

# Notazione in modulo e segno

Numeri interi in base 2,  
notazione modulo e segno

Cristiana Bolchini

010100101011  
segno modulo

# informazione da rappresentare

informazione  
dati e istruzioni

numerica

non numerica

$24$   $11$   
 $6$   
naturali

$-24$   $+1$   $+315$   
interi  
relativi

$+2.409$   
 $-14.25$   
razionali

casa  
n0-0ne!  
testi

  
suoni

  
immagini

# caratteristica

notazione abitualmente adottata nel sistema decimale

- notazione abitualmente adottata nel sistema decimale:
  - un simbolo per discriminare tra valori positivi e negativi
  - la rappresentazione del valore assoluto
- base 10:

segno

modulo

positivo cinque

# definizione della codifica

- rappresentazione del valore in modulo nella base di interesse
- pre-posizione della cifra del segno

# definizione della codifica

base 10

- segno (simbolo)
  - positivo: +
  - negativo: -
- modulo
  - notazione posizionale pesata con alfabeto:  $[0, 1, \dots, 9]$

positivo cinque ► +5

alfabeto segno:  $[+, -]$   
alfabeto modulo:  $[0, \dots, 9]$

# definizione della codifica

base 10

- segno (simbolo)
  - positivo: +
  - negativo: -
- modulo
  - notazione posizionale pesata con alfabeto:  $[0, 1, \dots, 9]$

➡ doppia codifica per il valore 0: +0 e -0

# definizione della codifica

base 2

- segno (cifra)
  - positivo: 0
  - negativo: 1
- modulo
  - notazione posizionale pesata con alfabeto:  $[0,1]$

➡ doppia codifica per il valore 0: +0 e -0

# definizione della codifica

base 2

- segno
  - positivo: 0
  - negativo: 1
- modulo
  - notazione posizionale pesata con alfabeto:  $[0,1]$

positivo cinque



# definizione della codifica

base 2

- segno
  - positivo: 0
  - negativo: 1
- modulo
  - notazione posizionale pesata con alfabeto:  $[0,1]$

positivo cinque ► 0101

# definizione della codifica

- 4 bit  $\rightarrow 2^4 = 16$  configurazioni
- $[-7, +7]$

0000

0001

0010

0011

0100

0101

0110

0111

1000

1001

1010

1011

1100

1101

1110

1111

# definizione della codifica

valori negativi

0000  $\longleftrightarrow$  +0

1000  $\longleftrightarrow$  -0

0001  $\longleftrightarrow$  +1

1001  $\longleftrightarrow$  -1

0010  $\longleftrightarrow$  +2

1010  $\longleftrightarrow$  -2

0011  $\longleftrightarrow$  +3

1011  $\longleftrightarrow$  -3

0100  $\longleftrightarrow$  +4

1100  $\longleftrightarrow$  -4

0101  $\longleftrightarrow$  +5

1101  $\longleftrightarrow$  -5

0110  $\longleftrightarrow$  +6

1110  $\longleftrightarrow$  -6

0111  $\longleftrightarrow$  +7

1111  $\longleftrightarrow$  -7

# dimensione / capacità

generica base  $b$

dato un valore intero relativo  $x$ , la sua  
rappresentazione in base  $b$

si intende rappresentare i valori nell'intervallo  $[-|x|, +|x|]$

- un *elemento/cifra* per positivo/negativo
- numero di cifre per rappresentare il  
modulo:  $\lfloor \log_b(|x| + 1) \rfloor$   
valore 0

dimensione della codifica del valore intero relativo

$$\text{positivo/negativo} \textcolor{red}{1} + \underbrace{\lfloor \log_b(|x| + 1) \rfloor}_{\text{valore 0}}$$

# dimensione / capacità

base 10 notazione modulo e segno



la rappresentazione di positivo 5:

si intende rappresentare i valori nell'intervallo  $[-5, +5]$

- un *elemento/cifra* per positivo/negativo
- numero di cifre per rappresentare il modulo:

