Homework 1

Andrea Sanna (s222975@studenti.polito.it)

January 16, 2021

Realizzato in collaborazione con Ornella Elena Grassi(s...)

Esercizio 1.

(a) Il numero minimo di archi da rimuovere affinche non possa esserci flusso da o a d è pari al numero di cammini linearmente indipendenti fra o e d, che sono due: $o \to a \to d$ e $o \to b \to d$

Per disconnettere o e d è necessario rimuovere un arco per ciascuno dei cammini:

- elimino e_1 o e_4 da $o \to a \to d$, quindi rimuovo capacità pari a $C = 3$
- elimino e_2 o e_5 da $o \to b \to d$, quindi rimuovo capacità pari a $C = 2$

Allora, affinchè non ci sia flusso fra o e d è necessario rimuovere almeno una capacità totale pari a $C = 5$.

(b) Dal testo sappiamo che le funzioni di ritardo sono date da:
$d_1(x) = d_5(x) = x + 1, d_3(x) = 1, d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1$.
Per il teorema di Max Flow -Min Cut il flusso massimo è pari alla somma delle capacità degli archi del taglio minimo. Nel grafo considerato i possibili tagli sono:

- u_1 associato alla partizione $\mathcal{U}_1 = \{o\}$, con capacità $C_1^* = 3+2 = 5$
- u_2 associato alla partizione $\mathcal{U}_2 = \{o, a\}$, con capacità $C_2^* = 2 + 2 + 3 = 7$
- u_3 associato alla partizione $\mathcal{U}_3 = \{o, b\}$, con capacità $C_1^* = 3 + 2 = 5$
- u_4 associato alla partizione $\mathcal{U}_4 = \{o, a, b\}$ con capacità $C_1^* = 3 + 2 = 5$

Per massimizzare il flusso aggiungo le capacità sugli archi condivisi fra i tagli minimi:

- aggiungo un'unità di capacità a $e_1 \Rightarrow C_1^* = C_3^* = 6$
- aggiungo un'unità di capacità a $e_5 \Rightarrow C_3^* = 7, C_4^* = 6$

Rispetto alla configurazione precedente, ora il taglio minimo ha capacità 6: la capacità del taglio minimo è aumentata di un'unità. Se le unità fossero state aggiunte aggiunte entrambe a e_1 o e_2 o e_4 o e_5 il flusso massimo avrebbe ancora capacità pari a 5, perchè la capacità di uno dei 3 tagli minimi sarebbe rimasta invariata, rimanendo quindi il taglio minimo.

(c) Siano z_1, z_2, z_3 le porzioni frazioni di flusso su ciascuno dei tre percorsi possibili (quindi tali che $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, con le funzioni di ritardo ad essi associate sono dati da:

- $p^{(1)} : o \to a \to d$, con funzione di ritardo $\Delta_1 = 6z_1 + z_3 + 2$
- $p^{(2)} : o \to b \to d$, con $\Delta_2 = 6z_2 + z_3 + 2$
- $p^{(3)} : o \to a \to b \to d$, con $\Delta_3 = z_1 + z_2 + 2z_3 + 3$

L'equilibrio di Wardrop è la configurazione dei flussi che corrisponde all'ottimo per l'utente, quindi se il flusso sul percorso i non è nullo, cioè $z_i > 0$, la funzione di ritardo associata è tale che $\Delta_i \leq \Delta_j, \forall j \neq i$. Calcoliamo i flussi.
Ipotizziamo $z_1 > 0, z_2 > 0$,; avremo quindi:

$$\begin{cases} \Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow 6z_1 + z_3 + 2 \leq 6z_2 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \leq z_2 \\ \Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow 6z_2 + z_3 + 2 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \geq z_2 \end{cases}$$

Da queste due disequazioni otteniamo $z_1 = z_2$.
Ipotizziamo ora $z_3 > 0$ (in aggiunta a $z_1 = z_2 > 0$):

$$\begin{cases} \Delta_3 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + 2z_3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_3 \leq 4z_1 - 1 \\ \Delta_1 \leq \Delta_3 \Leftrightarrow 6z_1 + z_3 + 2 \leq z_1 + z_2 + 2z_3 \Leftrightarrow z_3 \geq 4z_1 - 1 \end{cases}$$

Quindi $z_3 = 4z_1 - 1$.

In definitiva otteniamo che $z_1 = z_2$ e $z_3 = 4z_1 - 1$ e, in aggiunta alla condizione $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, otteniamo la configurazione dell'equilibrio di Wardrop con $z = (z_1, z_2, z_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Il corrispondente vettore di flusso sugli archi $f^{(UO)}$, in cui ciascuna delle componenti è $f_{e_i}^{(UO)}$, ossia il flusso sull'arco e_i, sarà: $f^{(UO)} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Il tempo totale di percorrenza (Total Travel Time) è uguale su tutti e tre i percorsi (per definizione di equilibrio di Wardrop) ed è pari a:

$$TTT = 6\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{13}{3}$$

(d) Calcolare il flusso dell'ottio sociale corrisponde a minimizzare la funzione di costo c data dalla somma sugli archi del flusso passante su ciascun arco moltiplicato per la funzione di ritardo dell'arco stesso, ovvero: dei flussi sui percorsi z_i moltiplicati per le funzioni di ritardo di ciascuno degli edge sui quali passano:

