Analisi Matematica
Successioni e funzioni principali

Andrea Malvezzi

30 settembre 2024

Contents

1 Le successioni monotone

Una successione può essere di diversi tipi:

1.1 Crescente

Una successione $(a_n)_n$ si dice crescente se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \tag{1}$$

Inoltre, una successione può essere **strettamente** crescente (ogni termine è maggiore del precedente) o **monotona** crescente (ogni termine è maggiore o uguale del precedente).

1.2 Decrescente

Una successione $(b_n)_n$ si dice decrescente se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n \geq b_{n+1} \tag{2}$$

Inoltre, una successione può essere **strettamente** decrescente (ogni termine è minore del precedente) o **monotona** decrescente (ogni termine è minore o uguale del precedente).

1.3 Le successioni monotone

Una proprietà importante delle successioni monotone consiste nel fatto che esse posseggono sempre un limite.
Ciò significa che sono sempre o **convergenti** o **divergenti**, in base al tipo di successione e al fatto di essere superiormente o inferiormente limitate.

1.3.1 Esempio di successione monotona crescente convergente

Un esempio di successione monotona crescente convergente è:

$$(a_n) = \frac{n}{n+1}$$

In quanto, calcolando il limite per n tendente a infinito, si ottiene un valore diverso da infinito (la successione risulta quindi superiormente limitata):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Che, appliando il limite, diventa:

$$\frac{1}{1+0} = 1$$

Pertanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

La spiegazione per le successioni monotone decrescenti convergenti è analoga (sempre imponendo il limite per ∞).

1.3.2 Esempio di successione monotona decrescente divergente

Un esempio di successione monotona decrescente divergente è:

$$(b_n) = -n$$

In quanto, calcolando il limite per n tendente a infinito, si ottiene un valore pari a infinito (la successione risulta quindi <u>non</u> inferiormente limitata):

$$\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$$

La spiegazione per le successioni monotone crescenti divergenti è analoga.

2 Funzione esponenziale

La funzione esponenziale è definita nella maniera seguente:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \tag{3}$$

E la sua forma più generica è:

$$f(x) = a^x \tag{4}$$

Quando $a > 1$, allora f sarà crescente, mentre quando $0 < a < 1$ la funzione sarà decrescente.
Notare come la funzione non ammetta una base negativa.

3 Funzione logaritmica

La funzione logaritmica è l'opposto dell'esponenziale ed è perciò definita nella maniera seguente:

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \tag{5}$$

Notare come dominio e codominio siano quelli della funzione esponenziale (3) ma invertiti.
La forma più generica della funzione logaritmica è:

$$\log_a y = x \rightarrow a^{log_a y} = y \tag{6}$$

Inoltre, la funzione logaritmo sarà negativa se:

- $b > 1$, $\log_b x < 0 \ \forall x \in (0, 1)$;
- $0 < b < 1$, $log_b x < 0$ quando $x > 1$.

Notare come la funzione non sia definita per $x = 0$.