Numeri interi

Numeri naturali in base 2

Cristiana Bolchini

0101001010 11

informazione da rappresentare

informazione
dati e istruzioni

numerica

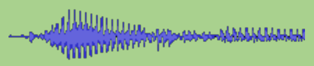
non numerica

24
6 11
naturali

-24 +1 +315
interi relativi

+2.409
-14.25
razionali

casa
n0-0ne!
testi



suoni

immagini

10101001010100101010100100010010 101010100 101010 100100010101010100010100

C.Bolchini

numeri naturali

rappresentazione di un valore

- Numero naturale: oggetto matematico che può essere rappresentato come una sequenza di simboli a partire da un alfabeto
  - base 10: [0,9]
  - base 5: [0,4]
  - base 2: [0,1]
  - base 16: [0,F] = {0,1,..,9,A,B,…,F}

- il numero è l'entità astratta, il numerale è il suo rappresentante
  - 125 in base 10
  - CXXV in cifre romane
  - 1111101 in base 2
  - 7D in base 16
  - 一百二十五 in sistema numerico giapponese/cinese

C.Bolchini

rappresentazioni

confronto

simbolo	valore
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

- additiva
  - simboli: {I V X L C D M}

    I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX
    X, XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC
    C, CC, CCC, CD, D, DC, DCC, DCCC, CM
    M, MM, MMM, …

  - ruolo posizione:
    - cifra crescente (da sx a dx) ➧ sottratta
    - cifra decrescente ➧ sommata

rappresentazioni

confronto

- posizionale
  - simboli: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
  - ruolo posizione:
    - peso rispetto alla base **b** (numero di simboli dell'alfabeto)

➧ notazione posizionale pesata

posizione: 2 1 0

351

peso minore
cifra meno significativa

peso maggiore
cifra più significativa

rappresentazione posizionale pesata

corrispondenza numero - numerale

- base: insieme di simboli $\sigma = \{s_1, ..., s_b\}$
  $b = |\sigma|$ (cardinalità)

- numerale: $c_{n-1}c_{n-2}...c_1c_0$ con $c_i \in \sigma$

- valore (numero): $\sum_0^{n-1} c_i \times b^i$

C.Bolchini

rappresentazioni

confronto

- posizionale
  - peso rispetto alla base **b** (base 10)

posizione: 2 1 0

351

peso minore
cifra meno significativa

peso maggiore
cifra più significativa

valore $= 3 \times b^2 + 5 \times b^1 + 1 \times b^0 = 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

= trecentocinquantuno

rappresentazioni

confronto

- posizionale
  - **b** = {0,1,…,A,B,…,F} (base 16)

posizione: 2 1 0

351

peso minore
cifra meno significativa

peso maggiore
cifra più significativa

valore $= 3 \times b^2 + 5 \times b^1 + 1 \times b^0 = 3 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 1 \times 16^0$

= ottocentoquarantanove

rappresentazioni

estensione …

- posizionale
  - simboli: {〇 一 二 三 四 五 六 七 八 九}
  - peso rispetto alla base **b** (base 10)

trecentocinquantuno: 三五一

C.Bolchini

rappresentazioni

estensione …

- posizionale
  - simboli: {〇 一 二 三 四 五 六 七 八 九}
  - peso rispetto alla base **b** (base 10)

