Logica per l'informatica
Brutta

Andrea Malvezzi

15 ottobre 2024

Contents

1 esempio albero spiegato

parto con:

$$B, D \wedge A \vdash A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C \tag{1}$$

Ciò che è prima del $\vdash$ si dice gamma (γ) e contiene le ipotesi globali (senza quadre nell'albero), mentre ciò che viene dopo si dice radice (F). Si dice $\gamma \vdash F$, da gamma derivo F.

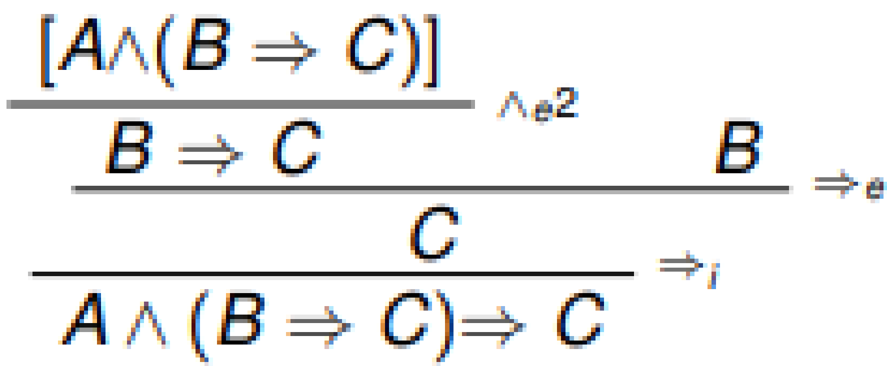

Figure 1: Esempio di albero di deduzione naturale.

Qui opto per una lettura top-down e parto da ciò che devo dimostrare per ridurmi a dimostrare altro. Parto dal dimostrare $[A \wedge (B \Rightarrow C)]$, applico la regola (?) dell'and, dimostro $B \Rightarrow C$. Ma dalle ipotesi globali (quelle in γ) ho B, perciò C (tramite la regola (?)) e quindi per finire, applicando la regola (?) dimostro la radice F.

2 Regole

Nella figura seguente F_n sono dette premesse della regola da applicare, mentre F si dice conclusione della regola.

$$\frac{F_1 \dots F_n}{F} \qquad \text{(NOME REGOLA)}$$

Figure 2: Esempio di albero con n regole e una conclusione (ovviamente).

Una regola senza premesse si dice assiome (ma è diverso da quelli della logica del primo ordine).

3 Costruire un albero

Un albero si deve costruire componendo ricorsivamente le regole di inferenza. Nella figura seguente, F_n sono le regole di H_1, mentre G_n sono le regole di H_l, dove F_n su H_1 è un sottoalbero di induzione naturale.

$$\frac{\frac{F_1 \dots F_n}{H_1}\ (regola - 1) \quad \dots \quad \frac{G_1 \dots G_m}{H_l}\ (regola - l)}{H}\ (regola - x)$$

Figure 3: Costruzione di un albero tramite composizione ricorsiva delle regole di inferenza.

4 Correttezza di un albero

Se una premessa contempla ipotesi scaricate, esse vanno integrate tramite applicazioni nella formula finale.

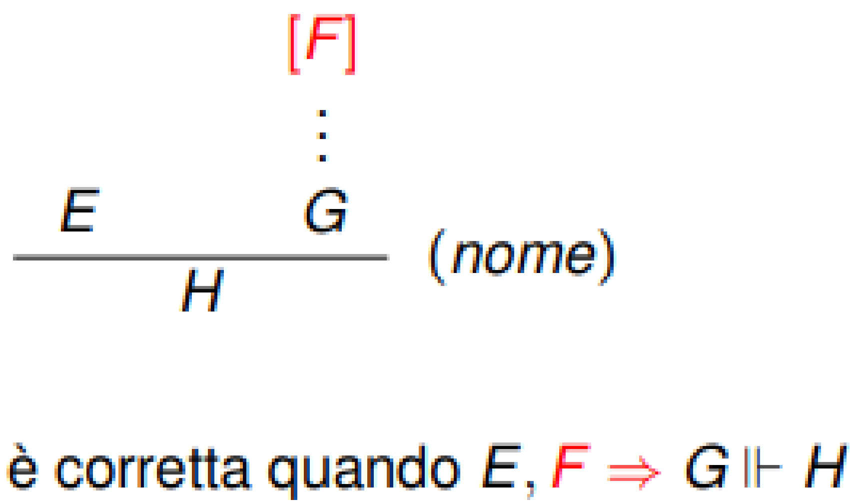

Figure 4: Esempio di albero costruito correttamente.

5 Invertibilità di una regola

Una regola è invertibile quando la sua conclusione implica le ipotesi, ergo quando c'é coimplicazione tra conclusione e premesse.
L'invertibilità è importante perché permette di ragionare top-down senza entrare in un vicolo cieco da cui non si può fare backtracking.
Vedi esempio sui LUCIDI.

