Logica per l'informatica - Deduzione naturale

Andrea Malvezzi

Ottobre 2024

Contents

1 Cos'è la logica proposizionale

La logica proposizionale è una logica meno espressiva di quella del prim'ordine e si usa per studiare solamente **proposizioni** (quindi niente numeri etc $dots$). In questo tipo di logica si passa da un ragionamento ad una formalizzazione in linguaggio logico e quindi risulta fondamentale comprendere e tradurre bene la frase.

2 Sintassi della logica proposizionale

Qui si usano meno simboli rispetto alla logica del prim'ordine e si procede mediante alberi di deduzione naturali.
Ecco la simbologia completa:

- Falso $\rightarrow \perp$ (bottom);
- Vero $\rightarrow \top$ (top);
- Si possono usare variabili indicate con lettere dell'alfabeto $A, B, C, \ldots$;
- A negato $\rightarrow \not A$;
- A e $B \rightarrow A \wedge B$;
- A oppure $B \rightarrow A \vee B$;
- se A allora $B \rightarrow A \Rightarrow B$, se si ha B allora SICURAMENTE si ha A, ma se si ha A non è detto che si abbia anche B.

3 Gli alberi di deduzione naturale

I logicia scrivono gli alberi dal basso verso l'alto ma li possono leggere sia dall'alto verso il basso (come gli informatici) e sia dal basso verso l'alto.

3.1 Esempio pratico

Avendo $B, D \wedge A \vdash A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$, allora:

- la parte antecedente $\vdash$ si dice **Gamma** (Γ) e contiene le **ipotesi globali**;
- la parte dopo $\vdash$ si dice **radice**, indicata con F, ed equivale a ciò che vogliamo effettivamente dimostrare;
- ad ogni linea orizzontale usata per dividere i vari layer di un albero equivale un passaggio, ovvero una regola degli operatori elencati in precedenza, come l'introduzione dell'and e simili;
- il simbolo $\vdash$ indica una derivazione: da Gamma derivo la radice, ovvero, in linguaggio logico: $\Gamma \vdash F$.

E l'albero della formula presa come esempio sarebbe:

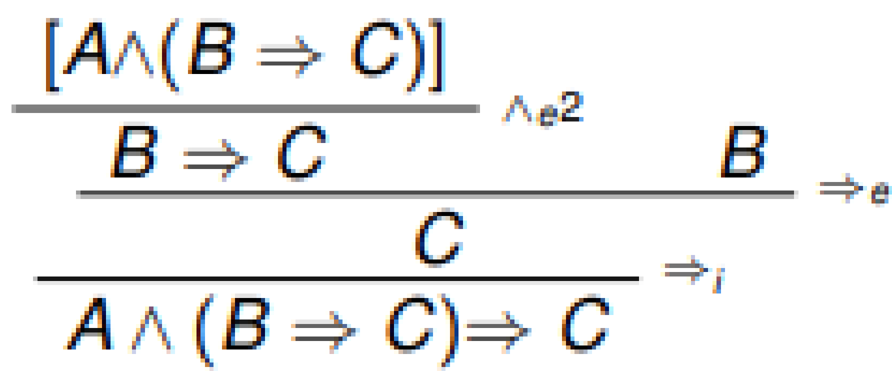

Figure 1: Esempio di albero di deduzione naturale.

4 Le regole

Nella figura seguente F_n sono dette **premesse** della regola che si vuole applicare, mentre F si dice **conclusione** della regola.

$$\frac{F_1 \ldots F_n}{F} \qquad \text{(NOME REGOLA)}$$

Figure 2: Esempio di albero con n regole e una conclusione (ovviamente).

Una regola senza premesse si dice assioma (ma è diverso da quelli della logica del primo ordine).

4.1 Invertibilità di una regola

Una regola si dice invertibile quando la sua conclusione implica le ipotesi, ovvero quando c'è **coimplicazione** tra conclusione e premesse.
Questa proprietà risulta utile in quanto permette di ragionare in entrambi i versi durante una dimostrazione.
Applicare una regola invertibile non è quasi mai errato in quanto si possono sempre utilizzare, proprietà di cui le regole non-invertibili non godono.