trecentocinquantuno: 三五一

- simboli: {〇 一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千}

trecentocinquantuno: 三百五十一

100 10

rappresentazioni

sistema binario - base 2

- base: σ = {0,1}
  b = 2

- numerale: $c_{n-1}c_{n-2}...c_1c_0$ con $c_i \in \{0,1\}$

- valore (numero): $\sum_0^{n-1} c_i \times 2^i$

C.Bolchini

rappresentazioni

sistema binario - base 2

- numerale: 100101 base 2

10010_2

- valore (numero): $\sum_0^{n-1} c_i \times 2^i$

- valore: $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

  $1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0$

  $32+4+1$

  trentasette

rappresentazioni

sistema decimale - base 10

- numerale: 100101 base 10

10010_{10}

- valore (numero): $\sum_{0}^{n-1} c_i \times 10^i$

- valore: $1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

  $1 \times 10^5 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10^0$

  10000+100+1

  diecimilacentouno

C.Bolchini

rappresentazioni

sistema decimale - base 10

- numerale: 100101 base 16

10010_{16}

- valore (numero): $\sum_{0}^{n-1} c_i \times 16^i$

- valore: $1 \times 16^5 + 0 \times 16^4 + 0 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 1 \times 16^0$

  $1 \times 16^5 + 1 \times 16^2 + 1 \times 16^0$

  1048576+256+1

  1048833

  un milione quarantottomila ottocentotrentatre

C.Bolchini

caratteristica

base 2

- i componenti elettronici che costituiscono il sistema di calcolo sono caratterizzati da una realtà costituita da due stati
  - condensatore carico/scarico
  - linea con tensione alta/bassa
  - …
- mappatura diretta con un sistema costituito da due simboli ➧ sistema binario ➧ alfabeto: [0,1]
- per qualsiasi cosa (segno, modulo …)

sistema binario

- alfabeto = {0,1}, simboli: 0 1
- ipotesi: tutti i numerali hanno ugual lunghezza

- come rappresentiamo i valori?
- volendo rappresentare k valori utilizzando l'alfabeto {0,1}, quanto saranno lunghe le codifiche?

sistema binario

rappresentazione

- obiettivo: rappresentare i valori naturali dell'intervallo [0,9] utilizzando il sistema binario

- si tratta di 10 valori (informazioni) distinte
- l'alfabeto ha due simboli

- lunghezza della codifica: $\lceil log_2(10) \rceil$ = 4
- numero di configurazioni generabili con 4 cifre binarie: $2^4 = 16$

C.Bolchini

sistema binario

rappresentazione

- generiamo tutte le 16 configurazioni
  usiamo la stessa strategia delle configurazioni in base 10, che riflettono la notazione posizionale pesata

- associamo il valore

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111

sistema binario

rappresentazione

- generiamo tutte le 16 configurazioni
  usiamo la stessa strategia delle configurazioni in base 10, che riflettono la notazione posizionale pesata

- associamo il valore

0000	zero
0001	uno
0010	due
0011	tre
0100	quattro
0101	cinque
0110	sei
0111	sette
1000	otto
1001	nove
1010	
1011	
1100	
1101	
1110	
1111	

sistema binario

rappresentazione

- generiamo tutte le 16 configurazioni
  usiamo la stessa strategia delle configurazioni in base 10, che riflettono la notazione posizionale pesata

- associamo il valore

- associamo la rappresentazione in base 10

0000	zero	0
0001	uno	1
0010	due	2
0011	tre	3
0100	quattro	4
0101	cinque	5
0110	sei	6
0111	sette	7
1000	otto	8
1001	nove	9
1010		
1011		
1100		
1101		
1110		
1111		

C.Bolchini

aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

- numeri naturali
  - somma sempre consentita
  - sottrazione: solo se il sottraendo è minore del minuendo
  - prodotto
  - divisione: solo se esiste un valore quoziente tale che moltiplicato per il divisore dà il dividendo

0+	0+	1+	1+	0-	0-	1-	1-
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0		1	0