6 AND

Regola di introduzione ($\wedge_i$):

$$\frac{F_1 \ F_2}{F_1 \wedge F_2} \tag{2}$$

Lettura bottom-up: se F_1 e F_2 allora $F_1 \wedge F_2$.
Lettura top-down: per dimostrare $F_1 \wedge F_2$ debbo dimostrare sia F_1 che F_2.
Notare come questa **regola suoni bene** in italiano: GENERALMENTE (non è una regola ma solo un'osservazione) le regole che suonano bene in italiano sono invertibili.
Regola di eliminazione ($\wedge_e$):

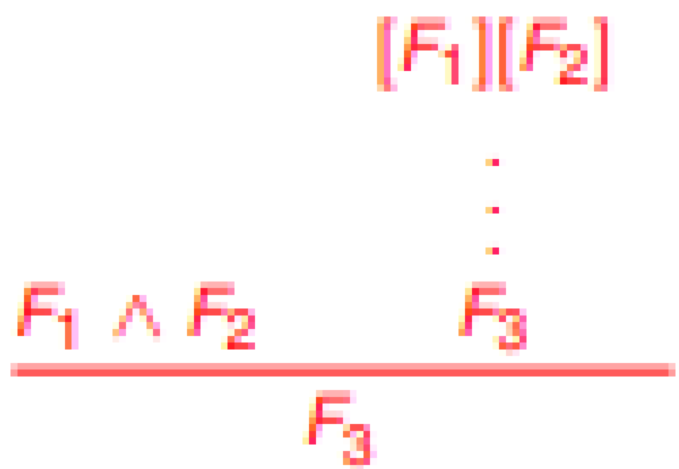

Figure 5: Regola di eliminazione dell'and.

Importante dare sempre precedenza alle regole che splittano (eliminazione in questo caso dell'and). La and introduzione apre due sottodimostrazioni da fare entrambe, mentre la and eliminazione ne apre sempre due MA una è generalmente già dimostrata per le ipotesi locali.

Lettura bottom-up: se $F_1 \wedge F_2$ e se ipotizzando F_1 e F_2 concludo F_3, allora F_3.

Lettura top-down: per dimostrare F_3 data l'ipotesi $F_1 \wedge F_2$ è sufficiente dimostrare F_3 sotto le ipotesi F_1 e F_2.

Figure 6: Letture regola di eliminazione dell'and.

Regola di eliminazione:

$$\frac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{matrix}[F_1][F_2] \\ \vdots \\ F_3\end{matrix}}{F_3} \qquad (\wedge_e)$$

La regola non è invertibile. Esempio: $F_3 = \top$ e $F_1, F_2 = \bot$: si ha $\top \not\Vdash \bot \wedge \bot$

La regola è invertibile se si assume $F_1 \wedge F_2$: ovvio in quanto $F_3 \Vdash F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3$

Figure 7: La regola è invertibile solo supponendo che $F_1 \wedge F_2$, perché sasrebbe impossibile dimostrare che questo è falso partendo da top (F_3).

Ci sono altre due regole alternative di eliminazione (le più popolari su internet):

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}, (\wedge_{e_1}) \tag{3}$$

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}, (\wedge_{e_2}) \tag{4}$$

Che non sono invertibili.

6.1 Riassuntino

eliminazione $\rightarrow$ spezzo l'ipotesi iniziale (avendo $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$ ottengo $[A \wedge B]$ $[C \wedge D]$) e mano a mano spezzo sempre di più.
introduzione $\rightarrow$ semplifica la conclusione della regola nelle componenti che la compongono.
eliminazione 1 e 2 son più un risalire a una delle variabili globali, come accadeva nell'eliminazione, ma stavolta esplicitando il ragionamento.
VEDI ESEMPI ALBERI SUI LUCIDI PER CAPIRE BENE.

7 OR

Regole di introduzione:

$$\frac{F_1}{F_1 \vee F_2}, (\vee_{i_1}) \tag{5}$$

$$\frac{F_2}{F_1 \vee F_2}, (\vee_{i_2}) \tag{6}$$

Non sono invertibili. Prima si opta per quella di eliminazione, ovvero:

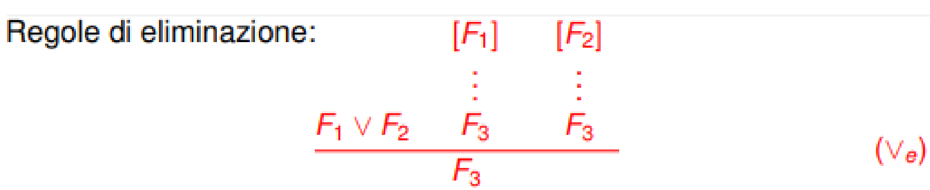

Figure 8: Non invertibile: $F_3 = \top$ e $F_1 = F_2 = \bot$. Quando posso dimostrare $F_1 \vee F_2$, allora si può invertire.