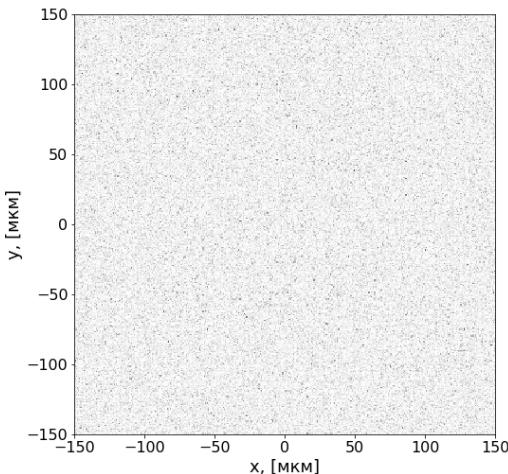


Рисунок 2.8 — Интенсивность комплексного гауссова шума

2. Ограничение шума эффективным размером электромагнитного излучения в источнике излучения в r -пространстве.

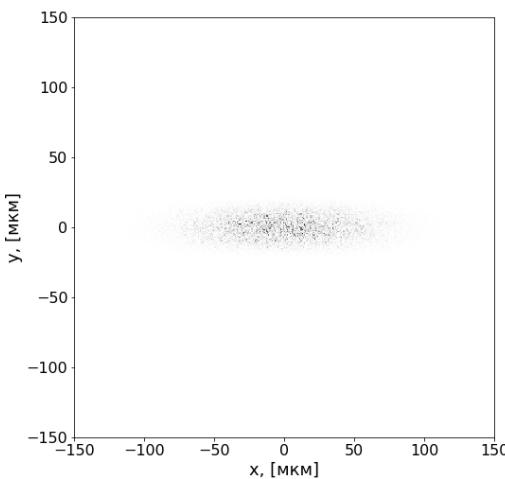


Рисунок 2.9 — Размер излучение
с наложенным шумом в
 r -пространстве

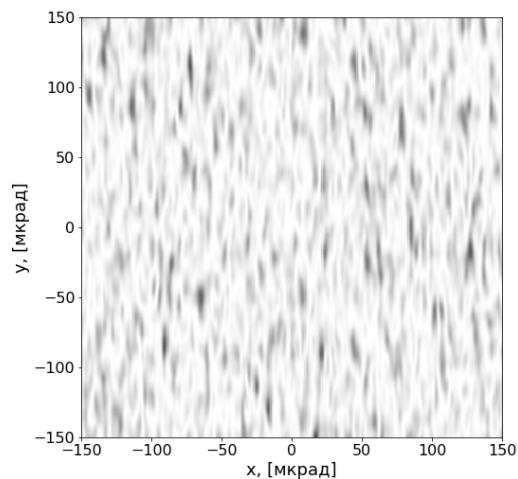


Рисунок 2.10 — Размер
излучение с наложенным шумом
 k -пространстве

⁶Излучение от всего электронного сгустка.

3. Ограничение пространственных частот эффективной расходимостью излучения

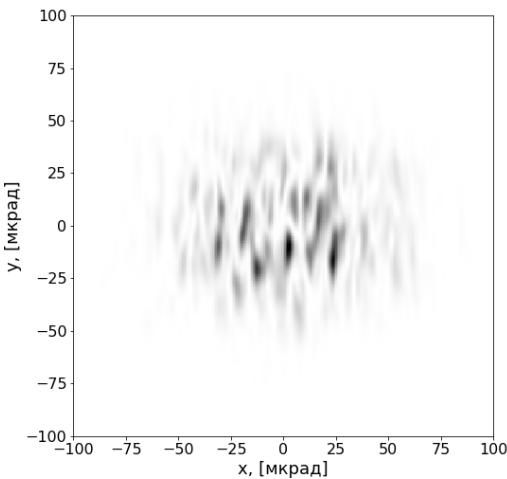


Рисунок 2.11 — Расходимость излучения в источнике

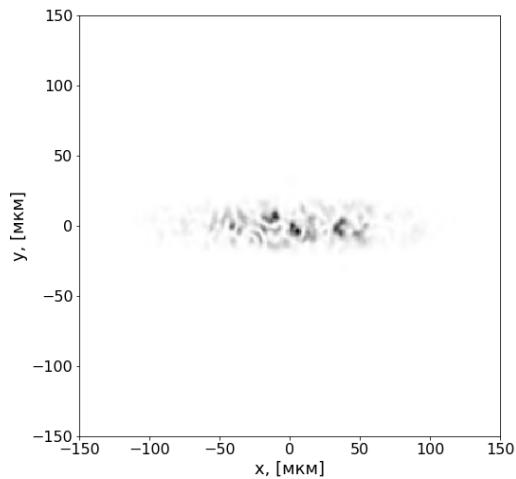


Рисунок 2.12 — Размер излучения в источнике

Получившиеся распространение поля есть распределение поля в источнике излучения (центре ондулятора). Излучение монохроматично, т.е. продольно разрешён один спайк.

Быстродействие алгоритма можно оценить следующим образом: алгоритм генерирует $N_x \cdot N_y \cdot N_b$ случайных величин, подчиняющихся распределению Z , где N_b — количество реализаций поля, совершает одно преобразование Фурье (преобразование поля на Рис. 2.9 в поле на Рис. 2.10) и два раза умножает поле на гладкие функции. Получившееся распределение, представленное на Рис. 2.12, уже готово к распространению, так как пропагатор через свободное пространство работает именно в k -пространстве.

Показательно сравнить быстродействие разобранных алгоритмов (Таблица 2.1). При сравнение использовалась поперечная сетка $N_x \times N_y = 501 \times 501$, для расчёта поля в дальней зоне использовалась формула 2.1. Сравнение производилось для разного количества макроэлектронов в методе сложения амплитуд.

Таблица 2.1

Быстродействие метода сложения амплитуд и СЕРВАЛА

N_e	МСА, сек/реализация	СЕРВАЛ, сек/реализация
100	2.8	0.020
200	5.5	0.020
400	11	0.020

Быстродействие метода сложения амплитуд и СЕРВАЛА сравнивается напрямую, так как в обоих методах есть необходимость усреднять по реализациям. Однако, для метода сложения интенсивностей нет понятия реализации поля, если только количество макроэлектронов. Для прямого сравнения СЕРВАЛА и метода сложения интенсивностей необходимо сравнивать быстроту генерации одного поля. Для той же плотности точек поперечной сетки, при равном числе реализаций и количестве макроэлектронов – 400, расчёт поля СЕРВАЛОм занял **8 сек**, методом сложения интенсивностей⁷ **15 сек**.

2.3.2 Выбор подходящих распределений для ограничения пространственных гармоник шума

До этого момента не обсуждался конкретный вид распределений, используемых для ограничения пространственных гармоник шума при генерации поля методом СЕРВАЛ. Вопрос выбора таких распределений сводится к нахождению пространственного и углового распределения поля в центре ондулятора. Поле в центре ондулятора может быть получено обратным распространением излучения из дальней зоны обратно в центр ондулятора при помощи пропагатора излучения в свободном пространстве. Однако, нахождение аналитического решения уравнения Максвелла в дальней зоне от целого электронного сгустка – не тривиальная задача. Для оценки можно предположить, что распределение поля онду-

⁷Здесь снова стоит отметить, при использовании метода сложения интенсивностей теряется вся фазовая информация о поле, метод позволяет моделировать только наблюдаемые интенсивности полей.

ляторного излучения от электронного сгустка с конечным эмиттансом, в целом, может быть представлено как свёртка распределения поля ондуляторного излучения от одного электрона с распределением фазового пространства электронного сгустка [7], [13].

Для СЕРВАЛа можно предложить, как минимум, три вида таких распределений. Для пространственного распределения источника в r -пространстве:

$$\text{I. } A_b(\vec{r}_\perp) = (\bar{E}_\perp(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp) * f_l(\vec{l}))(\vec{l})$$

$$\text{II. } A_b(\vec{r}_\perp) = \sqrt{(\bar{E}_\perp^2(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp) * f_l^2(\vec{l}))(\vec{l})}$$

$$\text{III. } A_b(\vec{r}_\perp) = f_l(\vec{l}),$$

и для расходимости источника в k -пространстве:

$$\text{I. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = (\hat{\bar{E}}_\perp(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp) * \hat{f}_\eta(\vec{\eta}))(\vec{\eta})$$

$$\text{II. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = \sqrt{(\hat{\bar{E}}_\perp^2(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp) * \hat{f}_\eta^2(\vec{\eta}))(\vec{\eta})}$$

$$\text{III. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = \hat{f}_\eta(\vec{\eta}),$$

где $A_b(\vec{r})$ и $\hat{A}_b(\vec{\theta})$ гладкие функции поперечных координат в r - и k -пространствах, соответствующие шагам 2 и 3 в алгоритме, $f(\vec{l}, \vec{\eta}) = f_l(\vec{l})f_\eta(\vec{\eta})$ распределение фазового пространства электронного сгустка, и поле $\bar{E}_\perp(z = 0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp)$, $\hat{\bar{E}}_\perp(z = 0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp)$ – распределения поля в r и k -пространствах, взятое в центре ондулятора, от электронного сгустка с бесконечно малым эмиттансом по формулам 2.1 и 2.2 или рассчитанные численно.

При выборе подходящих распределений было проведено сравнение с эталонным в этой работе методом сложения амплитуд. Для начала необходимо проверить распределение интенсивности поля на источнике. Для метода сложения амплитуд поле было рассчитано в дальней зоне и распространено назад в центр ондулятора. Результаты сравнения приведены на Рис. 2.13-2.15. В работе использовались следующие параметры ондулятора, приведённые в Таблице 2.2

Таблица 2.2

Параметры ондулятора

$E_{ph}, [\text{эВ}]/\lambda, [\text{\AA}]$	$\lambda_w, [\text{мм}]$	периодов
2167/5.72	18	200

Расчёты были проведены с использование параметров электронного сгустка ЦКП «СКИФ» для одного из прямых промежутков (Таблице 2.3).