C.Bolchini

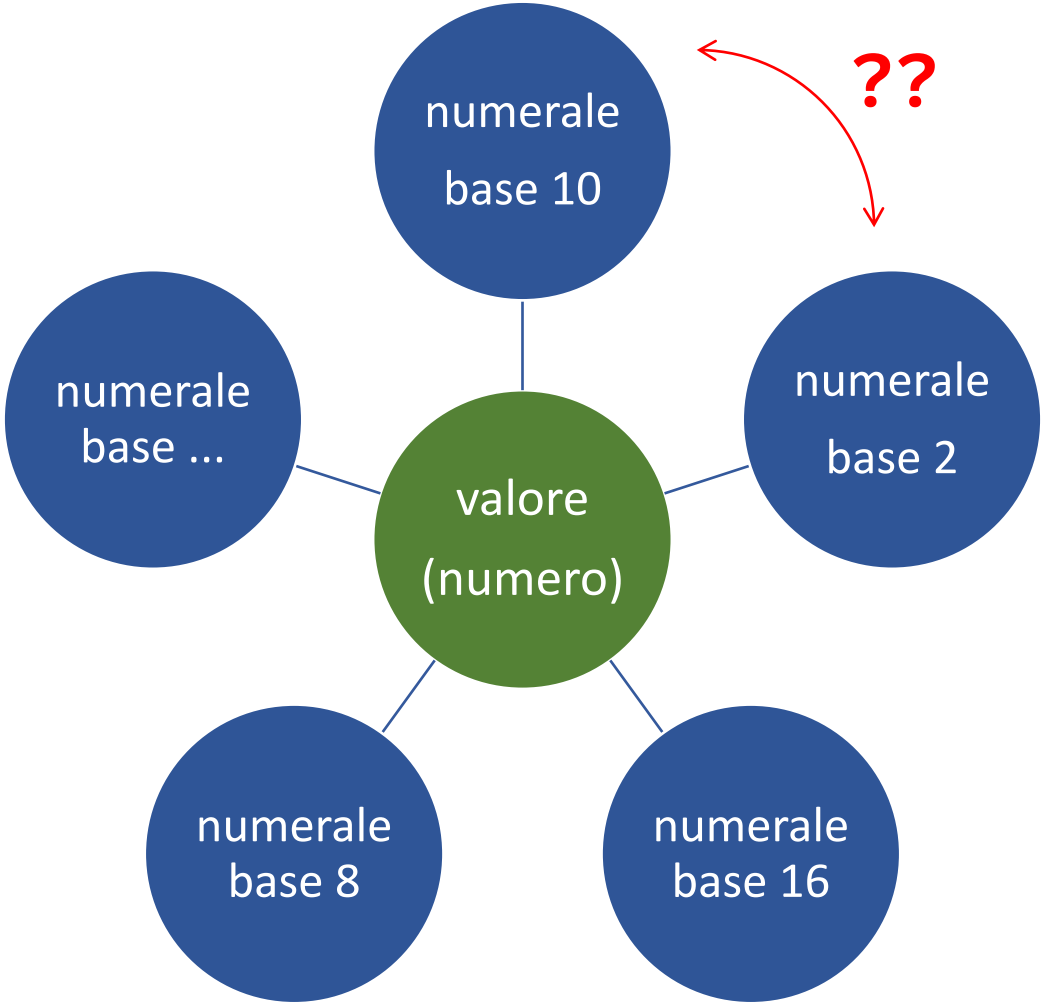
aritmetica

- numeri naturali
  - somma sempre consentita
  - sottrazione: solo se il sottraendo è minore del minuendo
  - prodotto
  - divisione: solo se esiste un valore quoziente tale che moltiplicato per il divisore dà il dividendo

$$
\begin{array}{r} 0\times \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 0\times \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 1\times \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 1\times \\ \underline{1} \\ 1 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 0\div \\ 0 \\ \end{array}\quad
\begin{array}{r} 0\div \\ 1 \\ 0 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 1\div \\ 0 \\ \end{array}\quad
\begin{array}{r} 1\div \\ \underline{1} \\ 1 \end{array}
$$

