Analisi Matematica
L'insieme numerico $\mathbb{R}$

Andrea Malvezzi

23 settembre 2024

1 $\sqrt{2}$ è rappresentabile come frazione ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$)?

Per rispondere alla domanda presentata, procederemo con una dimostrazione per assurdo.
Assumiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dunque:

- $\exists$ m, n $\in \mathbb{N} | \sqrt{2} = m/n$, m.c.d. (m, n) = 1
- $\sqrt{2} = m/n$
- $2 = m^2/n?^2$
- $m^2 = 2n^2$

$2n^2$ è pari (ha 2 tra i divisori), perciò anche m^2 è pari. Quindi:

- $\exists\ m_1 \in \mathbb{N} | m_1 = 2n$
- $(2m_1)^2 = 2n^2$
- $2{m_1}^2 = n^2$

ma...

- n^2 è pari, perciò n è pari;
- essendo n ed m pari, viene meno la premessa iniziale per cui m e n non hanno divisori in comune.

Ed ecco dimostrato **per assurdo** che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!

2 Differenze tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$

Anzitutto occorre specificare che $\mathbb{R}$ nasce come completamento di $\mathbb{Q}$. Questo significa che il primo serve a riempire i buchi - i **vuoti** - lasciati dal secondo nel piano.
Questo significa che in $\mathbb{R}$ non ci sono spazi vuoti ed è quindi un insieme che nutre della proprietà di **continuità**, anche detta di **completezza**.

2.1 Formalizzazione della proprietà di continuità

Assumendo l'esistenza di $\mathbb{R}$, definiamo:

- $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

Ora, per studiare più in dettaglio i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, definiamo tre casi:

1. un numero appartenente ad $\mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di un sottoinsieme A se:
   $\forall a \in A, M \geqslant a, M \in \mathbb{R}$.
   Se A ammette un maggiorante all'interno dell'insieme stesso, è detto **superiormente limitato**.

2. lo stesso vale per $M \leqslant a$.

3. Se A ammette sia maggiorante che **minorante** è detto **limitato**.

Ovviamente, se A ha un maggiorante o un minorante allora ne ha infiniti. Inoltre nel caso in cui questi siano contenuti nell'insieme stesso prendono il nome di **MAX** e di **MIN**.

3 La proprietà completezza di $\mathbb{R}$

$\forall\ \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$:

1. Se A è superiormente limitato allora $\exists\ minM_0(A) =: supA$, dove M_0 è il minimo maggiorante;

2. Se A è inferiormente limitato allora $\exists\ maxM_0(A) =: infA$, dove M_0 è il massimo minorante;

Infine, per definizione, il sup e min di un insieme non limitato in uno o in entrambi gli estremi è pari ad infinito (con il rispettivo segno).