Таблица 2.3

Параметры электронного сгустка

$E, [\Gamma\text{эВ}]$	$\sigma_x, [\text{мкм}]$	$\sigma_y, [\text{мкм}]$	$\sigma_{x'}, [\text{мкрад}]$	$\sigma_{y'}, [\text{мкрад}]$
3	38	4.7	25	20

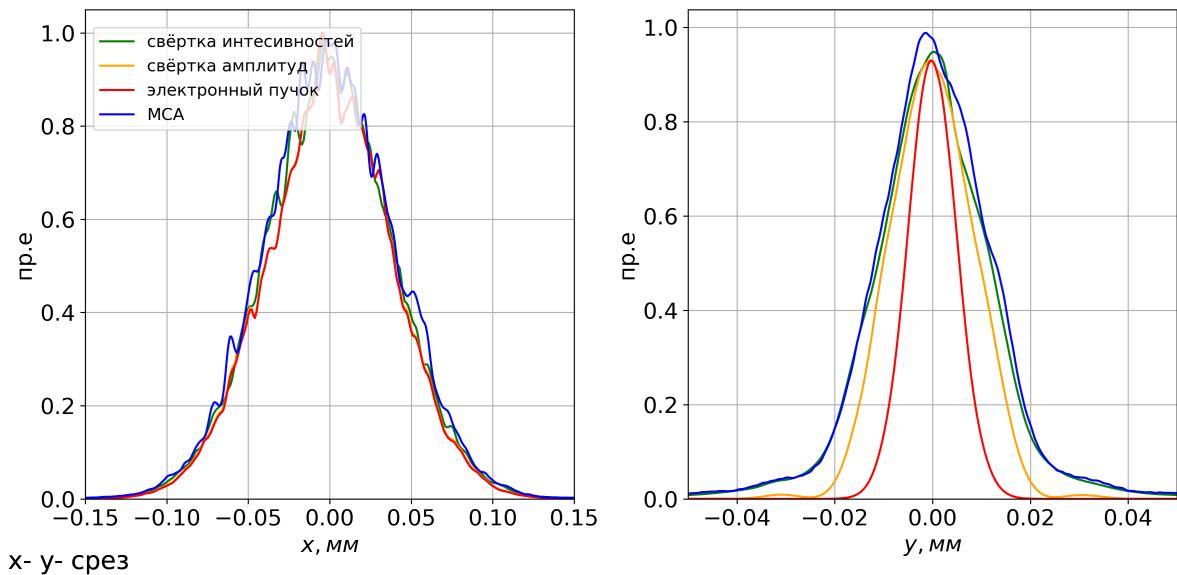


Рисунок 2.13 — Распределение поля на источнике излучения для разных функций в сравнении с методом сложения амплитуд

Видно, что оптимальные результаты достигаются при использовании свёртки II. Однако, если размер электронного сгустка много больше или даже сравним с натуральным размером излучения в перетяжке, то можно использовать любые из представленных функций для r -пространства. Необходимо так же сравнить корреляционные функции получившихся полей 2.13 в дальней зоне на 25 м от ондулятора, используя формулу 1.1.

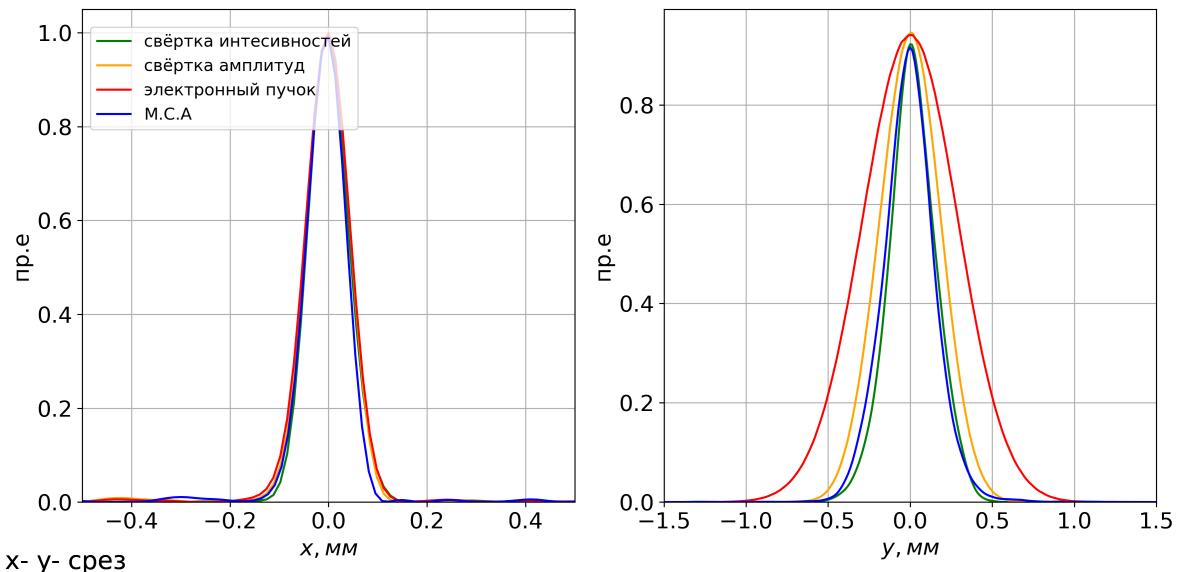


Рисунок 2.14 — Функции поперечной когерентности на расстоянии 25 м от источника

Для распределения расходимости следует использовать свёртку интенсивностей.

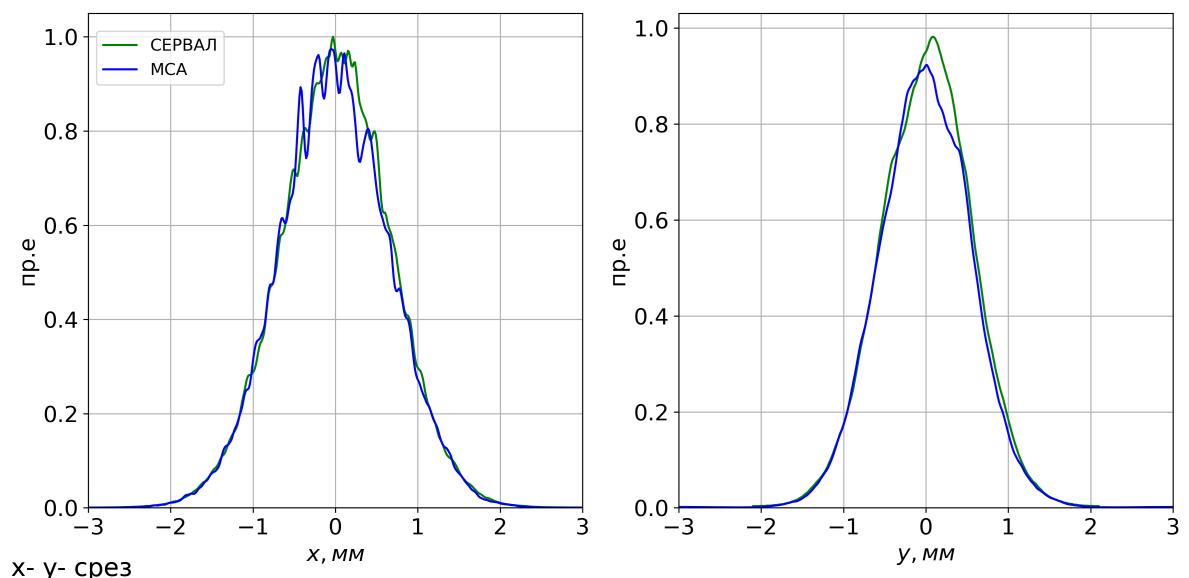


Рисунок 2.15 — Размеры излучения в дальней зоне (расходимость) на расстоянии 25 м

В большинстве случаев можно выбирать свёртку интенсивностей по II. Однако, стоит отметить, что СЕРВАЛ – это оценочный метод и, в случае дифракционного ограниченного источника, необходимо перед проведением расчётов сделать подобный анализ подходящих распределений эффективного размера и расходимости излучения в источнике. В

Приложении А дан подробный анализ подходящих функций для электронных сгустков с различными значениями эмиттанса.

Глава 3. Применение СЕРВАЛа

СЕРВАЛ является эффективным алгоритмом для моделирования частично когерентного синхротронного излучения. В предыдущей главе было показано совпадение распределений интенсивностей излучения в дальней зоне, на источнике излучения, а также корреляционных функций, рассчитанных СЕРВАЛом, с методом сложения амплитуд, который даёт результат «из первых принципов» во всех ситуациях¹. Этот сравнительный анализ свойств источника излучения показывает, что весьма ресурсозатратный по времени метод сложения амплитуд может быть заменён СЕРВАЛом без потери точности и физичности результатов. В настоящей главе приведены примеры использования СЕРВАЛА для расчёта фокусирующей системы с конечной апертурой, эксперимента Юнга и отражения частично когерентного излучения от рентгеновского зеркала с шероховатостями.

В случае дифракционно ограниченных источников излучения, вместо СЕРВАЛА целесообразно применять метод сложения амплитуд или метод сложения интенсивностей, которые дадут сходимость за малое число реализация поля. Для СЕРВАЛА, в таком случае, потребуется тщательный анализ подходящих гладких функций, ограничивающих пространственные гармоники шума, и, строго говоря, СЕРВАЛ не моделирует излучение электронного сгустка с бесконечно малым эмиттансом. В обратном случае источников с низкой степенью когерентности имеет смысл рассмотреть метод трассировки лучей. Для волновых методов потребуется моделировать большое число статистических реализаций поля, чтобы получить сходимость распределений к гладким функциям поперечных координат.

В целом, прежде чем проводить оптический расчёт, необходимо изучить свойства источника излучения, например, при помощи программы SPECTRA [22], где можно оценить ожидаемую степень когерентности. Только исходя из свойств источника, можно сделать выбор о наиболее предпочтительном методе моделирования. Именно такой подход даст

¹необходимо помнить, что число N_e должно быть достаточно велико для получения достоверного результата

оптимальный результат в смысле затраченного времени и достоверности полученных результатов.

3.1 Фокусирующая система с конечной апертурой

Оптическая схема состоит из источника излучения – ондулятора, апертуры и фокусирующего элемента. Параметры ондулятора и электронного сгустка те же, что в Таблицах 2.2 и 2.3. Размер апертуры 1×1 мм^2 . Для СЕРВАЛа были выбраны гладкие функции поперечных координат, получающиеся в результате свёртки II. Этот расчёт сопровождается сравнением результатов метода СЕРВАЛ с результатами метода сложения амплитуд.

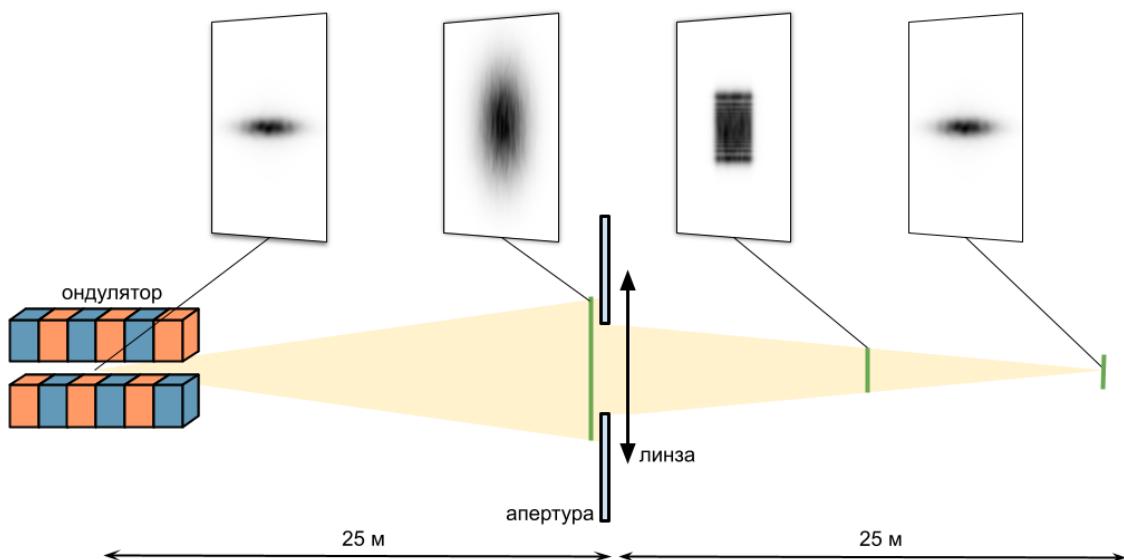


Рисунок 3.1 – Оптическая схема. Ондулятор в начале координат, апертура перед линзой на расстоянии 25 м от ондулятора, линза с фокусным расстоянием 12,5 м фокусирует излучение на образец, расположенный на 25 м от линзы. Распределения интенсивности приведены на источнике излучения, в дальней зоне перед апертурой, на половине пути к образцу и на самом образце (в фокусе).

