Analisi Matematica
Funzioni goniometriche

Andrea Malvezzi

04 Ottobre 2024

Contents

1 Circonferenza goniometrica

La circonferenza goniometrica è una speciale circonferenza, rappresentata dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

Tale circonferenza ha inoltre lunghezza pari a 2π.

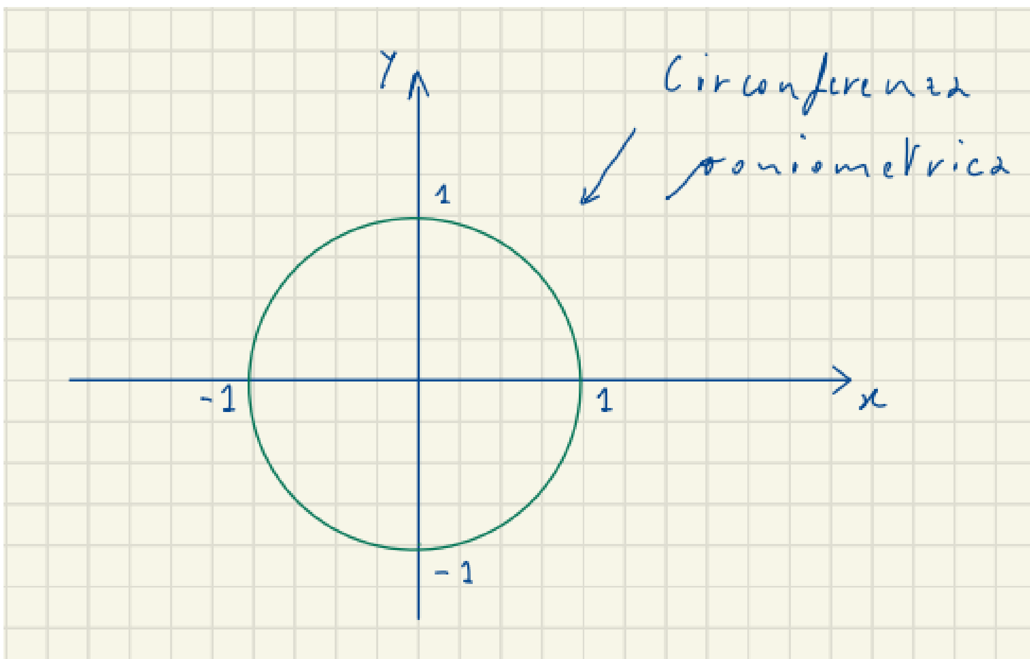

Figure 1: La circonferenza goniometrica.

1.1 Angoli in gradi e in radianti

In questa circonferenza si opera basandosi su angoli, che possono essere espressi in *gradi* oppure in *radianti*.

