Logica per l'informatica
Legenda colori slide

Andrea Malvezzi

08 ottobre 2024

Contents

Primo grande insieme saranno i numeri naturali, tramite una meta-logica. Tutti i numeri naturali devono essere distinti, e un modo dei tanti per garantire questa proprietà (e conseguentemente anche molte altre utili per implementare eventuali operazioni) è la seguente:

$$[[0]] := \emptyset$$

$$[[n+1]] := [[n]] \cup [[n]]$$

Esempio:

$$[[0]] = \emptyset$$

$$[[1]] = \emptyset\emptyset \text{ è l'insieme corrispondente allo } 0$$

$$[[2]] = \emptyset, \emptyset$$

$$[[3]] = \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$$

Dove le doppie quadre indicano la "codifica" di un numero in una data maniera: := indica una definizione, ovvero la "maniera".

1 Teorema

Tutti i numeri naturali sono diversi: quindi non ci sono due insiemi uguali. Sentendo uguale, devo pensare al teorema di estensionalità. Supponiamo quindi $1 = 2$.
Quindi $\forall Z.(Z \in 1 \Leftrightarrow Z \in 2)$ per l'assioma di estensionalità.
Poiché $1 \in 2$ per l'assioma dell'unione e del singoletto, dato che 1 appartiene al singoletto vuoto, ne deduciamo che $1 \in 1 = \emptyset$.
Se fossimo partiti da 4=5, saremmo dovuti partire dal dimostrare che $3 = 4$, poi $2 = 3$, etc...
Quindi $\emptyset = 1$ e $1 = \emptyset$ CONTINUA SLIDE

1.1 Osservazione

Per ora abbiam solo dimostrato l'esistenza di insiemi finiti. Occorre un assioma che chiarisca l'esistenza di un insieme infinito, o almeno che definisca l'insieme contenente **almeno** i numeri naturali, per poi restringerlo a contenere **solamente** quelli naturali.
I numeri naturali son importanti perché permettono di "catturare" nell'insieme

di sistemi abilitati quello dell'informatica, in quanto ogni processo converte dati in sequenze di 1 e 0, quindi numeri naturali.

2 Assioma dell'infinito

Esiste un insieme che contiene almeno (gli encoding di) tutti i numeri naturali. Questo tuttavia non ci sa dire se in tale insieme stanno dentro solamente quelli naturali, in quanto manca il sse.

$$\exists Y.(\emptyset \in Y \land \forall N.(N \in Y \Rightarrow N \cup \{N\} \in Y))$$

Per ogni insieme Y, il vuoto è compreso in tale insieme, e per ogni N, N unito all'insieme N (la definizione di prima della codifica dei numeri naturali, FAI ESEMPIO) appartiene ad Y.

3 Assioma insieme potenza

Classico esempio di assioma che risulta utile quando si considerano insiemi infiniti.
Preso un insieme ne esiste un insieme dei sottoinsiemi.

$$X, \exists Y, Z.(Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X)$$

Indicando Y come 2^x o $P(X)$ (insieme potenza o delle parti):

$$2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset, 1, 2\}\}$$

Potremmo anche avere come insieme X un insieme infinito, oppure al posto di 2^x qualcosa come $2^{2^{2^x}}$.

4 Assioma di regolarità o di fondazione

Ogni insieme non vuoto contiene un elemento da cui è disgiunto.
Conseguentemente, nessun insieme contiene ricorsivamente sé stesso: questo è interessante in quanto permette di provare a parlare di cardinalità di un insieme e, quando possibile, di misurarla.

5 Assioma di rimpiazzamento

Supponiamo di avere un insieme che son sicuro esista. Supponiamo, attraverso formule logiche, di associare ad ogni elemento un altro insieme. Allora son sicuro che esista un insieme Y contenente tutti i collegamenti. Questo insieme avrà SEMPRE cardinalità minore o uguale a quella dell'insieme di partenza.