

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Теоретический базис . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1 Распространение функции взаимной когерентности и теорема Ван Циттерта - Цернике . . . . .	7
1.2 О статистических свойства синхротронного излучения . . .	10
<b>Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от пучка с конечным эмиттансом . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1 Численное моделирование ондуляторного излучения . . . .	14
2.1.1 Влияние размера электронного пучка на расходимость излучения . . . . .	18
2.1.2 Различие расходимости излучения для случая продольно полностью когерентного и некогерентного пучка . . . . .	19
2.2 Метод ограничения пространственных гармоник огибающими: СЕРВАЛ . . . . .	20
2.2.1 Алгоритм создания поля . . . . .	21
2.2.2 Выбор подходящих огибающих . . . . .	23
<b>Глава 3. Применение СЕРВАЛА . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1 Фокусирующая система с конечной апертурой . . . . .	27
3.2 Интерференционный эксперимент . . . . .	33
3.3 Отражение от неидеального зеркала . . . . .	37
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>Глоссарий . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>53</b>

## Аннотация

[ещё допишется] Представленная работа посвящена разработке методов моделирования процесса генерации синхротронного излучения (СИ) от электронного пучка с конечным эмиттансом и прохождения этого излучения через оптическую систему. Развитие магнитных схем циклических ускорителей дало возможность снизить эмиттанс электронного пучка и приблизить источники СИ к дифракционному пределу для широкого диапазона длин волн, вплоть до жёсткого рентгена, поэтому такое излучение характеризуется значительной степенью поперечной когерентности. Случай частично когерентного синхротронного излучения представляет наибольший интерес, так как именно он реализуется в большинстве случаев. В работе предложен оригинальный метод моделирования частично когерентного синхротронного излучения и рассмотрены практические примеры распространения частично когерентного волнового фронта через оптическую систему источников СИ.

## Введение

Развитие источников синхротронного излучения (СИ), а именно магнито-оптических систем электронных накопительных колец [1], [2] источников СИ, дало возможность получать электронные пучки с эмиттансом электронного пучка меньше чем натуральный «эмиттанс» синхротронного излучения в широком диапазоне длин волн излучения вплоть до ангстремных масштабов:

$$\epsilon_{ph} = \sigma'_r \sigma_r = \lambda / 4\pi, \quad (1)$$

где  $\sigma'_r$  и  $\sigma_r$  натуральная расходимость и размер излучения в перетяжке на источнике и  $\lambda$  – длина волны излучения. Таким образом источники СИ последнего, четвёртого поколения, достигают дифракционного предела. Полностью дифракционно ограниченные источники обладают полной поперечной когерентностью, что выполняется в большинстве случаев для мягкого рентгеновского диапазона, однако по мере уменьшения длины волны степень поперечной когерентности излучения падает, излучение становится частично когерентным.

Задача моделирования поля частично когерентного излучения является основной при проектировании оптических линий источников СИ, так как именно случай с частично когерентным излучением реализуется в большинстве практических случаев. Метод трассировки лучей реализованный, например, в коде SHADOW [3], являлся подходом рутинно использовавшимся при проектировании источников синхротронного излучения третьего и второго поколений. Предпосылки для использования метода трассировки лучей основывается на плохой поперечной когерентности синхротронных источников излучения прошлых поколений. Однако, уже для источников третьего поколения дифракционный предел достигался в вертикальном направлении и предпосылки к использованию метода трассировки лучей становятся сомнительными. В целом, подходы трассировки лучей не дают удовлетворительную модель физических процессов, происходящих при генерации синхротронного излучения. Для оценки параметров, когда трассировка лучей может быть

применена, следует придерживаться правила, что характерные размеры особенностей оптики, например: апертуры, шероховатости поверхностей рентгеновских зеркал<sup>1</sup>, должны быть много меньше размеров поперечной когерентности излучения на них, иначе необходимо принимать во внимание дифракционные эффекты.

Для построение физической модели соответствующей процессам генерации и пропагации излучения необходимо использовать подходы волновой оптики. При компьютерном моделировании под подходами волновой оптики подразумевается моделирование реальных электромагнитных полей, описываемые комплексными величинами и меняющимися при пропагации через оптические системы в соответствии с законами Фурье-оптики [4] и статистической оптики [9]. Подходы волновой оптики позволяют учесть дифракционные эффекты для полностью когерентного излучения, однако моделирование частично когерентного синхротронного излучения остаётся сложной задачей. Один из походов в решении этой задачи реализован в коде Synchrotron Radiation Workshop (SRW) [5], который в деталях будет разобран в Главе 2.

В литературе даны все теоретически основы о статистической природы синхротронного излучения. Необходимую материалы о свойствах источников синхротронного излучения третьего поколения можно найти, например в [6]. Однако, алгоритм, основанный на выводах работы, не был имплементирован в известных кодах по моделированию синхротронного излучения. Описание процесса генерации синхротронного излучения, представленное в указанной работе, основывается на том, что дробовой шум в электронном пучке вызывает флуктуации электронной плотности, что в свою очередь привносит произвольные флуктуации амплитуды и фазы в распределение электромагнитного поля и является причиной характерной спайковой структуры одной реализации излучения. Под одной реализацией поля подразумевается идеально<sup>2</sup> монохро-

---

<sup>1</sup> Для шероховатостей нужно внести уточнение. Обратные размеры зеркала ( $1/L$ ) и длины волны ( $1/\lambda$ ) определяют зону рассмотрение ошибок профиля зеркала. Обратная величина длины когерентности ( $1/l_c$ ) задает условную границу, когда ошибки профиля зеркала рассматриваются как ошибки наклона для  $k < 1/l_c$ , где  $k$  – пространственные гармоники профиля зеркала, а когда должны быть рассмотрены как ошибки по высоте при  $k > 1/l_c$ . Можно сказать, что ошибки по высоте, в целом, портят когерентность пучка излучения, а для излучения с итак плохой когерентностью учёт ошибок по высоте может быть опущен. Это опущение, естественно, происходит при проведении трассировки лучей, так как в этом методе не учитываются дифракционные эффекты.

<sup>2</sup> достаточна монохроматизация до  $< 1/\sigma_T$ , где  $\sigma_T$  длительность электронного пучка

матизированное поле после пролёта одного электронного пучка. Флуктуации электронной плотности меняются от пучка к пучку, и для получение характерного значение интенсивности поля, необходимо произвести усреднение по достаточно значительному ансамблю электронных пучков. Метод основывается на прямом моделировании излучения каждого электрона (макроэлектрона) и сложении полей от каждого из них и дальнейшее усреднение по статистическим реализациям, для условности этот метод будет называться методом сложения амплитуд (МСА). В Главе 2 этот подход также будет обсуждаться более подробно.

Два приведённых метода основываются, по сути, на прямом моделировании излучения от каждого электрона (макроэлектрона) и последующем суммировании. Расчёт такого поля весьма трудоёмок и занимает значительное время. В представленной работе предложен новый численно эффективный алгоритм моделирования частично когерентного синхротронного излучения, основанный на ограничении пространственных гармоник комплексного гауссова шума огибающими полями. Для определённости новый метод будет называться метод СЕРВАЛ. Метод предлагает точный алгоритм расчёта частично когерентного поля. В Главе 2 настоящей работы приводится соответствующий алгоритм и сравнительный анализ рассчитанных полей в дальней зоне, на источнике и функции взаимной когерентности, а также анализ границ применимости метода. В Главе 3 приведены примеры использования СЕРВАЛА в трёх случаях: фокусировка при наличии конечной входной апертуры, классический двухщелевой эксперимент (интерферометр Юнга) и фокусировка рентгеновским зеркалом при наличии шероховатостей. Разработанный метод стал частью среды OCELOT (<https://github.com/ocelot-collab>) для моделирования излучения лазеров на свободных электронах и синхротронных источников излучения.

**Целью** представленной работы являлась разработка нового численно эффективного метода моделирования частично когерентного синхротронного излучения. Поставленная цель являются **актуальными** для научного сообщества в связи с развитием источников синхротронного излучения и строительством новых источников четвёртого поколения. На данный момент стоит необходимость дальнейшего развития

компьютерных кодов для моделирования излучения современных источников СИ. Научная **новизна** работы заключается разработке уникального алгоритма расчёта частично когерентного поля. Предложенный алгоритм имеет **практическую ценность** и используется при проектировании рентгенооптических трактов источника синхротронного излучения четвёртого поколения ЦКП «СКИФ».

# Глава 1. Теоретический базис

В настоящей главе будут разобраны элементы статистической оптики, а именно одна из основных теорем статистической оптики, теорема Ван Циттерта - Цернике. Используя вывод теоремы, в качестве примера, оценивается пятно когерентности излучения для рентгеновской трубы – полностью некогерентного источника излучения, и далее даётся формулировка обобщённой теоремы Ван Циттерта - Цернике в случае, когда на источнике излучения есть конечная область когерентности, или другими словами источник частично когерентен. Так же в главе рассматриваются вопросы формирования синхротронного излучения от электронного пучка с конечным эмиттансом. Обсуждаются статистические свойства такого излучения и описывается характерная спайковая структура излучения для одной статистической реализации поля.

## 1.1 Распространение функции взаимной когерентности и теорема Ван Циттерта - Цернике

Распространение функции взаимной когерентности 1.1 поля  $E(r, t)$  через свободное пространство от некогерентных стационарных источников излучения описывается теоремой Ван Циттерта - Цернике [7], [8].

$$\Gamma^{(1)}(r_1, r_2, t) = \frac{\langle E(r_1, t)E(r_2, t) \rangle}{\langle E(r_1, t) \rangle \langle E(r_2, t) \rangle}, \quad (1.1)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по статистическим реализациям поля. Теорема даёт связь между распределением интенсивности источника излучения  $I(\xi, \eta)$  и функцией взаимной когерентности  $\Gamma^{(1)}(r_1, r_2, t)$  через дву-

мерное Фурье преобразование.

$$\Gamma^{(1)}(r_1, r_2, t) = \frac{\kappa e^{-i\psi}}{(\bar{\lambda}z)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp \left[ \left( i \frac{2\pi}{\bar{\lambda}z} \right) (\Delta x \xi + \Delta y \eta) \right] d\xi d\eta, \quad (1.2)$$

где  $\kappa = \lambda^2/\pi$ ,  $\bar{\lambda}$  – средняя длина волны квазимонохроматического источника излучения,  $z$  – расстояние до плоскости наблюдения от источника излучения,  $\psi = \frac{\pi}{\bar{\lambda}z} [((x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2))]$ , а  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ , а геометрические величины изображены на Рис. 1.1

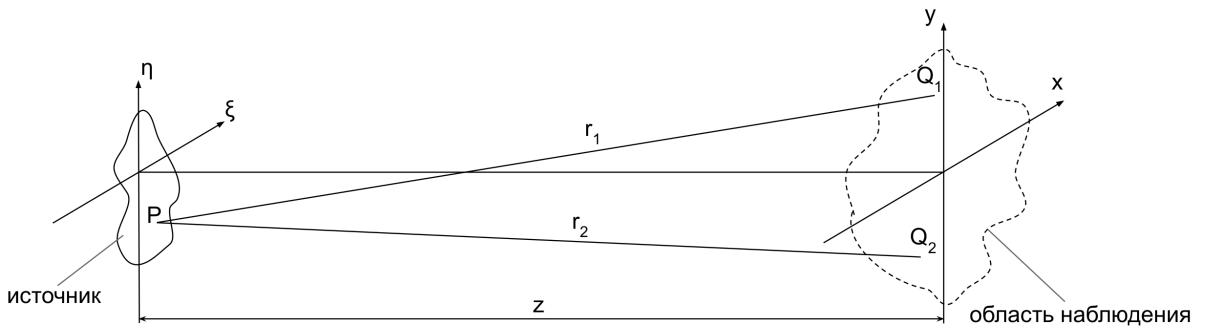


Рисунок 1.1 – К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике

Таким образом площадь пятна когерентности на расстоянии  $z$  от источника будет определяться следующим выражением:

$$A_c = \frac{(\lambda z)^2}{A_s}. \quad (1.3)$$

Теорема может быть видоизменена и обобщена для частично когерентных источников излучения достаточно лишь заменить  $\kappa$  на двойной интеграл [9]

$$\kappa(\bar{x}, \bar{y}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left[ \left( i \frac{2\pi}{\bar{\lambda}z} \right) (\bar{x}\Delta\xi + \bar{y}\Delta\eta) \right] d\Delta\xi d\Delta\eta, \quad (1.4)$$

где  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ,  $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ ,  $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$  и  $\mu(\Delta\xi, \Delta\eta)$  – комплексный коэффициент когерентности, по сути, область когерентности на источнике. Физически это значит следующее, Рис. 1.2: огиба-

ющая излучения в дальней зоне будет обратно пропорциональна пятну когерентности излучения на источнике, а характерный размер когерентности в плоскости  $xy$  на расстоянии  $z$  обратно пропорционален размеру источника излучения – интегральный множитель в формуле 1.2.

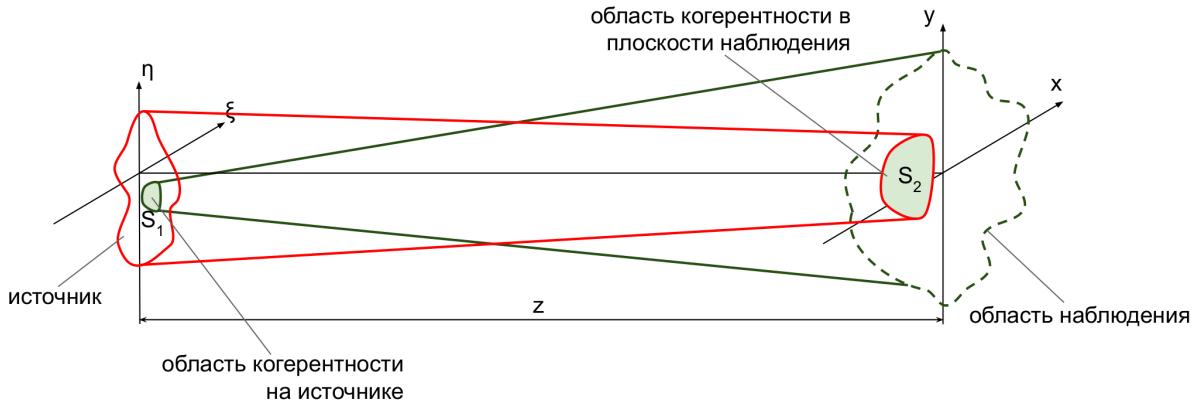


Рисунок 1.2 – К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике

В качестве примера распространения когерентности от полностью некогерентного источника можно оценить область когерентности излучения лабораторной рентгеновской трубы. Область когерентности от полностью некогерентного источника излучения квадратной формы получается напрямую из теоремы Ван Циттерта - Цернике. Подставляя в уравнение 1.3  $z = 1$  м и  $\lambda \approx 0.7$  Å с площадью фокального пятна, спроектированного на направление выхода излучения из рентгеновской трубы, равной порядка  $A_s = 1$  мм<sup>2</sup>, [10]. Таким образом линейный размер длины когерентности при отражении от исследуемого кристалла с учётом угла дифракции ( $\sim 45^\circ$ ) будет порядка 0.1 мкм. Однако линейный размер пятна когерентности может быть увеличен до нескольких микрон при использовании трубы с врачающимся анодом, где характерный диаметр круглого источника достигает 50 мкм [10].

Для синхротронных источников излучения область когерентности на источнике определяется натуральным размером излучения одного электрона при пролёте через вставное устройство. Например, в случае ондуляторного источника, натуральный размер излучения определяется геометрическим размером перетяжки излучения в центре ондулятора –  $\sigma_r = \sqrt{\lambda L} / 4\pi$ , где  $L$  длина ондулятора. Точные выражения представлены в [6].

## 1.2 О статистических свойства синхротронного излучения

Излучение от всего электронного пучка может быть представлено как сумма полей от каждого электрона, где  $k$ -ый электрон в пучке имеет свою координату –  $\vec{\eta}_k$ , угол –  $\vec{l}_k$ , отсчитываемые от проектной траектории, а также время прибытия  $t_k$  относительно некоторого времени  $t_0$ . Ондуляторное излучение удобно рассматривать в  $\omega$ -пространстве, т.е.  $\bar{E}(\vec{r}, \omega)$  связано с полем  $E(r, t)$  обратным преобразование Фурье. Вклад времени прибытия в  $r\omega$ -пространстве будет простым умножением поля на фазовый фактор  $\exp(i\omega t_k)$ . Указанные величины  $\vec{\eta}_k$ ,  $\vec{l}_k$  и  $t_k$  подчиняются некоторым распределениям плотности вероятности, для накопительных колец в модельных случаях это распределение Гаусса. Также здесь не рассматривается разброс электронов по энергии, влияние энергетического разброса электронного пучка на когерентные свойства излучения описано в [11]. Результирующее поле от  $N_e$  электронов на расстоянии  $z$  от источника можно записать следующим образом:

$$\bar{E}_b(z, \vec{r}, \omega) = \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp(i\omega t_k), \quad (1.5)$$

для электронов в накопительных кольцах случайные величины  $\vec{\eta}_k$  и  $\vec{l}_k$  не зависят от времени прибытия  $t_k$  и, в центре ондулятора, независимы друг от друга. Модуль поля  $|\bar{E}_k|$  имеет одинаковое распределение для всех  $k$  со средним  $\langle |\bar{E}_k| \rangle$  и конечным вторым моментом  $\langle |\bar{E}_k|^2 \rangle$ , где  $\langle \cdot \rangle$  усреднение по статистическим реализациям.