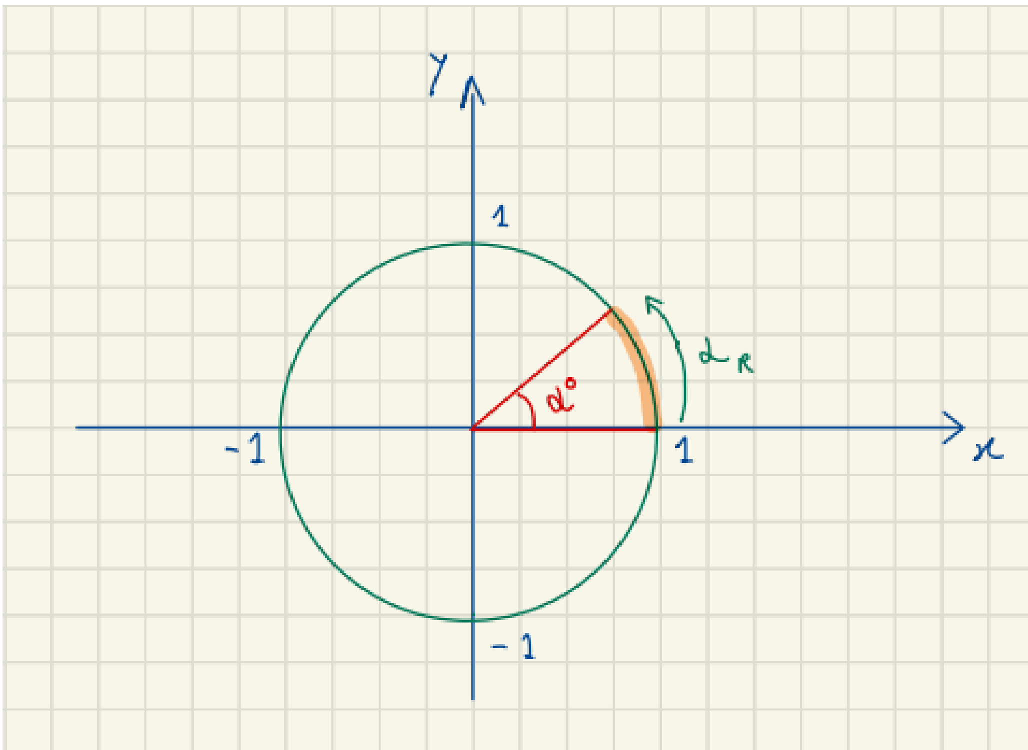

Figure 2: Un angolo α° in gradi ed il suo corrispettivo in radianti α^r.

Per passare da un angolo in gradi ad uno in radianti, si usa la seguente proporzione:

$$\alpha^\circ : 360 = \alpha^r : 2\pi \tag{2}$$

Che si può semplificare in:

$$\alpha^r = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \tag{3}$$

2 Funzione Seno e Coseno

Sia P un punto sulla circonferenza goniometrica tale che $P(X_p, Y_p)$.
Allora:

$$\begin{cases} P(X_p, Y_p), \\ \sin\alpha = Y_p, \\ \cos\alpha = X_p \end{cases} \tag{4}$$

Che rappresentato sulla circonferenza goniometrica diventa:

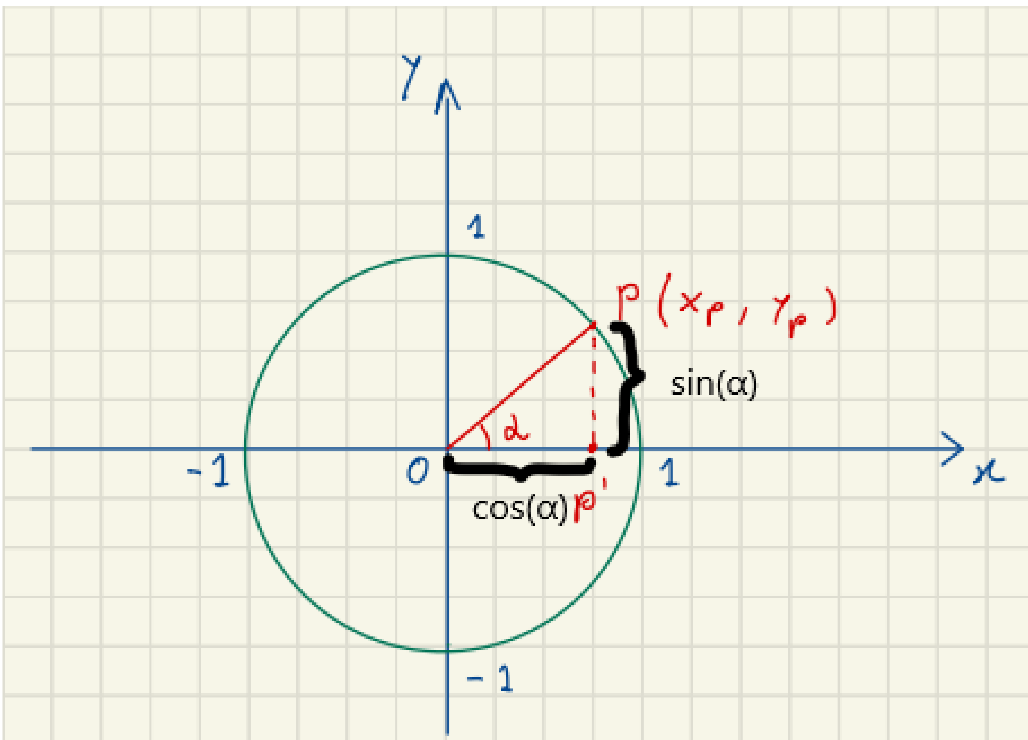

Figure 3: Il seno ed il coseno corrispondono ai due cateti di un triangolo rettangolo.