Мнимое распределение интенсивности излучения на источнике представлено на Рис. 3.2.

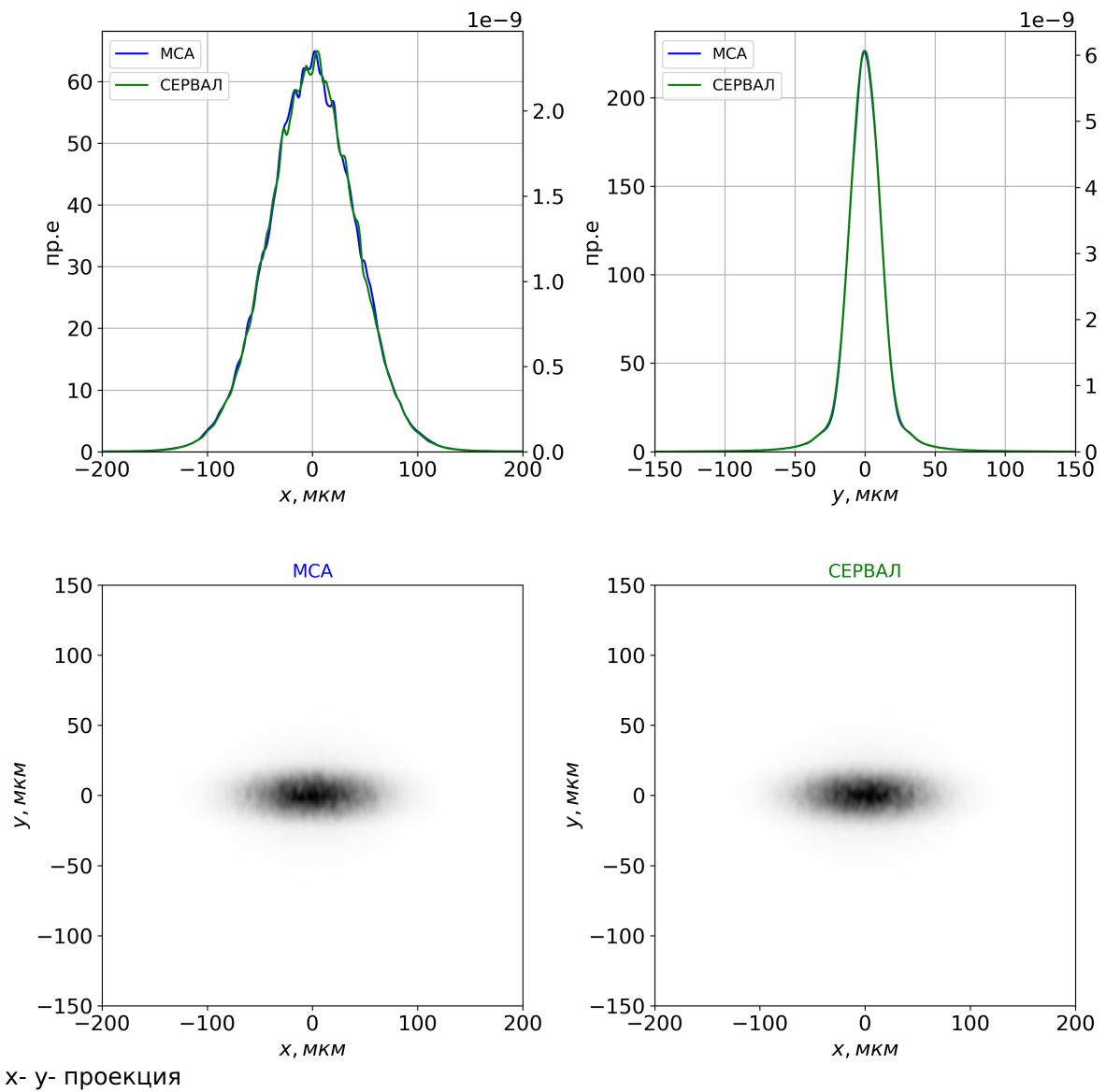
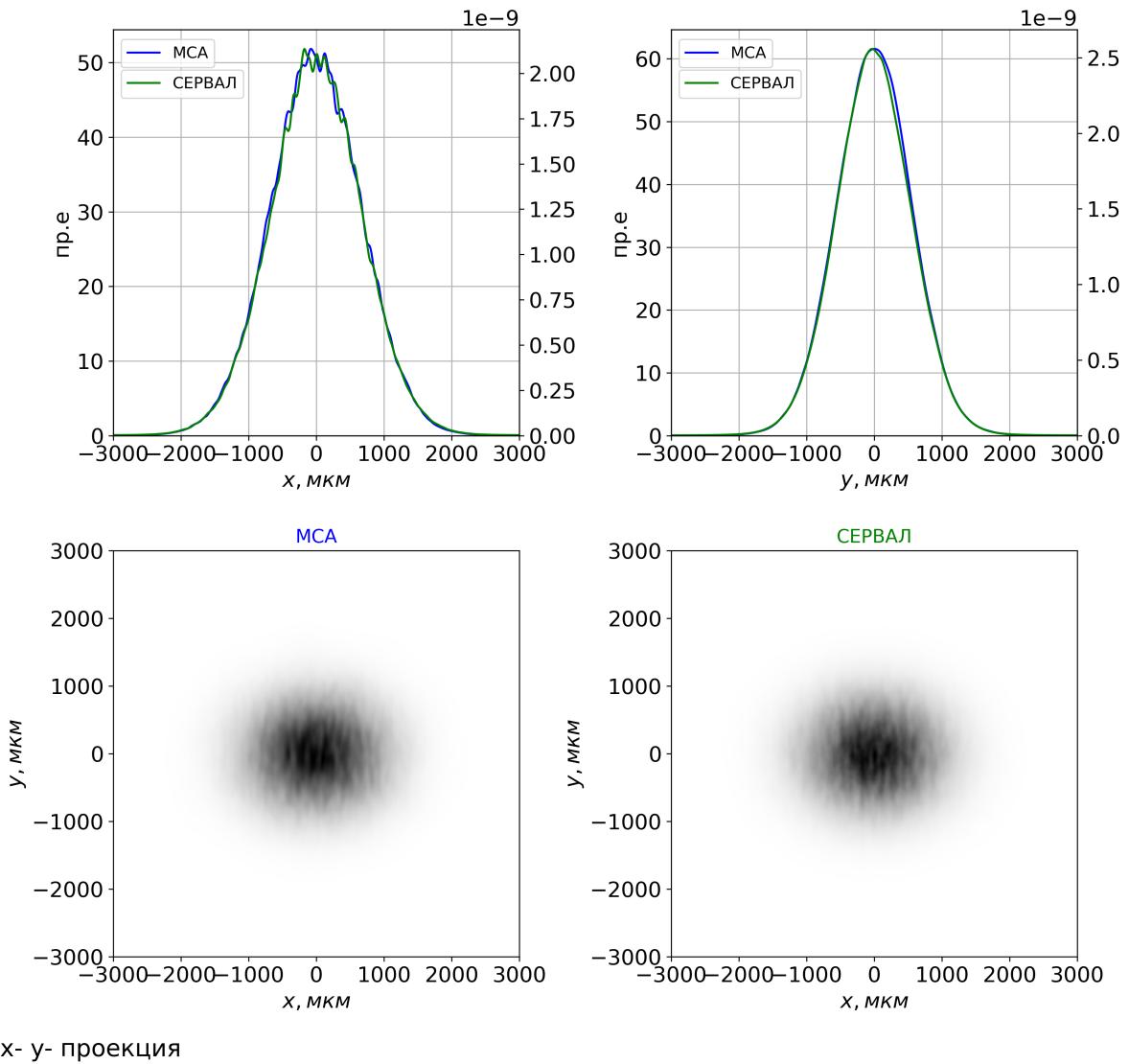


Рисунок 3.2 — Распределение интенсивности на источнике излучения с величиной среднеквадратичного отклонения $40.8 \times 10.8 \text{ мкм}^2$

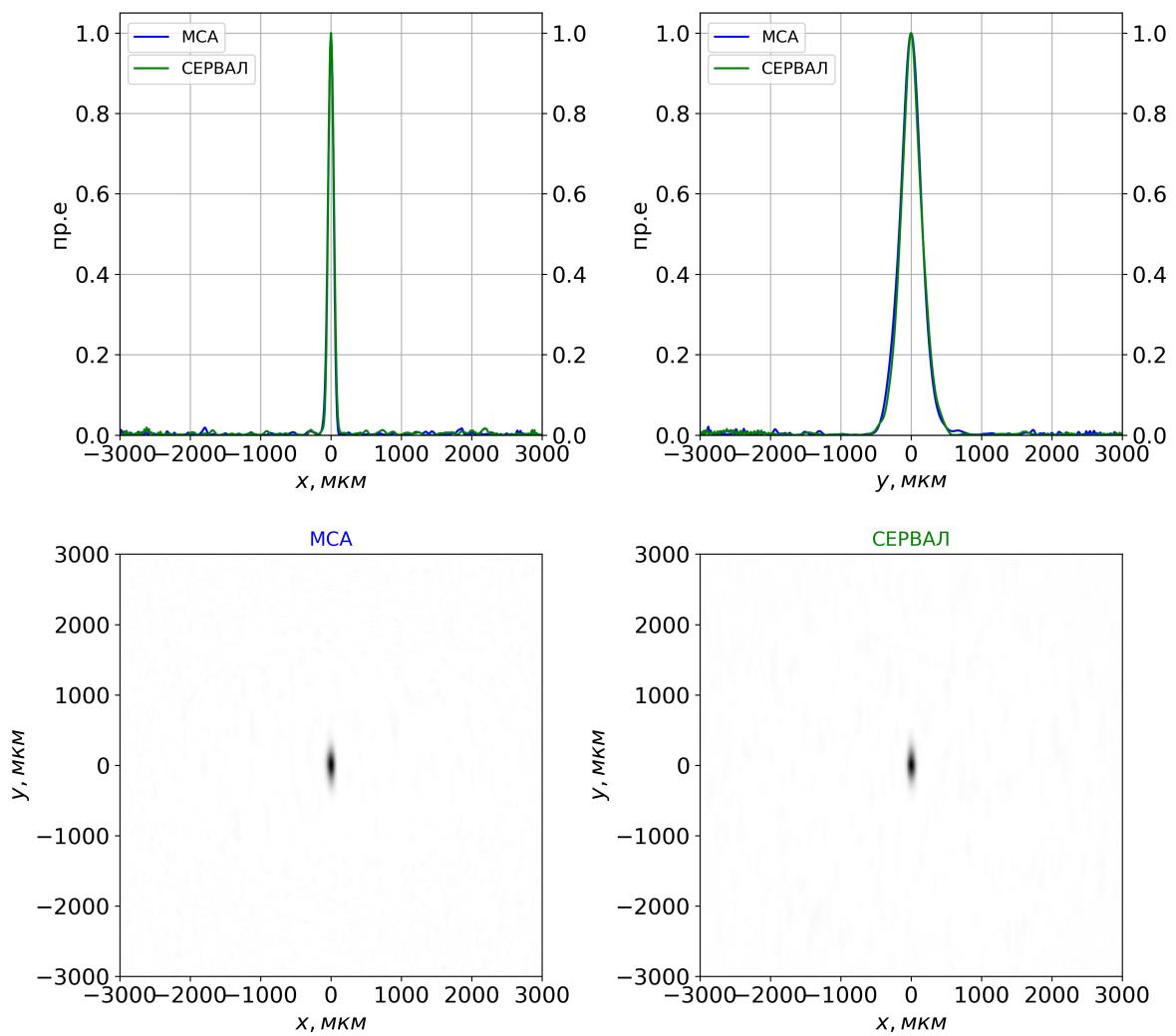
Распределение поля в дальней зоне на 25 м от ондулятора представлено на Рис. 3.3.



