Logica per l'informatica - Lezione 1.75.

Andrea Malvezzi

25 settembre 2024

Contents

1 Teoria insiemistica ZF, assiomi fondamentali

1.1 Assioma di estensionalità

Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi:

$$\forall X, \forall Y, (X = Y \Leftrightarrow \forall Z.(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)) \tag{1}$$

Per ogni X ed Y, X ed Y sono uguali sse per ogni Z, Z appartiene a X sse Z appartiene ad Y.

1.2 Definizione di essere sottoinsieme

X è sottoinsieme di Y se ogni suo elemento è contenuto all'interno di Y:

$$X \subseteq Y := \forall Z.(Z \in X \Rightarrow Z \in Y) \tag{2}$$

X è sottoinsieme di Y se per ogni Z di X, se Z appartiene ad X allora Z appartiene anche ad Y.

1.3 Assioma di separazione

Dato un insieme, è possibile formare un suo sottoinsieme che soddisfi una certa proprietà.

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \Leftrightarrow Z \in X \wedge P(Z))$$

Ed indicando Y come $\{Z \in X : P(X)\}$, scriviamo ora:

$$\forall X, \exists Z, (Z \in \{W \in X : P(W)\} \Leftrightarrow Z \in X \wedge P(Z)) \tag{3}$$

Tramite questo assioma possiamo evitare il paradosso di Russell, scrivendo:

$$X = \{Y \in U : Y \notin Y\}$$

dove U è una classe, non un insieme.

1.4 Assioma dell'insieme vuoto

Avendo un insieme X che è vuoto:

$$\exists X, \forall Z, Z \in X \tag{4}$$

1.5 Definizione di insieme vuoto

Sia Y un insieme di cui un altro assioma conferma l'esistenza, allora:

$$\emptyset := \{X \in Y : false\} \tag{5}$$

1.6 Definizione di intersezione binaria

Con questo si spiega l'intersezione tra due insiemi:

$$A \cap B := \{X \in A : X \in B\} \tag{6}$$

1.7 Definizione di intersezione

Dato un insieme di insiemi, esiste l'insieme che ne è l'intersezione.

$$\cap F := \{x \in A : \forall Y, (Y \in F \Rightarrow X \in Y)\} \text{ dove } A \in F \tag{7}$$

F è l'insieme di TUTTI gli insiemi da intersecare, mentre l'insieme intersezione viene indicato come $\cap_{Y \in F} Y$, ad esempio $A \cap B \cap C = \cap_{Y \in (A,B,C)} Y$.

1.8 Assioma dell'unione

$$\forall F, \exists X, \forall Z.(Z \in X \Leftrightarrow \exists Y, (Y \in F \wedge Z \in Y)) \tag{8}$$

Preso un qualunque insieme F di insiemi da unire, esiste un insieme unione X t.c. per ogni elemento qualsiasi Z, Z appartiene ad X sse esiste almeno un insieme Y appartenente a F nel quale Z è contenuto.