2.1 Grafici

In seguito i grafici della funzione seno e di quella coseno.

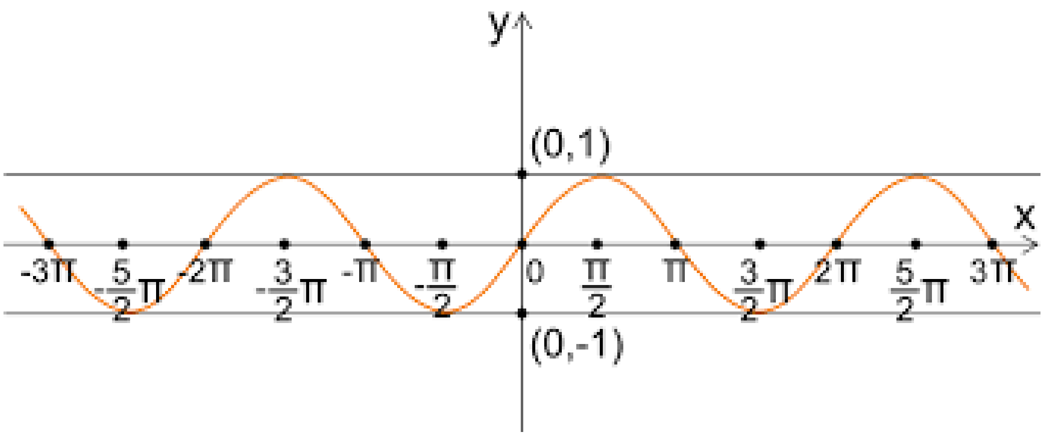

Figure 4: Grafico del seno.

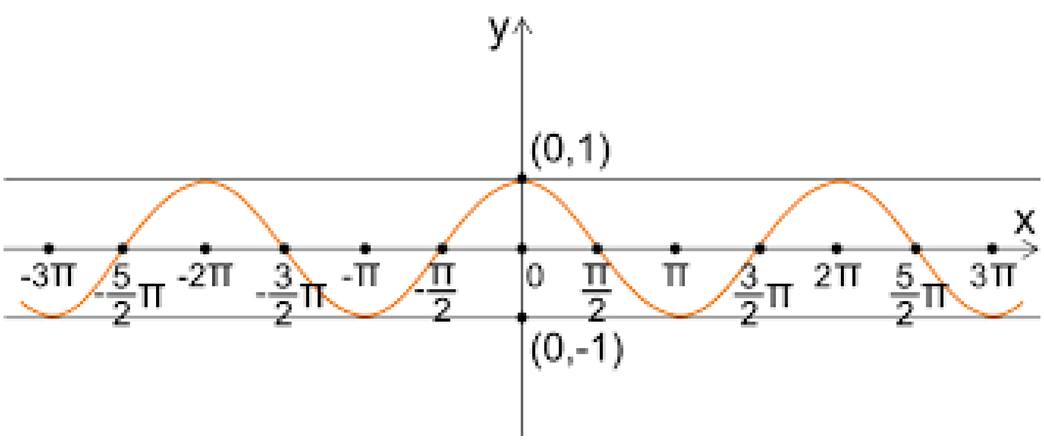

Figure 5: Grafico del coseno.

2.2 Funzioni dispari e pari

Inoltre, come facilmente osservabile dai grafici, invertendo il segno del parametro del coseno, si ottiene sempre lo stesso risultato, mentre invertendo quello del parametro del seno si ottiene un risultato a segno inverso. Questo perché il coseno è una funzione **pari**, mentre il seno è **dispari**.

