Analisi Matematica
Insiemi e cenni di calcolo combinatorio

Andrea Malvezzi

19 settembre 2024

Contents

1 Definizione di sottoinsieme proprio **3**
1.1 Esempi di sottoinsiemi propri e non propri 3

2 Biunivocità e invertibilità di una funzione **3**

3 Definizione di insieme numerabile **3**
3.1 Dimostrazioni sugli insiemi numerici 4
3.1.1 $\mathbb{Z}$ è numerabile? 4

4 Elementi di calcolo combinatorio **5**
4.1 Fattoriale di un numero 5
4.1.1 Esempio del fattoriale di un numero: 5
4.2 Scomporre un numero fattoriale 5
4.2.1 Esempio di scomposizione numero fattoriale 5
4.3 Coefficiente binomiale 5
4.3.1 Esempio di coefficiente binomiale: 6
4.4 Prima proprietà del coefficiente binomiale 6
4.4.1 Prova algebrica 6
4.5 Seconda proprietà del coefficiente binomiale 6
4.5.1 Prova algebrica 6
4.5.2 Prova combinatoria 7
4.6 Binomio di Newton 8
4.6.1 Come ricavare tale formula? 9
4.6.2 Esempio di ricavo della formula prendendo $n = 4$ . . . 9
4.6.3 Esempio di calcolo della n-sima potenza di un binomio 10

1 Definizione di sottoinsieme proprio

Un insieme A si dice sottoinsieme proprio di B quando vale quanto segue:

$$\text{Se } \emptyset ! = A \subsetneqq B \tag{1}$$

Dove il simbolo $\subsetneqq$ sta per "inclusione stretta", ovvero:

- $A \neq B$;
- $A \subseteq B$;

1.1 Esempi di sottoinsiemi propri e non propri

- $A = \{1, 4\}$;
- $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
- $C = \{1, 2, 3, 4\}$;

Qui, A è un sottoinsieme proprio di B e di C. Tuttavia, B non è sottoinsieme proprio di C, e viceversa.

2 Biunivocità e invertibilità di una funzione

Una funzione si dice biunivoca quando è sia *1-1* che *sv*.
Una funzione biunivoca è inoltre **invertibile**.

3 Definizione di insieme numerabile

Un insieme $\mathbb{X}$ si dice numerabile quando esiste una funzione della seguente specie:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, g \text{ è } sv \tag{2}$$

3.1 Dimostrazioni sugli insiemi numerici

3.1.1 $\mathbb{Z}$ è numerabile?

Consideriamo

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ se n pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ se n dispari} \end{cases}$$

Ora calcoliamo:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = -\frac{1+1}{2} = -1$$
$$f(2) = \frac{2}{2} = 1$$
$$\dots$$

Quindi f è *sv*, perciò $\mathbb{Z}$ è numerabile.

4 Elementi di calcolo combinatorio

4.1 Fattoriale di un numero

Avendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, e un $n \in \mathbb{N}$, allora si dice **fattoriale di** n il valore $n!$, ovvero:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 1, \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

4.1.1 Esempio del fattoriale di un numero:

Prendiamo come esempio il 4! (anche detto **4-fattoriale**).

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Prendiamo ora invece lo 0!. Ricordando quanto affermato i n (3):

$$0! = 1$$

4.2 Scomporre un numero fattoriale

Avendo un fattoriale $n!$, allora si può abbassare di uno n e riscriverlo come $(n-1)!(n)$.

$$n! = (n)(n-1)! \tag{4}$$

4.2.1 Esempio di scomposizione numero fattoriale

Avendo 4!, allora potrò riscriverlo nella seguente maniera:

$$4! = 4 \cdot 3!$$

Questa "proprietà" (che è in realtà una conseguenza della definizione stessa di fattoriale) sarà molto utile nelle dimostrazioni seguenti.

4.3 Coefficiente binomiale

Avendo due numeri tali che $n, m \in \mathbb{N} : m \leq n$, allora si dice **Coefficiente binomiale**:

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{5}$$

Dove $\frac{n!}{(n-m)m!}$ corrisponde a una **combinazione semplice**.

4.3.1 Esempio di coefficiente binomiale:

Avendo $n = 3$e $m = 2$, allora:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

4.4 Prima proprietà del coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{6}$$

Ovvero: ad ogni sottoinsieme di k elementi corrisponde un sottoinsieme di $n-k$ elementi, per cui il loro numero è uguale.

