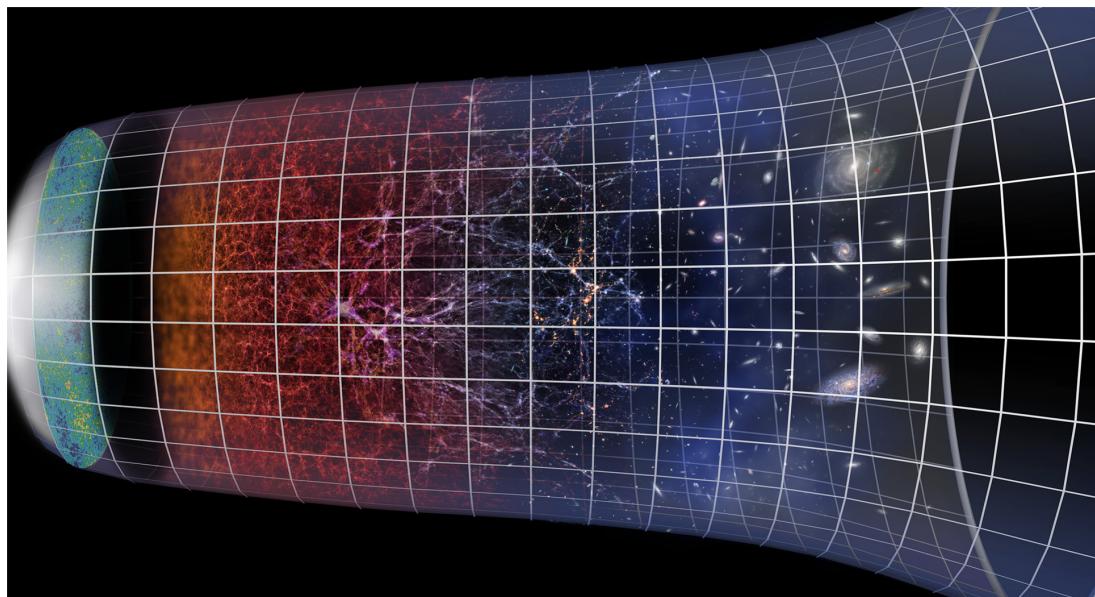


Appunti di Cosmologia

Autore: Andrea Orione

Docente: Stefano Camera



Università degli studi di Torino
Corso di laurea magistrale in Astrofisica

Anno accademico 2025/2026

Indice

1.	Introduzione	1
1.1.	Oscillazioni Acustiche dei Barioni	4
2.	Equazioni per l'evoluzione dell'universo	6
2.1.	Il principio cosmologico	6
2.2.	La legge di Hubble	6
2.3.	Coordinate comoving	9
2.4.	Equazioni di Friedmann da principi fluidodinamici	10
2.5.	Dilatazione della luce	12
2.6.	Gas interagente	13
2.7.	Abbondanze	14
2.8.	Evoluzione delle densità delle specie	15
2.9.	Evoluzione del fattore di scala	16
3.	Trattazione in relatività generale	17
3.1.	Ripasso di relatività generale	17
3.1.1.	Il tensore Energia-Impulso	19
3.2.	Metrica per universo omogeneo e isotropo	21
3.3.	Nozioni di distanza	23
3.3.1.	Radial comoving distance	23
3.3.2.	Angular comoving distance	23
3.3.3.	Angular diameter distance	23
3.3.4.	Luminosity distance	24
3.4.	Tensore di Einstein per universo omogeneo e isotropo	25
3.5.	Tensore energia-impulso per un gas perfetto	26
3.6.	Equazioni di Friedmann	27
3.7.	Evoluzione in presenza di curvatura	28
3.8.	La costante cosmologica	30
3.8.1.	Misura dell'espansione accelerata	31
3.8.2.	Costante cosmologica come forma di energia	32
3.9.	Evoluzione delle disomogeneità e formazione delle galassie	34
4.	Modello a Big Bang Caldo	36
4.1.	Ripasso modello standard	36
4.2.	Evoluzione del quadri-momento con l'espansione dell'universo	37
4.3.	Statistica delle specie	38
4.4.	Funzioni di distribuzione	40
4.5.	Quantità macroscopiche nei limiti ultra- e non relativistico	41
4.5.1.	Limite non relativistico	41
4.5.2.	Limite ultra-relativistico	43
4.6.	Equilibrio chimico	44
4.7.	Entropia dell'universo	47
4.8.	Numero di gradi di libertà	48
4.8.1.	Valori effettivi	49
4.9.	Evoluzione della temperatura	50
4.9.1.	Disaccoppiamento dei neutrini	51
4.10.	Scale temporali ed energetiche	53
4.11.	Equazione di Saha	54
4.12.	Nucleosintesi primordiale	54