Результирующее поле  $\bar{E}_b$  является суммой вкладов от каждого электрона в пучке и по своей структуре в правой части уравнения 1.5 записан некоторый фазор. Следуя предпосылкам центральной предельной теоремы (ЦПТ), можно показать, что поле  $\bar{E}_b(z, \vec{r}, \omega)$  в каждой точке  $r$  подчиняется комплексному гауссовому распределению для двух практически значимых предельных случаев: случай длинного  $\omega\sigma_T \gg 1$  и короткого электронного пучка  $\omega\sigma_T \ll 1$ , где  $\sigma_T$  – длительность электронного пучка, [6]. В случае длинного электронного пучка величина  $\omega t_k$  равномерно распределена в пределах от 0 до  $2\pi$  и продольная длина

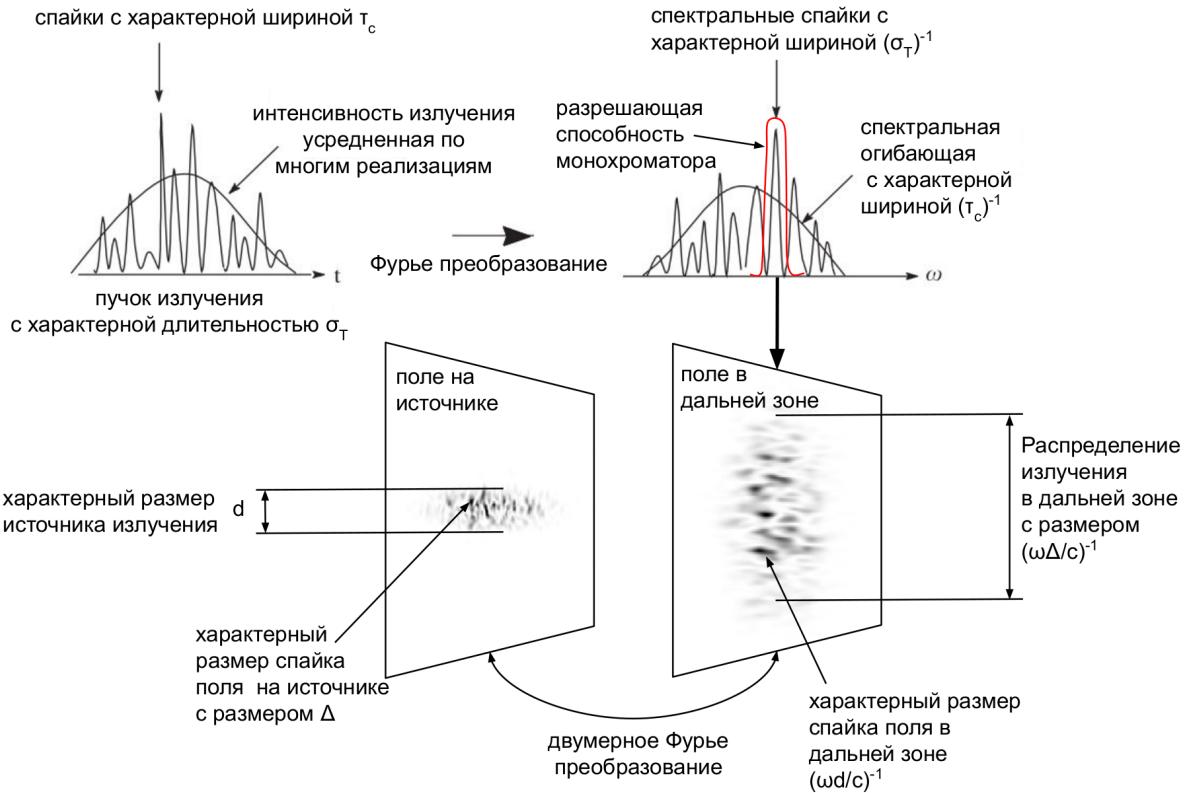


Рисунок 1.3 — Спайковая структура излучения синхротронного излучения.

когерентности излучения на фундаментальной гармонике определяются натуральной длительностью излучения от одного электрона  $\lambda N/c$ , где  $N$  количество периодов ондулятора, которая, соответственно, мала по сравнению с длительностью электронного пучка. Этот случай будет, для определённости, называться продольно некогерентным. Для короткого электронного пучка фазовый множитель  $\exp(i\omega t_k)$  может быть взят равным единице и излучения является продольно когерентным. В целом, формула 1.5 даёт прямой путь моделирования синхротронного излучения с любой степенью когерентности, с учётом продольной когерентности/некогерентности излучения.

Как уже было отмечено амплитуда поля по формуле 1.5 обладает спайковой структурой, и, что важно отметить, как в  $\omega t$ -пространстве, так и в поперечном направлении 1.3, В итоге, получается некая трёхмерная структура с флюкутирующей амплитудой поля, при распространение через пустое пространство, меняющая своё распределение, Рис. 1.3. В  $t$ -пространстве поле имеет внутреннюю структуру с характерным размером спайка равному продольной длине когерентности излучения от

одно электрона, а характерная длительность импульса поля, усреднённого по многим реализациям, определяется длительностью электронного пучка. Соответственно, в  $\omega$ -пространстве размер спайка в спектре обратно пропорционален длительности излучения, а характерная огибающая спектра, после усреднения по многим реализациям, обратно пропорциональна длине когерентности излучения, такое соотношение – следствие теоремы Винера-Хинчина. Если разрешить монохроматором (красная линия на Рис. 1.3) спайк в  $\omega$ -пространстве, то на двумерном детекторе в дальней зоне можно увидеть поперечную спайковую структуру синхротронного излучения, как на Рис. 1.3. Это распределение с точностью до фазового фактора связано с распределением излучения на образце Фурье-преобразованием. В дальней зоне характерный размер спайка связан с размером источника излучения как:  $(\omega d/c)^{-1}$ , и огибающая поля – усреднённое по многим реализациям:  $(\omega \Delta/c)^{-1}$ , – что является следствием обобщённой теоремы Ван Циттерт - Цернике.

## **Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от пучка с конечным эмиттансом**

В представленной работе внимание будет уделено исключительно ондуляторному излучению. Отчасти это мотивировано относительной простотой рассмотрения ондуляторного излучения, по сравнению, например, с вигглерным [12], с другой ондуляторные источники излучения преимущественно применяются в задачах имиджинга, где дифракционные эффекты играют решающую роль. Тем не менее, формула 1.5, конечно же, применима как для ондуляторного излучения, так и для вигглерного и излучения из поворотного магнита.

В случае полностью некогерентного источника для решения задачи моделирования источника излучения подойдёт метод трассировки лучей, для полностью когерентного источника излучения, т.е. дифракционно ограниченного источника, необходимо использовать подходы волновой оптики. Один из таких подходов реализован в коде SRW [5], [13], где возможно посчитать излучение релятивистского электрона, через произвольную магнитную систему, и далее, полученное излучение, пропагировать через оптическую систему. Также в коде есть возможность расчёта излучения от электронного пучка с конечным эмиттансом, что будет обсуждаться в настоящей Главе. Альтернативный подход в моделировании частично когерентного излучения основывается на декомпозиции функции взаимной когерентности синхротронного излучения на Гауссовы-Шелл моды (разложение по полиномам Эрмита) описываемый в работах [14], [15], [16], [17]. Однако, как отмечают сами авторы в [16], [17] и аналитически описывается в [6], разложение по полиномам Эрмита не применимо в случае, когда источник имеет высокую степень когерентности. Так как область когерентности на источнике весьма высока и функции, которые описывают поведение ондуляторного излучения как в дальней зоне, так и на источнике, имеют не гауссову природу.

В текущей главе описывается новый алгоритм моделирования синхротронного излучения, для краткости называемый СЕРВАЛ. Алгоритм основывается на прямом моделировании стохастических процессов

при генерации синхротронного излучения, вызванных дробовым шумом в электронном пучке, с последующим ограничением пространственных гармоник шума огибающими излучения. По своей природе алгоритм имеет оценочный характер, именно поэтому в главе приведён сравнительный анализ результатов СЕРВАЛА с методом сложения амплитуд<sup>1</sup>, на примере некоторых оптических систем. СЕРВАЛ показал себя как мощный инструмент для оценки когерентных свойств синхротронного излучения, с точностью мало уступающей методу сложения амплитуд, а главное имеющийший преимущество в быстродействии.

## 2.1 Численное моделирование ондуляторного излучения

Формула 1.5 используется напрямую при моделирования ондуляторного излучения, как продольно когерентного так и некогерентного. Общий вид поля ондуляторного излучения от одного электрона с некоторыми углом  $\vec{\eta}_k$  и координатой  $\vec{l}_k$  может быть записан как [18] [спросить Джанлуку про эту формулу]:

$$\bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{\theta}) = -\frac{\omega e A_{JJ} L_s K}{2c^2 z_0} \frac{K}{\gamma} \exp \left[ i \frac{\omega z_0}{2c} \left| \vec{\theta} - \vec{l}/z_0 \right|^2 \right] \times \text{sinc} \left[ \left( k_w \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{\omega |\vec{\theta} - (\vec{l}/z_0) - \vec{\eta}|^2}{2c} \right) \frac{L_s}{2} \right], \quad (2.1)$$

где  $\vec{\theta} = \vec{r}/z_0$  [пояснить все новые параметры]. Формула 2.1 даёт распределение амплитуды поля в дальней зоне ( $z_0 \gg L_w$  [и что-то ещё]). Чтобы получить более точно выражение это поле должно быть отпропагировано назад в центр ондулятора с помощью пропагатора свободного пространства. Распределение поля в мнимом источнике излучения: [Откуда

---

<sup>1</sup>Для определённости, в текущей главе также будет дано принципиальное описание МСА

взялась информация, которой не было. Нужна пояснительная команда.]

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_\perp(0, \vec{\eta}, \vec{l}, \vec{r}_\perp) = i \frac{e A_{JJ} \omega}{2c^2} \frac{K}{\gamma} \exp \left[ i \frac{\omega}{c} (\vec{r}_\perp - \vec{l}) \right] \\ \times \left[ \pi - 2 \operatorname{Si} \left( \frac{i \omega |\vec{r}_\perp - \vec{l}|^2}{L_w c} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.2)$$

после этого поле можно распространять на любую дистанцию вдоль оптической оси  $z_0$ . Снова применяя пропагатор свободно пространства, получаем:

$$\begin{aligned}\bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{r}) = \frac{e A_{JJ} \omega}{2c^2} \frac{K}{\gamma} \exp \left[ i \frac{\omega}{2z_0 c} (|\vec{r}_\perp - \vec{l}|^2 - |\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta}|^2) \right] \\ \times \left\{ \operatorname{Ei} \left[ \frac{i \omega (\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta})^2}{2z_0 c - L_w c} \right] - \operatorname{Ei} \left[ \frac{i \omega (\vec{r}_\perp - \vec{l} - z_0 \vec{\eta})^2}{2z_0 c + L_w c} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Рассчитанное таким образом поле может быть рассчитано для любого значения  $z_0$ , такое поле называют поле в приближении ближней зоны, так как эта формула применим для значение  $z_0 \sim L_w$ . Обе формулы 2.1 и 2.3 имеют практическую ценность при моделировании, однако при использовании выражения 2.3 время на моделирование значительно увеличивается, так как необходимо дважды численно взять интеграл  $\operatorname{Ei}(\cdot)$ .

После расчёта суммарного поля с  $N_e$  электронами получившиеся монохроматическое поле по своей сути есть одна статистическая реализация поля. [переформулировать следующее предложение] Физически это значит следующее, если экспериментатор измерит распределение интенсивности поля на детекторе от пролёта одного электронного пучка, используя монохроматор с разрешением, которое позволит разрешить одну продольную моду излучения, то на детекторе будет распределение эквивалентное по своим статистическим свойствам распределению, представленному на Рис..

После усреднения по  $N_b$  реализациям (с идеальным монохроматором<sup>2</sup>), наблюдаемая интенсивность даётся выражением:

$$I_\omega = \left\langle \left| \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp(i\omega t_k) \right|^2 \right\rangle, \quad (2.4)$$

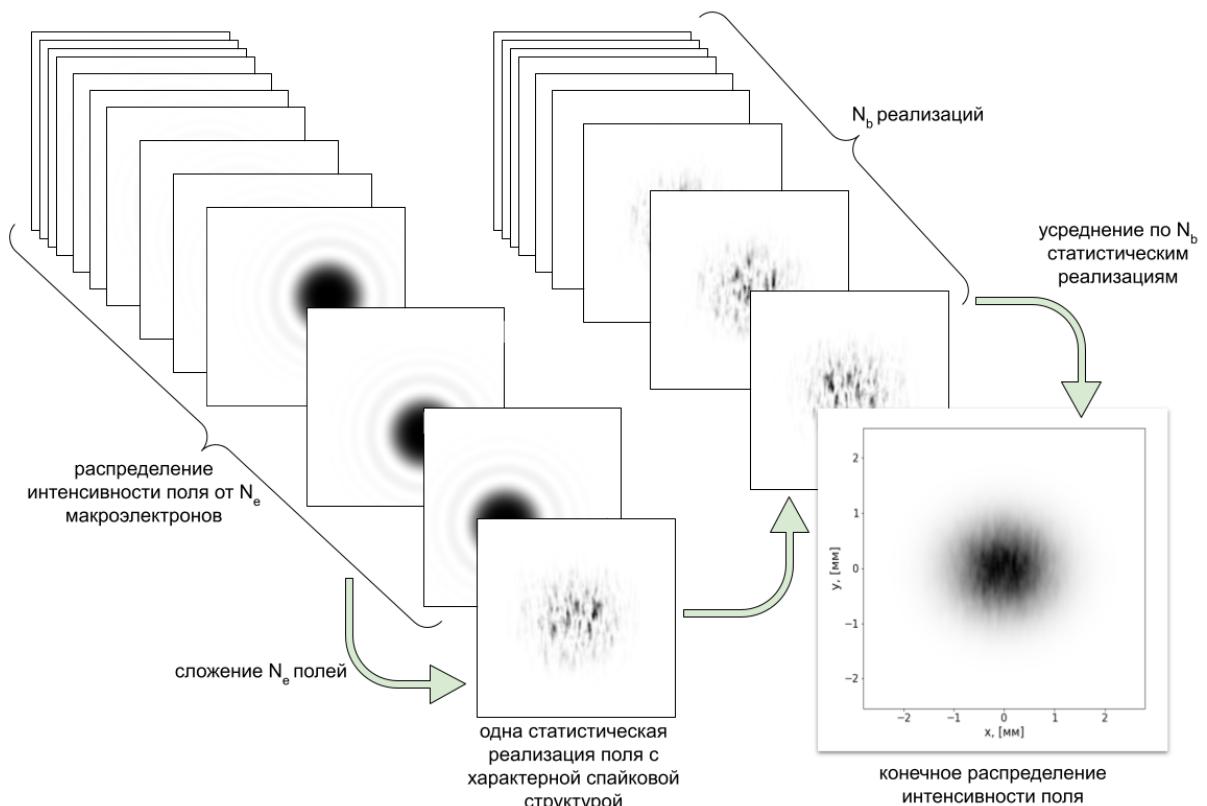


Рисунок 2.1 — Схема работы метода сложения амплитуд

[сделать заметку, что чем хуже когерентности тем больше реализаций нужно, чтобы получить гладкое решение] результирующая интенсивность будет сходиться к некоторой огибающей. В грубом приближении огибающая является свёрткой распределения расходимости излучения и распределения расходимости электронного пучка. Данный подход является наиболее прямым подходом к задаче моделирования частично когерентного излучения, однако время расчёта в таком случае может быть оценено как время затрачиваемое на расчёт одной одного поля  $N_e$  раз по формуле 2.1 или 2.3, в последней, как уже упоминалось, необходимо дважды численно взять интеграл  $Ei(\cdot)$  и потом усреднить по  $N_b$  реали-

<sup>2</sup>другими словами, монохроматором разрешается одна поперечная мода

зациям поля  $\bar{E}_b$ . Итого, если за  $\tau_{calc}$  взять время расчёта одного поля, то расчёт одного результирующего поля в сумме займёт  $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e \cdot N_b$ .