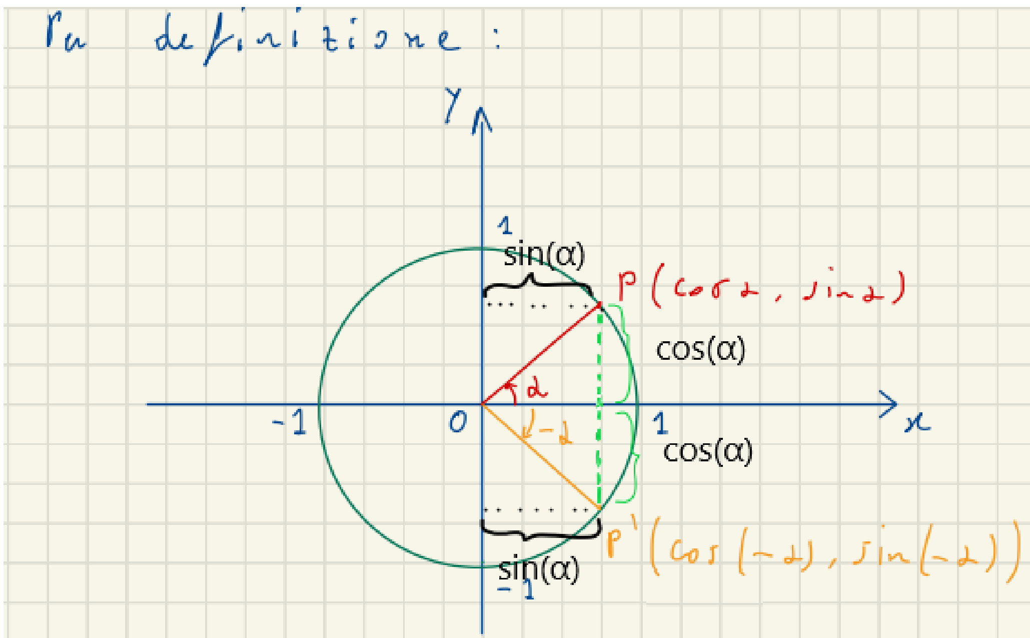

Figure 6: Esempio di parità del coseno e di disparità del seno.

3 Funzione Tangente

La funzione tangente è definita secondo la seguente scrittura:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cos\alpha \neq 0 \tag{5}$$

Inoltre, la tangente ha periodicità pari a π, e non a 2π.

3.1 Grafico della tangente

A seguire il grafico della funzione tangente, con asintoto verticale in $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