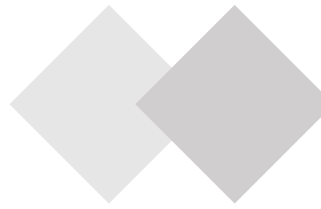
$$\lceil \log_{10}(|+5| + 1) \rceil = \lceil \log_{10} 6 \rceil = \lceil 0.77 \dots \rceil = 1$$

dimensione della codifica del valore intero relativo  
2 elementi: +5

positivo/negativo: simbolo invece di una cifra

# dimensione / capacità

base 2 notazione modulo e segno



la rappresentazione di positivo 5:

si intende rappresentare i valori nell'intervallo  $[-5,+5]$

- una cifra per positivo/negativo
- numero di cifre per rappresentare il modulo:

$$\lceil \log_2(|+5| + 1) \rceil = \lceil \log_2 6 \rceil = \lceil 2.58 \dots \rceil = 3$$

dimensione della codifica del valore intero relativo

# dimensione / capacità

generica base  $b$

data una rappresentazione in base  $b$  con  $k$  cifre  
quale intervallo di valori interi relativi consente  
di rappresentare?

si intende rappresentare i valori nell'intervallo  $[-|x|, +|x|]$

- una *cifra* per positivo/negativo
- valori in modulo rappresentabili:  $b^{(k-1)} - 1$

# dimensione / capacità

base 2 notazione modulo e segno

data codifica in base 2 su 6 cifre quale intervallo di valori interi relativi consente di rappresentare?  
si intende rappresentare i valori nell'intervallo  $[-|x|, +|x|]$

- una *cifra* per positivo/negativo
- valori in modulo rappresentabili:  $2^{(6-1)} - 1$



# dimensione / capacità

base 2 notazione modulo e segno

data codifica in base 2 su 6 cifre quale intervallo di valori interi relativi consente di rappresentare?  
si intende rappresentare i valori nell'intervallo  $[-|x|, +|x|]$

- una *cifra* per positivo/negativo
- valori in modulo rappresentabili:  $2^{(6-1)} - 1$

$[-31, +31]$

# **analisi**

rappresentazione

- conversione da base 10 modulo e segno immediata
- doppia rappresentazione del valore nullo

# dimensione / capacità

111111	-31	100001	-1	001010	+10
111110	-30	100000	-0	001011	+11
111101	-29	000000	+0	001100	+12
111100	-28	000001	+1	...	
...		...		000100	+27
100101	-5	000110	+6	011100	+28
100100	-4	000111	+7	011101	+29
100011	-3	001000	+8	011110	+30
100010	-2	001001	+9	011111	+31

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

- numeri naturali
  - somma sempre consentita
  - sottrazione: solo se il sottraendo è minore del minuendo
- numeri relativi
  - dopo una preliminare analisi del segno si procede ad una aritmetica tra i valori in modulo, numeri naturali

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## somma

- operandi concordi  
(entrambi positivi o entrambi negativi)
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno degli operandi

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi concordi  
(entrambi positivi o entrambi negativi)
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno degli operandi

+5 + +7

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi concordi  
(entrambi positivi o entrambi negativi)
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno degli operandi

$$\begin{array}{rcl} +5 & + & +7 \\ | +5 | & + & | +7 | \\ 5 & + & 7 \\ 12 \\ \\ +12 \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi concordi  
(entrambi positivi o entrambi negativi)
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno degli operandi

+5 + +7

|+5| + |+7|

-3 + -1

5 + 7

12

+12



# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi concordi  
(entrambi positivi o entrambi negativi)
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno degli operandi

$$\begin{array}{rcl} +5 & + & +7 \\ | +5 | & + & | +7 | \\ 5 & + & 7 \\ 12 \end{array}$$

$$+12$$

$$\begin{array}{rcl} -3 & + & -1 \\ | -3 | & + & | -1 | \\ 3 & + & 1 \\ 4 \end{array}$$

$$-4$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi discordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: segno dell'operando con modulo maggiore

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi discordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: segno dell'operando con modulo maggiore

-5 + +7

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi discordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: segno dell'operando con modulo maggiore

$$\begin{array}{rcl} -5 & + & +7 \\ & & |-5| < |+7| \\ & & 7 - 5 \\ & & 2 \\ & & +2 \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi discordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: segno dell'operando con modulo maggiore