Однако в случае полностью некогерентного излучения время расчёта можно сократить за счёт фазового фактора  $\exp(i\omega t_k)$ , который эффективно приводит к тому, что отдельный электрон в электронном пучке коррелирует только с самим собой [6]. Таким образом формула 2.4 упрощается до

$$I_\omega = \sum_{k=1}^{N_e} \left| \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \right|^2, \quad (2.5)$$

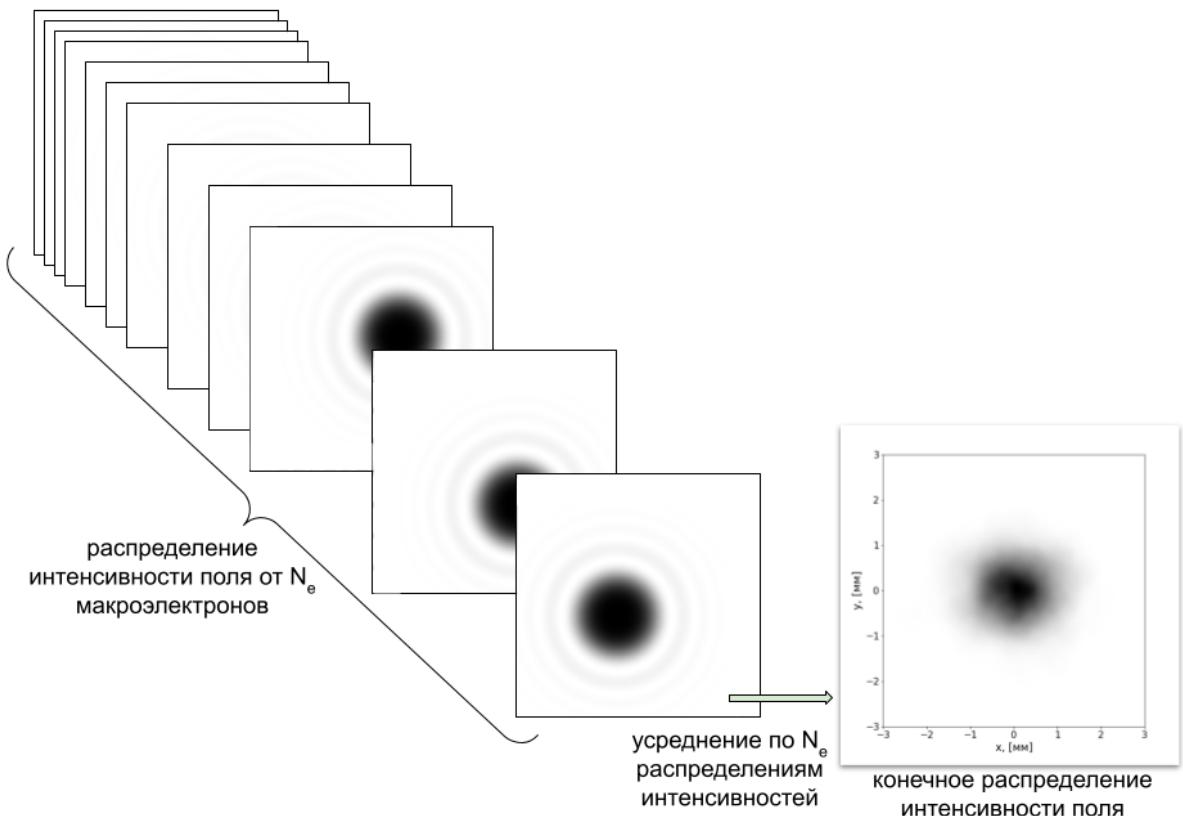


Рисунок 2.2 — Схема метода сложения интенсивностей

а время расчёта уменьшается до  $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e$ . Недостатком такого подхода можно считать потерю фазовой информации о излучение и, следовательно, невозможности расчёта поперечной автокорреляционной функции первого порядка [Можно ли через второй порядок найти первый? Нужна пояснительная команда]. Тем не менее, подход основанный на формуле 2.5 даёт мощный метод расчёта частично когерентного излу-

чения. Именно этот подход реализован в широко распространённом коде SRW [cite].

### 2.1.1 Влияние размера электронного пучка на расходимость излучения

[где такой эффект можно неожиданно встретить?]

[продольно когерентный случай, CSR]

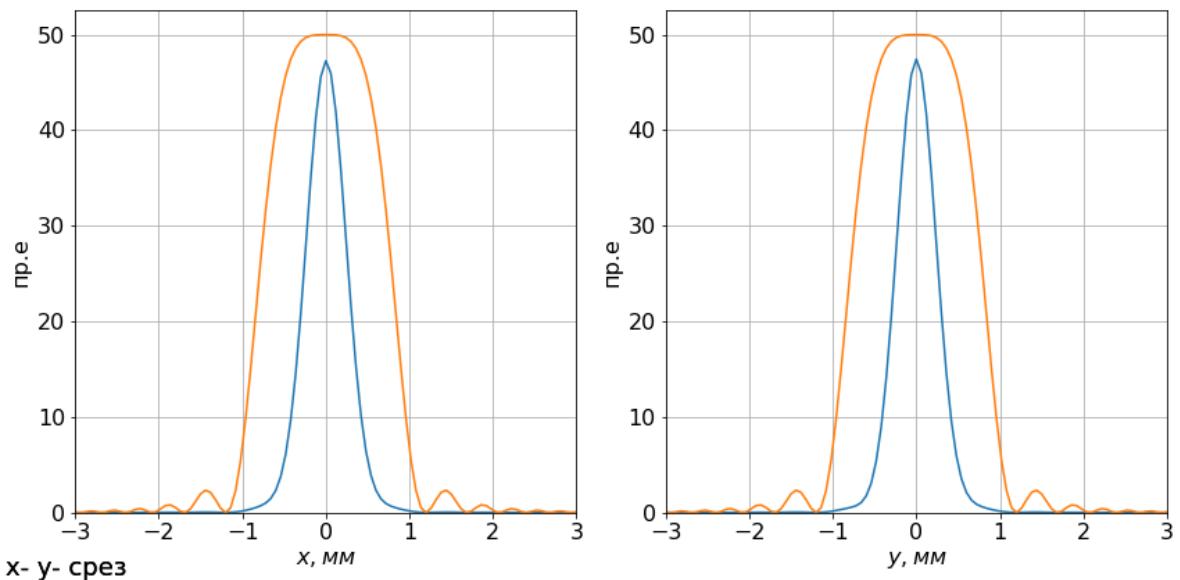


Рисунок 2.3 — [Подпись, изменить цвет линий на синий зелёный, легенда]

[некогерентный случай, варианты с различной бета-функцией]

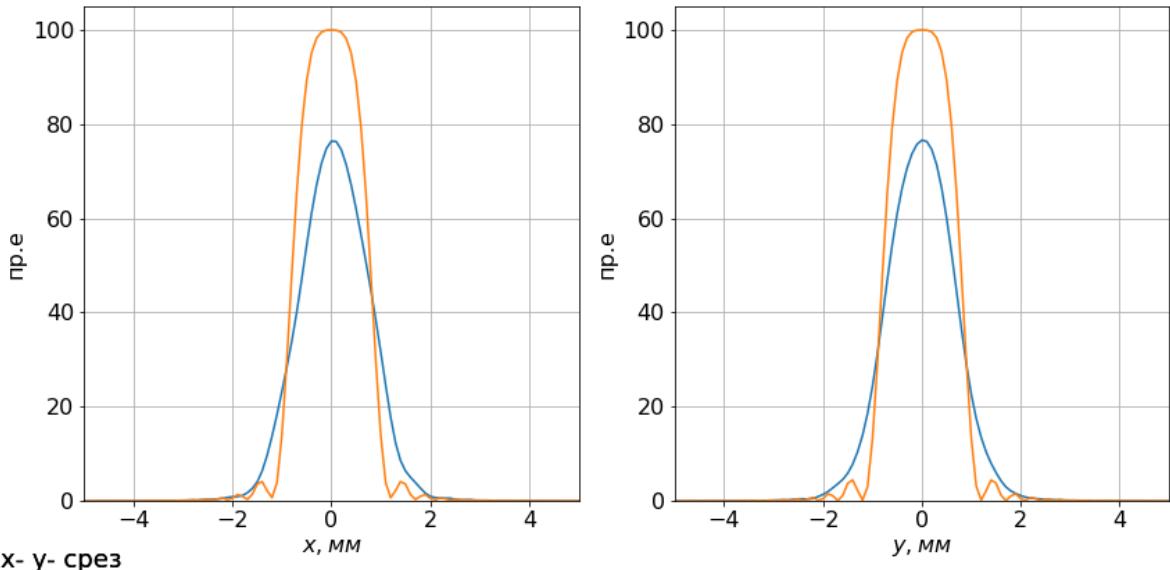


Рисунок 2.4 — [Подпись, изменить цвет линий на синий зелёный, легенда]

### 2.1.2 Различие расходимости излучения для случая продольно полностью когерентного и некогерентного пучка

В зависимости от длительности электронного пучка результирующее поле  $\vec{E}_b$  будет вести себя по-разному. В случае короткого электронного пучка:  $\omega\sigma_T \ll 1$ , где  $\sigma_T$  – длительность электронного сгустка, излучение будет продольно когерентным, в иностранной литературе этот эффект называется Coherent Synchrotron Radiation (CSR). Методы моделирования такого излучения рассмотрены в работах [cite]. Приближение короткого электронного пучка справедливо для низких энергий [каких?]. Случай длинного электронного пучка, а именно  $\omega\sigma_T \gg 1$  соответствует случаю продольно некогерентного излучения, а для уравнения 1.5 это означает, что показатель экспоненты  $\omega\sigma_T$  равномерно распределён в интервале от 0 до  $2\pi$ .

[отличие на  $\sqrt{2}$ ]

[где такой эффект можно неожиданно встретить? Вероятнее всего на XFEL, в случае когда пучок обычный (16 фс) и скомпрессированный пучок]

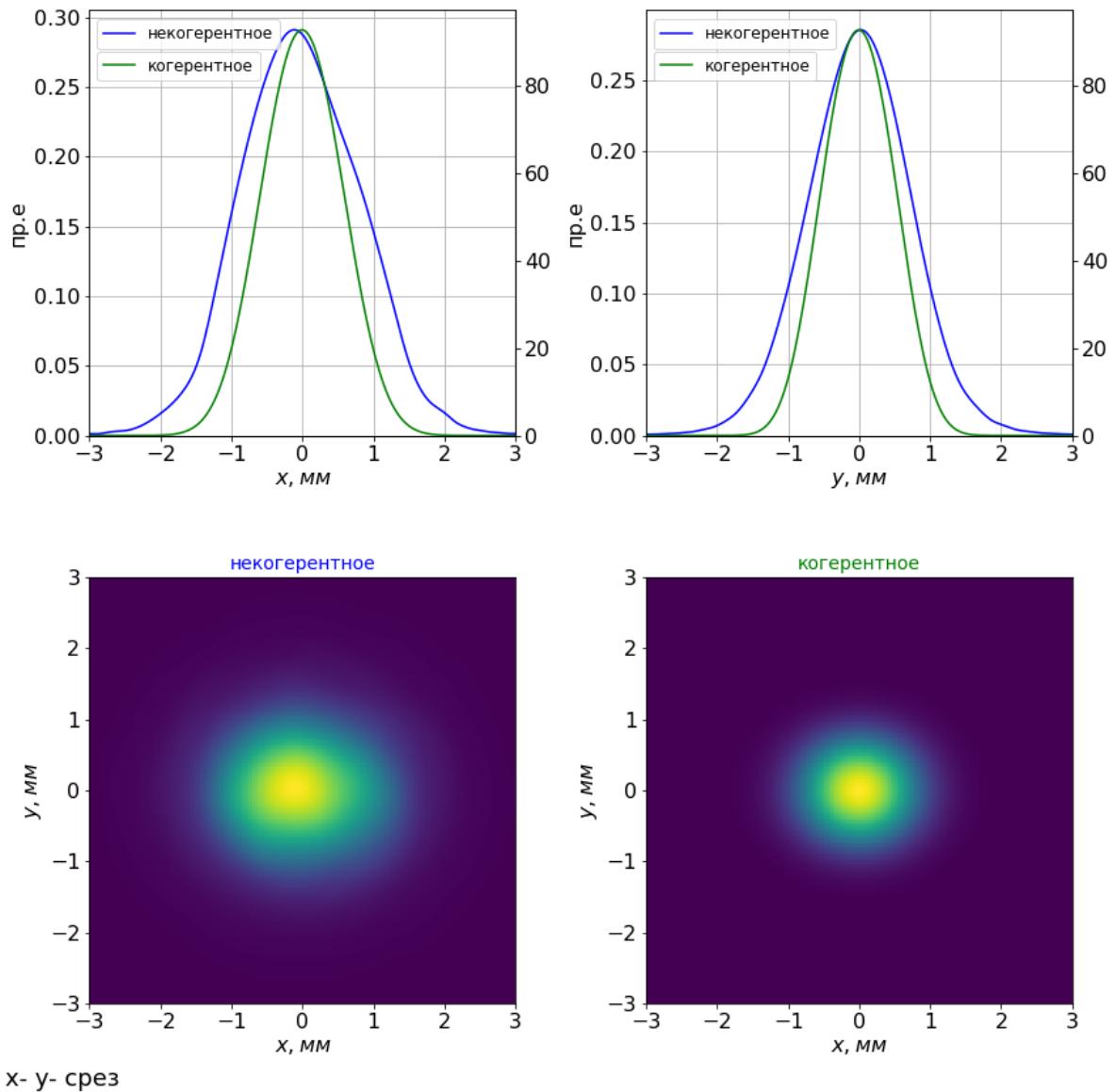


Рисунок 2.5 — Интенсивность комплексного гауссового шума  
[перерисовать в чб]

## 2.2 Метод ограничения пространственных гармоник огибающими: СЕРВАЛ

Предлагаемый метод основывается на моделировании стохастического характера ондуляторного синхротронного излучения комплексным гауссовым шумом с последующим его ограничением огибающими полями. Для начала алгоритм будет представлен в общем виде, без уточнения, чем определяются распределение огибающих, задающих размер и расход-

димость излучения и, в целом, безотносительно характера ондуляторного источника излучение.

### 2.2.1 Алгоритм создания поля

Алгоритм создания поля представлен ниже:

1. Создание комплексного гауссова шума  $Z = X + iY$  в  $r\omega$ -пространстве, где величины  $X$  и  $Y$  подчиняются нормальному распределению.

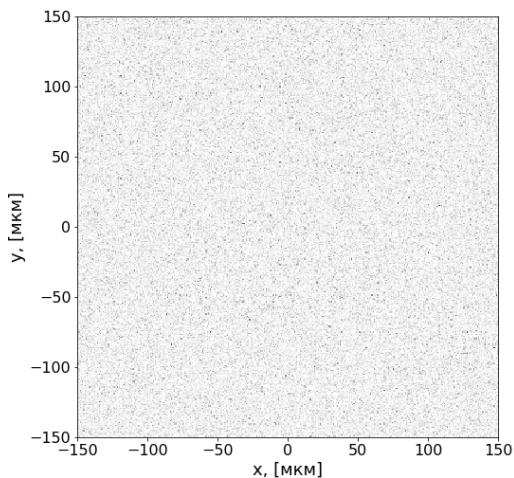


Рисунок 2.6 — Интенсивность комплексного гауссова шума

2. Ограничение шума эффективным размером электромагнитного излучения в источнике излучения в  $\tau\omega$ -пространство.

