Analisi Matematica
Non numerabilità di $\mathbb{R}$ e la radice aritmetica

Andrea Malvezzi

26 settembre 2024

Contents

1 L'insieme $\mathbb{R}$ è numerabile?

Per capire se $\mathbb{R}$ sia numerabile o meno, è sufficiente studiare l'intervallo in $\mathbb{R}$ $[0, 1[$.

1.1 Dimostrazione per assurdo

Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva definita da $\mathbb{N}$ a $[0, 1[$:

$$f : \mathbb{N} \to [0, 1[$$

quindi:

$$f(n) \in [0, 1[, \text{ con } f(n) = 0, x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots$$

Mostriamo ora che esiste un numero **reale** (che chiameremo r) $\in [0, 1[$ t.c.:

$$f(n) \neq r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Per farlo, costruiamo il nostro numero r tramite un procedimento diagonale (da *Cantor*):

$$r := 0, r_0, r_1, r_2, \ldots$$

$$r_j = \begin{cases} 5 \text{ se } x_{n_n} \neq 5 \\ 6 \text{ se } x_{n_n} = 5 \end{cases}$$

Dove x_{n_n} equivale ai termini con indici uguali tra loro di una matrice costruita basandosi sui risultati di $f(n)$, quindi:

$$\begin{gathered} f(0) = 0, x_{0_0}, x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots \\ f(1) = 0, x_{1_0}, x_{1_1}, x_{1_2}, \ldots \\ f(2) = 0, x_{2_0}, x_{2_1}, x_{2_2}, \ldots \\ \ldots \\ r = 0, x_{0_0}, x_{1_1}, x_{2_2} \end{gathered}$$

Quindi: $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$ non è suriettiva. Per assurdo quindi si sa che $\mathbb{R}$ non è numerabile.

1.1.1 Esempio

A seguire un esempio di quanto appena dimostrato:

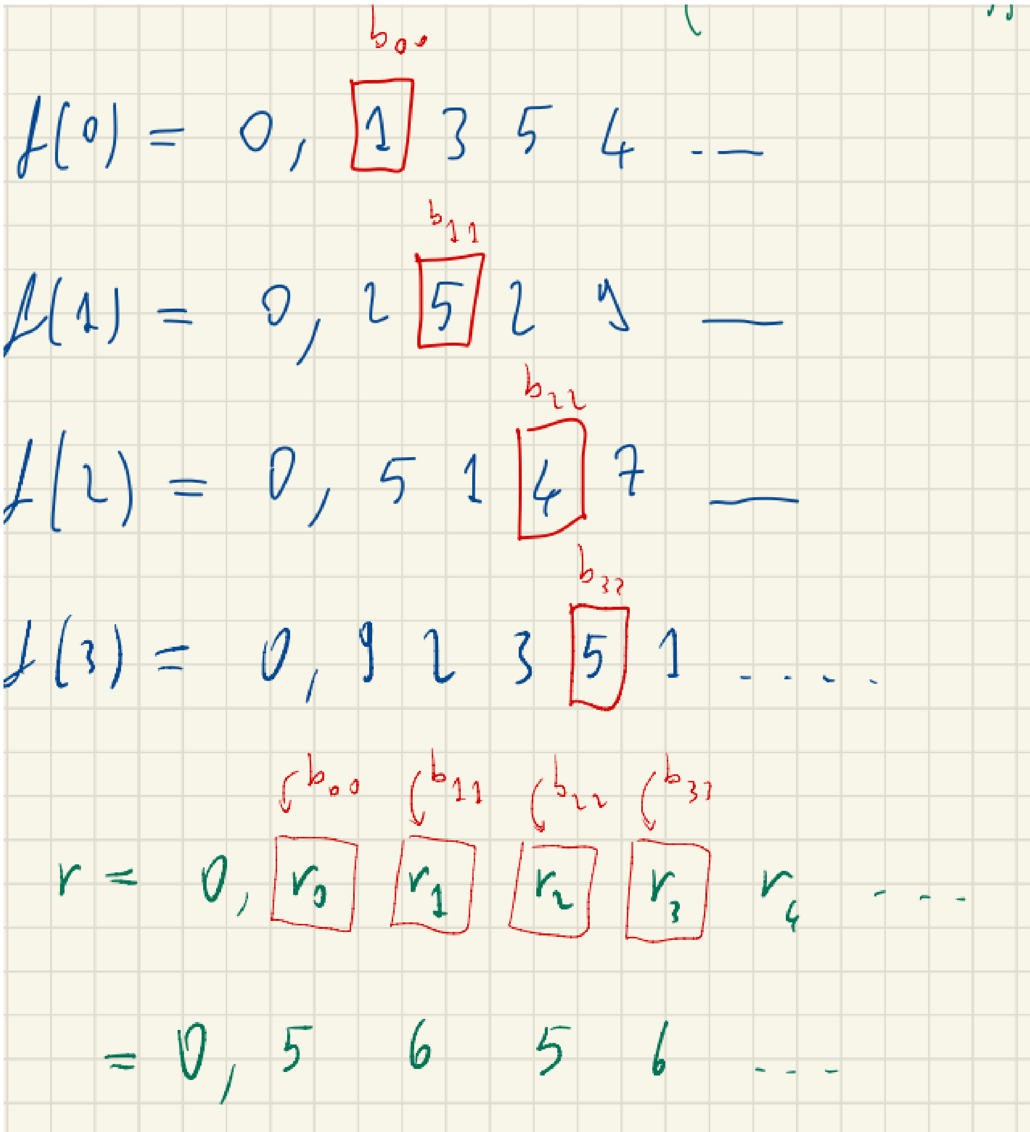

Figure 1: Avendo r_n diverso da $b_{n_n} \forall n \in \mathbb{N}$ allora $r \neq f(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

2 La radice

Ora che si è passati in $\mathbb{R}$ si può parlare di estrazione della radice di un numero:

2.1 Teorema

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \exists! b \in \mathbb{R}_+ : b^n = r \tag{1}$$

Dove b si dice **radice aritmetica n-sima** di r e si scrive $\sqrt[n]{r} := b$.
Inoltre, $b \geq 0$. Perciò, ad esempio:

$$\sqrt{4} = 2, \text{ non } -2$$