-5 + +7

$|-5| < |+7|$

+1 + -1

7 - 5

2

+2

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

somma

- operandi discordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: segno dell'operando con modulo maggiore

$$-5 + +7$$

$$|-5| < |+7|$$

$$7 - 5$$

$$2$$

$$+2$$

$$+1 + -1$$

$$|-1| = |+1|$$

$$1 - 1$$

$$0$$

$$+0$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$+9 - +5$$



# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$\begin{array}{rcl} +9 & - & +5 \\ | +9 | & > & | +5 | \\ 9 & - & 5 \\ 4 & & \\ & & +4 \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$+9 - +5$$

$$|+9| > |+5|$$

$$9 - 5$$

$$4$$

$$+4$$

$$-5 - -2$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$\begin{array}{rcl} +9 & - & +5 \\ | +9 | & > & | +5 | \\ 9 & - & 5 \\ 4 & & \\ & & +4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -5 & - & -2 \\ | -5 | & > & | -2 | \\ 5 & - & 2 \\ 3 & & \\ & & -3 \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$\begin{array}{rcl} +3 - +5 & & |+5| > |+3| \\ & & 5 - 3 \\ & & 2 \\ & & -2 \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$+3 - +5$$

$$|+5| > |+3|$$

$$-1 - -2$$

$$5 - 3$$

$$2$$

$$-2$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi concordi
  - modulo: differenza dei moduli (maggiore - minore)
  - segno: se minuendo ha modulo maggiore, segno minuendo, altrimenti segno opposto

$$\begin{array}{rcl} +3 - +5 & | +5 | > | +3 | & \\ & 5 - 3 & \\ & 2 & \\ & -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -1 - -2 & | -2 | > | -1 | & \\ & 2 - 1 & \\ & 1 & \\ & +1 & \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi discordi
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno del minumendo

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi discordi
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno del minumendo

-5 - +7



# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi discordi
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno del minumendo

$$\begin{array}{rcl} -5 & - & +7 \\ & & |-5| + |+7| \\ & & 5 + 7 \\ & & 12 \\ & & -12 \end{array}$$

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

## sottrazione

- operandi discordi
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno del minumendo

-5 - +7

$|-5| + |+7|$

+1 - -1

5 + 7

12

-12

# aritmetica

somma e sottrazione di numeri relativi

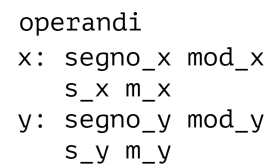
## sottrazione

- operandi discordi
  - modulo: somma dei moduli
  - segno: segno del minumendo

$$\begin{array}{r} -5 - +7 \\ | -5 | + | +7 | \\ 5 + 7 \\ 12 \\ -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1 - -1 \\ | -1 | + | +1 | \\ 1 + 1 \\ 2 \\ +2 \end{array}$$

\_\_\_\_\_



# analisi

requisiti / operatori

- analisi del segno
- confronto dei moduli per individuare quello maggiore
- somma o sottrazione

# aritmetica

overflow

- ipotesi:
  - si lavora con operandi di ugual dimensione
  - si lavora sui moduli
  - la dimensione del risultato di somma/sottrazione è uguale alla dimensione degli operandi
- overflow:
  - il risultato dell'operazione è fuori dall'intervallo dei valori rappresentabili
  - operandi rappresentati su  $k$  bit
  - risultato richiederebbe  $k+1$  bit

# aritmetica

overflow

- prima di procedere con l'operazione aritmetica si effettua eventualmente un'operazione di "estensione in segno" dell'operando di dimensione minore
- nel caso in cui il risultato dell'operazione non può essere rappresentato sulla dimensione degli operandi ► overflow

# **overflow**



notazione modulo e segno

- operandi di ugual dimensione
- si lavora sui moduli
- somma e sottrazione (si sottrae il minore dal maggiore)
- come si rileva il fatto che il risultato non è correttamente rappresentabile?