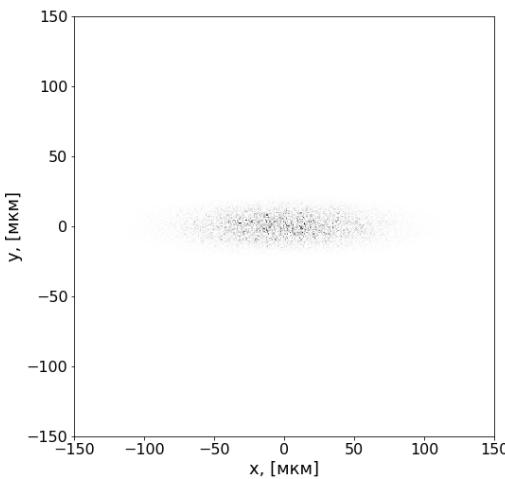


Рисунок 2.7 — Размер электромагнитного излучения в перетяжке наложенный на шум

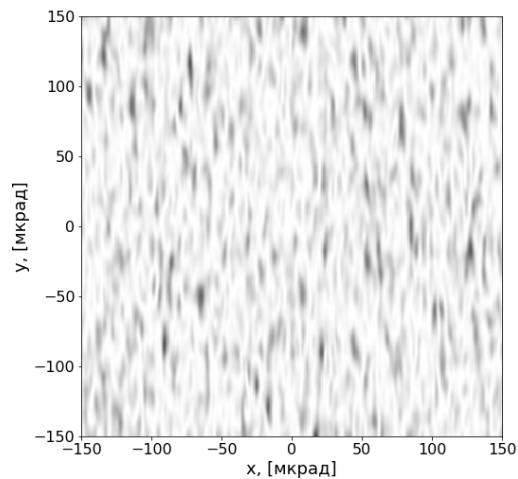


Рисунок 2.8 — Получившиеся моды в  $k\omega$ -пространстве от размера электронного пучка

3. Ограничение пространственных мод эффективной расходимостью излучения в  $k\omega$ -пространстве

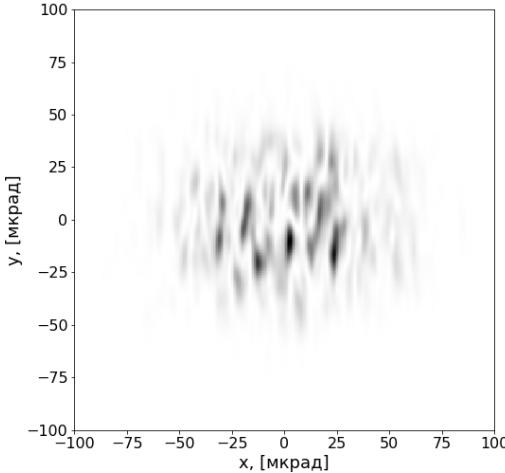


Рисунок 2.9 — Расходимость излучения в источнике

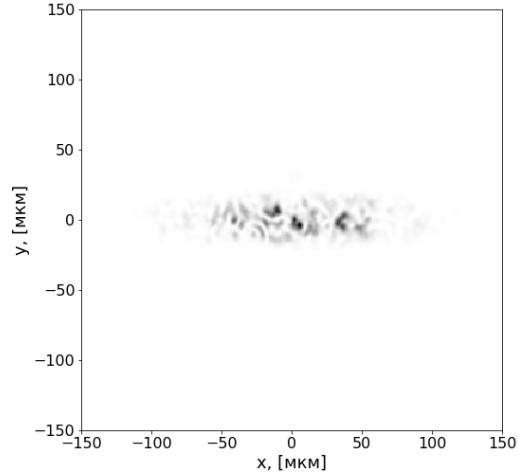


Рисунок 2.10 — Размер излучения в источнике

4. Получившиеся распространение поля есть распределение поля в источнике излучения (центр ондулятора).

Быстродействие алгоритма можно оценить следующим образом: алгоритм генерирует  $N_x \cdot N_y \cdot N_b$  случайный величин подчиняющихся распределению  $Z$ , где  $N_b$  – количество реализаций поля, одно Фурье преобразование поля (преобразование поля на Рис. 2.7 в поле на Рис. 2.8) и две

операции умножения на огибающие поля. Получившиеся поле, представленное на Рис. 2.10, уже готово к пропагации, так как пропагатор через свободное пространство работает именно в  $kf$ -пространстве.

## 2.2.2 Выбор подходящих огибающих

До этого момента, в работе не обсуждался выбор подходящих огибающих для поля. Вопрос выбора таких огибающих сводится нахождению распределения поля в центре ондулятора. Поле в центре может быть получено, обратной пропагацией излучения из дальней зоны обратно в центр ондулятора при помощи пропагатора излучения в свободном пространстве [cite]. Однако, нахождение аналитического решения уравнения Максвелла в дальней зоне от целого электронного пучка – не тривиальная задача. Для оценки можно предположить, что распределение поля ондуляторного излучения от электронного пучка с конечным эмиттансом, в целом, может быть представлено как свёртка распределения поля ондуляторного излучения от одного электрона с распределением фазового пространства электронного пучка.

Для SERVAL можно предложить, как минимум, три вида огибающих для пространственного распределения источника в  $r$ -пространстве:

$$\text{I. } A_b(\vec{r}_\perp) = (\tilde{E}_\perp(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp) * f_l(\vec{l}))(\vec{l})$$

$$\text{II. } A_b(\vec{r}_\perp) = \sqrt{(\tilde{E}_\perp^2(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp) * f_l^2(\vec{l}))(\vec{l})}$$

$$\text{III. } A_b(\vec{r}_\perp) = f_l(\vec{l}),$$

и три вида огибающих для распределения расходности источника ( $k$ -пространство):

$$\text{I. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = (\hat{\tilde{E}}_\perp(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp) * \hat{f}_\eta(\vec{\eta}))(\vec{\eta})$$

$$\text{II. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = \sqrt{(\hat{\tilde{E}}_\perp^2(0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp) * \hat{f}_\eta^2(\vec{\eta}))(\vec{\eta})}$$

$$\text{III. } \hat{A}_b(\vec{\theta}_\perp) = \hat{f}_\eta(\vec{\eta}),$$

где  $A_b(\vec{r})$  и  $\hat{A}_b(\vec{\theta})$  огибающие в  $r$ - и  $k$ -пространствах соответствующие шагам 2 и 3 в алгоритме,  $f(\vec{l}, \vec{\eta}) = f_l(\vec{l})f_\eta(\vec{\eta})$  фазовое распределение электронного пучка, и поле  $\tilde{E}_\perp(z = 0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{r}_\perp)$ ,  $\hat{\tilde{E}}_\perp(z = 0, \vec{l}, \vec{\eta}, \vec{\theta}_\perp)$  – распределение поля взятого в центре ондулятора по формулам 2.1(или более точно 2.3) и 2.2.

Для выбора подходящих амплитуд было проведено моделирование с различными огибающими в сравнение с эталонным в этой работе методом сложения амплитуд. Для начала необходимо проверить распределение интенсивности поля на источнике. Для метода сложения амплитуд поле было рассчитано в дальней зоне и отпропагировано назад в центр ондулятора. Результаты сравнения приведены на Рис. 2.11 при параметрах электронного пучка [параметры электронного пучка]

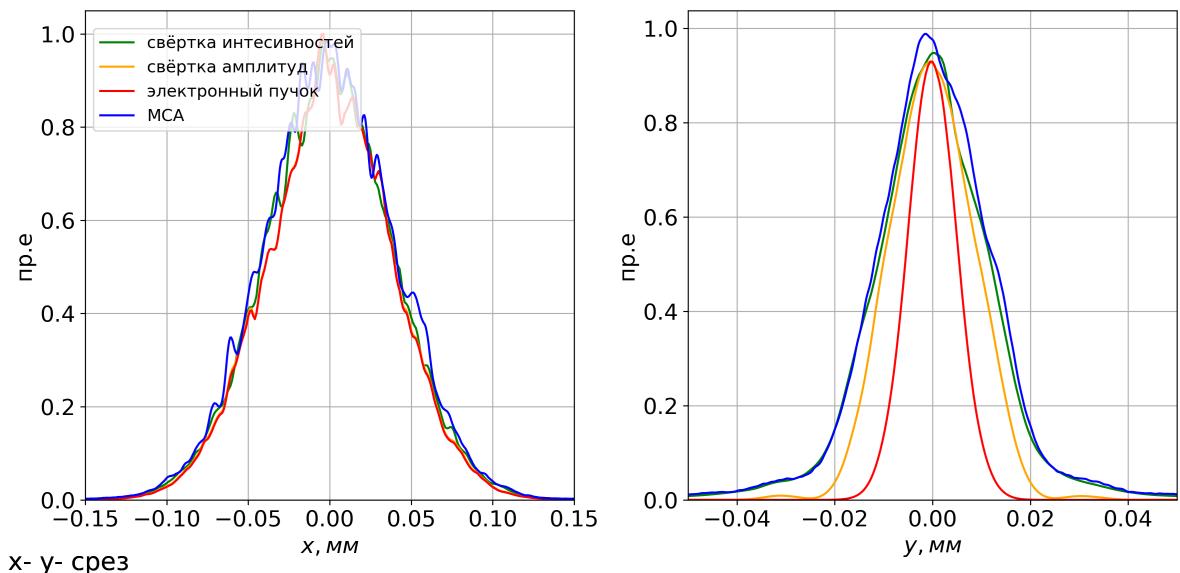


Рисунок 2.11 – Распределение поля в источнике излучения

Видно, что оптимальные результаты достигаются при использовании свёртки II.. Однако, если  $N \ll 1$  или даже просто  $N > 1$ , то можно использовать любые из представленных огибающих для  $r$ -пространства. Необходимо так же сравнить корреляционные функции получившихся полей 2.13, используя формулу 1.1.

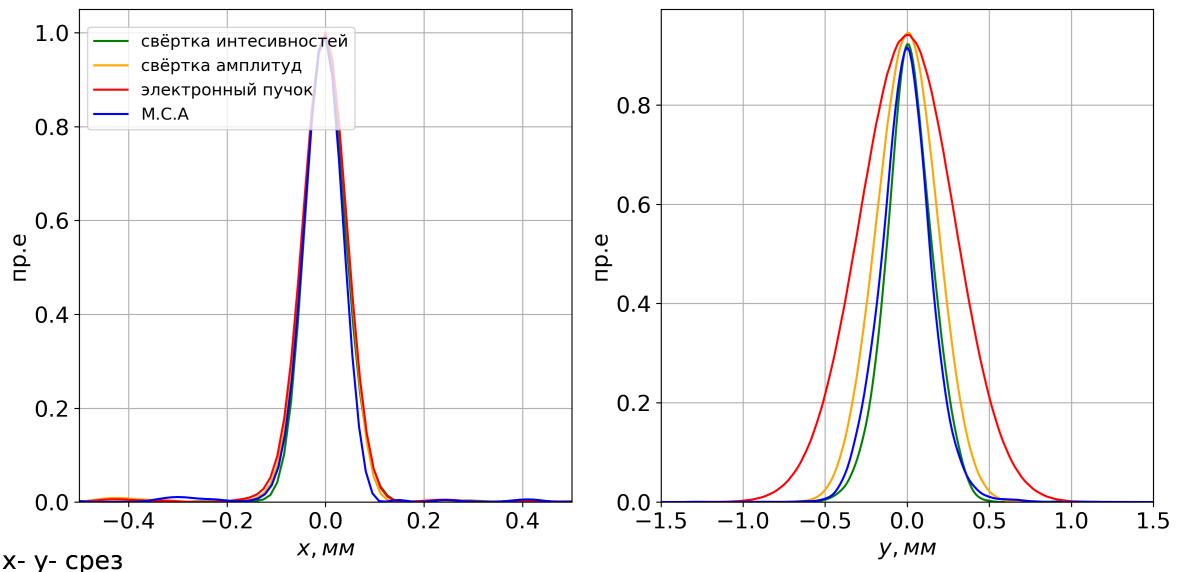


Рисунок 2.12 — Функция взаимной когерентности на расстоянии 25 м от источника

Для распределения расходимости следует так же использовать ис-  
пользовать свёртку интенсивностей.

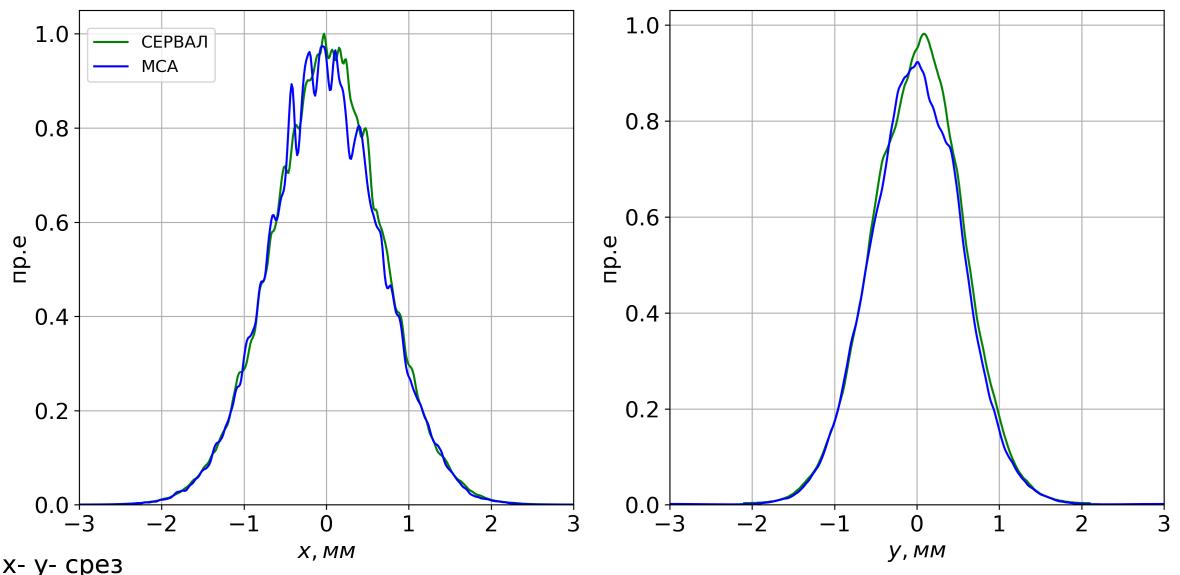


Рисунок 2.13 — Распределением на источнике [перерисовать с большей плотностью точек и другими цветами линий]

В большинстве случаев можно выбирать свёртку интенсивностей по II.. Однако, стоит отметить, что SERVAL – это оценочный метод и в случае дифракционного ограниченного источника необходимо перед проведением расчётов сделать подобный анализ подходящих огибающих.

## Глава 3. Применение СЕРВАЛа

СЕРВАЛ является эффективным алгоритмом для моделирования частично когерентного синхротронного излучения, в случаях когда есть заметная степень когерентности источника излучения. Уже было показано совпадение распределений интенсивности в дальней зоне и на источнике излучения, а так же совпадение корреляционных функций с методом сложения амплитуд, который может считаться методом, дающим результат «из первых принципов» во всех ситуациях<sup>1</sup>. Этот сравнительный анализ свойств источника излучения даёт все предпосылки, что весьма ресурсозатратный по времени метод сложения амплитуд может быть заменён СЕРВАЛОм без потери точности и физичности результатов. В этой главе мы приведём ещё один сравнительный анализ СЕРВАЛА и метода сложения амплитуд на примере фокусирующей системы с конечной апертурой, а так же два практических применения СЕРВАЛА на примере простого эксперимента Юнга и нетривиальной задачи отражения частично когерентного излучения от рентгеновского зеркала с шероховатостями. Расчёты будут проводиться для параметров электронного пучка ЦКП «СКИФ», которые представлены в Таблице 3.2

Таблица 3.1

Параметры ондулятора

$E_{ph}$ , [эВ]/ $\lambda$ , [\text{\AA}]	$\lambda_w$ , [мм]	$L$ , [м]
2167/5.72	18	3.6

В работе использовались следующий параметры ондулятора 3.1

Таблица 3.2

Параметры электронного пучка

$E$ , [GeV]	$\sigma_x$ , [мкм]	$\sigma_y$ , [мкм]	$\sigma_{x'}$ , [мкрад]	$\sigma_{y'}$ , [мкрад]
3	38	4.7	25	20

Однако, отдельно необходимо отметить, когда источник дифракционно ограничен, целесообразно применять метод сложения амплитуд

<sup>1</sup>необходимо помнить, что число  $N_e$  должно быть достаточно велико для получения достоверного результата

или метод сложения интенсивностей, которые очень быстро дадут сходимость. В этом случае для СЕРВАЛа потребуется тщательный анализ подходящих огибающих и, строго говоря, метод *не моделируют* фундаментальную моду ондуляторного излучения – случай излучения электронного пучка с бесконечно малым эмиттансом<sup>2</sup>. Для источников с низкой степенью когерентности имеет смысл рассмотреть метод трассировки лучей, в этом случае все три волновых метода будут иметь весьма низкую сходимость и придётся моделировать большое число статистических реализаций для получения сходимости. В любом случае, в каждом из рассмотренных случаев прежде чем проводить оптический расчёт, необходимо изучить свойства источника излучения, например при помощи программы SPECTRA [19], оценить ожидаемую степень когерентности и только исходя из свойств источника применять один из описанных методов моделирования. Именно такой подход даст оптимальный результат в смысле затраченного времени и физичности полученных результатов.