4.4.1 Prova algebrica

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Per fornire un esempio concreto:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{[7-(7-2)]!(7-2)!} = \frac{7!}{5!2!} = \binom{7}{5} = \binom{7}{7-2}$$

4.5 Seconda proprietà del coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \tag{7}$$

4.5.1 Prova algebrica

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{\text{(n-(k-1))!}(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,\text{k!}} = \dots$$

Ora risolviamo $-(k-1)$ e sfruttiamo (4) per scomporre $(n-k+1)!$ in $(n-k+1)(n-k)!$. Inoltre, sempre applicando la medesima proprietà, scomponiamo $k!$ in $(k)(k-1)!$.

$$\dots = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{\text{(n-k+1)(n-k)!}(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,\text{k(k-1)!}} = \dots$$

Ora raccogliamo i termini che compaiono in entrambe le frazioni:

$$\dots = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right) = \dots$$

Risolviamo le frazioni in parentesi:

$$\dots = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\cdot\frac{k+n-k+1}{(n-k+1)k} = \dots$$

Semplifichiamo la frazione di destra eliminando le due k di segno opposto e moltiplichiamo tra loro le due frazioni ottenute:

$$\dots = \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k-1)!(n-k+1)(k)} = \dots$$

E per finire, osserviamo come $(n-k)!$, se associato a $(n-k+1)$, permetta di ricongiungersi a una scrittura del tipo $(n-k+1)!$. La stessa cosa vale per $(k-1)!$ e (k) (sempre grazie a (4)).

$$\dots = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}$$

4.5.2 Prova combinatoria

Il numero di insiemi contenenti K elementi componibili a partire da un insieme N composto da $n+1$ elementi è pari a:

- il numero di insiemi dove un certo X_0 è contenuto nell'insieme stesso (ovvero dove si hanno $\binom{n}{k-1}$ elementi);
- il numero di insiemi dove un certo X_0 **non** è contenuto nell'insieme stesso (ovvero dove si hanno $\binom{n}{k}$ elementi);

Che visualizzato equivale a (vedi pagina seguente): Dunque in un insieme N si possono avere un numero di insiemi di K elementi pari alla somma di $\binom{n}{k-1}$ e di $\binom{n}{k}$.

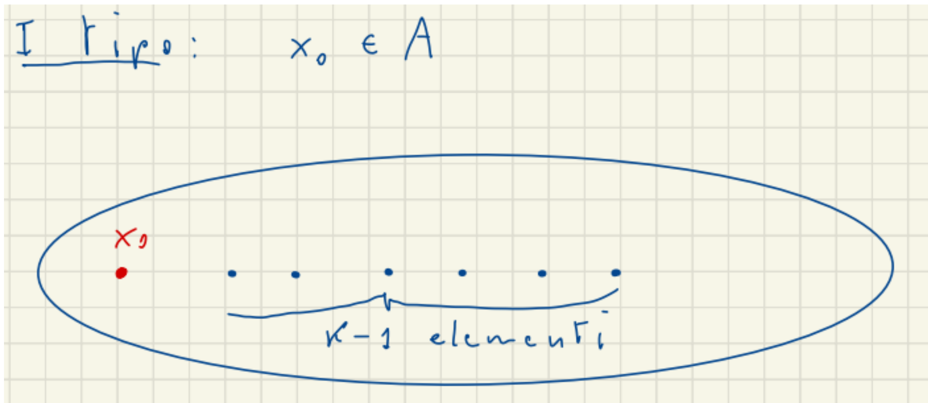

Figure 1: Primo caso descritto.

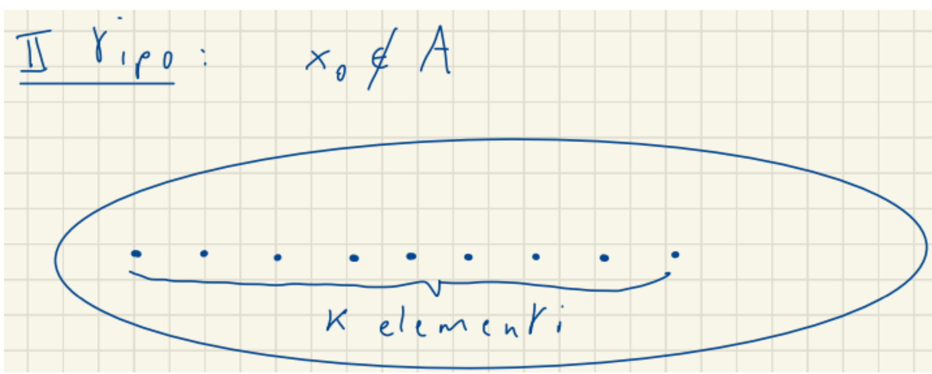

Figure 2: Secondo caso descritto.

4.6 Binomio di Newton

Questa formula si usa per calcolare la n-sima potenza di un binomio in maniera semplice.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \tag{8}$$

Ma la vera comodità della formula presentata consiste nella validità delle proprietà del coefficiente binomiale precedentemente presentate.
(6) e (7) rimangono difatti valide anche per questa sommatoria, in quanto legata al triangolo di Tartaglia.