C.Bolchini

rappresentazioni / conversione



conversione

da base b a base 10

valore (numero): $\sum_{0}^{n-1} c_i \times b^i$

rappresentati nella base
in cui vogliamo
esprimere il valore

c_i base b ≡ c_i base 10
0 ≡ 0
1 ≡ 1
2 ≡ 2
…

C.Bolchini

conversione

metodi

1. metodo della somma dei prodotti per le basi elevate alla potenza in base alla posizione
2. metodo del resto delle divisioni rispetto alla base

- metodi equivalenti (in termini di funzionalità)
- da qualsiasi base a qualsiasi altra base
- in relazione alla base di partenza e di arrivo, un metodo risulta più immediato dell'altro

conversione

da base 2 a base 10

- 101011_2 ?? $\_\_\__{10}$

- base: 2_{10}
- $0_2 = 0_{10}$
  $1_2 = 1_{10}$

- $$\begin{aligned} 101011_2 &= 1_{10} \times {2_{10}}^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32_{10} + 8_{10} + 2_{10} + 1_{10} \\ &= 43_{10} \\ &= \text{quarantatre} \end{aligned}$$

C.Bolchini

conversione

da base 16 a base 10

c_i base 16 ≡ valore base 10

0 ≡ 0
1 ≡ 1
2 ≡ 2
3 ≡ 3
4 ≡ 4
5 ≡ 5
6 ≡ 6
7 ≡ 7
8 ≡ 8
9 ≡ 9
A ≡ 10
B ≡ 11
C ≡ 12
D ≡ 13
E ≡ 14
F ≡ 15

- $10A_{16}$?? $\_\_\__{10}$

- base: 16_{10}
- $0_{16} = 0_{10}$
  $1_{16} = 1_{10}$

- $10A_{16} = 1_{10} \times {16_{10}}^2 + 0_{10} \times {16_{10}}^1 + 10_{10} \times {16_{10}}^0$
  $= 256_{10} + 10_{10}$
  $= 266_{10}$
  = duecentosessantasei

C.Bolchini

conversione

da base 10 a base 2

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

- 28_{10} ?? $\_\_\__2$
- base: $10_{10} = 1010_2$
- $0_{10} = 0_2$
  $1_{10} = 1_2$
  …

2 rappresentato in base 2 — 10 rappresentato in base 2 — 8 rappresentato in base 2

- $28_{10} = 0010_2 \times 1010_2{}^1 + 1000_2 \times 1010_2{}^0$
  $= 10100_2 + 1000_2$
  $= 11100_2$
  $=$ ventotto

C.Bolchini

conversione

da base 10 a base 2

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

- 28_{10} ?? $\_\_\__2$
- base: $10_{10} = 1010_2$
- $0_{10} = 0_2$
  $1_{10} = 1_2$
  ...
- $$28_{10} = \underbrace{0010_2}_{\text{2 rappresentato in base 2}} \times \underbrace{1010_2}_{\text{10 rappresentato in base 2}}{}^1 + \underbrace{1000_2}_{\text{8 rappresentato in base 2}} \times 1010_2{}^0$$
  $= 10100_2 + 1000_2$
  $= 11100_2$
  = ventotto

complicato (ma non impossibile)
non siamo abituati

C.Bolchini

conversione

da base 10 a base 2

- 28_{10} ?? $\_\_\__2$

resti

base 2

28	0
14	0
7	1
3	1
1	1
0	

fine

tutto nella base di partenza

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

- dividendo rispetto a 2
  i resti possibili sono 0 o 1

conversione

da base 10 a base 2

- 28_{10} ?? $\_\_\_{}_2$

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

resti

base → 2

28	0	$(0_{10} \equiv 0_2)$
14	0	
7	1	$(1_{10} \equiv 1_2)$
3	1	
1	1	
0	← fine	

- i resti vanno **rappresentati nella base di destinazione** (qua coincide la rappresentazione)

conversione

da base 10 a base 2

- 29_{10} ?? $\_\_\__2$

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & \text{resti} \\
\text{base} \rightarrow \quad 2 & \downarrow \\
29 & 1 \\
14 & 0 \\
7 & 1 \\
3 & 1 \\
1 & 1 \\
0 & \leftarrow \text{fine}
\end{array}
$$