### 3.1 Фокусирующая система с конечной апертурой

Рассмотрим оптическую систему состоящую из источника излучения – ондулятора, апертуры и фокусирующего элемента. Для SERVAL были выбраны огибающие II.. Этот расчёт будет сопровождаться сравнением результатов метода СЕРВАЛ с результатами метода сложения амплитуд (МСА).

---

<sup>2</sup>случай, когда эмиттанс излучения много больше эмиттанса электронного пучка

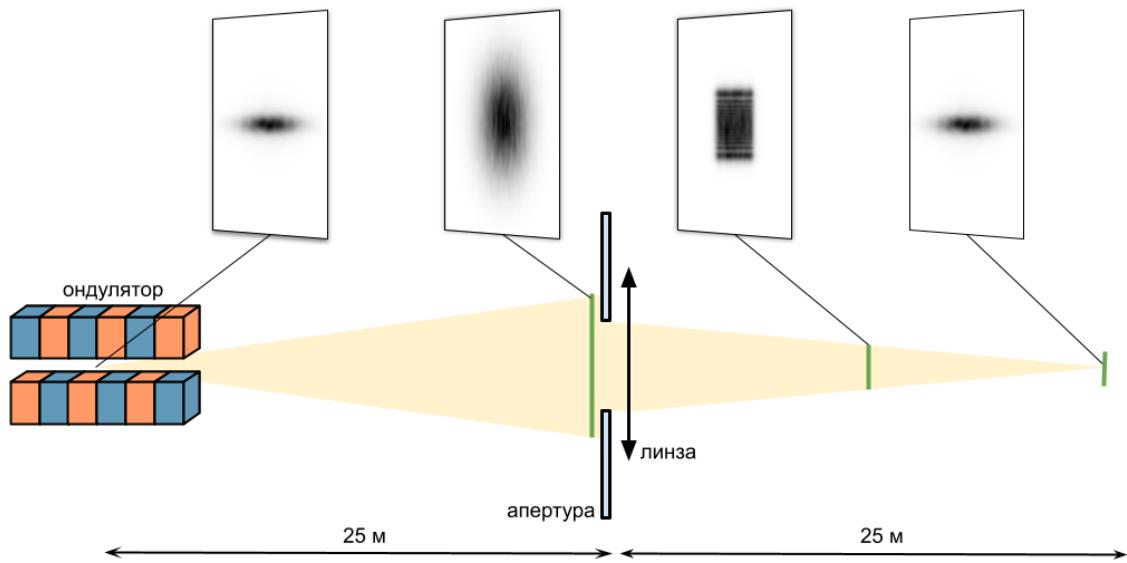
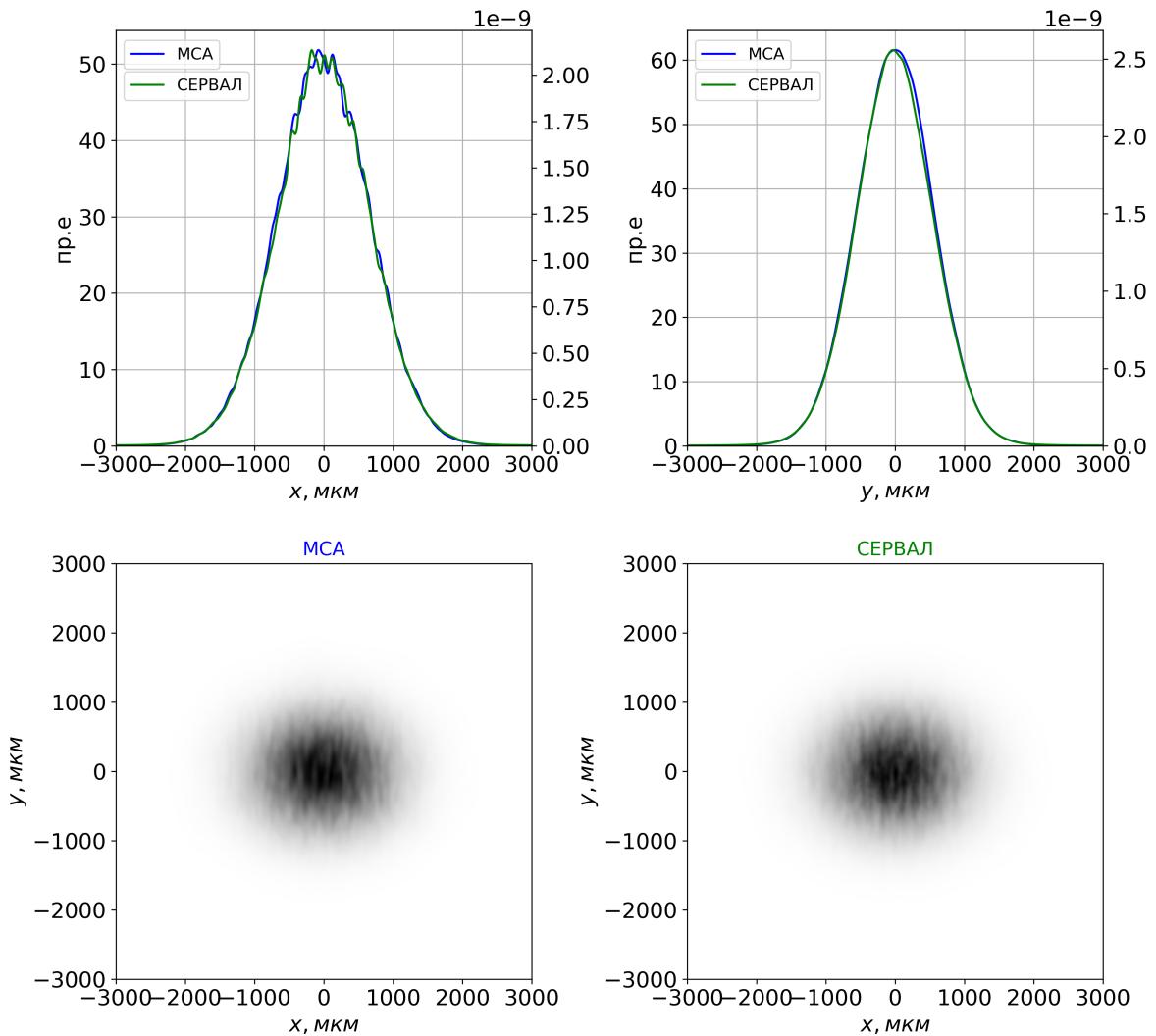


Рисунок 3.1 — Схема оптики

Распределение поля в дальней зоне на 25 м от ондулятора представлено на Рис. 3.2.

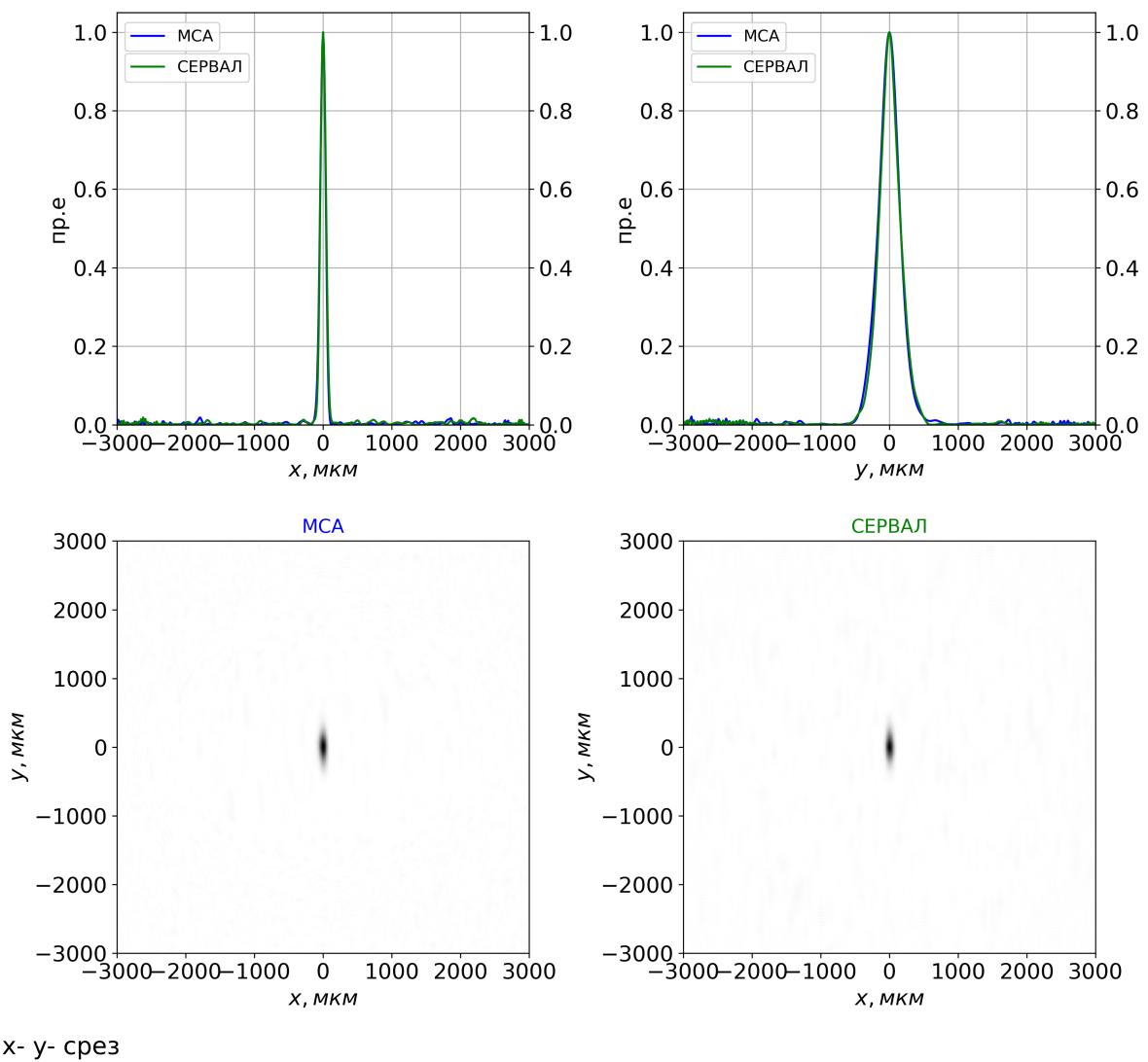


x- y- проекция

Рисунок 3.2 — Распределение интенсивности излучения в дальней зоне.

$$[MCA_{x,x} = 1500 \text{ мкм}, MCA_{x,x} = 1270 \text{ мкм}]$$

Для усреднения было выбрано 300 реализаций, что даёт достаточную сходимость. Однако в структуре излучения всё ещё видна характерная модовая структура. Видно что количество мод в вертикальном направлении меньше чем в горизонтальном, а их типичный размер говорит о длине поперечной когерентности в соответствующих направлениях. Размер пятна когерентности определяется через размер функции взаимной когерентности, представленной на Рис. 3.3.



x- y- срез

Рисунок 3.3 — Корреляционная функция, построенная по формуле 1.1.

$$[MCA_{x, x} = 87 \text{ мкм}, MCA_{x, x} = 320 \text{ мкм}]$$

После апертуры и 10 метров распространения поля через пустое пространство результат приведён на Рис. 3.2

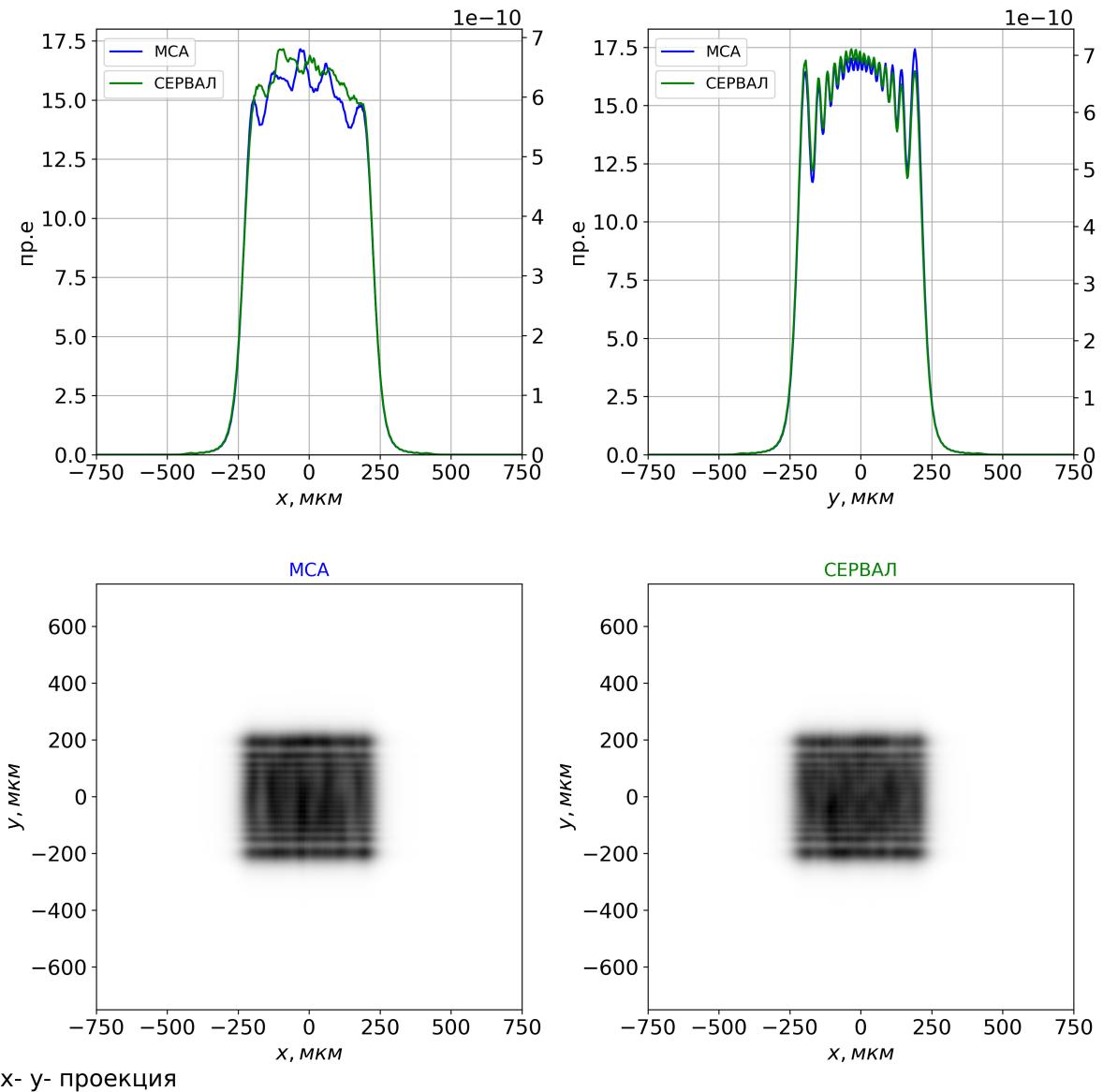


Рисунок 3.4 — [ $MCA_x, x = 453$  мкм,  $MCA_x, x = 445, 442$  мкм]

Дифракционные картины отличаются для каждого из направлений, для вертикального дифракционные пики более выраженные ввиду большей длины когерентности, для горизонтального направления заметен только первый дифракционный максимум, что говорит о заметно меньшей степени когерентности.

Распределение поля в фокальной плоскости приведено на Рис. 3.5.