# overflow

notazione modulo e segno

- operandi di ugual dimensione

$$|x| = 1010101010110$$

$$|y| = 1001010010101$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}010101010110 \\ \overset{1}{1}\overset{1}{0}01010010101 \\ \hline 001111101011 \end{array}^+$$

- operandi di dimensione diversa  
(esteso in segno)

$$|x| = 1110101010110$$

$$|y| = 0000011000010$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}\overset{1}{1}\overset{1}{0}101010110 \\ \overset{1}{1}\overset{1}{0}00011000010 \\ \hline 1111000011000 \end{array}^+$$

# overflow

notazione modulo e segno

- operandi di ugual dimensione

$$|x| = 1010101010110$$

$$|y| = 1000000000101$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}010101010110 \\ \quad \quad \quad \overset{1}{1}00000000101 \\ \hline 0010101011011 \end{array}^+$$

- operandi di dimensione diversa  
(esteso in segno)

$$|x| = 1110101010110$$

$$|y| = 0011111000010$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}\overset{1}{1}\overset{1}{1}\overset{1}{1}\overset{1}{1}\overset{1}{1}\overset{1}{1} \quad \quad \overset{1}{1}\overset{1}{1} \\ 1110101010110 \\ \quad \quad \quad 0011111000010 \\ \hline 0010100011000 \end{array}^+$$

# overflow

notazione modulo e segno

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}010101010110 \\ \overset{1}{1}001010010101^+ \\ \hline 0011111101011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}010101010110 \\ \overset{1}{1}00000000101^+ \\ \hline 0010101011011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}1101010110 \\ \overset{1}{1}000011000010^+ \\ \hline 1111000011000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}11111111010110 \\ \overset{1}{1}0011111000010^+ \\ \hline 0010100011000 \end{array}$$

# overflow

notazione modulo e segno

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}010101010110 \\ \overset{1}{1}001010010101^+ \\ \hline \mathbf{001111101011} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}010101010110 \\ \overset{1}{1}00000000101^+ \\ \hline \mathbf{0010101011011} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}110101010110 \\ \overset{1}{1}0000011000010^+ \\ \hline 1111000011000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}1111111010110 \\ \overset{1}{1}0011111000010^+ \\ \hline \mathbf{0010100011000} \end{array}$$

# overflow

notazione modulo e segno

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \qquad \qquad \qquad 1 \quad 1 \\ 1010101010110 \\ 1001010010101^+ \\ \hline \mathbf{001111101011} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \qquad \qquad \qquad 1 \ 1 \ 1 \qquad \qquad 1 \ 1 \\ 1110101010110 \\ 0000011000010^+ \\ \hline 1111000011000 \end{array}$$

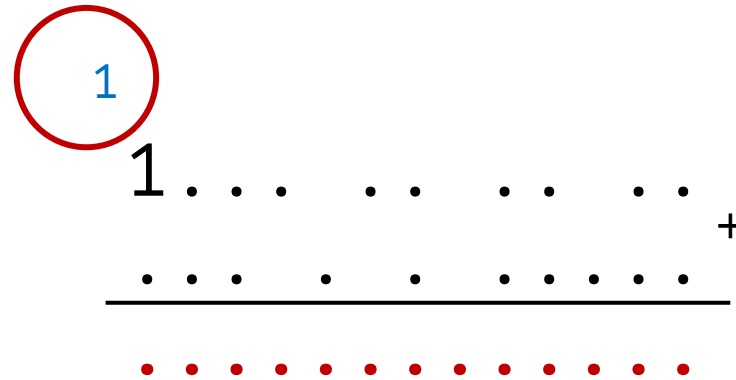
$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \qquad \qquad \qquad 1 \\ 1010101010110 \\ 1000000000101^+ \\ \hline \mathbf{0010101011011} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \qquad \qquad 1 \ 1 \\ 1110101010110 \\ 0011111000010^+ \\ \hline \mathbf{0010100011000} \end{array}$$

# overflow

notazione modulo e segno

- si rileva una situazione di overflow quando si ha un riporto nella posizione oltre la dimensione degli operandi



\_\_\_\_\_