4.12.1. Concentrazione di elio	57
4.13. Ricombinazione atomica	58
4.14. Disaccoppiamento dei fotoni e CMB	61
4.15. Last scattering	62
5. Inflazione cosmologica	65
5.1. Horizon problem e Flatness problem	65
5.2. Inflazione	67
5.3. Fisica dell'inflazione	68
5.3.1. Inflatone	69
6. Disomogeneità nell'universo	72
6.1. Teoria perturbativa Newtoniana	72
6.2. Evoluzione delle perturbazioni	74
6.2.1. Universo statico	75
6.2.2. Universo in espansione	76
7. Teoria perturbativa relativistica	78
7.1. Perturbazione della metrica	78
7.2. Perturbazioni del tensore energia impulso	79
7.3. Cambi di coordinate e gauge	81
7.4. Evoluzione delle perturbazioni	83
7.4.1. Conservazione del tensore energia-impulso	83
7.4.2. Equazione di Einstein	85
7.5. Crescita delle strutture di materia	86
7.6. Spettro di potenza	90
7.7. Formazione delle strutture	95
7.7.1. Modello di collasso sferico	96
7.7.2. Teoria di Press-Schechter	98

CAPITOLO 1

Introduzione

La cosmologia è la branca dell'astrofisica che studia l'universo nel suo complesso e la sua evoluzione.

Inizia a essere sviluppata nel '900 con lo sviluppo della teoria della Relatività generale e con le osservazioni di Slipher, Lemaître e Hubble.

Le stime della composizione dell'universo sono le seguenti:

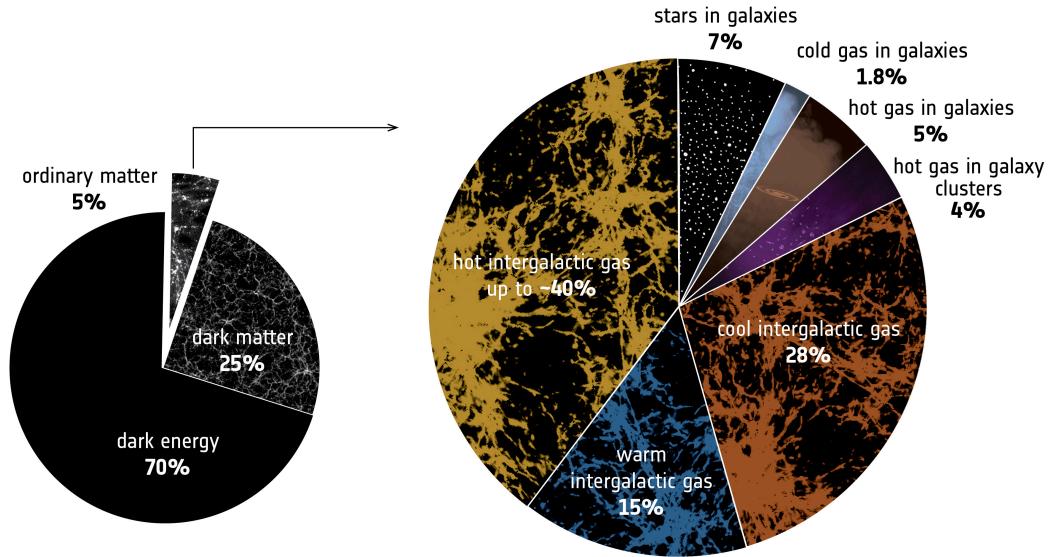


Figura 1 : Composizione dell'universo oggi.

Questa distribuzione non è costante nel tempo, bensì varia facendo variare anche il modo di evoluzione dell'universo stesso.