$(0_{10} \equiv 0_2)$

$(1_{10} \equiv 1_2)$

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

- il primo resto calcolato è quello meno importante

conversione

da base 10 a base 2

- 28_{10} ?? $\_\_\_{}_2$

base → 2

	resti
28	0
14	0
7	1
3	1
1	1
0	← fine

$(0_{10} \equiv 0_2)$

$(1_{10} \equiv 1_2)$

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

- i resti **rapprentati nella base di destinazione** e **presi in ordine inverso** costituiscono la codifica cercata

11100_2

C.Bolchini

rappresentazione

sistema binario

- due valori adiacenti (28 e 29) differiscono per la sola cifra meno significativa

- numeri dispari: cifra meno significativa = 1
- numeri pari: cifra meno significativa = 0

- con il metodo delle divisioni ripetute, la cifra più significativa è sempre diversa da 0 (e nel sistema binario è sempre 1).

conversione

da base 2 a base 10

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

- 101011_2 ?? $\_\_\__{10}$

resti

base → 1010

$$\begin{array}{r|l} 101011 & 11 \quad (11_2 \equiv 3_{10}) \\ 100 & 100 \; (100_2 \equiv 4_{10}) \\ 0 & \end{array}$$

← fine

tutto nella base di partenza

$\overline{}$
101011:1010 = 100
01
011

- i resti **rappresentati nella base di destinazione** e **presi in ordine inverso** costituiscono la codifica cercata

43_{10}

C.Bolchini

conversione

da base 2 a base 10

- 101011_2 ?? $\_\_\__{10}$

resti

base → 1010

101011	11	$(11_2 \equiv 3_2)$
100	100	$(100_2 \equiv 4_2)$
0	← fine	

tutto nella base di partenza

$\overline{10}1011:1010 = 100$
01
011

base 10	≡	base 2
0	≡	0000
1	≡	0001
2	≡	0010
3	≡	0011
4	≡	0100
5	≡	0101
6	≡	0110
7	≡	0111
8	≡	1000
9	≡	1001
10	≡	1010

quasi impossibile
non siamo abituati

conversione

- tipicamente si utilizza
  - il metodo delle divisioni ripetute per passare da base 10 a qualsiasi altra base
  - il metodo della somma dei prodotti per gli altri casi
- caso speciale: la conversione da base 2 a base 16 e viceversa
- perché?

conversione

da base 16 a base 2

- $10A_{16}$?? ___$_2$

- i 16 simboli della base 16 hanno una corrispondenza biunivoca con le 16 configurazioni che si possono ottenere utilizzando il sistema base 2 e 4 cifre

C.Bolchini

conversione

da base 16 a base 2

- $10A_{16}$?? $\_\_\_{}_2$
- i 16 simboli della base 16 hanno una corrispondenza biunivoca con le 16 configurazioni che si possono ottenere utilizzando il sistema base 2 e 4 cifre

b16	≡	b10	≡	b2
0	≡	0	≡	0000
1	≡	1	≡	0001
2	≡	2	≡	0010
3	≡	3	≡	0011
4	≡	4	≡	0100
5	≡	5	≡	0101
6	≡	6	≡	0110
7	≡	7	≡	0111
8	≡	8	≡	1000
9	≡	9	≡	1001
A	≡	10	≡	1010
B	≡	11	≡	1011
C	≡	12	≡	1100
D	≡	13	≡	1101
E	≡	14	≡	1110
F	≡	15	≡	1111

conversione

da base 16 a base 2

- $10A_{16}$?? $\_\_\__2$
- i 16 simboli della base 16 hanno una corrispondenza biunivoca con le 16 configurazioni che si possono ottenere utilizzando il sistema base 2 e 4 cifre