х-у- проекция

Рисунок 3.3 — Распределение интенсивности излучения в дальней зоне с величиной среднеквадратичного отклонения $750 \times 635 \text{ мкм}^2$.

Для усреднения было выбрано 300 статистических реализаций поля, что даёт достаточную сходимость. Однако, в структуре излучения всё ещё видны характерные спайки поля. Количество спайков в вертикальном направлении меньше, чем в горизонтальном. Их типичный размер в каждом из направлений соответствует длине поперечной когерентности. Размер пятна когерентности представлен на Рис. 3.4.



х-у-срез

Рисунок 3.4 — Распределение функции взаимной когерентности, построенное по формуле 1.1 с величиной среднеквадратичного отклонения 40×150 мкм².

Распределение интенсивности поля после дифракции на апертуре и 12,5 м распространения поля через пустое пространство приведено на Рис. 3.5.

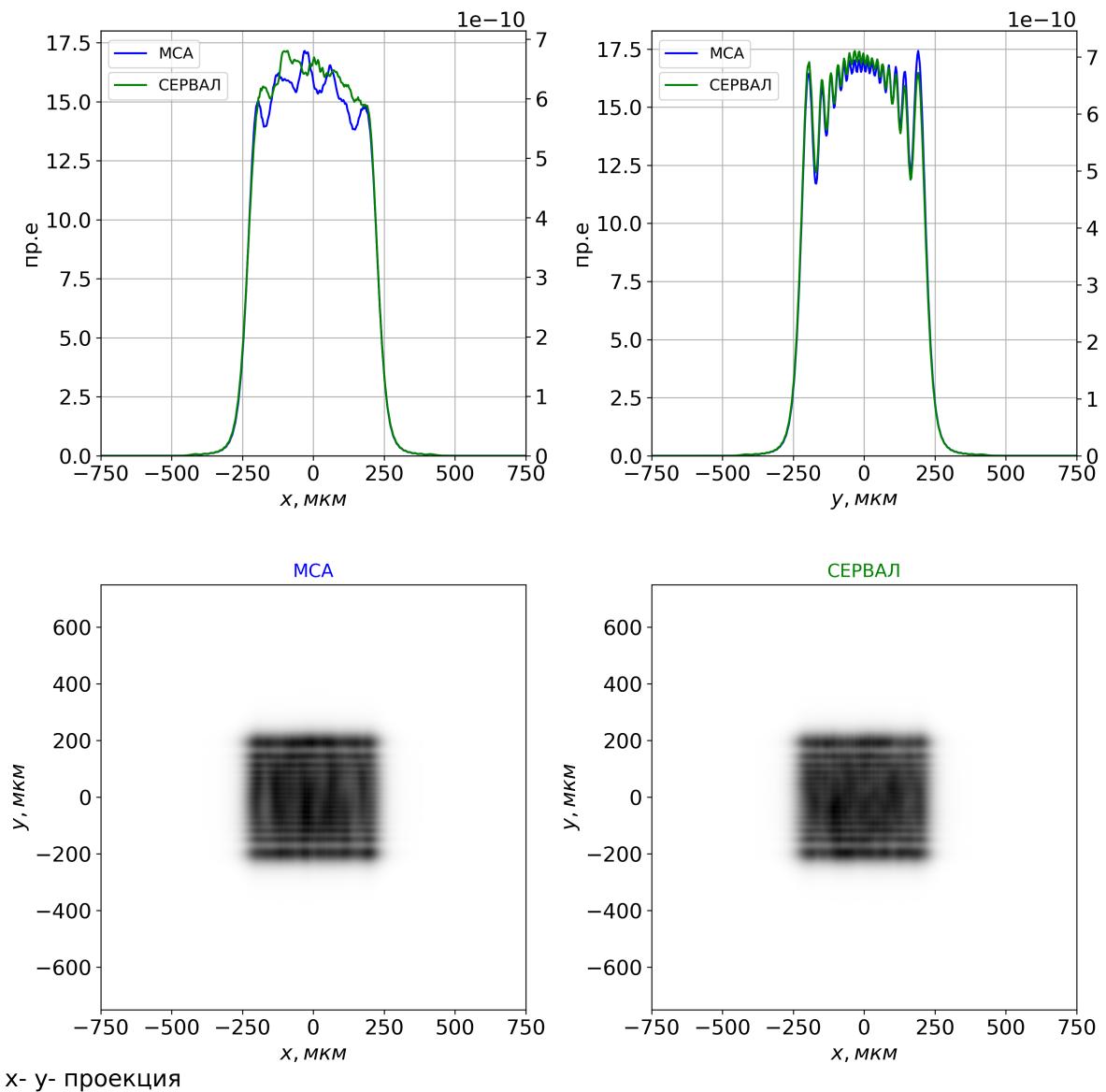


Рисунок 3.5 — Результат дифракции на апертуре и 12.5 м
распространения через пустое пространство, величина
среднеквадратичного отклонения представленных распределений

$$225 \times 222 \text{ } \mu\text{м}^2$$

Дифракционные картины отличаются для каждого из направлений: для вертикального дифракционные пики более выраженные ввиду большей длины когерентности, для горизонтального направления заметен только первый дифракционный максимум из-за заметно меньшей степени когерентности.

Распределение поля на образце (в фокусе оптической системы) приведено на Рис. 3.6.

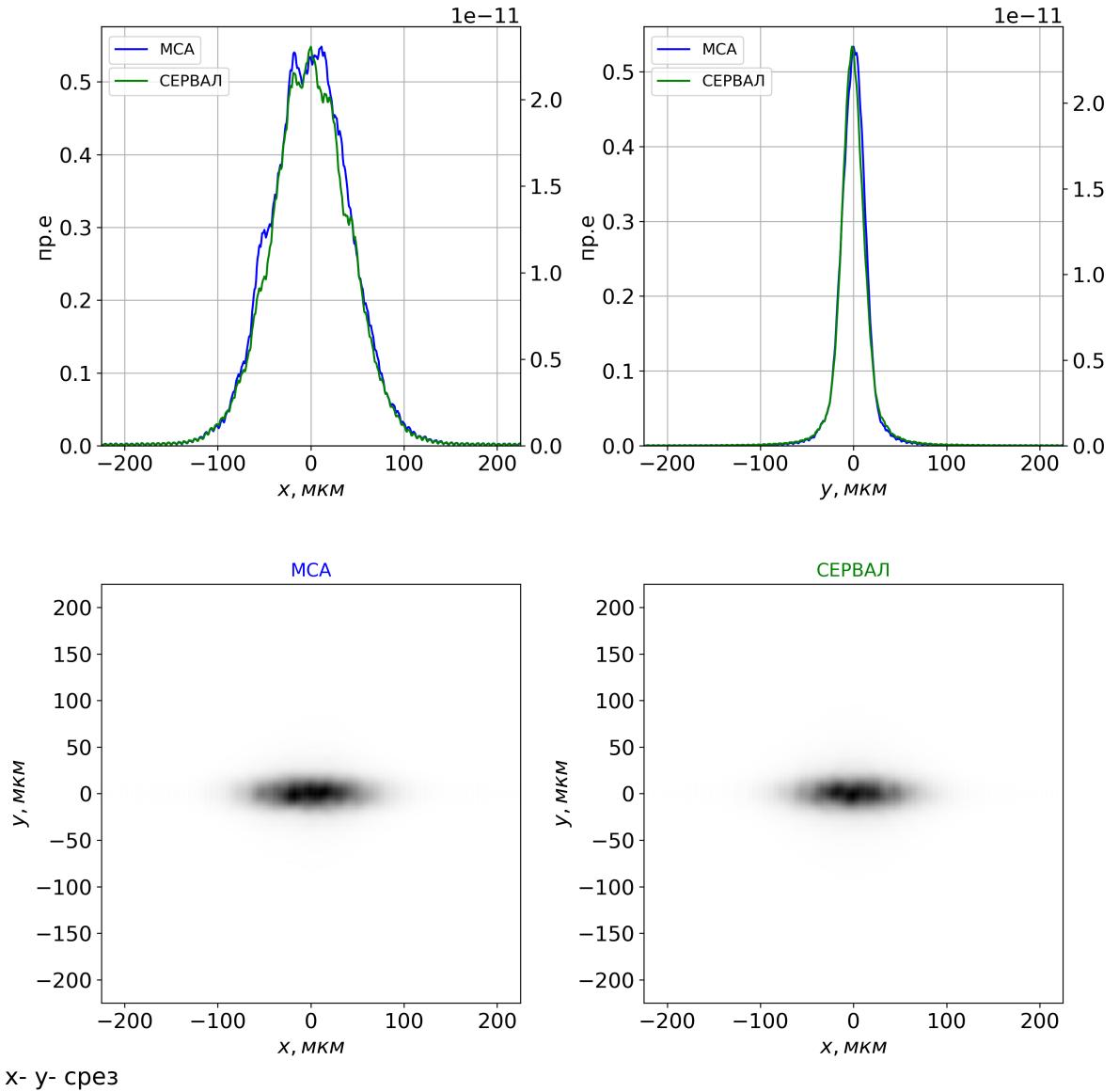


Рисунок 3.6 — Распределение излучения в фокусе, величина среднеквадратичного отклонения представленных распределений $42 \times 13,5$ мкм²

Для моделирования было выбрано соотношение плеч фокусирующей системы – 1 : 1. По критерию Рэлея, при размере апертуры 1×1 мм² угловая разрешающая способность такой системы $\theta_{diff} = 1,22\lambda/D = 0,7$ мкрад, где D размер апертуры. Угловой размер источника излучения θ_{source} для каждого из направлений $3,26 \times 0,86$ мкрад². Размер изображения в фокусе определяется как: $\sigma = b\sqrt{\theta_{source}^2 + \theta_{diff}^2}$, где b – расстояние от линзы до фокальной плоскости. Величины среднеквадратичного отклонения для такой оценки: в горизонтальном направлении 42 мкм

и в вертикальном направлении 14 мкм, что согласуется с результатами моделирования, представленными на Рис. 3.6.

3.2 Интерференционный эксперимент

Для наглядной демонстрации эффектов, связанных с частичной когерентностью, показательно провести классический опыт Юнга (двухщелевой интерферометр Юнга). Ниже на Рис. 3.7 приведён размер излучения на 25 м от источника и распределение корреляционной функции в увеличенном масштабе. Щели на рис 3.7 обозначены разными цветами: зелёный цвет – межщелевой зазор 75 мкм, красный – 150 мкм и оранжевый – 300 мкм, при среднеквадратичном отклонении функции поперечной когерентности 40×150 мкм².