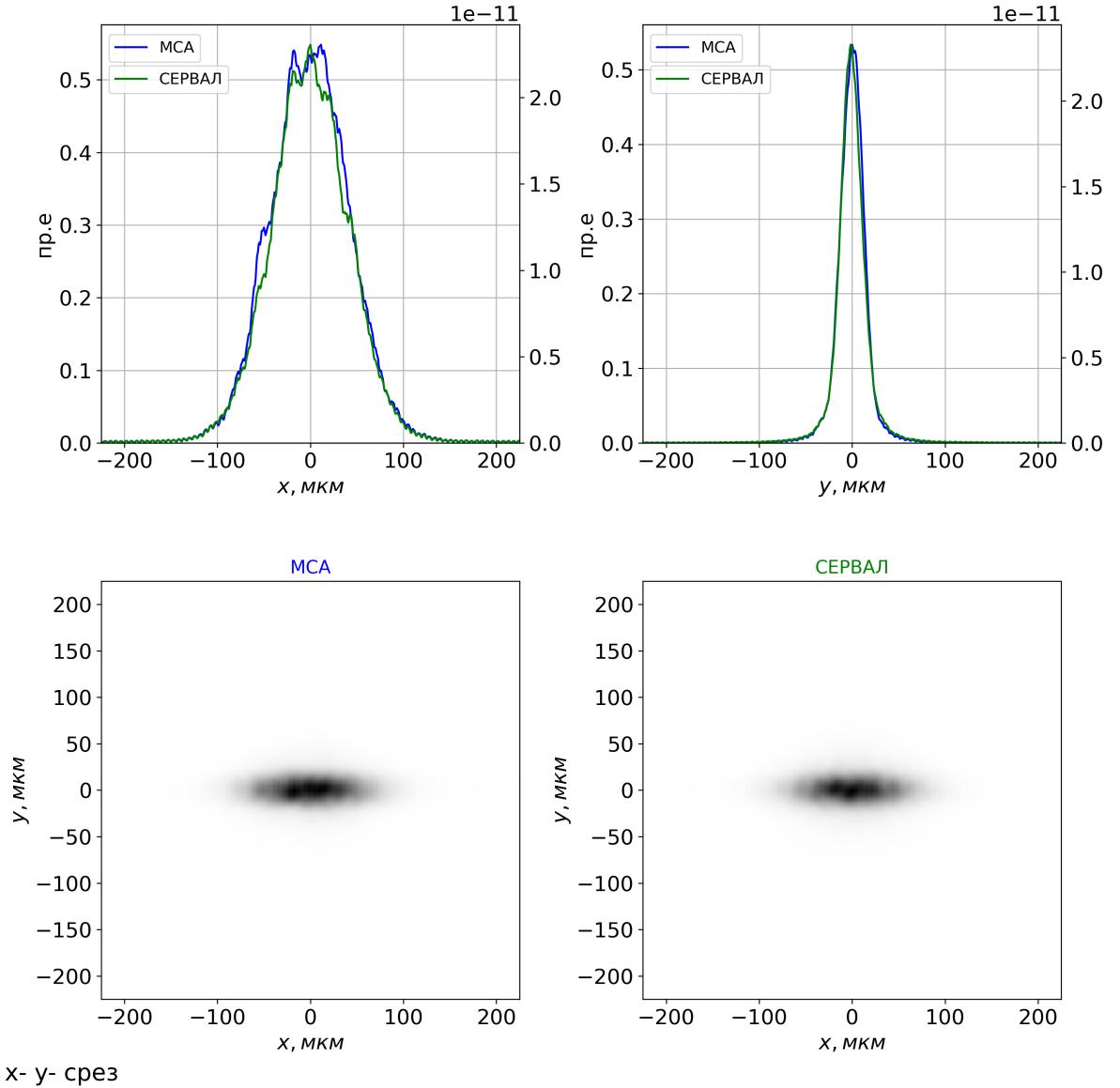


Рисунок 3.5 — Распределение излучения в фокусе [ $MCA_x, x = 100$  мкм,  
 $MCA_{x, x} = 26$  мкм]

Для моделирования было выбрано соотношение плеч фокусирующей системы – 1 : 1. В горизонтально направлении источник можно считать гауссовым с полной шириной на полувысоте 80 мкм, после фокусировки мы видим уширение изображения до 100 мкм, которое приходит из-за апертуры и намного меньшее уширение в вертикальном направлении до 26 мкм при истинном размере источника 24 мкм. По критерию Релея  $\theta_{diff} = 1.22\lambda/D$ , где  $D$  размер апертуры, – дифракционный предел для обоих направлений 0.7 мкрад при видимом размере источника для горизонтального направления 3.2 мкрад и 0.96 мкрад – для вертикального. Видно, что для горизонтального направления та же апертура будет вно-

сить больший вклад в увеличение размера фокусного пятна. [заключение]

### 3.2 Интерференционный эксперимент

Чтобы наглядно продемонстрировать эффекты, связанные с частичной когерентностью, показательно будет провести классический опыт Юнга (двухщелевой интерферометр Юнга). Ниже на Рис. 3.6 и 3.7 опять же приведён размер излучения на 25 м от источника излучения и распределение корреляционной функции в увеличенном масштабе сложенными щелями. Щели на рисунках обозначены зелёным цветом – с межщелевым зазором 75 мкм, красным – 150 мкм и оранжевым 300 мкм, при характерном размере корреляционной функции полной шириной на половине высоты (ПШПВ)  $87 \times 320$  мкм<sup>2</sup>.

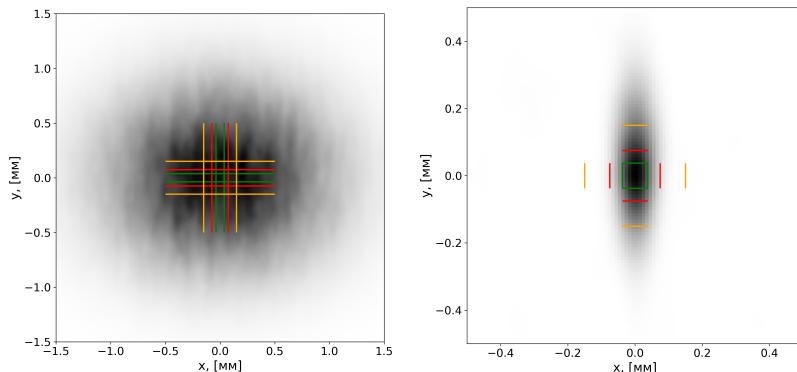


Рисунок 3.6 — Размер излучения на 25 м от источника с щелями, обозначенными цветными полосками  
[убрать горизонтальные полоски]

Рисунок 3.7 — Пятно когерентности на 25 м от источника с щелями, обозначенными цветными полосками  
[убрать горизонтальные полоски]

Для начала продемонстрируем интерференционную картину отдельно от каждой из реализаций и получившееся усреднённое по реализациям

изображение, представленные на Рис. 3.8 для вертикального расположения щелей с щелевым зазором 75 мкм.

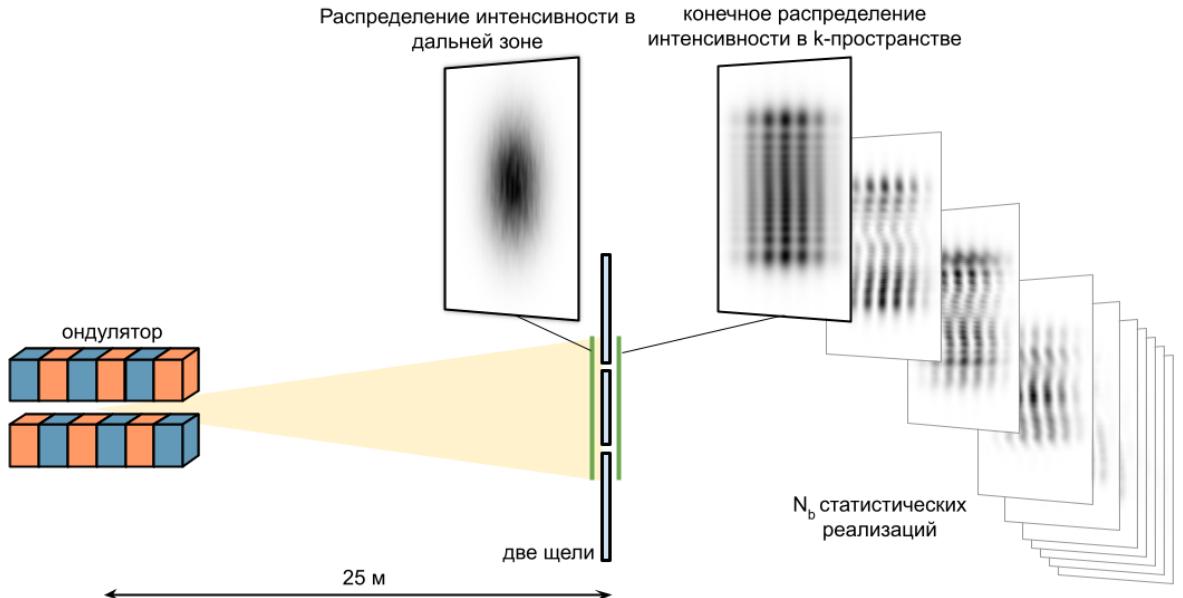


Рисунок 3.8 — Схема двухщелевого эксперимента. После щелей – интерферограмма усреднённая по 400 реализациям, а за ней интерферограммы для отдельных реализаций из этого статистического набора набора. Интерферограммы приведены в k-пространства сразу за щелями. Примечательно, что видность каждой из реализаций равна единице, но при усреднение по многим реализациям видность падает ввиду наличия частичной когерентности излучения]

Дело в том, что «Хотя видность любой из этих отдельных интерферограмм соответствует значение  $|\mu_{12}| = 1^3$ , видность суперпозиции интерферограмм, вообще говоря, будет иной, поскольку фазы отдельных компонент будут изменяться от реализации к реализации. Таким образом, интерферограмма, усреднённая по ансамблю, вообще говоря, даст значения  $|\mu_{12}|$ , весьма отличные от единицы.», – Дж. Гудмен, «Статистическая оптика», издательство «Мир», 1988, стр. 332 – 333 или зарубежное издание [9].

Теперь можно представить усреднённые по реализациям интерферограммы для различных межщелевых расстояний, представленные на Рис. 3.9, 3.10, 3.11. Указанные картины представлены для вертикального расположения щелей.

<sup>3</sup> $\mu_{12}$  – комплексный коэффициент когерентности, соответствующий  $g^{(1)}$  в настоящей работе

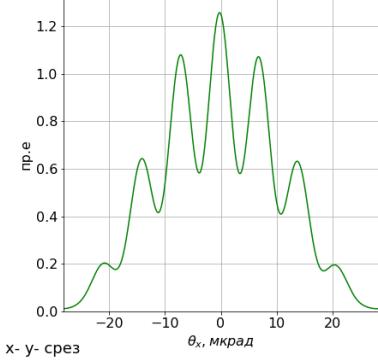
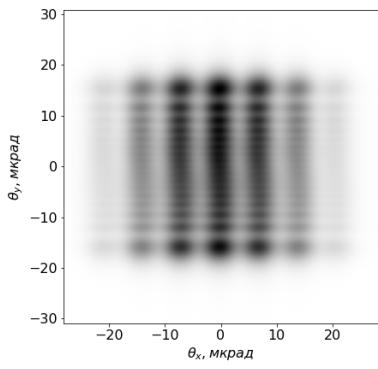


Рисунок 3.9 — 75 мкм

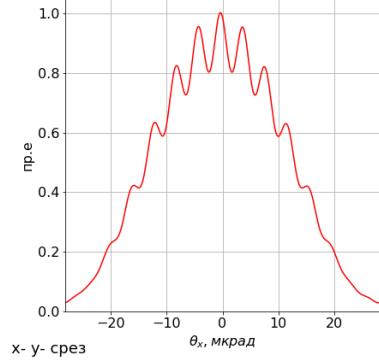
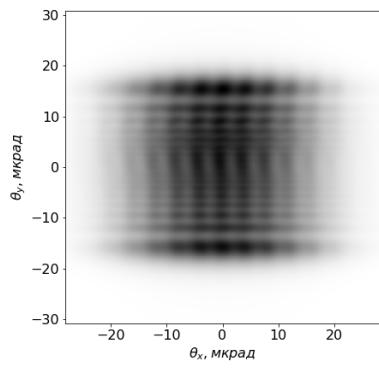


Рисунок 3.10 — 150 мкм

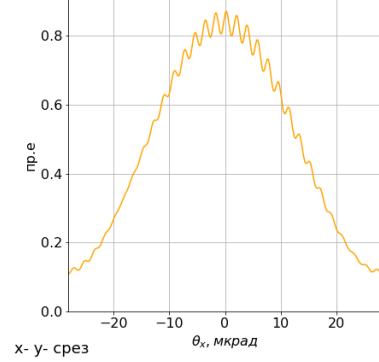
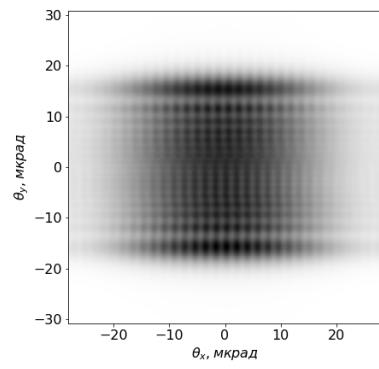


Рисунок 3.11 — 300 мкм

Примечательно заметить, что эти интерференционные картины представлены в  $k$ -пространстве или, другими словами, представлены в дальней зоне на достаточном расстоянии  $z$  от щелей<sup>4</sup>. Ещё одна особенность получившихся изображений: щели имеют конечный, в данном случае, горизонтальный размер равный 1 мм, именно поэтому в вертикальном направлении на Рис. 3.9, 3.10, 3.11 видны характерные дифракционные картины от плоскости.

Аналогичные интерферограммы построены для вертикального направления, в котором излучение обладает большей когерентностью. Щели в данном случае ориентированы горизонтально.

---

<sup>4</sup>так же именно такое изображение получится, если сразу за щелями поставить линзу, в фокусе будет соответствующая дифракционная картина

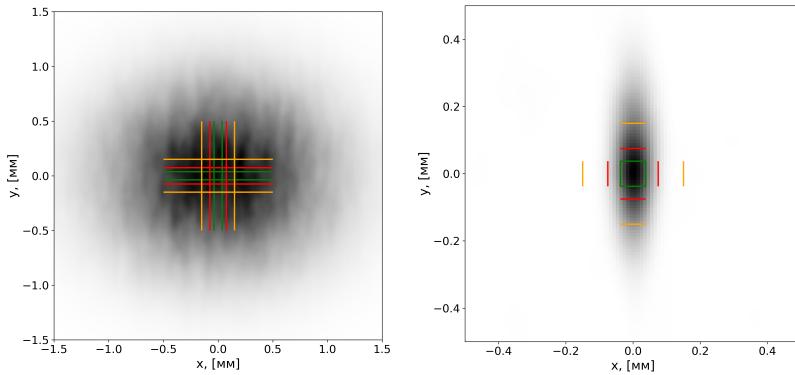


Рисунок 3.12 — [убрать вертикальные полоски] Рисунок 3.13 — [убрать вертикальные полоски]

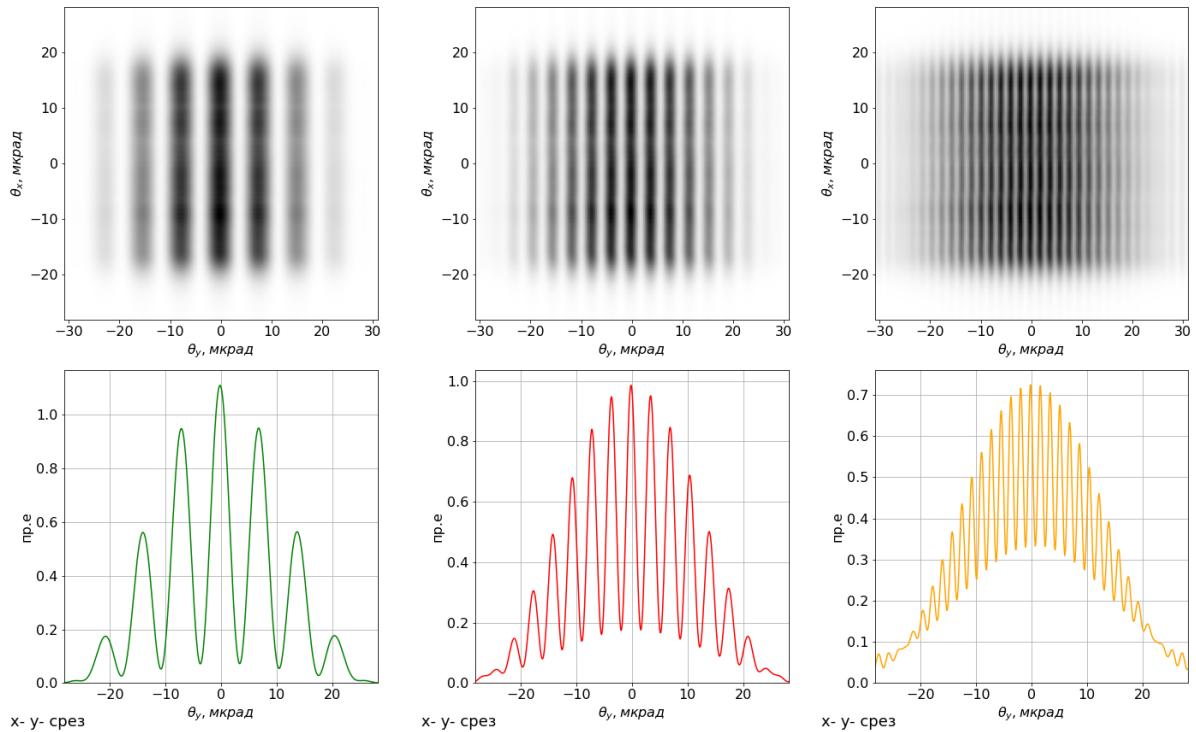


Рисунок 3.14 — 75 мкм Рисунок 3.15 — 150 мкм Рисунок 3.16 — 300 мкм

Итак, в этом разделе показано влияние частичной когерентности излучения на формирование дифракционной картины. При частично когерентном освещении дифракционная картина «сглаживается» [9] при уменьшении пятна когерентности или изменение характерного размера оптического элемента, в данном случае межщелевое расстояние.