> è immediato il passaggio da base 16 a base 2 e viceversa

b16	≡	b10	≡	b2
0	≡	0	≡	0000
1	≡	1	≡	0001
2	≡	2	≡	0010
3	≡	3	≡	0011
4	≡	4	≡	0100
5	≡	5	≡	0101
6	≡	6	≡	0110
7	≡	7	≡	0111
8	≡	8	≡	1000
9	≡	9	≡	1001
A	≡	10	≡	1010
B	≡	11	≡	1011
C	≡	12	≡	1100
D	≡	13	≡	1101
E	≡	14	≡	1110
F	≡	15	≡	1111

conversione

da base 16 a base 2

- $10A_{16}$?? $\_\_\__2$

- si identifica per ogni cifra della base 16 la corrispondente sequenza di 4 cifre in base 2

$$10A_{16}$$

$$000100001010_2$$

- se è richiesto poi di rappresentare il valore utilizzando il numero strettamente necessario di cifre, si ottiene

$$100001010_2$$

b16	≡	b10	≡	b2
0	≡	0	≡	0000
1	≡	1	≡	0001
2	≡	2	≡	0010
3	≡	3	≡	0011
4	≡	4	≡	0100
5	≡	5	≡	0101
6	≡	6	≡	0110
7	≡	7	≡	0111
8	≡	8	≡	1000
9	≡	9	≡	1001
A	≡	10	≡	1010
B	≡	11	≡	1011
C	≡	12	≡	1100
D	≡	13	≡	1101
E	≡	14	≡	1110
F	≡	15	≡	1111

conversione

da base 2 a base 16

- 101111010110_2 ?? $\_\_\__{16}$
- per ogni sequenza di 4 cifre della base 2 si identifica la corrispondente cifra in base 16

$$101111010110_2$$

$$BD6_{16}$$

- cosa fare nel caso in cui il numero di cifre del valore non sia un multiplo di 4?

b16	≡	b10	≡	b2
0	≡	0	≡	0000
1	≡	1	≡	0001
2	≡	2	≡	0010
3	≡	3	≡	0011
4	≡	4	≡	0100
5	≡	5	≡	0101
6	≡	6	≡	0110
7	≡	7	≡	0111
8	≡	8	≡	1000
9	≡	9	≡	1001
A	≡	10	≡	1010
B	≡	11	≡	1011
C	≡	12	≡	1100
D	≡	13	≡	1101
E	≡	14	≡	1110
F	≡	15	≡	1111

conversione

da base 2 a base 16

- 1111010110_2 ?? $\_\_\__{16}$
- il valore non cambia aggiungendo 0 in posizione più significativa
- $1111010110_2 = 001111010110_2$?? $\_\_\__{16}$

001111010110_2

$3D6_{16}$

b16	≡	b10	≡	b2
0	≡	0	≡	0000
1	≡	1	≡	0001
2	≡	2	≡	0010
3	≡	3	≡	0011
4	≡	4	≡	0100
5	≡	5	≡	0101
6	≡	6	≡	0110
7	≡	7	≡	0111
8	≡	8	≡	1000
9	≡	9	≡	1001
A	≡	10	≡	1010
B	≡	11	≡	1011
C	≡	12	≡	1100
D	≡	13	≡	1101
E	≡	14	≡	1110
F	≡	15	≡	1111

sistema esadecimale

base 16

- il sistema esadecimale viene adottato nel contesto dei sistemi di calcolo per l'estrema facilità di conversione dal/verso il sistema binario
- invece di far riferimento a sequenze di cifre binarie è efficace convertire la sequenza nel sistema esadecimale (più compatta)

- $01010101001010101010101010110111_2 = 552AAAB7_{16}$
- $00111101100100000000000000000000_2 = 3D900000_H$
- $552AAAB7_{16}$ oppure $552AAAB7_H$ oppure 0x552AAAB7

C.Bolchini