5 AND

5.1 Regola di introduzione

La regola di introduzione dell'*and* si indica con $\wedge_i$ e consiste in:

$$\frac{F_1 \ F_2}{F_1 \wedge F_2} \tag{1}$$

Lettura bottom-up (dalle premesse alla radice): se F_1 e F_2 allora $F_1 \wedge F_2$.
Lettura top-down (dalla radice alle premesse): per dimostrare $F_1 \wedge F_2$ allora

devo dimostrare sia F_1 che F_2.
N.B.: spesso le regole che "suonano bene" in italiano sono invertibili.

5.2 Regola di eliminazione

La regola di eliminazione dell'*and* si indica con $\wedge_e$ e consiste in:

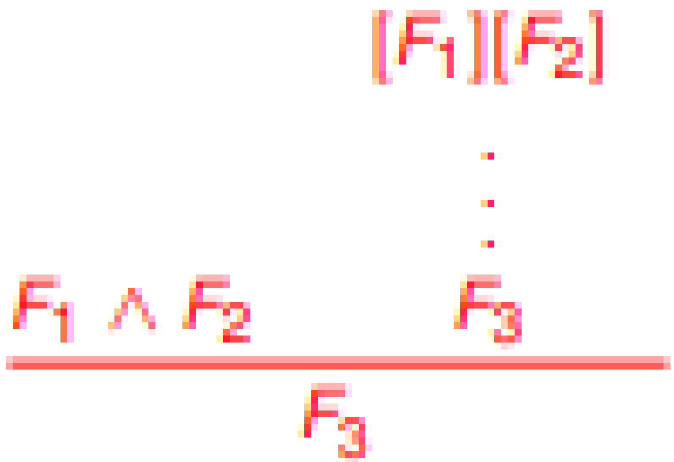

Figure 3: Regola di eliminazione dell'and.

Lettura bottom-up: se $F_1 \wedge F_2$ e se ipotizzando F_1 e F_2 concludo F_3, allora F_3.
Lettura top-down: per dimostrare F_3 data l'ipotesi $F_1 \wedge F_2$ è sufficiente dimostrare F_3 sotto le ipotesi F_1 e F_2.
Questa regola splitta in due rami come l'introduzione, ma mentre in essa si ha spesso una premessa verificata per altre ipotesi, qui si deve procedere a dimostrare entrambe e in F_3 occorre usare anche le ipotesi F_1 e F_2.

5.2.1 Non-invertibile

N.B.: la regola NON è **SEMPRE** invertibile, in quanto supponendo F_1 o $F_2 = \bot$ e $F_3 = \top$ si ha $\top \nvdash \bot \wedge \bot$. Tuttavia, diviene invertibile nei casi in cui si assume $F_1 \wedge F_2 = \top$, in quanto:

$$F_3 \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3$$

5.3 Regole alternative di eliminazione

Ci sono altre due regole alternative di eliminazione (entrambe non invertibili in alcun caso):

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}, (\wedge_{e_1}) \tag{2}$$

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}, (\wedge_{e_2}) \tag{3}$$

5.4 Riassunto regole dell'AND

La regola di eliminazione risulta utile per spezzare un'ipotesi congiunta (del tipo $A \wedge B$) nelle sue sottoparti. Questo si può fare anche per le ipotesi globali (o *iniziali*), per frammentarle e poterle poi usare nell'intero scope del ramo su cui si sta operando.
La regola di introduzione risulta utile per semplificare la conclusione della regola nelle componenti che la compongono.

6 OR

6.1 Regole di introduzione

Le regole di introduzione dell'*or* si indicano con $\vee_{i_1}$ e $\vee_{i_2}$ e consistono in:

$$\frac{F_1}{F_1 \vee F_2}, \vee_{i_1} \tag{4}$$

$$\frac{F_2}{F_1 \vee F_2}, \vee_{i_2} \tag{5}$$

Non sono invertibili e dato che non permettono di splittare, si opta prima per la regola di eliminazione, ovvero ...