### 3.3 Отражение от неидеального зеркала

В этом разделе мы рассмотрим эффекты возникающие при отражении частично когерентного излучения зеркал с шероховатостями. При отражении от неидеального зеркала волновой фронт деформируется, что, при некачественной полировке поверхности, может в значительной степени влиять на размер и максимальную интенсивность излучения в фокусе, а также на когерентные свойства излучения. Ошибки по высоте  $\delta h$  вносят фазовый сдвиг:

$$\phi = \frac{4\pi\delta h}{\lambda} \sin(\theta_i), \quad (3.1)$$

где  $\theta_i$  – скользящий угол на зеркало, отсчитываемый от поверхности зеркала.

Формула 3.1 даёт простой путь учёта шероховатости поверхностей при моделировании в волновом подходе, таким образом действие неидеальной поверхности учитывается как фазовый фактор, модулирующий волновой фронт. Альтернативный подход – использование пошагового моделирования процесса отражения волнового фронта от поверхности зеркала с учётом прохождения излучения в вещество, так называемый split-step method [20]. Сравнительный анализ этих двух походов приведён в работе [20], где показано совпадение оценки числа Штреля для различных значений среднеквадратического отклонения профиля зеркала, относительно идеальной поверхности. Число Штреля, описывающее относительное падение интенсивности излучения из-за наличия в оптической системе aberrаций, может быть использовано для выдвижения критерия (критерий Марешала) налагающий ограничение на среднеквадратического отклонение  $h_{rms}$ , а так же отклонение наклона  $\mu_{rms}$  [21]:

$$\frac{I(0)}{I_0(0)} = 1 - 8 \frac{\mu_{rms}^2}{\theta_i} - \left( \frac{4\pi}{\lambda} \sin(\theta_i) \right)^2 h_{rms}^2 < 0,8. \quad (3.2)$$

Здесь  $I(0)$  и  $I_0(0)$  интенсивность излучения на оптической оси в фокусе при отражении от неидеального зеркала и, соответственно, при отражении от идеального зеркала.

Как видно, формула 3.2 зависит от двух параметров  $h_{rms}$  и  $\mu_{rms}$ . Однако, обычно поверхность зеркала описывается в обратном пространстве частот –  $k$ , функцией спектральной плотности  $PSD(k)$  по сути являющейся Фурье преобразование профиля зеркала:

$$PSD(k) = \frac{1}{L} \left| \int_{-L/2}^{L/2} \delta h(z) \exp(-ikz) dz \right|^2 \quad (3.3)$$

В показано [22], профиль зеркала имеет фрактальную структуру с параметром  $D$  удовлетворяющим  $1 < D < 2$ , что, соответственно, даёт линейный вид  $PSD$ -функции в лог-лог масштабе, описываемый двумя параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , при  $D = (5 - \alpha)/2$ . Соответственно,

$$\log_{10}(PSD(k)) = \beta \log_{10}(k) - \alpha. \quad (3.4)$$

Через  $PSD$ -функцию удобно определять среднеквадратичные значения ошибок по высоте и наклону через интегралы:

$$\mu_{rms}^2 = (2\pi)^2 \int_{1/L}^{1/W} k^2 PSD(k) dk, \quad (3.5)$$

$$h_{rms}^2 = \int_{1/W}^{1/\lambda} PSD(k) dk, \quad (3.6)$$

где  $W$  длина когерентности излучения на зеркале. Видно, что при некоторых значениях  $W$  и параметрах оптической системы величина  $\mu_{rms}$  теряет свой смысл и равна нулю. Например, для дифракционно ограниченных систем, когда  $\theta_{diff} = 1.22\lambda/D$  много больше чем видимый размер источника  $\theta_{source} = \sigma_{x,y}/z_0$ , где  $z_0$  расстояние от источника до плоскости наблюдения. В этом случае всегда выполняется  $W \sim \sqrt{2}L$ , [23], и тогда

применима формула  $h_{rms} = \lambda/4\sqrt{5}\pi\theta_i$ , что совпадает с аналогичными формулами у [20] и [24]<sup>5</sup>.

Тем не менее,  $h_{rms}$  и  $\mu_{rms}$  – некоторые средние, поэтому через них сложно полно описать профиль зеркала. В идеале, при расчёте оптики необходимо знать саму  $PSD$  функцию. Обращая формулу 3.3 восстанавливается профиль зеркала [25], [26], [27].

$$\delta h(z) = \frac{M}{L} F^{-1} \left\{ \sqrt{L \cdot PSD(k)} \exp[i\psi(k)] \right\}(z), \quad (3.7)$$

где  $F^{-1} \cdot (z)$  обратное преобразование фурье, а  $M$  – количество точек вдоль оси  $z$ ,  $\psi(k)$  – случайно сгенерированная фаза удовлетворяющая условию  $-\pi < \psi(k) < \pi$ . Таким образом, зная профиль зеркала  $\delta h(z)$  и используя формулу 3.1, можно провести моделирование процесса отражения волнового фронта от неидеального зеркала.

Для моделирование была выбрана та же оптическая схема что и для фокусировки с апертурой в разделе 3.1. Однако, чтобы показать действие неидеального зеркала на свойства излучения, апертура была исключена из рассмотрения. На Рис. 3.17 и 3.18 представлены распределения излучения после отражения от неидеального фокусирующего зеркала со средним значением  $h_{rms} = 0,3$  нм и после пропагации волнового фронта через 12,5 м пустого пространства.

---

<sup>5</sup> $4\pi\sqrt{5} \approx 28$

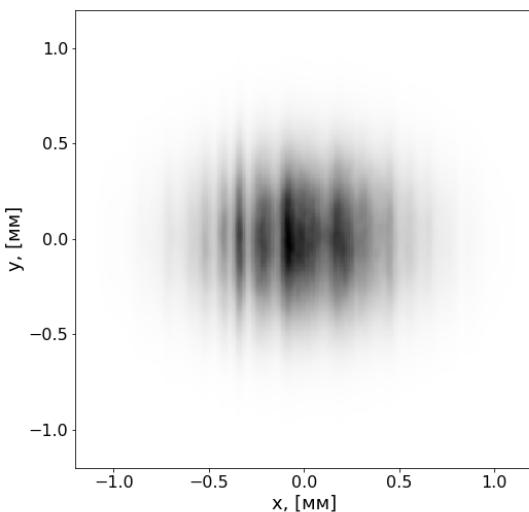


Рисунок 3.17 — Распределение интенсивности излучения после отражения и 12,5 м пустого пространства, ошибки по высоте введены по  $x$

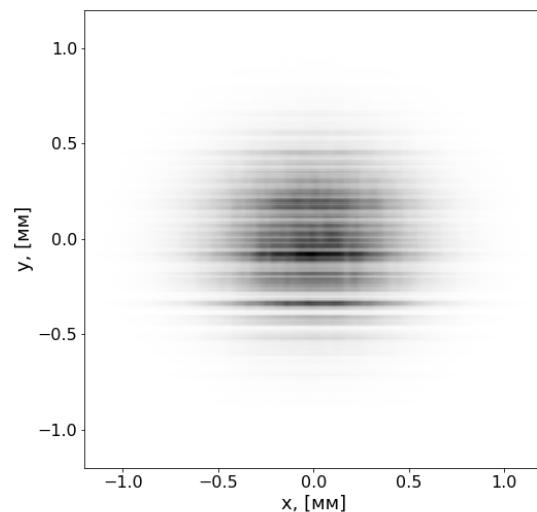


Рисунок 3.18 — Распределение интенсивности излучения после отражения и 12,5 м пустого пространства, ошибки по высоте введены по  $y$

Видно, для горизонтального направление модуляции волнового фронта более сглажены из-за меньшей степени когерентности в этом направлении, в отличии от вертикального направления с большей степенью когерентности.

Для сравнения того, как влияют разные профили зеркала на свойства излучения после пропагации и в фокусе на Рис. 3.19, 3.20, 3.21, 3.22 представлены соответствующие распределения интенсивность излучения после отражения от зеркала со среднеквадратичным отклонениями равными 0,3 нм и 0,6 нм. Сравнение приведено для *двух ориентаций* моделируемого зеркала: ошибки введены по горизонтальному направлению на Рис. 3.19, 3.21. и, соответственно, по вертикальному направлению на Рис. 3.20, 3.22, что соответствует вертикальному и горизонтальному направлениям зеркал. Для всех случаев была выбрана *PSD* функция с коэффициентом  $\beta = -1,8$ , нормированная на соответствующие значение среднеквадратического отклонения.

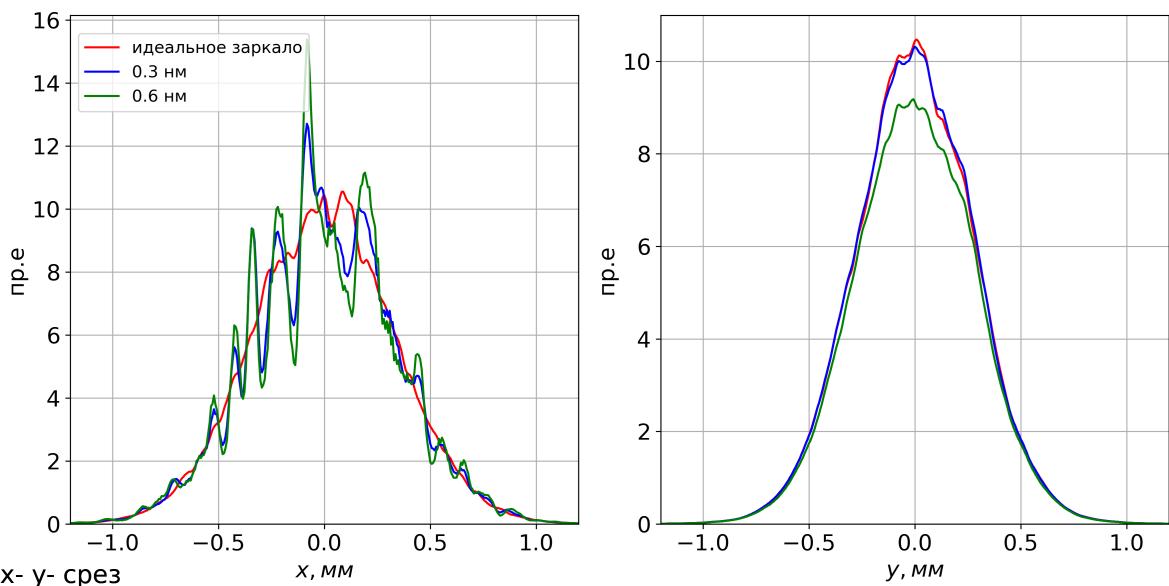


Рисунок 3.19 — Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12.5 от зеркала, ошибки по высоте введены по горизонтальному направлению

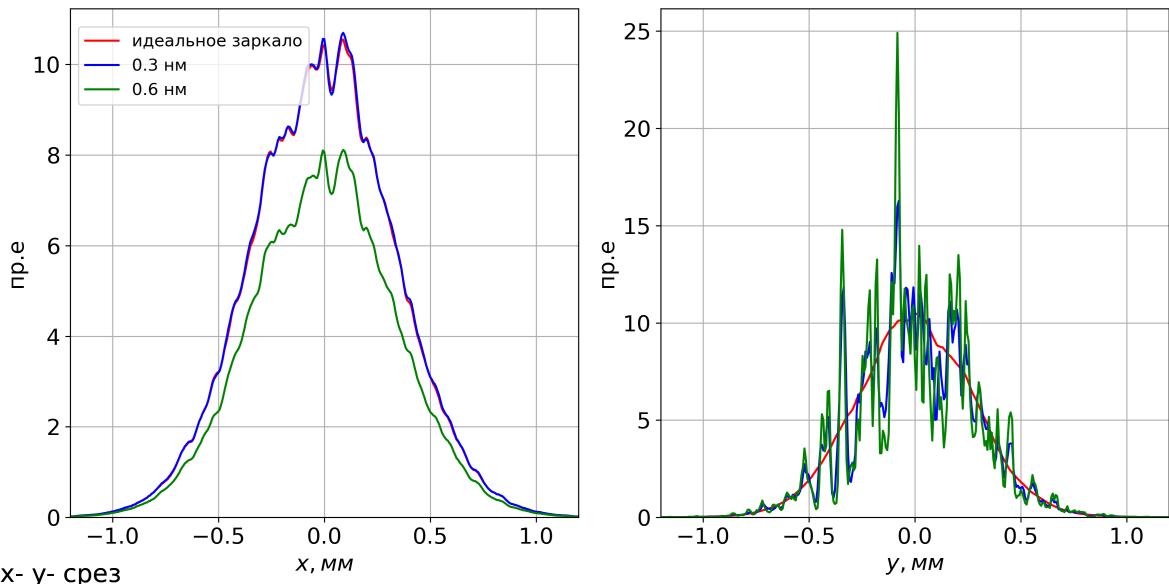


Рисунок 3.20 — Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12.5 от зеркала, ошибки по высоте введены по вертикальному направлению

Для каждого из случаев при генерации выбиралось одинаковое начальное число (англ. seed) при генерации псевдослучайного величины, что делалось для воспроизводимости результатов. Именно поэтому модуляции волнового фронта при увеличении величины шероховатости просто повторяют свою форму, но с большей амплитудой.

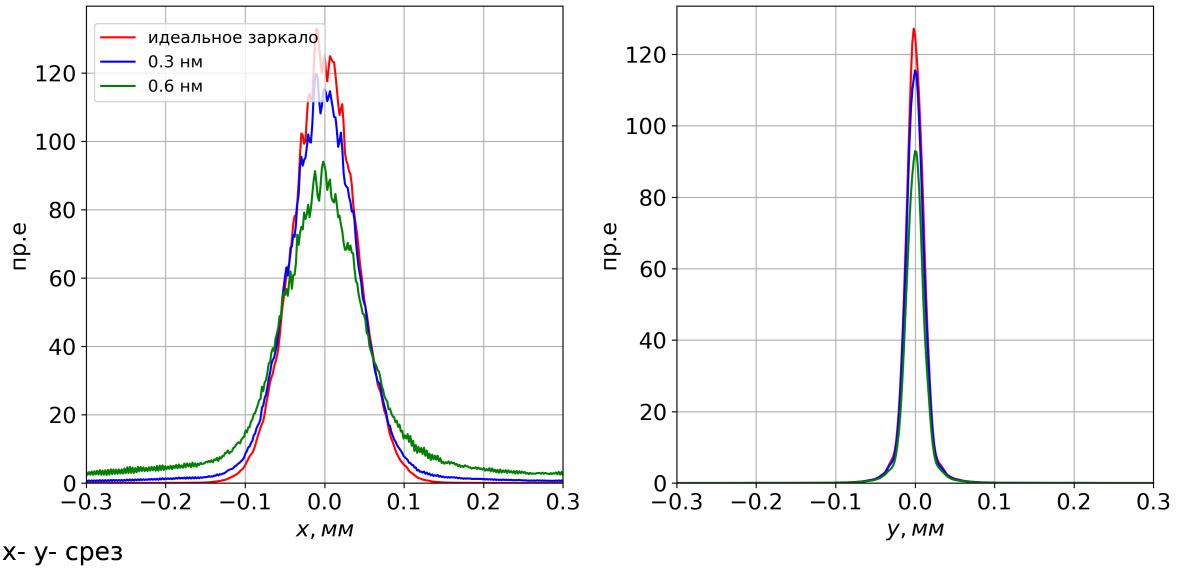


Рисунок 3.21 — Распределение интенсивности излучения в фокусе,  
ошибки по высоте введены по горизонтальному направлению

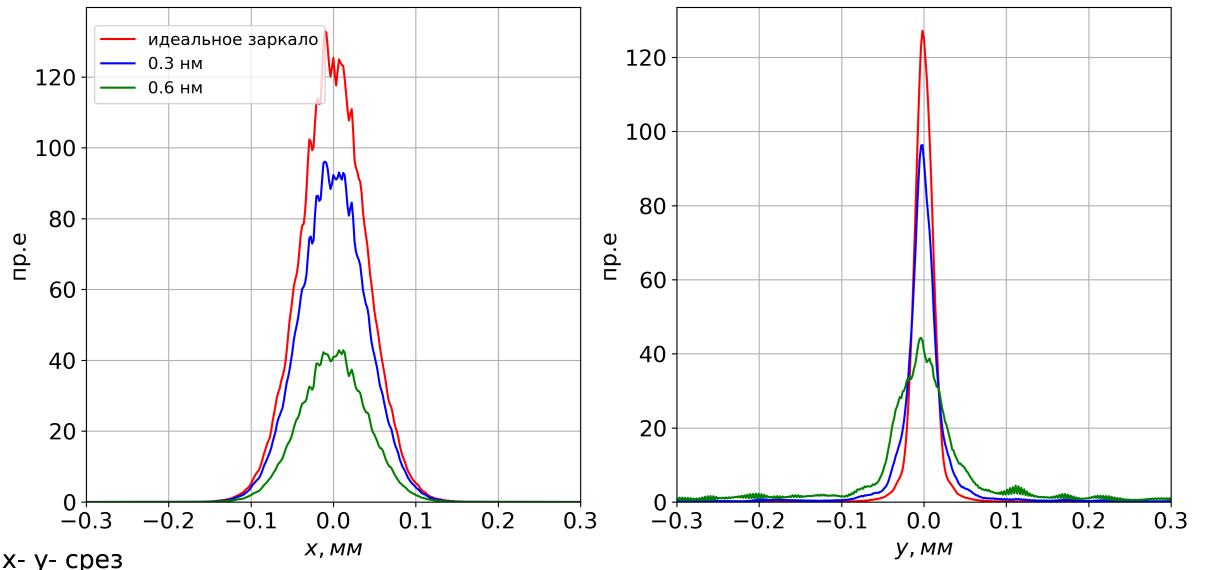


Рисунок 3.22 — Распределение интенсивности излучения в фокусе,  
ошибки по высоте введены по вертикальному направлению

Как видно на Рис. 3.21 и 3.22 шероховатости приводят к расплыванию фокусного пятна и, следственно, падению пиковой амплитуды интенсивности поля. Например, эффект увеличение размера фокусного пятна приводит к ухудшению разрешающей способности монохроматоров, основанных на дифракционных решётках, поэтому следует налагать довольно жёсткие требования на среднеквадратичную амплитуду шероховатостей рентгеновских зеркал, [28], [29].