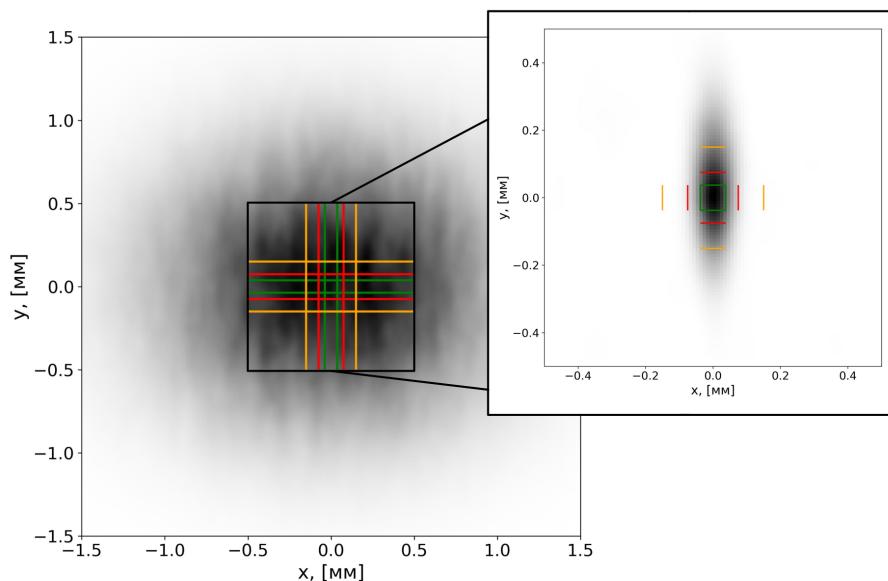


Рисунок 3.7 – Размер излучения на 25 м от источника (слева) и пятно когерентности на 25 м от источника с щелями (справа), щели обозначены цветными полосками. Три набора щелей для каждого из направлений. Межщелевые расстояния: зелёные полоски – 75 мкм, красные – 150 мкм и оранжевые – 300 мкм.

Схема эксперимента представлена на Рис. 3.8.

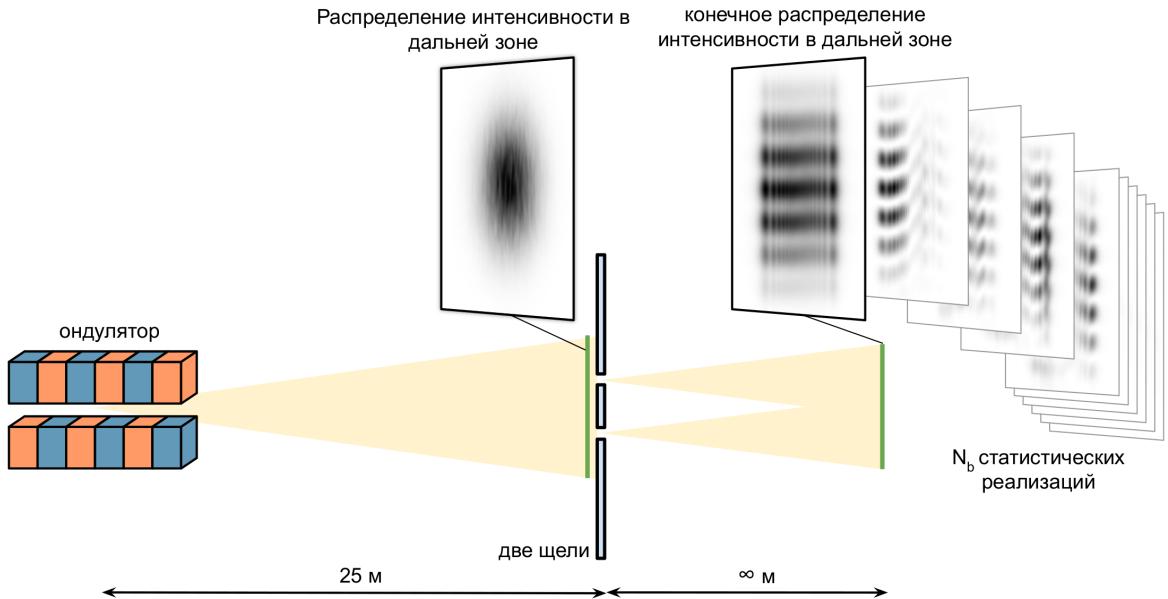


Рисунок 3.8 – Схема двухщелевого эксперимента. После щелей – интерферограмма усреднённа по 400 реализациям, за ней представлены интерферограммы для отдельных реализаций из статистического набора.

Интерферограммы приведены в дальней зоне. Примечательно, что видность каждой из реализаций после дифракции на щелях равна единице [5], но при усреднении по многим реализациям видность падает из-за наличия частичной когерентности излучения

Интерферограммы для различных межщелевых расстояний показаны на Рис. 3.9а, 3.9б, 3.9в. Распределения представлены для *вертикального* расположения щелей.

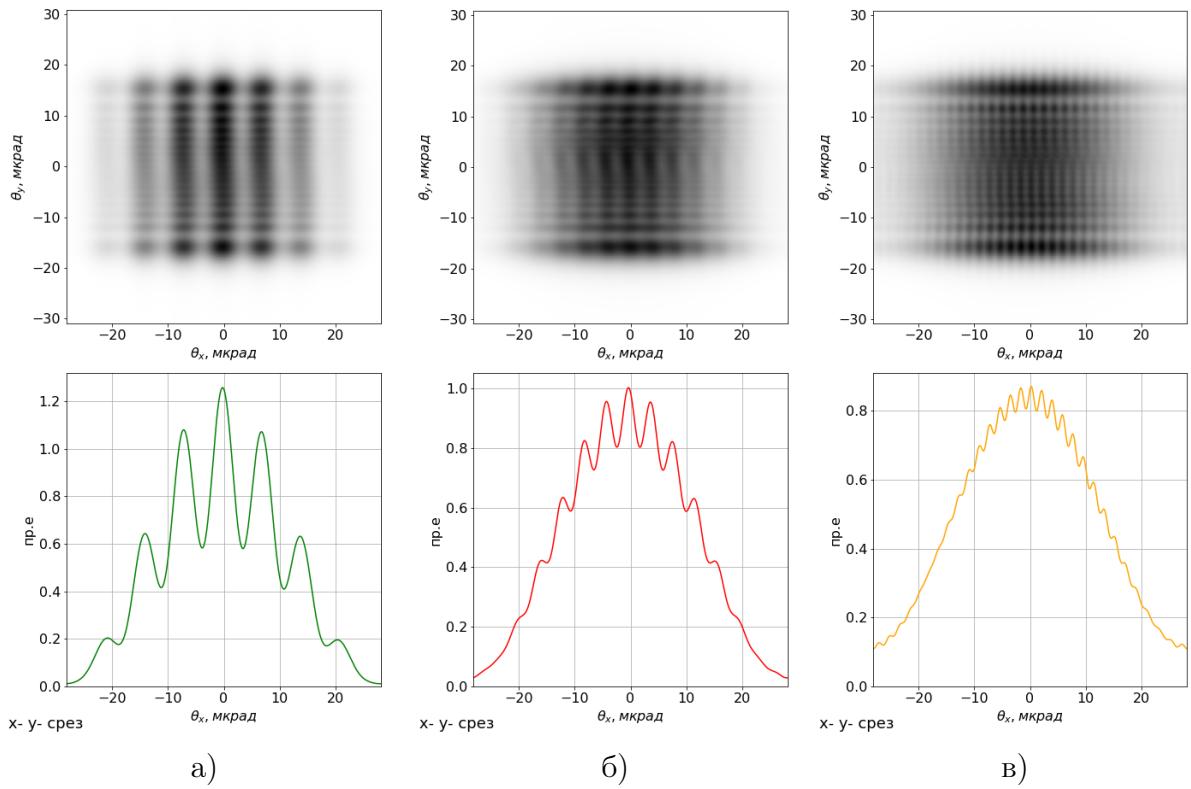


Рисунок 3.9 — Дифракционные картины для *вертикального* расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7

Интерференционные картины представлены в k -пространстве или, другими словами, в дальней зоне на расстоянии $z \rightarrow \infty$ от щелей. Щели имеют конечный, в данном случае, *горизонтальный* размер равный 1 мм, именно поэтому в вертикальном направлении на Рис. 3.9а, 3.9б, 3.9в видна дифракция от полуплоскости.

Аналогичные интерферограммы построены для *горизонтальной* ориентации щелей (Рис. 3.10).

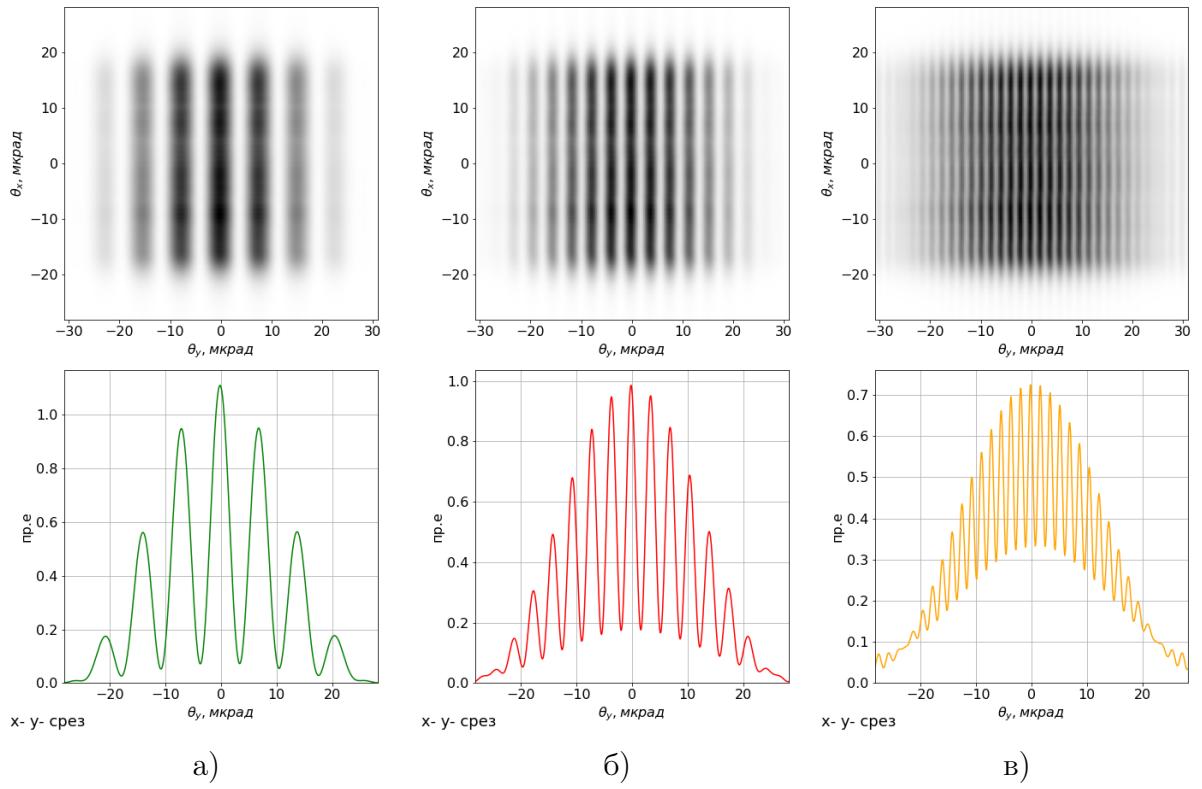


Рисунок 3.10 — Дифракционные картины для горизонтального расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7

В этом направлении излучение обладает большей степенью когерентности.