6.2 Regola di eliminazione

La regola di eliminazione dell'*or* si indica con $\vee_e$ e consiste in:

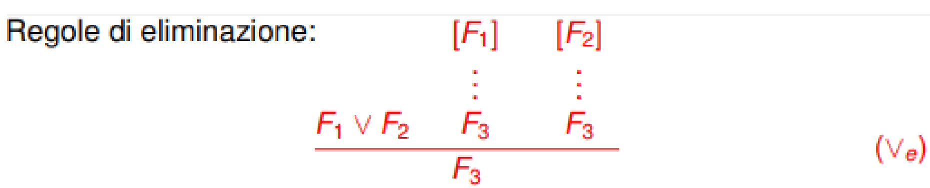

Figure 4: Regola di eliminazione dell'or.

La regola non è **sempre** invertibile: $F_3 = \top$ e $F_1 = F_2 = \bot$.
Tuttavia lo diventa quando posso dimostrare $F_1 \vee F_2$.

7 Armonia nell'AND e nell'OR

Ma come mai le formule di eliminazione sono scritte in questo modo?
Partiamo dall'AND: qui abbiamo una sola regola di introduzione, quindi una congiunzione si può introdurre solamente con una certa scrittura (vedi (1)). Ciò significa che, una volta giunti ad avere una congiunzione, allora si avranno sicuramente le sue due ipotesi iniziali (F_1 e F_2). Quindi avendo quelle due ipotesi iniziali si può affermare con certezza che si avrà anche F_3

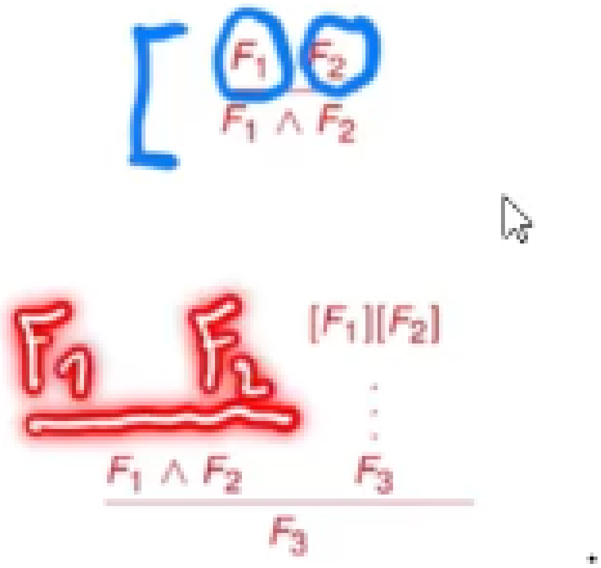

Figure 5: Dimostrazione dell'armonia dell'AND.

(vedi (3)):
La stessa cosa vale per l'OR: qui si hanno due regole di eliminazione e per introdurre una disgiunzione serve o una ipotesi o l'altra, quindi sicuramente potrò dedurre F_3 a partire o da F_2 o da F_1.

8 BOTTOM

Il bottom ($\perp$) indica qualcosa di sempre falso e perciò di non dimostrabile direttamente, ma bensì solo attraverso l'eliminazione di ipotesi.
Non avrà quindi una regola di introduzione (diretta), ma solamente una di eliminazione ...

8.1 Regola di eliminazione

La regola di eliminazione del *bottom* si indica con $\perp_e$ e consiste in:

$$\frac{\perp}{F} \tag{6}$$

A causa dell'armonia possiamo affermare che, data la mancanza di regole di introduzione, serviranno zero casi (premesse) per eliminare il bottom e dimostrare qualunque cosa.

8.1.1 Non-Invertibilità

Questa regola non è invertibile ma si usa bensì quando si **intuisce all'avanti (guardando avanti)** che qualcosa potrebbe essere sempre falso.

9 TOP

Il TOP ha una regola di introduzione (ed è quindi dimostrabile), ma non ha bisogno di premesse (si dice perciò **assioma**).