## **Заключение**

Основные результаты работы заключаются в следующем. Важно отметить, что оба метода: СЕРВАЛ и МСА, основываются на усреднение по статистическим реализациям, такой подход является новым при моделировании когерентных свойств синхротронного излучения и именно в этом состоит его основное различие от МСИ.

## Список литературы

1. *Bartolini R.* Challenges in the design and construction of diffraction limited light sources. — Hamburg, 2021. — Conference talk at DESY usres‘ meeting 2021.
2. *Hettel R.* Challenges in the Design of Diffraction-limited Storage Rings // Proceedings of the 5th Int. Particle Accelerator Conf. — 2014. — Vol. IPAC2014. — 5 pages, 0.551 MB. — DOI: 10.18429 / JACOW - IPAC2014 - MOXBA01. — URL: <http://jacow.org/ipac2014/doi/JACoW-IPAC2014-MOXBA01.html> (visited on 04/22/2021) ; Artwork Size: 5 pages, 0.551 MB ISBN: 9783954501328 Medium: PDF Publisher: JACoW Publishing, Geneva, Switzerland.
3. SHADOW3: a new version of the synchrotron X-ray optics modelling package / M. Sanchez del Rio [et al.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2011. — Sept. — Vol. 18, no. 5. — P. 708–716. — DOI: 10.1107/S0909049511026306. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0909049511026306> (visited on 04/22/2021).
4. *Goodman J.* Introduction to Fourier Optics. — W. H. Freeman, 2005. — (McGraw-Hill physical and quantum electronics series). — ISBN 978-0-9747077-2-3. — URL: [https://books.google.ru/books?id=ow5xs\\_Rtt9AC](https://books.google.ru/books?id=ow5xs_Rtt9AC).
5. *Chubar O., Elleaume P.* Accurate and efficient computation of synchrotron radiation in the near field region // proc. of the EPAC98 Conference. — 1998. — c. 1177—1179.
6. Transverse coherence properties of X-ray beams in third-generation synchrotron radiation sources / G. Geloni [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2008. — Apr. — Vol. 588, no. 3. — P. 463–493. — DOI: 10.1016/j.nima.2008.01.089. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900208001605> (visited on 02/22/2021).

7. *Cittert P. H. van.* Die Wahrscheinliche Schwingungsverteilung in Einer von Einer Lichtquelle Direkt Oder Mittels Einer Linse Beleuchteten Ebene // Physica. — 1934. — янв. — т. 1, № 1. — с. 201—210. — DOI: 10.1016/S0031-8914(34)90026-4. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891434900264> (дата обр. 20.04.2021).
8. *Zernike F.* The concept of degree of coherence and its application to optical problems // Physica. — 1938. — Aug. — Vol. 5, no. 8. — P. 785–795. — DOI: 10.1016/S0031-8914(38)80203-2. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891438802032> (visited on 04/20/2021).
9. *Goodman J.* Statistical Optics. — Wiley, 2015. — (Wiley Series in Pure and Applied Optics). — ISBN 978-1-119-00946-7. — URL: <https://books.google.ru/books?id=9Ol8CAAAQBAJ>.
10. *Cullity B. D.* Elements of X-ray Diffraction. — Addison-Wesley Publishing Company, 1956. — ISBN 978-0-201-01230-9. — Google-Books-ID: XJVCgGFTODMC.
11. Effects of energy spread on Brightness and Coherence of undulator sources / G. Geloni [и др.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2018. — сент. — т. 25, № 5. — с. 1335—1345. — DOI: 10.1107/S1600577518010330. — URL: <http://arxiv.org/abs/1808.05019> (дата обр. 28.04.2021) ; arXiv: 1808.05019.
12. *Geloni G., Kocharyan V., Saldin E.* Brightness of Synchrotron radiation from Undulators and Bending Magnets // arXiv:1407.4591 [physics]. — 2014. — июль. — URL: <http://arxiv.org/abs/1407.4591> (дата обр. 21.04.2021) ; arXiv: 1407.4591.
13. *Chubar O.* Simulation of emission and propagation of coherent synchrotron radiation wave fronts using the methods of wave optics // Infrared Physics & Technology. — 2006. — Sept. — Vol. 49, no. 1. — P. 96–103. — (International Workshop on Infrared Microscopy and Spectroscopy with Accelerator-Based Sources). — DOI: 10.1016/j.infrared.2006.01.010. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350449506000120> (visited on 04/03/2021).

14. *Singer A., Vartanyants I. A.* Modelling of partially coherent radiation based on the coherent mode decomposition // Advances in Computational Methods for X-Ray Optics II. т. 8141. — International Society for Optics, Photonics, 09.2011. — с. 814106. — DOI: 10.1117/12.893618. — URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/8141/814106/Modelling-of-partially-coherent-radiation-based-on-the-coherent-mode/10.1117/12.893618.short> (дата обр. 28.04.2021).
15. Application of Gaussian Schell-Model and Its Coherent Mode Decomposition on Hard X-Ray Synchrotron Radiation / W. Q. Hua [и др.] // 2012 Symposium on Photonics and Optoelectronics. — 05.2012. — с. 1—6. — DOI: 10.1109/SOPO.2012.6270955. — ISSN: 2156-8480.
16. *Khubbudinov R., Menushenkov A. P., Vartanyants I. A.* Coherence properties of the high-energy fourth-generation X-ray synchrotron sources // Journal of Synchrotron Radiation. — 2019. — Nov. — Vol. 26, no. 6. — P. 1851–1862. — DOI: 10.1107/S1600577519013079. — URL: <https://journals.iucr.org/s/issues/2019/06/00/pp5149/> (visited on 04/28/2021) ; Number: 6 Publisher: International Union of Crystallography.
17. (IUCr) Genuine-field modeling of partially coherent X-ray imaging systems. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/iucr/doi/10.1107/S1600577520006979> (дата обр. 28.04.2021).
18. Fourier treatment of near-field synchrotron radiation theory / G. Geloni [et al.] // Optics Communications. — 2007. — Aug. — Vol. 276, no. 1. — P. 167–179. — DOI: 10.1016/j.optcom.2007.03.051. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401807003367> (visited on 02/26/2021).
19. *Tanaka T., Kitamura H.* SPECTRA: a synchrotron radiation calculation code // Journal of Synchrotron Radiation. — 2001. — Nov. — Vol. 8, no. 6. — P. 1221–1228. — DOI: 10.1107/S090904950101425X. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?wr2001> (visited on 05/14/2021) ; Number: 6 Publisher: International Union of Crystallography.

20. Serkez S. Design and Optimization of the Grating Monochromator for Soft X-Ray Self-Seeding FELs : PhD thesis / Serkez Svitozar. — Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron, 2015. — URL: <https://bib-pubdb1.desy.de/record/275967> (visited on 03/30/2021) ; Number: PUBDB-2015-04348.
21. Church E. L., Takacs P. Z. Specification of surface figure and finish in terms of system performance // Applied Optics. — 1993. — July. — Vol. 32, no. 19. — P. 3344. — DOI: 10.1364/AO.32.003344. — URL: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ao-32-19-3344> (visited on 05/15/2021).
22. Fractal description of rough surfaces / O. V. Angeisky [et al.]. — .
23. Pardini T., Cocco D., Hau-Riege S. P. Effect of slope errors on the performance of mirrors for x-ray free electron laser applications // Optics Express. — 2015. — Dec. — Vol. 23, no. 25. — P. 31889. — DOI: 10.1364/OE.23.031889. — URL: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=oe-23-25-31889> (visited on 05/15/2021).
24. Linac Coherent Light Source soft x-ray materials science instrument optical design and monochromator commissioning / P. Heimann [и др.] // Review of Scientific Instruments. — 2011. — сент. — т. 82, № 9. — c. 093104. — DOI: 10.1063/1.3633947. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/full/10.1063/1.3633947> (дата обр. 15.05.2021) ; Publisher: American Institute of Physics.
25. Using the Power Spectral Density Method to Characterize and Evaluate the X-ray Mirrors Surfaces / W. Q. Hua [et al.]. — 2013.
26. Statistical measurement of mid-spatial frequency defects of large optics / J. Xu [et al.] // Measurement Science and Technology. — 2012. — Apr. — Vol. 23, no. 6. — P. 065201. — DOI: 10.1088/0957-0233/23/6/065201. — URL: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/23/6/065201> (visited on 05/15/2021) ; Publisher: IOP Publishing.
27. Predicting the coherent X-ray wavefront focal properties at the Linac Coherent Light Source (LCLS) X-ray free electron laser / A. Barty [и др.] // Optics Express. — 2009. — авг. — т. 17, № 18. — c. 15508—15519. —

- DOI: 10.1364/OE.17.015508. — URL: <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-17-18-15508> (дата обр. 15.05.2021) ; Publisher: Optical Society of America.
28. High-resolution soft X-ray beamline ADRESS at the Swiss Light Source for resonant inelastic X-ray scattering and angle-resolved photoelectron spectroscopies / V. N. Strocov [et al.] // Journal of Synchrotron Radiation. — 2010. — Sept. — Vol. 17, no. 5. — P. 631–643. — DOI: 10.1107/S0909049510019862. — URL: <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0909049510019862> (visited on 05/15/2021).
  29. *Sankari R.* HIPPIE beamline at MAX IV: Detailed optical design report. —.

## Глоссарий

Эмиттанс релятивистского электронного пучка – площадь фазового пространства в  $x, x', y, y'$  поперечных координатах, в работе не рассматривается понятие эмиттанса как объём шестимерного фазового пространства.

Пропагация излучения – распространение волнового фронта вдоль оптической оси от плоскость с позицией  $z_1$  до позиции  $z_2$ .

Si( $\cdot$ ) – интегральный синус.

Комплексный гауссов шум – статистический процесс описываемы комплексным нормальным распределением:  $Z = X + iY$ , где  $X$  и  $Y$  нормальные распределения со средним 0 и вариацией равной единице. В работе под комплексным гауссовым шумом подразумевается двумерный (или трехмерный) массив величин, где значение каждого элемента является комплексная случайная величина  $Z$ .

SERVAL – хищное млекопитающее семейства кошачьих, в работе используется как условное название для наименования предложенного метода моделирование частично когерентного поля ограничением пространственных гармоник комплексного гауссова шума огибающими поля.

Макроэлектрон – понятие используемое при моделировании излучения электронного пучка, так как количество электронов в реальном электронном пучке велико и зачастую нет возможности моделировать на компьютере отдельно, приходится разбивать электронный пучок на кластеры – макроэлектроны, число которых возможно моделировать на обычном персональном компьютере.

Метод сложения амплитуд – метод для расчёта излучения электронного пучка с конечным эмиттансом, основанный на сложении полей каждого макроэлектрона с последующим усреднением по статистическим реализациям.

Метод SRW

Спайковая структура синхротронного излучения

SASE2

## Список рисунков

1.1	К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике . . . . .	8
1.2	К формулировке теоремы Ван Циттерта-Цернике . . . . .	9
1.3	Спайковая структура излучения синхротронного излучения.	11
2.1	Схема работы метода сложения амплитуд . . . . .	16
2.2	Схема метода сложения интенсивностей . . . . .	17
2.3	[Подпись, изменить цвет линий на синий зелёный, легенда]	18
2.4	[Подпись, изменить цвет линий на синий зелёный, легенда]	19
2.5	Интенсивность комплексного гауссова шума [перерисовать в чб] . . . . .	20
2.6	Интенсивность комплексного гауссова шума . . . . .	21
2.7	Размер электромагнитного излучения в перетяжке наложенный на шум . . . . .	22
2.8	Получившиеся моды в $k\omega$ -пространстве от размера электронного пучка . . . . .	22
2.9	Расходимость излучения в источнике . . . . .	22
2.10	Размер излучения в источнике . . . . .	22
2.11	Распределение поля в источнике излучения . . . . .	24
2.12	Функция взаимной когерентности на расстоянии 25 м от источника . . . . .	25
2.13	Распределением на источнике [перерисовать с большей плотностью точек и другими цветами линий] . . . . .	25
3.1	Схема оптики . . . . .	28
3.2	Распределение интенсивности излучения в дальней зоне. [ $MCA_{x,x} = 1500$ мкм, $MCA_{x,x} = 1270$ мкм] . . . . .	29
3.3	Корреляционная функция, построенная по формуле 1.1. [ $MCA_{x,x} = 87$ мкм, $MCA_{x,x} = 320$ мкм] . . . . .	30
3.4	[ $MCA_{x,x} = 453$ мкм, $MCA_{x,x} = 445, 442$ мкм] . . . . .	31
3.5	Распределение излучения в фокусе [ $MCA_{x,x} = 100$ мкм, $MCA_{x,x} = 26$ мкм] . . . . .	32

3.6	Размер излучения на 25 м от источника с щелями, обозначенными цветными полосками [убрать горизонтальные полоски] . . . . .	33
3.7	Пятно когерентности на 25 м от источника с щелями, обозначенными цветными полосками [убрать горизонтальные полоски] . . . . .	33
3.8	Схема двухщелевого эксперимента. После щелей – интерферограмма усреднённая по 400 реализациям, а за ней интерферограммы для отдельных реализаций из этого статистического набора набора. Интерферограммы приведены в k-пространства сразу за щелями. Примечательно, что видность каждой из реализаций равна единице, но при усреднение по многим реализациям видность падает ввиду наличия частичной когерентности излучения] . . . . .	34
3.9	75 мкм . . . . .	35
3.10	150 мкм . . . . .	35
3.11	300 мкм . . . . .	35
3.12	[убрать вертикальные полоски] . . . . .	36
3.13	[убрать вертикальные полоски] . . . . .	36
3.14	75 мкм . . . . .	36
3.15	150 мкм . . . . .	36
3.16	300 мкм . . . . .	36
3.17	Распределение интенсивности излучения после отражения и 12,5 м пустого пространства, ошибки по высоте введены по $x$	40
3.18	Распределение интенсивности излучения после отражения и 12,5 м пустого пространства, ошибки по высоте введены по $y$	40
3.19	Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12.5 от зеркала, ошибки по высоте введены по горизонтальному направлению . . . . .	41
3.20	Распределение интенсивности излучения после пропагации на 12.5 от зеркала, ошибки по высоте введены по вертикальному направлению . . . . .	41

3.21 Распределение интенсивности излучения в фокусе, ошибки по высоте введены по горизонтальному направлению . . . .	42
3.22 Распределение интенсивности излучения в фокусе, ошибки по высоте введены по вертикальному направлению . . . .	42

## **Список таблиц**

3.1	Параметры ондулятора . . . . .	26
3.2	Параметры электронного пучка . . . . .	26