3.3 Отражение от неидеального зеркала

СЕРВАЛа применим для расчёта отражения частично когерентного излучения от зеркал с шероховатостями. При отражении от неидеального зеркала волновой фронт деформируется, что может в значительной степени влиять на размер и максимальную интенсивность излучения в фокусе, а также на когерентные свойства излучения. Ошибки по высоте δh профиля зеркала вносят фазовый сдвиг:

$$\phi = \frac{4\pi\delta h}{\lambda} \sin(\theta_i), \quad (3.1)$$

где θ_i – угол падения, отсчитываемый от поверхности зеркала.

Формула 3.1 даёт простой путь учёта шероховатости поверхностей при моделировании в волновом подходе. Таким образом, действие неидеальной поверхности учитывается как фазовый фактор, модулирующий волновой фронт. Альтернативный подход – использование пошагового моделирования процесса отражения волнового фронта от поверхности зеркала с учётом прохождения излучения в вещество, так называемый (англ.) split-step method. Сравнительный анализ этих двух походов приведён в работе [23], где показано совпадение оценки числа Штреля для различных величин шероховатостей. Вопросы моделирования профиля зеркала δh рассматриваются в Приложении Б.

Для моделирования была выбрана та же оптическая схема, что и для фокусировки с апертурой в разделе 3.1. В данном примере в качестве фокусирующих элементов рассматриваются зеркала с тем же фокусным расстоянием – 12,5 метра. Апертура была исключена из рассмотрения, чтобы показать действие неидеального зеркала на свойства излучения при отражении.

На Рис. 3.11а и 3.11б представлены распределения излучения после отражения от неидеальных фокусирующих зеркал в *двух случаях*: вертикального расположения зеркала (Рис. 3.11а) и горизонтального (Рис. 3.11б). Среднеквадратичная амплитуда шероховатостей зеркала h_{rms} в каждом случае составляет 0,3 нм. Распределение излучения представлено после отражения и распространения волнового фронта на 12,5 м через пустое пространство.

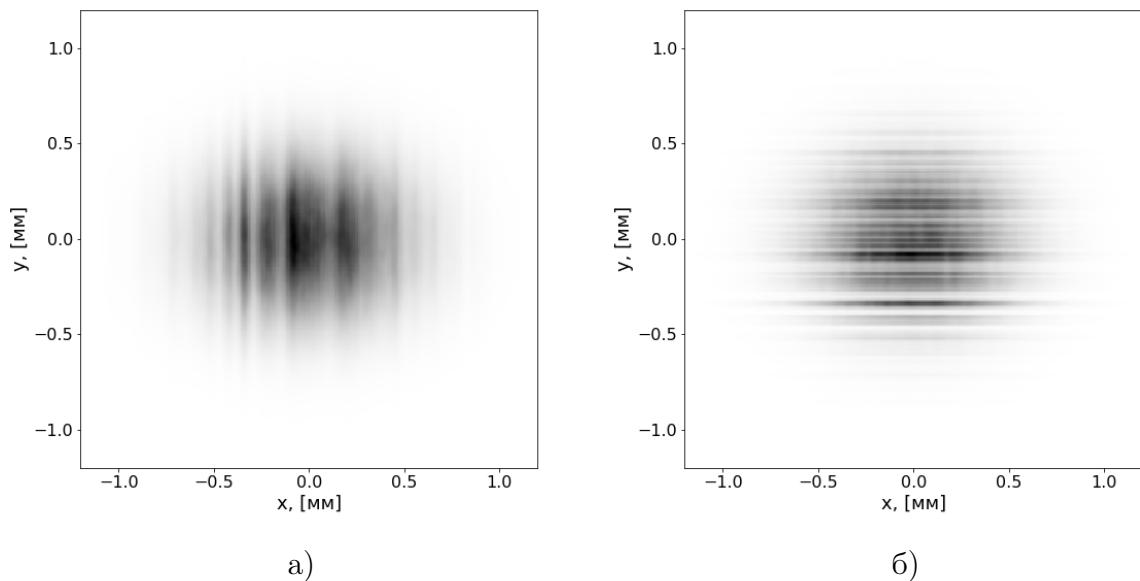


Рисунок 3.11 — Распределение интенсивности излучения после отражения от неидеального фокусирующего зеркала и распространение через 12,5 м пустого пространства. На Рис. 3.11а зеркало ориентировано *вертикально*, на Рис. 3.11б зеркало ориентировано *горизонтально*.

Видно, при вертикальной ориентации зеркала модуляции волнового фронта более сглажены из-за меньшей степени когерентности в горизонтальном направлении, в отличии горизонтального расположения зеркала – направление с большей степенью когерентности.

Для сравнения того, как влияют разные профили зеркала на свойства излучения после пропагации и в фокусе, на Рис. 3.12-3.15 представлены соответствующие распределения интенсивности излучения после отражения от зеркала со среднеквадратичными амплитудами шероховатостей равными 0,3 нм и 0,6 нм. Сравнение приведено для *двух* *ориентаций* моделируемого зеркала: зеркало ориентировано вертикально Рис. 3.12, 3.14. и, соответственно, горизонтально на Рис. 3.13, 3.15. Для всех случаев была выбрана *PSD* функция с коэффициентом $\beta = -1,8$, нормированная на соответствующие значения среднеквадратического отклонения ошибок профиля. Характер *PSD* функции профилей рентгеновских зеркал разобран в Приложении Б.

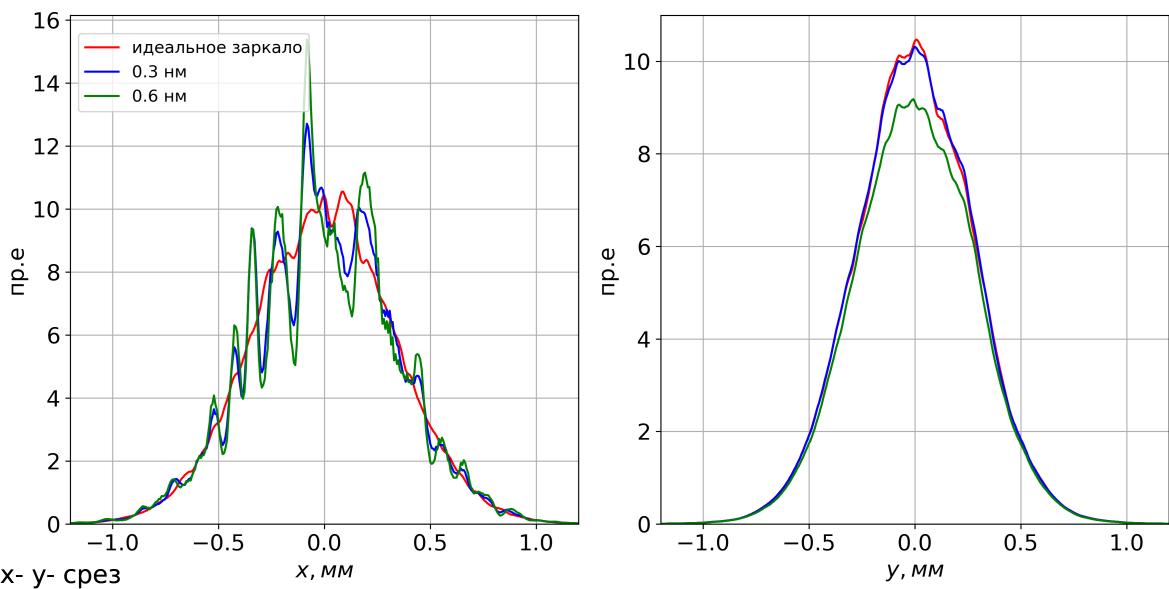


Рисунок 3.12 — Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12,5 м от зеркала, зеркало ориентировано *вертикально*

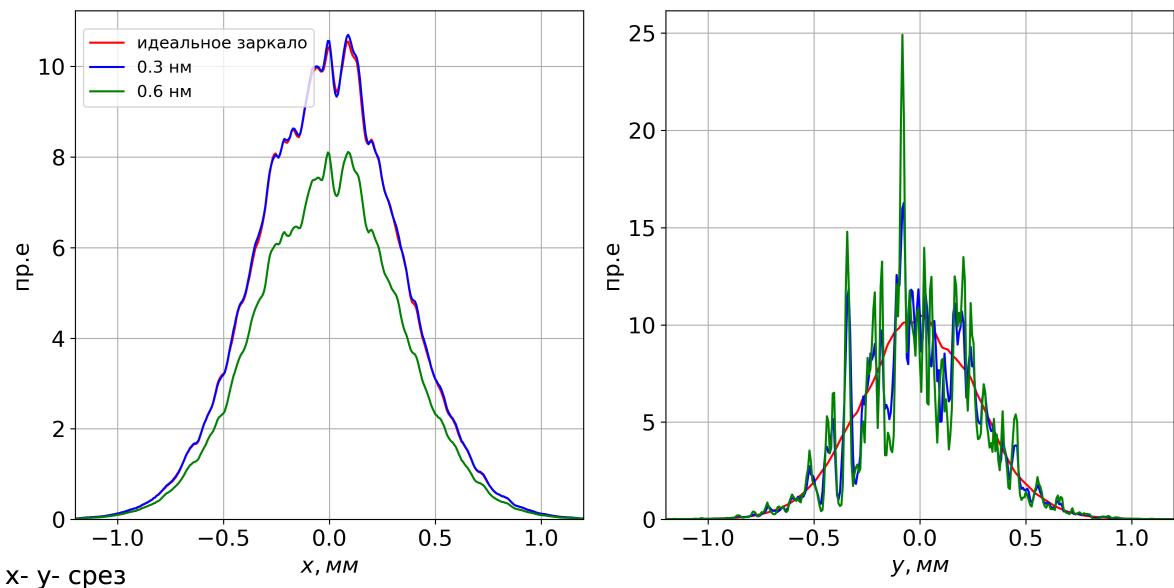


Рисунок 3.13 — Распределение интенсивности излучения после распространение на 12,5 м от зеркала, зеркало ориентировано *горизонтально*

При генерации профиля зеркала выбиралось одинаковое начальное число (англ. seed) для генерации псевдослучайной величины, что необходимо для статистической воспроизводимости результатов. Именно поэтому модуляции распределений на Рис. 3.12 и 3.13 при увеличении величины шероховатости просто повторяют свою форму, но с большей амплитудой.

На Рис. 3.14 и 3.15 представлены распределения интенсивности излучения на образце (в фокусе).