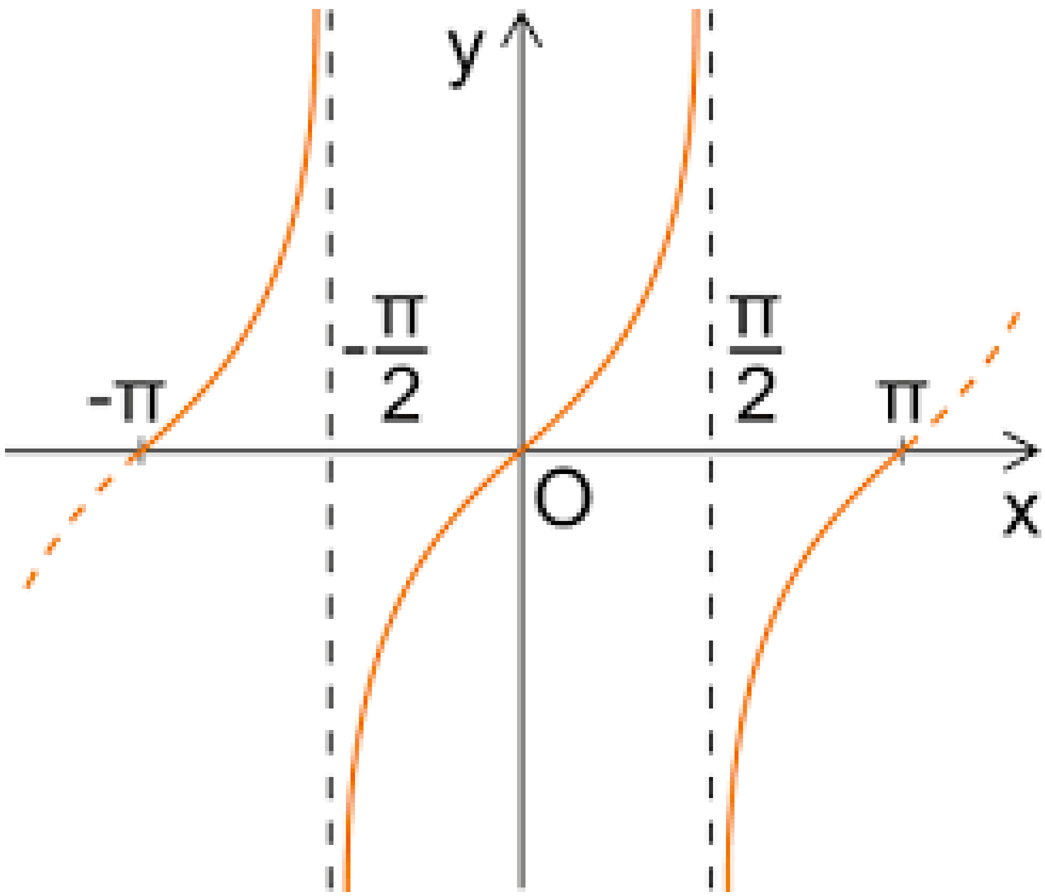

Figure 7: Grafico della tangente.

4 Tabella dei valori notevoli

A seguire una tabella contenente alcuni valori notevoli delle funzioni goniometriche:

α (angolo)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$	$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$\tan 0 = 0$
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\frac{\pi}{4} = 1$
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\tan\frac{\pi}{2} = \nexists$

5 Funzioni goniometriche e triangoli

Le funzioni trigonometriche son quindi strettamente legate ai triangoli, specialmente quello rettangolo:

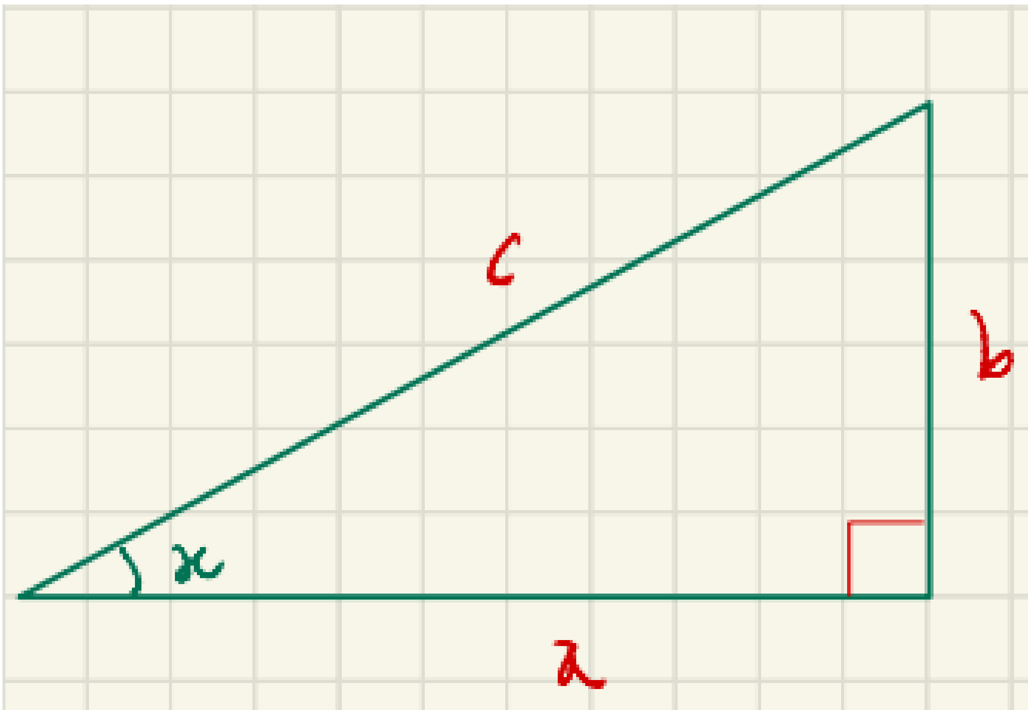

Figure 8: In generale, per trovare uno dei vari lati di un triangolo rettangolo si moltiplica il seno o il coseno dell'angolo tra il lato in questione e l'ipotenusa.

Dove:

- $a = c \cdot \cos \alpha$
- $b = c \cdot \sin \alpha$
- $c =$ ipotenusa
- $\frac{b}{a} = \tan \alpha \rightarrow b = a \cdot \tan \alpha$

6 Formule

6.1 Addizione e sottrazione

Le formule di addizione e di sottrazione sono ideali per scrivere un'espressione in maniera semplificata, quando possibile.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \cos beta \tag{6}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \tag{7}$$

6.2 Duplicazione

La formula di duplicazione è solamente un'estensione di quella di addizione, in quanto:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tag{8}$$