Logica per l'informatica - Lezione 1.25. Formule logiche (cenni)

Andrea Malvezzi

20 Settembre, 2024

1 Terminologia utile

Una proposizione equivale ad una frase per cui ha senso chiedersi se valga o meno:

- "2 e un numero pari" → è una proposizione, 2 potrebbe essere o non essere pari;
- "Mangia la mela!" → non è una proposizione, la frase ha un solo significato e non vi è nulla da intuire;
- "Luca mangia la mela" → è una proposizione, Luca potrebbe mangiare la mela come potrebbe non farlo.

Nei linguaggi logici formali (un linguaggio con un determinato set di regole, caratteri etc...) le proposizioni sono dette "**formule logiche**".
Una proposizione si può provare a dimostrare mediante una **prova**, prendendo il nome di "**enunciato**".
Quando questo processo viene portato a termine con successo, si può allora parlare di **teorema**.
MENTRE si svolge una prova, si può cercare di dimostrare una proposizione o si può assumere che questa valga (in seguito a un'ipotesi o previa dimostrazione).
Nel primo caso, questa prenderà il nome di **conclusione**, mentre nel secondo di **premessa**.
Esistono poi infine i **Lemmi** e i **Corollari**: i primi sono teoremi non importanti se presi singolarmente ma utili a dimostarne altri, mentre i secondi sono derivati dalla dimostrazione di un altro teorema.

2 Il ragionamento ipotetico

Quando ipotizziamo p non stiamo affermando che p valga, ma lo supponiamo, ovvero ci limitiamo a considerare le situazioni dove p vale.

Esempio di ragionamento ipotetico

Ipotizziamo che esistano unicorni rosa volanti e che tutti gli unicorni rosa siano femmine.
In questo caso si può concludere che esistano femmine volanti, ma questo vale solamente nei mondi dove esistono unicorni rosa etc...

3 Sintassi della logica del prim'ordine

- Falso/assurdo $\rightarrow \perp$ (bottom), che non vale mai;
- Vero $\rightarrow \top$ (top), che vale sempre;
- P **e** Q, **congiunzione** di P e $Q \rightarrow P \land Q$, che vale se valgono sia P che Q;
- P **oppure** Q, **disgiunzione** di P e $Q \rightarrow P \lor Q$, che vale se vale almeno una tra P e Q;
- **se** P **allora** Q, **implicazione logica** tra P e $Q \rightarrow P \Rightarrow Q$, vale se Q vale sotto l'ipotesi di P;
- **non** $P \rightarrow \neg P$, vale se P falso;
- P **sse** (in inglese **iff**) Q, **coimplicazione** di P e di $Q \rightarrow P \Leftrightarrow Q$, che vale se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$;
- **Per ogni** x P $\rightarrow \forall$ x.P, che vale se P vale per ogni possibile valore di x;
- **Esiste** x P $\rightarrow \exists$ x.P, che vale se P vale per almeno un possibile valore di x;

4 Ordine delle operazioni logiche

Per ridurre l'uso delle parentesi:

- $\neg, >, <, \lor, \land, \Rightarrow, =, \Leftrightarrow$ (hanno la precedenza);
- $\land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (sono associativi a destra, si risolve da destra a sinistra);

5 Connettivi

Esistono connettivi di diverse **arietà**: esistono connettivi 0-ari, unari, binari e quanificatori, in base al numero di dati presi in input.
Ad esempio, il simbolo $\neg$ è un operatore unario, in quanto riceve in input solamente un valore da negare, mentre l'operatore $\wedge$ è binario, in quanto riceve in input due dati.

Esempio di utilizzo corretto di connettivi

$A \wedge \neg B \vee C \Rightarrow D \Rightarrow B \vee C \vee E$
Questa proposizione logica si legge, tenendo a mente l'ordine degli operatori logici, nella maniera seguente:
$((A \wedge \neg B) \wedge C) \Rightarrow (D \Rightarrow (B \vee (C \vee E)))$.