Analisi Matematica
Limiti

Andrea Malvezzi

07 Ottobre 2024

Contents

1 Teorema degli zeri

Avendo una funzione continua del tipo:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

dove

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

allora:

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0 \tag{1}$$

1.1 Dimostrazione

Vedi scritture precedenti per dimostrare (dai lucidi).

1.2 Applicazioni ai polinomi

Nei polinomi di grado dispari, in base alla tendenza della x la funzione tenderà a più o a meno infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

E perciò, pur non sapendo il valore esatto a cui tende la funzione a $\pm\infty$, sappiamo per certo che:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \text{ se } x \to \infty \\ f(x) < 0, \text{ se } x \to -\infty \end{cases}$$

E quindi, grazie al teorema degli zeri, sappiamo che nell'intervallo studiato della funzione si ha un punto dove la funzione si annulla.
Tutte le funzioni dispari hanno quindi almeno una radice del polinomio.
In quelle di grado pari, questo non è garantito a causa della peculiarità dell'esponente pari di trasformare i negativi in positivi. Potrebbe accadere, ma non è sicuro.

2 Teorema di Weierstrass

In un intervallo chiuso (che contiene i suoi estremi) e limitato di una funzione continua, allora:

$$\exists x_0 \in [a,b] : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in [a,b] \tag{2}$$
$$\exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x), \forall x \in [a,b] \tag{3}$$

dove

$$f(x_0) = \max f([a,b]) := M$$
$$f(x_1) = \min f([a,b]) := m$$

2.1 Teorema di Weierstrass riformulato

Usando in combinazione il teorema degli zeri e quello di Weierstrass è possibile ottenere quanto segue:

$$\exists M = max f([a,b])$$
$$\exists m = min f([a,b])$$

e vale:

$$f([a,b]) = [m, M] \tag{4}$$

Vedi dimostrazione dai lucidi.

3 Introduzione alla nozione di derivata

3.1 Cenni di geometria analitica

Il coefficiente angolare corrisponde alla tangente dell'angolo che la retta studiata forma con l'asse delle x.
Questo coefficiente si calcola nella maniera seguente:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{5}$$

e serve a generare una retta ...

$$y = m \cdot +q \tag{6}$$

... o più di una, quando si parla di fasci di rette:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{7}$$

3.2 Retta tangente a un'altra retta in un dato punto

Avendo un x_0, allora si ha che la derivata della funzione in quel tal punto è uguale al limite del rapporto incrementale, ovvero:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8}$$