9.1 Regola di introduzione

La regola di introduzione si indica con $\top_i$ e consiste in:

$$\frac{}{\top} \tag{7}$$

10 IMPLICAZIONE

10.1 Regola di introduzione

La regola di introduzione dell'implicazione si indica con $\Rightarrow_i$ e consiste in:

$$\frac{\begin{array}{c}[F_1] \\ \vdots \\ F_2\end{array}}{F_1 \Rightarrow F_2}$$

Figure 6: Regola di introduzione dell'implicazione ($\Rightarrow_i$).

Si nota facilmente come la regola sia invertibile (e si debba quindi prediligere qualora occorresse lavorare su un implicazione).

10.2 Regola di eliminazione (modus ponens)

La regola di eliminazione dell'implicazione si indica con $\Rightarrow_e$ e consiste in:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2 \ F_1}{F_2} \Rightarrow_e \tag{8}$$

Spesso la formula si applica all'avanti (devo prima convincermi che F_1 sia dimostrabile) e non è mai invertibile.

11 NEGAZIONE

Dalla logica classica sapppiamo che $\neg F$ significa che $F \Rightarrow \perp$.

11.1 Regole di introduzione

La regola di introduzione della negazione si indica con $\neg_i$ e consiste in:

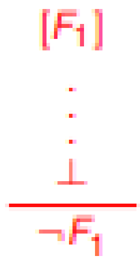

Figure 7: Regola di introduzione della negazione.($\neg_i$).

Che tradotto significa: se ipotizzando F_1 posso dimostrare l'assurdo allora ho $\neg F_1$.

11.2 Regole di eliminazione

La regola dell'eliminazione della negazione si indica con $\neg_e$ e consiste in:

$$\frac{\neg F_1 \; F_1}{\bot} \tag{9}$$

Ovvero è assurdo (bottom) avere sia $\neg F_1$ che F_1. Ne consegue che per dimostare l'assurdo basta dimostrare qualcosa ed il suo contrario.

11.3 Invertibilità regole

Entrambe le regole della negazione sono invertibili. Inoltre, quando ci si trova a dimostrare il falso (bottom), da quel momento in poi tutte le regole applicabili saranno considerate invertibili, in quanto si potrà sempre tornare a dimostrare il bottom per mezzo della regola $\bot_e$.

12 Tautologie e come risolverle

Alcune tautologie non si possono dimostrare con gli strumenti definiti fino ad ora, come ad esempio:

$$\neg\neg A \Rightarrow A$$
$$A \vee \neg A$$

Per dimostrare queste affermazioni, occorre utilizzare il **ragionamento per assurdo** (RAA) e il **terzo escluso** (Excluded Middle o EM).

12.1 RAA

Il ragionamento per assurdo permette di dimostrare un'affermazione procedendo per assurdo, assumendo $\neg F$ e dimostrando $\bot$. Ovvero:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg F]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{F}\ (RAA)$$

Figure 8: Regola di introduzione del RAA.

La regola è invertibile, in quanto in ogni mondo avendo qualcosa di falso allora ne si nega la veridicità.

12.1.1 Schema frequente per utilizzo del RAA

Il RAA si sfrutta frequentemente per ricondursi a una struttura del genere: Ovvero, per trovare una prova di A ci si riduce a cercare una prova di A assumendo $\neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad [\neg A]}{\bot}\;(\neg_e)}{A}\;(RAA)$$

Figure 9: Schema frequente di utilizzo del RAA.

12.2 EM

Il principio del terzo escluso è dimostrabile a partire dal RAA, anche se in maniera molto complessa. Tuttavia il risultato è molto potente in quanto permette di scrivere quanto segue:

13 Dalla deduzione naturale alla logica del prim'ordine

La logica del prim'ordine estende le proposizioni della logica proposizionale in due modi:

- generalizzando un caso specifico ad un intero insieme di elementi rispettanti certe caratteristiche;
- aggiungendo i **quantificatori universali** ed **esistenziali**, mediante apposite regole di **introduzione** ed **eliminazione**.