Statistica A – Esercitazione 1

Esercizio 1. Si dimostri che se $\left(F_{X_2|X_1}(\cdot|x_1)\right)_{x_1}$ è una famiglia di distribuzioni condizionate, allora la famiglia di distribuzioni condizionate $\left(p_{X_2|X_1}(\cdot|x_1)\right)_{x_1}$ soddisfa

$$p_{X_2|X_1}(x_2|x_1)p_{X_1}(x_1) = p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

Esercizio 2. Sia X_1, X_2 un vettore aleatorio con funzione di ripartizione countinua F_{X_1,X_2}.

1. Dimostrare che le distribuzioni marginali sono continue.
2. Dimostrare che esiste una famiglia di funzioni di densità $\left(f_{x_2|x_1}\right)_{x_1\in\mathbb{R}}$ tale per cui

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)f_{X_1}(x_1)$$

e $F_{X_2|X_1}(x|x_1) := \int_{-\infty}^{x} f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\,\mathrm{d}x_1$ è una famiglia di distribuzione condizionate.

Esercizio 3. Siano $U := (U_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale e valore atteso $1/\lambda$, $\lambda > 0$ e $N \sim Poisson(\theta)$, $\theta > 0$ una variabile indipendente da U, si calcoli la funzione di ripartizione di $S := \sum_{i=1}^{N} U_i$, si utilizza la convenzione che $\sum_{i=1}^{0} = 0$. La funzione di ripartizione è continua o discreta?

Esercizio 4. Sia (X,Θ) un vettore aleatorio tale che la distribuzione marginale di Θ, che indichiamo con π_Θ, sia continua e la distribuzione condizionale di X dato $\Theta = \theta$ sia discreta con distribuzione p_θ.

1. Calcolare la distribuzione congiunta del vettore aleatorio (X,Θ).
2. Dimostrare che la distribuzione di Θ condizionata a X è ancora una distribuzione continua e calcolarne la funzione di densità.
3. Calcolare la distribuzione di X.

Cosa succede se la distribuzione condizionale di $X|\Theta = \theta$ è continua e quella di Θ è discreta?

Esercizio 5. Siano (X,Y) un vettore con componenti indipendenti, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e si definisca la variabile aleatoria $U := g(X,Y)$. Dimostrare che

1. se $g(x,y) = x + y$, allora $\mathbb{P}(X + Y \leq u|Y = y) = \mathbb{P}(X + y \leq u)$ e $f_{U|V}(u|v) = f_X(u - v)$;
2. se g è una generica funzione misurabile

$$\mathbb{P}(U \leq u|Y = y) = \mathbb{P}(g(X,y) \leq u)\,.$$

Esercizio 6. Con la notazione dell'Esercizio 5, supponendo però che $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, dimostrare che

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{U} \leq \boldsymbol{u}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \mathbb{P}(g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{u})$$

per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k$.

Esercizio 7. Siano $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ un vettore aletorio $(n+m)$–dimensionale continuo con funzione di densità $f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}$ e definiamo la densità $\boldsymbol{Y}$ condizionata a $\boldsymbol{X}$ come

$$f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) := \frac{f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}$$

definita per ogni $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Dimostrare che

$$F_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{x}) := \int_{(-\infty,\boldsymbol{u}]} f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

in cui $(-\infty,\boldsymbol{u}] = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : y_i \leq u_i,\, i = 1,\ldots,m\}$, è la funzione di ripartizione condizionata di $\boldsymbol{Y}$ dato $\boldsymbol{X}$.

Esercizio 8. Si lanciano due dadi e si indica l'esito del lancio con X_1 e X_2. Si dimostri che X_1 e X_2 sono indipendenti, ma che X_1 e X_2 non sono indipendenti condizionatamente a $Y = 3$, in cui $Y = X_1 + X_2$.

Esercizio 9. Siano $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ due vettori aleatori condizionatamente indipendenti dato Θ. Dimostrare che

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \in A | \boldsymbol{X} \in B, \Theta \in T) = \mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \in A | \Theta \in T)$$

per tutti gli insiemi A, B e T misurabili.

Esercizio 10. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $f(x) = cg(x)$ in cui $c > 0$ è una costante. Dimostrare che la conoscenza di g determina univocamente quella di f. In questo caso scriveremo $f(x) \propto g(x)$ e diremo g il *nucleo della distribuzione*.

Esercizio 11. Sia X una variabile aleatoria reale tale che $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.

1. Calcolare le distribuzioni di $U := X/|X|$ e $R = |X|$
2. Dimostrare che se X ha distribuzione simmetrica, allora U e R sono indipendenti.
3. Dimostrare che X ha distribuzione simmetrica se e solo se U e R sono indipendenti e $\mathbb{P}(U = -1) = \mathbb{P}(U = 1) = 1/2$.

Esercizio 12. Data una funzione di densità f simmetrica rispetto all'origine, si definisca la funzione

$$g_{a,b}(x) := af(x)\mathbb{I}_{(-\infty,0]}(x) + bf(x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

in cui $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i valori di a e b per i quali le funzioni $g_{a,b}$ sono densità e quelli per cui non sono simmetriche rispetto allo 0.
2. Sia $X \sim g_{a,b}$ calcolare la distribuzione di U e R definite nell'Esercizio 11 e verificare per quali valori di a e b sono indipendenti.

Esercizio 13. Siano X una v. a. con distribuzione $Gamma\,(\alpha, \beta)$, diciamo $V := 1/X$ variabile $InvGamma\,(\alpha, \beta)$.

1. Si dimostri che V ha distribuzione continua e che ha la seguente densità
$$f_V(v) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, v^{-(\alpha+1)} \exp\{-\beta/v\}\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v).$$
2. Si stabilisca per quali $k \in \mathbb{N}$ esiste finito $\mathbb{E}\left[V^k\right]$ e si calcoli.
3. Si dimostri che
$$\mathbb{E}\,[V] = \frac{\beta}{\alpha - 1} \text{ e } \mathrm{Var}\,(V) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

Esercizio 14 (Teorema di Poisson)**.** Data una successione di variabili aleatorie X_n con distribuzione $Bin(n, p_n)$, in cui $p_n \in (0, 1)$ è una successione tale che

$$p_n \to 0 \text{ e } np_n \to \lambda.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k_!}.$$

Esercizio 15. Date $Z_\Theta, Z_X \overset{iid}{\sim} Gauss\,(0, 1)$ si definisca il vetttore aleatorio

$$\begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta + \sigma Z_X \\ \mu_0 + \tau_0 Z_\Theta \end{bmatrix}.$$

1. Si calcolino le distribuzioni marginali del vettore.
2. Si calcoli la distribuzione di X condizionata a Θ.

Esercizio 16. Nel modello gaussiano con varianza nota e prior gaussiana

1. si calcoli la distribuzione predittiva a priori per una osservazione;
2. si calcoli la distribuzione predittiva a posteriori per una osservazione.