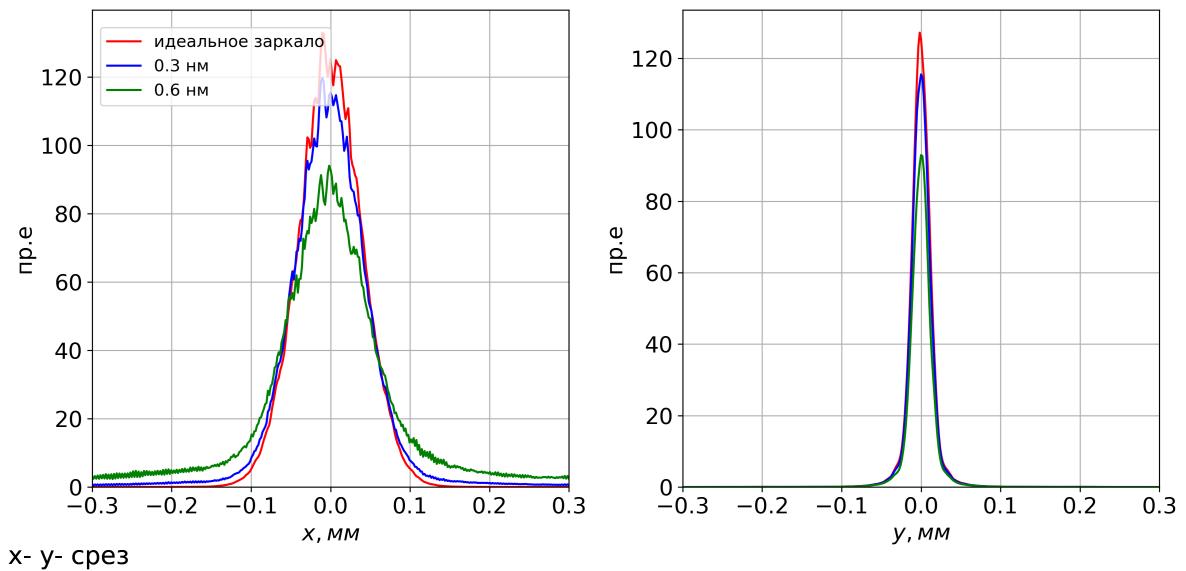


Рисунок 3.14 — Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало в данном случае ориентировано *вертикально*

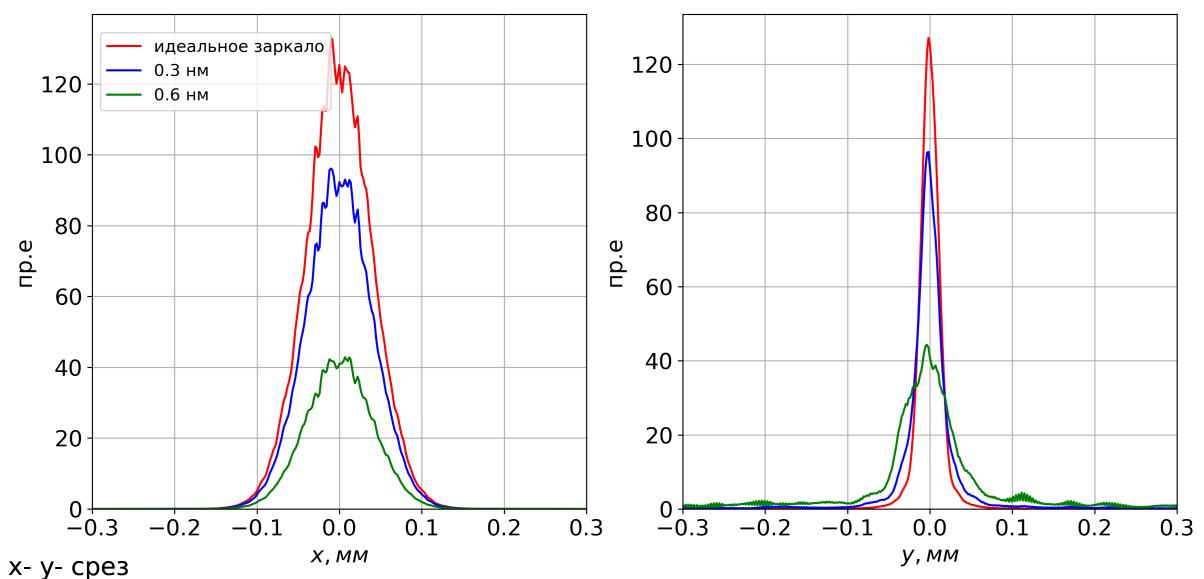


Рисунок 3.15 — Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало ориентировано *горизонтально*

Как видно на Рис. 3.14 и 3.15 шероховатости приводят к расплыванию фокусного пятна и, следственно, падению пиковой амплитуды интенсивности поля. Этот эффект играет критическую роль, например, для монохроматоров, основанных на дифракционных решётках, где размер

фокусного пятна определяет разрешающую способность монохроматора. Поэтому следует налагать довольно жёсткие требования на среднеквадратичные амплитуды шероховатостей рентгеновских зеркал, [24], [25].

Заключение

В работе представлен новый метод моделирования частично когерентного синхротронного излучения, называемый СЕРВАЛ. Метод основан на ограничении пространственных гармоник комплексного гауссово-го шума эффективным размером и расходимостью излучения на источнике. СЕРВАЛ даёт точную оценку распределения поля частично когерентного синхротронного излучения и поперечной функции когерентности. В работе проведён сравнительный анализ СЕРВАЛА и метода сложения амплитуд, показано, что СЕРВАЛ имеет преимущество в быстродействии на два порядка. В работе представлено применение СЕРВАЛА для расчёта оптических схем. Рассмотрено отражение частично когерентного излучения от рентгеновского зеркала с шероховатостями.

СЕРВАЛ нашёл применение при проектировании рентгенооптических трактов источника синхротронного излучения четвёртого поколения ЦКП «СКИФ». С помощью СЕРВАЛА было смоделировано прохождение частично когерентного синхротронного излучения через толстый образец с градиентом диэлектрической проницаемости. Решаемая задача представляет первое приближение численной модели рассеяния рентгеновского излучения на фронте ударной волны.

Благодарности

Список литературы

1. *Bartolini R.* Challenges in the design and construction of diffraction limited light sources. — Hamburg, 2021. — Conference talk at DESY users' meeting 2021.
2. *Hettel R.* Challenges in the Design of Diffraction-limited Storage Rings // Proceedings of the 5th Int. Particle Accelerator Conf. — 2014. — Vol. IPAC2014. — 5 pages, 0.551 MB. — DOI: 10.18429 / JACOW - IPAC2014 - MOXBA01. — URL: <http://jacow.org/ipac2014/doi/JACoW-IPAC2014-MOXBA01.html> (visited on 04/22/2021) ; Artwork Size: 5 pages, 0.551 MB ISBN: 9783954501328 Medium: PDF Publisher: JACoW Publishing, Geneva, Switzerland.
3. SHADOW3: a new version of the synchrotron X-ray optics modelling package / M. Sanchez del Rio [et al.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2011. — Sept. — Vol. 18, no. 5. — P. 708–716. — DOI: 10.1107/S0909049511026306. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0909049511026306> (visited on 04/22/2021).
4. *Goodman J.* Introduction to Fourier Optics. — W. H. Freeman, 2005. — (McGraw-Hill physical and quantum electronics series). — ISBN 978-0-9747077-2-3. — URL: https://books.google.ru/books?id=ow5xs_Rtt9AC.
5. *Goodman J.* Statistical Optics. — Wiley, 2015. — (Wiley Series in Pure and Applied Optics). — ISBN 978-1-119-00946-7. — URL: <https://books.google.ru/books?id=9O18CAAAQBAJ>.
6. *Chubar O., Elleaume P.* Accurate and efficient computation of synchrotron radiation in the near field region // proc. of the EPAC98 Conference. — 1998. — c. 1177–1179.
7. Transverse coherence properties of X-ray beams in third-generation synchrotron radiation sources / G. Geloni [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2008. — Apr. — Vol. 588, no. 3. — P. 463–493. — DOI: 10.1016/j.nima.2008.

- 01.089. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900208001605> (visited on 02/22/2021).
8. *Cittert P. H. van.* Die Wahrscheinliche Schwingungsverteilung in Einer von Einer Lichtquelle Direkt Oder Mittels Einer Linse Beleuchteten Ebene // *Physica*. — 1934. — янв. — т. 1, № 1. — с. 201—210. — DOI: 10.1016/S0031-8914(34)90026-4. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891434900264> (дата обр. 20.04.2021).
 9. *Zernike F.* The concept of degree of coherence and its application to optical problems // *Physica*. — 1938. — Aug. — Vol. 5, no. 8. — P. 785—795. — DOI: 10.1016/S0031-8914(38)80203-2. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891438802032> (visited on 04/20/2021).
 10. *Cullity B. D.* Elements of X-ray Diffraction. — Addison-Wesley Publishing Company, 1956. — ISBN 978-0-201-01230-9. — Google-Books-ID: XJVCgGFTODMC.
 11. Effects of energy spread on Brightness and Coherence of undulator sources / G. Geloni [и др.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2018. — сент. — т. 25, № 5. — с. 1335—1345. — DOI: 10.1107/S1600577518010330. — URL: <http://arxiv.org/abs/1808.05019> (дата обр. 28.04.2021) ; arXiv: 1808.05019.
 12. *Geloni G., Kocharyan V., Saldin E.* Brightness of Synchrotron radiation from Undulators and Bending Magnets // arXiv:1407.4591 [physics]. — 2014. — июль. — URL: <http://arxiv.org/abs/1407.4591> (дата обр. 21.04.2021) ; arXiv: 1407.4591.
 13. *Chubar O.* Simulation of emission and propagation of coherent synchrotron radiation wave fronts using the methods of wave optics // Infrared Physics & Technology. — 2006. — Sept. — Vol. 49, no. 1. — P. 96—103. — (International Workshop on Infrared Microscopy and Spectroscopy with Accelerator-Based Sources). — DOI: 10.1016/j.infrared.2006.01.010. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350449506000120> (visited on 04/03/2021).

14. *Singer A., Vartanyants I. A.* Modelling of partially coherent radiation based on the coherent mode decomposition // Advances in Computational Methods for X-Ray Optics II. т. 8141. — International Society for Optics, Photonics, 09.2011. — с. 814106. — DOI: 10.1117/12.893618. — URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/8141/814106/Modelling-of-partially-coherent-radiation-based-on-the-coherent-mode/10.1117/12.893618.short> (дата обр. 28.04.2021).
15. Application of Gaussian Schell-Model and Its Coherent Mode Decomposition on Hard X-Ray Synchrotron Radiation / W. Q. Hua [и др.] // 2012 Symposium on Photonics and Optoelectronics. — 05.2012. — с. 1—6. — DOI: 10.1109/SOPO.2012.6270955. — ISSN: 2156-8480.
16. *Khubbudinov R., Menushenkov A. P., Vartanyants I. A.* Coherence properties of the high-energy fourth-generation X-ray synchrotron sources // Journal of Synchrotron Radiation. — 2019. — Nov. — Vol. 26, no. 6. — P. 1851–1862. — DOI: 10.1107/S1600577519013079. — URL: <https://journals.iucr.org/s/issues/2019/06/00/pp5149/> (visited on 04/28/2021) ; Number: 6 Publisher: International Union of Crystallography.
17. (IUCr) Genuine-field modeling of partially coherent X-ray imaging systems. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/iucr/doi/10.1107/S1600577520006979> (дата обр. 28.04.2021).
18. *Onuki H., Elleaume P.* Undulators, wigglers, and their applications. — London : Taylor & Francis, 2003. — ISBN 978-0-203-21823-5 978-0-203-27377-7. — URL: <http://www.crcnetbase.com/isbn/9780203218235> (visited on 03/29/2021) ; OCLC: 941215200.
19. Fourier treatment of near-field synchrotron radiation theory / G. Geloni [et al.] // Optics Communications. — 2007. — Aug. — Vol. 276, no. 1. — P. 167–179. — DOI: 10.1016/j.optcom.2007.03.051. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401807003367> (visited on 02/26/2021).
20. *Voelz D. G.* Computational fourier optics: a MATLAB tutorial. — Bellingham, Wash : SPIE Press, 2011. — ISBN 978-0-8194-8204-4.