L'universo può essere descritto utilizzando quelli che vengono detti **modelli cosmologici**. Con l'arrivo di nuovi dati sono stati sviluppati nuovi modelli cosmologici con diversi valori di abbondanze (per **abbondanza** Ω si intende una quantità in riferimento a un valore standard).

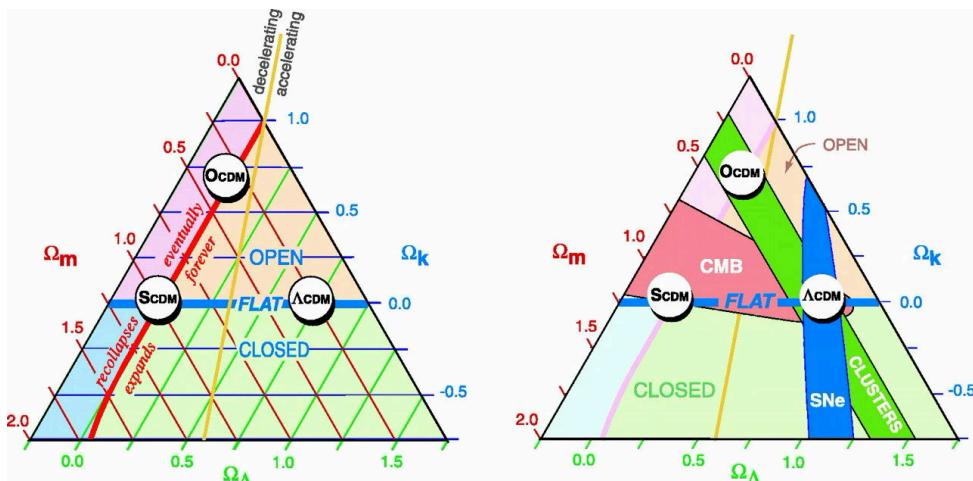


Figura 2 : Abbondanze per i vari modelli cosmologici.

Ω_m è l'abbondanza di materia (ordinaria e oscura), Ω_k è l'abbondanza di curvatura e Ω_Λ è l'abbondanza di energia oscura.

Tra i vari modelli cosmologici riportiamo

- S_{CDM} (*Simple Cold Dark Matter*) con solo materia oscura,
- O_{CDM} (*Open Cold Dark Matter*) con materia oscura e spazio non piatto,
- Λ_{CDM} con materia oscura ed energia oscura.

Λ_{CDM} è il modello attualmente più accreditato ed è quello che viene detto un *modello concordatorio (concordance model)*, ovvero che sia in accordo con i dati provenienti dalle varie misure. Nel grafico di destra di Figura 2 vediamo infatti che le tre fonti di dati si sovrappongono in corrispondenza di Λ_{CDM} . Andiamo ad approfondire brevemente cosa sono queste misure.

Supernovae (SNe)

Quando parliamo di supernovae in contesto cosmologico, tendenzialmente intendiamo supernovae di tipo Ia. Questo fenomeno si verifica in sistemi binari composti da una nana bianca (WD) e una gigante rossa (RG). Se le stelle sono sufficientemente vicine e l'attrazione gravitazionale è sufficientemente forte è possibile che la nana bianca inizi ad assorbire materiale dalla gigante rossa (che essendo molto più grande ha un'attrazione molto debole sui propri strati più esterni).

Questo processo va avanti fino a quando non viene raggiunta una massa limite detta *limite di Chandrasekhar* ($M_{\text{Ch}} \approx 1.44 M_\odot$). A questo punto la nana bianca esplode¹.

Essendo un processo a soglia, l'energia rilasciata è sempre la stessa, dunque questo tipo di eventi può essere utilizzato come candela standard (una **candela standard** è un processo di cui si conosce la luminosità alla sorgente e di cui si può ricavare la distanza facendo il confronto con il flusso osservato).

Sono stati osservati numerosi eventi di SNe a varie distanze.

Di fianco riportiamo quello che si ottiene graficando il modulo di distanza $m - M = 5 \lg(d)$ (con m la magnitudine apparente e M la magnitudine assoluta) in funzione del redshift z (definito in seguito, per ora basta considerarlo una misura delle distanze su scale cosmologiche).