4.6.1 Come ricavare tale formula?

Supponiamo di voler ricavare la formula che ci permette di esprimere $(a+b)^n$ usando l'analisi combinatoria.
Prendiamo ora $c \cdot a^k \cdot b^p$, considerando che $k+p=n$. A cosa corrisponde la lettera c?
In generale si sa che $(a+b)^n$ corrisponda a una sommatoria di monomi del tipo: $a^{n-k}b^k$, con $k \in [0,n]$ considerando solo i numeri naturali.
Proviamo a considerare il caso più famoso di questo, ovvero il quadrato del binomio:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \cdots = a^2 + \boxed{2}ab + b^2$$

Quindi la lettera c corrisponde al totale dei modi con cui si può ottenere $a^{n-k}b^k$ in $(a+b)^n$

4.6.2 Esempio di ricavo della formula prendendo $n=4$

Avendo $n=4$, in quanti modi posso ottenere ab^3? Bisognerà "selezionare" b da tre dei quattro fattori disponibili, perciò:

$$(a+b)^4 = (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (\boxed{\text{a}}+b)$$

Ovvero $b^3 \cdot a$. Poi, rifacendo lo stesso procedimento ma prendendo coefficienti diversi:

$$(a+b)^4 = (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (\boxed{\text{a}}+b) \cdot (a+\boxed{\text{b}})$$

Ovvero $b^2 \cdot a \cdot b = ab^3$.

$$(a+b)^4 = (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (\boxed{\text{a}}+b) \cdot (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (a+\boxed{\text{b}})$$

Ovvero $b \cdot a \cdot b^2 = ab^3$.

$$(a+b)^4 = (\boxed{\text{a}}+b) \cdot (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (a+\boxed{\text{b}}) \cdot (a+\boxed{\text{b}})$$

Ovvero $a \cdot b^3 = ab^3$.
Quindi in tutto ci sono 4 modi per realizzare ab^3 partendo da $(a+b)^n$ con

n pari a 4. Ciò significa che avendo un insieme di 4 elementi, si avranno 4 insiemi di 3 elementi:

$$\binom{4}{3} = 4$$

Ora sappiamo come risalire ad ogni tassello della formula esposta in precedenza:

$$(a+b)^4 = \dots a^4 b^0 + \dots a^3 b + \dots a^2 b^2 + 4 ab^3 + \dots a^0 b^4 \tag{9}$$

4.6.3 Esempio di calcolo della n-sima potenza di un binomio

Per calcolare $(a+b)^n$, basterà far variare n nella sommatoria presentata:

$$\text{Per } n = 1, (a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

$$\text{Per } n = 2, (a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

$$\text{Per } n = 3, (a+b)^3 = \binom{3}{0} a + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$$\text{etc} \dots$$

Ora si può osservare come lo sviluppo della sommatoria presentata vada ad assumere la forma di un triangolo. Questo triangolo storicamente prende il nome di "Triangolo di Tartaglia" e permette di calcolare tutti i moltiplicatori di a e di b (vedi immagine sottostante).

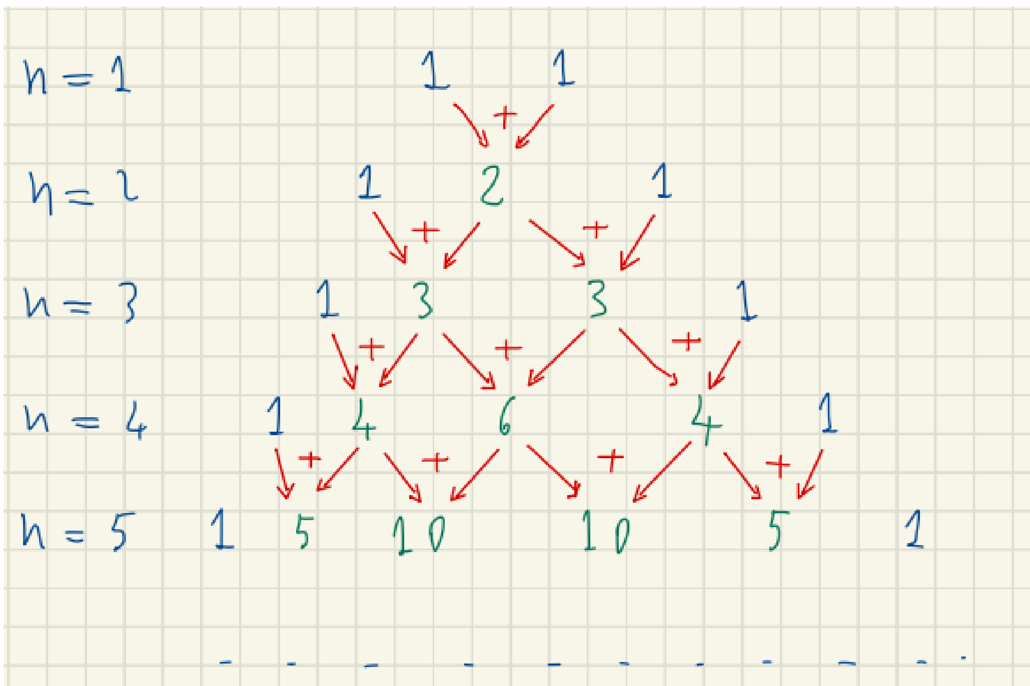

Figure 3: Il triangolo di Tartaglia sviluppato fino ad n=5.