21. *Schmidt J. D.* Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in MATLAB. — SPIE, 07/2010. — ISBN 978-0-8194-8327-0. — DOI: 10.1117/3.866274. — URL: <https://spiedigitallibrary.org/ebooks/PM/Numerical-Simulation-of-Optical-Wave-Propagation-with-Examples-in-MATLAB/eISBN-9780819483270/10.1117/3.866274> (visited on 05/20/2021).
22. *Tanaka T., Kitamura H.* SPECTRA: a synchrotron radiation calculation code // Journal of Synchrotron Radiation. — 2001. — Nov. — Vol. 8, no. 6. — P. 1221–1228. — DOI: 10.1107/S090904950101425X. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?wr2001> (visited on 05/14/2021) ; Number: 6 Publisher: International Union of Crystallography.
23. *Serkez S.* Design and Optimization of the Grating Monochromator for Soft X-Ray Self-Seeding FELs : PhD thesis / Serkez Svitozar. — Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron, 2015. — URL: <https://bib-pubdb1.desy.de/record/275967> (visited on 03/30/2021) ; Number: PUBDB-2015-04348.
24. High-resolution soft X-ray beamline ADRESS at the Swiss Light Source for resonant inelastic X-ray scattering and angle-resolved photoelectron spectroscopies / V. N. Strocov [et al.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2010. — Sept. — Vol. 17, no. 5. — P. 631–643. — DOI: 10.1107/S0909049510019862. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0909049510019862> (visited on 05/15/2021).
25. *Sankari R.* HIPPIE beamline at MAX IV: Detailed optical design report. —.
26. *Church E. L., Takacs P. Z.* Specification of surface figure and finish in terms of system performance // Applied Optics. — 1993. — July. — Vol. 32, no. 19. — P. 3344. — DOI: 10.1364/AO.32.003344. — URL: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ao-32-19-3344> (visited on 05/15/2021).
27. Fractal description of rough surfaces / O. V. Angeisky [et al.]. —.
28. Using the Power Spectral Density Method to Characterize and Evaluate the X-ray Mirrors Surfaces / W. Q. Hua [et al.]. — 2013.

29. Statistical measurement of mid-spatial frequency defects of large optics / J. Xu [et al.] // Measurement Science and Technology. — 2012. — Apr. — Vol. 23, no. 6. — P. 065201. — DOI: 10.1088/0957-0233/23/6/065201. — URL: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/23/6/065201> (visited on 05/15/2021) ; Publisher: IOP Publishing.
30. Predicting the coherent X-ray wavefront focal properties at the Linac Coherent Light Source (LCLS) X-ray free electron laser / A. Barty [и др.] // Optics Express. — 2009. — авг. — т. 17, № 18. — с. 15508—15519. — DOI: 10.1364/OE.17.015508. — URL: <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-17-18-15508> (дата обр. 15.05.2021) ; Publisher: Optical Society of America.

Список рисунков

1.1	К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике	9
1.2	К формулировке обобщённой теоремы Ван Циттерта-Цернике	10
1.3	Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Красной линией показана полоса излучения, выделяемая монохроматором	13
2.1	Спайковая структура излучения синхротронного излучения. Красной линией обозначена разрешающая способность монохроматора	18
2.2	Схема работы метода сложения амплитуд	19
2.3	Схема метода сложения интенсивностей	21
2.4	Схема эффекта зависимости расходимости излучения от размера электронного сгустка. Рисунок разделён на две части: ближняя зона, источник излучения – слева и дальняя зона – справа. Жёлтой линией схематично изображён характерный поперечный размер излучения, синей линией характерный поперечный размер электронного сгустка, жёлтая волнистая линия символизирует длину волны излучения в сравнении с продольным размером электронного сгустка. Важно отметить, масштабы для обоих рисунков (верхнего и нижнего) – те же. Расходимости электронных сгустков (сверху и снизу) одинаковы.	23
2.5	Расходимость излучения от электронного сгустка с размерами, указанными в легенде. Расходимость электронного сгустка много меньше натуральной расходимости синхротронного излучения	24

2.6 Схема эффекта зависимости расходимости излучения от продольной когерентности излучения. Жёлтой линией обозначен характерный поперечный размер излучения, жёлтой волнистой длина волны излучения с сравнение в продольным размером электронного сгустка. На рисунке обозначено, что в случае продольно некогерентного излучения расходимость в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в случае продольно когерентного излучения	25
2.7 Расходимость излучения в случае продольно когерентного излучения (зелёная линия), и продольно некогерентного излучения (синяя линия).	26
2.8 Интенсивность комплексного гауссова шума	27
2.9 Размер излучение с наложенным шумом в r -пространстве . .	27
2.10 Размер излучение с наложенным шумом k -пространстве . .	27
2.11 Расходимость излучения в источнике	28
2.12 Размер излучения в источнике	28
2.13 Распределение поля на источнике излучения для разных функций в сравнении с методом сложения амплитуд	31
2.14 Функции поперечной когерентности на расстоянии 25 м от источника	32
2.15 Размеры излучения в дальней зоне (расходимость) на расстоянии 25 м	32
 3.1 Оптическая схема. Ондулятор в начале координат, апертура перед линзой на расстоянии 25 м от ондулятора, линза с фокусным расстоянием 12,5 м фокусирует излучение на образец, расположенный на 25 м от линзы. Распределения интенсивности приведены на источнике излучения, в дальней зоне перед апертурой, на половине пути к образцу и на самом образце (в фокусе).	35
3.2 Распределение интенсивности на источнике излучения с величиной среднеквадратичного отклонения $40.8 \times 10.8 \text{ мкм}^2$	36
3.3 Распределение интенсивности излучения в дальней зоне с величиной среднеквадратичного отклонения $750 \times 635 \text{ мкм}^2$.	37

3.4	Распределение функции взаимной когерентности, построенное по формуле 1.1 с величиной среднеквадратичного отклонения $40 \times 150 \text{ мкм}^2$	38
3.5	Результат дифракции на апертуре и 12.5 м распространения через пустое пространство, величина среднеквадратичного отклонения представленных распределений $225 \times 222 \text{ мкм}^2$	39
3.6	Распределение излучения в фокусе, величина среднеквадратичного отклонения представленных распределений $42 \times 13,5 \text{ мкм}^2$	40
3.7	Размер излучения на 25 м от источника (слева) и пятно когерентности на 25 м от источника с щелями (справа), щели обозначены цветными полосками. Три набора щелей для каждого из направлений. Межщелевые расстояния: зелёные полоски – 75 мкм, красные – 150 мкм и оранжевые – 300 мкм.	41
3.8	Схема двухщелевого эксперимента. После щелей – интерферограмма усреднённа по 400 реализациям, за ней представлены интерферограммы для отдельных реализаций из статистического набора. Интерферограммы приведены в дальней зоне. Примечательно, что видность каждой из реализаций после дифракции на щелях равна единице [5], но при усреднении по многим реализациям видность падает из-за наличия частичной когерентности излучения	42
3.9	Дифракционные картины для <i>вертикального</i> расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7	43
3.10	Дифракционные картины для <i>горизонтального</i> расположения щелей в дальней зоне, слева на право межщелевой зазор: 75 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Цвета линий соответствуют цветам на Рис. 3.7	44

3.11 Распределение интенсивности излучения после отражения от неидеального фокусирующего зеркала и распространение через 12,5 м пустого пространства. На Рис. 3.11а зеркало ориентировано <i>вертикально</i> , на Рис. 3.11б зеркало ориентировано <i>горизонтально</i>	46
3.12 Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12,5 м от зеркала, зеркало ориентировано <i>вертикально</i>	47
3.13 Распределение интенсивности излучения после распространение на 12,5 м от зеркала, зеркало ориентировано <i>горизонтально</i>	47
3.14 Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало в данном случае ориентировано <i>вертикально</i>	48
3.15 Распределение интенсивности излучения в фокусе, зеркало ориентировано <i>горизонтально</i>	48

Список таблиц

2.1	Быстродействие метода сложения амплитуд и СЕРВАЛа	29
2.2	Параметры ондулятора	31
2.3	Параметры электронного сгустка	31

Приложение А

Анализ подходящих огибающих для СЕРВАЛА

[В этом Приложении будут более подробно рассмотрены подходящие огибающие для СЕРВАЛА при различных параметрах электронного пучка]

Приложение Б

Описание шероховатости поверхностей зеркал

Число Штреля, упомянутое части 3.3, описывает относительное падение интенсивности излучения на оси из-за наличия в оптической системе аберраций и может быть использовано для выдвижения критерия (критерий Марешаля), налагающего ограничение на среднеквадратичное отклонение h_{rms} , а также среднеквадратичную ошибку наклона μ_{rms} , [26]:

$$\frac{I(0)}{I_0(0)} = 1 - 8 \frac{\mu_{rms}^2}{\theta_i} - \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sin(\theta_i) \right)^2 h_{rms}^2 < 0,8, \quad (\text{Б.1})$$

здесь $I(0)$ и $I_0(0)$ интенсивности излучения на оси оптической системы в фокусе в случае оптики с аберрациями и без, соответственно.

Как видно, формула Б.1 зависит от двух параметров h_{rms} и μ_{rms} . Полное описание поверхности зеркала возможно в обратном пространстве функцией спектральной плотности $PSD(k)$, которая определяется следующим образом:

$$PSD(k) = \frac{1}{L} \left| \int_{-L/2}^{L/2} \delta h(z) \exp(-ikz) dz \right|^2 \quad (\text{Б.2})$$

Профиль зеркала имеет фрактальную структуру [27] с параметром D , удовлетворяющий условию $1 < D < 2$, что даёт линейный вид PSD -функции в лог-лог масштабе. Функция задаётся двумя параметрами: свободным членом α и наклоном β , при $D = (5 - \alpha)/2$. Соответственно,

$$PSD(k) = \beta k - \alpha. \quad (\text{Б.3})$$

Через PSD -функцию удобно определять среднеквадратичные значения ошибок по высоте и наклону через интегралы по PSD функции:

$$\mu_{rms}^2 = (2\pi)^2 \int_{1/L}^{1/W} k^2 PSD(k) dk, \quad (\text{Б.4})$$

$$h_{rms}^2 = \int_{1/W}^{1/\lambda} PSD(k) dk, \quad (\text{Б.5})$$

где W длина когерентности излучения на зеркале. Видно, что при некоторых значениях W и параметрах оптической системы, величина μ_{rms} теряет свой смысл и равна нулю.

h_{rms} и μ_{rms} – некоторые средние, поэтому через них сложно полно описать профиль зеркала. При расчёте оптики необходимо знать саму PSD функцию. Обращая формулу Б.2, можно моделировать профиль зеркала [28], [29], [30].

$$\delta h(z) = \frac{M}{L} F^{-1} \left\{ \sqrt{L \cdot PSD(k)} \exp[i\psi(k)] \right\}(z), \quad (\text{Б.6})$$

где $F^{-1}\{\cdot\}(z)$ обратное преобразование фурье, а M – количество точек вдоль оси z , $\psi(k)$ – случайно сгенерированная фаза, удовлетворяющая условию $-\pi < \psi(k) < \pi$, равномерно распределенная в этом промежутке. Таким образом, зная профиль зеркала $\delta h(z)$ и используя формулу 3.1, можно провести моделирование процесса отражения волнового фронта от неидеального зеркала.