Logica per l'informatica
Dimostrazioni inerenti alla teoria assiomatica

Andrea Malvezzi

08 ottobre 2024

Contents

1 Riflessività del $\subseteq$

1.1 Teorema

$$X \subseteq X \tag{1}$$

1.2 Dimostrazione

Sia X un insieme. Dobbiamo dimostrare il teorema (1), ovvero:

$$\forall Y. Y \in X \Rightarrow Y \in X.$$

Sia Y un insieme tale che Y $\in$ X(H). Debbo dimostrare Y $\in$ X. Ovvio per l'ipotesi H.

2 Transitività del $\subseteq$

2.1 Teorema

$$\text{se } X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq Z \text{ allora } X \subseteq Z \tag{2}$$

2.2 Dimostrazione

Siano X, Y e Z insiemi tali che $X \subseteq Y$, ovvero $\forall A, A \in X \Rightarrow A \in Y(H_1)$ e $Y \subseteq Z$, ovvero $\forall A, A \in Y \Rightarrow A \in Z(H_2)$.
Dobbiamo dimostrare $X \subseteq Z$, ovvero $\forall B, B \in X \Rightarrow B \in Z$. Sia B un insieme t.c. $B \in X(H_3)$. Da H_3 e H_1 ho $B \in Y$.
Quindi per H_2 ho $B \in Z$.

3 Anti-simmetria del $\subseteq$

3.1 Teorema

$$\text{se } X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X \text{ allora } X = Y \tag{3}$$

3.2 Dimostrazione

Siano X e Y insiemi t.c. $X \subseteq Y$, ovvero $\forall Z, Z \in X \Rightarrow Z \in X, (H_2)$.
Dobbiamo dimostrare $X = Y$. Per l'assioma di estensionalità, è sufficiente dimostrre $\forall Z, Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y$. Sia Z un insieme. $Z \in X \Rightarrow Z \in Y$ vale per H_1 e $Z \in Y \Rightarrow Z \in X$ vale per H_2.

4 Il vuoto è sottoinsieme di qualunque cosa

4.1 Teorema

$$\emptyset \subseteq X \tag{4}$$

4.2 Dimostrazione

Sia X un insieme. Dobbiamo dimostrare $\emptyset \subseteq X$, ovvero $\forall Z.Z \in \emptyset \Rightarrow Z \in X$. Sia Z un insieme t.c. $Z \in \emptyset$ (H). Per l'assioma dell'insieme vuoto $Z \in \emptyset$. Quindi per H assurdo e perciò $Z \in X$.

5 L'intersezione con il vuoto è il vuoto

5.1 Teorema

$$X \cap \emptyset = \emptyset \tag{5}$$

5.2 Dimostrazione

Sia X un insieme. Dobbiamo dimostrare $X \cap \emptyset = \emptyset$.
Per il teorema dell'estensionalità passo a dimostrare che $\forall Z.Z \in X \cap \emptyset \Leftrightarrow Z \in \emptyset$. Ora, supponendo che Z sia un insieme, $Z \in \emptyset \Rightarrow Z \in X \cap \emptyset$ lo abbiamo già dimostrato in (4).

Dimostriamo quindi l'affermazione opposta, ovvero: $Z \in X \cap \emptyset \Rightarrow Z \in \emptyset$. Supponiamo $Z \in X \cap \emptyset$. Quindi, per il teorema dell'intersezione binaria, $Z \in X(H_1)$ e $Z \in \emptyset(H_2)$. Quindi $Z \in \emptyset$.

6 L'unico sottoinsieme del vuoto è il vuoto

6.1 Teorema

$$se X \subseteq \emptyset \text{ allora } X = \emptyset \tag{6}$$

6.2 Dimostrazione

$X \subseteq \emptyset$ significa $\forall Z, Z \in X \Rightarrow Z \in \emptyset$ (H). Dobbiamo dimostrare $X = \emptyset$.
Per l'assioma di estensionalità possiamo ridurci a dimostrare $\forall Z, Z \in X \Leftrightarrow Z \in \emptyset$. Tuttavia, prendendo un insieme Z, è stato provato in precedenza (4) che $Z \in \emptyset \Rightarrow \in X$.
Inoltre $Z \in X \Rightarrow Z \in \emptyset$ vale per H.