$$c = (z_1+z_3)(z_1+z_3+1)+z_2(5z_2+1)+z_3+z_1(5z_1+1)+(z_2+z_3)(z_2+z_3+1)$$
$$\Rightarrow c = 6z_1^2 + 6z_2^2 - 3z_1 - 3z_2 + 5$$

dove abbiamo utilizzato la condizione $z_3 = 1 - z_1 - z_2$. Per massimizzare questa funzione calcoliamo il gradiente di c rispetto alle due variabili rimaste e imponiamolo pari a 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial z_1} = 12z_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{4} \\ \frac{\partial c}{\partial z_2} = 12z_2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Usando di nuovo la condizione $z_1+z_2+z_3 = 1$ si ottiene $z_3 = \frac{2}{4}$. In conclusione $z = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4})$. Il corrispondente flusso sugli archi all'ottimo di sistema sarà dato da: $f^{(SO)} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4})$ Il ritardo medio all'ottimo di sistema è dato da:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} f_e d(f_e) = \frac{3}{4}(\frac{3}{4}+1) + \frac{1}{4}(\frac{5}{4}+1)\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\frac{5}{4}+1) + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}+1) = \frac{17}{4}$$

(e) Il prezzo dell'anarchia (PoA) è dato dal rapporto fra il ritardo medio all'equilibrio di Wardrop rispetto il ritardo all'ottimo di sistema, quindi:

$$PoA = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}} = \frac{52}{51}$$

(f) Un modo per calcolare i pedaggi sugli archi è quello dei pedaggi marginali:

$$\omega_i = f_e^* d_e'(f_e)$$

I pedaggi sugli archi saranno quindi:

$$\omega_1^* = \omega_5^* = 1\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\omega_2^* = \omega_4^* = 5\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\omega_3^* = 0$$

Il vettore dei pedaggi sarà quindi: $\omega^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{3}{4})$

Aggiungiamo che PoA=1? Calcolando l'equilibrio di Wardrop con le nuove funzioni di ritardo coi pedaggi si ottiene:

Esercizio 2.

(a) Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ il grafo assegnato. La matrice dei pesi è data da:

$$W = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definendo come $w = diag(W) = (a, 0, 0, 0)$ il vettore della diagonale di W, la matrice dei pesi normalizzata P è:

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Laplaciano L è:

$$L = D - W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Osserviamo che $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico $\forall a \geq 0$, infatti se $a > 0$ il grafo contiene un self-loop e quindi è aperiodico, mentre se $a = 0$, quindi non è più presente il self-loop, rimane aperiodico perchè contiene, ad esempio, i cicli $2 \to 4 \to 1$ e $2 \to 4 \to 1 \to 2$ cicli di lunghezza 2 e 3, che sono coprimi. Inoltre $\mathcal{G}$ è bilanciato, cioè ogni nodo ha grado entrante pari al grado uscente.

Consideriamo la dinamica di opinione di French-De Groot sul grafo $\mathcal{G}$: $x(t+1) = Px(t)$. Dato che $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico per ogni $a \geq 0$, allora la dinamica converge al consenso per ogni $a \geq 0$:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

dove abbiamo indicato con π la distribuzione invariante di centralità, data da $\pi' = \pi' P$.

Dal fatto che G è fortemente connesso sappiamo che $\pi_i > 0 \forall i$. In particolare, dal fatto che $\mathcal{G}$ è bilanciato, sappiamo che la misura invariante è proporzionale al vettore dei gradi w: osservando che $w\mathbb{1} = a + 1 + 2 + 1 + 2 = a + 6$, otteniamo il vettore della distribuzione invariante di centralità:

$$\pi = (\frac{a+1}{a+6}, \frac{2}{a+6}, \frac{1}{a+6}, \frac{2}{a+6})$$

(c) Sia $x(0) = (-1, 1, -1, 1)$ il vettore delle opinioni iniziali. Per ciò che è stato detto nel punto precedente, sappiamo che il limite del profilo delle opinioni esiste per $a = 0$ e il limite sarà:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \sum_{i\in\mathcal{V}} \pi_i x_i(0) =$$

$$= \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$$

(d) Da quanto visto al punto precedente

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{2-a}{a+6} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$$

Quindi il valore minimo per il quale il limite dell'opinione di x_1 è minore di 0 è $a = 2$.

(e) Calcoliamo innanzitutto com'è fatta della varianza da minimizzare rispetto ad a; indicandola con $f(a)$ abbiamo:

$$f(a) := Var(\lim_{t\to\infty} x_1(t)) = Var(\pi_1 x_1(0) + \pi_2 x_2(0) + \pi_3 x_3(0) + \pi_4 x_4(0)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \pi_i^2 Var(x_i(0)) = \sum_{i=1}^{4} \pi_i^2 = \frac{1}{(a+6)^2}((a+2)^2 + 4 + 1 + 4) =$$

$$= \frac{a^2 + 2a + 10}{(a+6)^2}$$

avendo utilizzato le proprietà della varianza, il fatto che gli $x_i(0)$ fossero variabili aleatorie indipendenti fra loro (quindi con covarianza nulla) e varianza unitaria.

Osserviamo che tale funzione è convessa, quindi per calcolare il valore di a che la minimizzi è sufficiente calcolare il valore per il quale si annulla la derivata prima:

$$f'(a) = \frac{10a - 8}{(a+6)^3} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$$

Quindi il valore che minimizza la varianza del limite del consenso è $a = \frac{4}{5}$.