Nel grafico superiore si vedono i dati e i fit ottenuti utilizzando tre modelli cosmologici differenti, mentre nel grafico inferiore vengono riportati i residui rispetto al modello indicato con la linea tratteggiata. Come si può osservare specialmente nel secondo grafico, è possibile discriminare quale modello seguano i dati (con misure più recenti, la divisione è ancora più marcata).

Questo ci permette di andare a ridurre lo spazio dei parametri in cui il modello potrà ricadere.

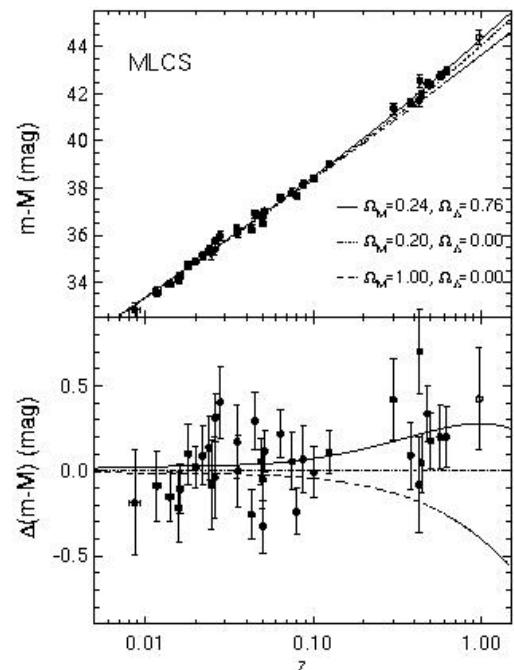


Figura 3 : Modulo di distanza per supernovae a diversi redshift.

¹Per maggiori approfondimenti sui processi che avvengono consultare il corso Fondamenti di Astrofisica I: Stelle e Via Lattea

Cosmic Microwave Background (CMB)

Il fondo cosmico a microonde consiste in una radiazione omogenea e isotropa proveniente da un'emissione di corpo nero risalente al periodo in cui la radiazione si è disaccoppiata dalla materia.

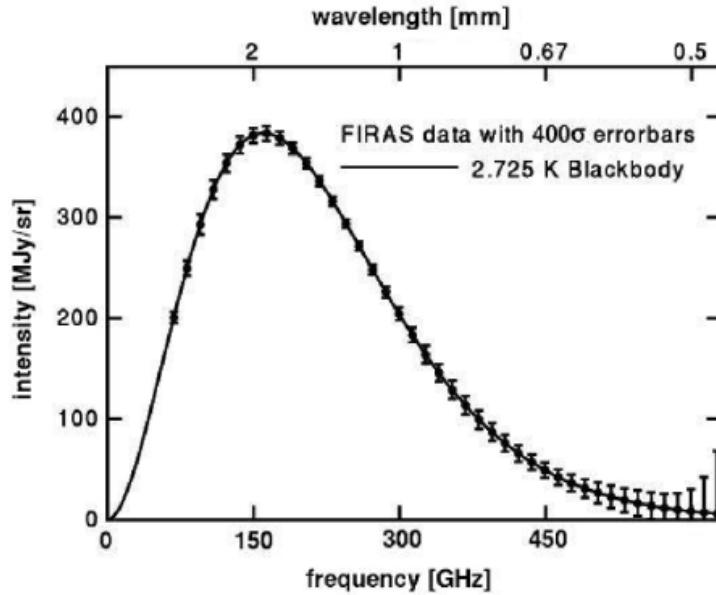


Figura 4 : Spettro della CMB.

Le barre d'errore sono ingrandite di 400 volte per renderle visibili.

Come si può osservare nel grafico precedente, lo spettro della CMB rappresenta l'emissione più vicina ad un corpo nero mai osservata. La temperatura corrispondente è $T = 2.725 \text{ K}$ in tutte le direzioni, con fluttuazioni di $\delta T \approx 10^{-5} \text{ K}$ (le fluttuazioni del raggio terrestre arrivano fino a $\approx 0.33\%$).

Le fluttuazioni sono state osservate con sempre miglior risoluzione da diversi esperimenti

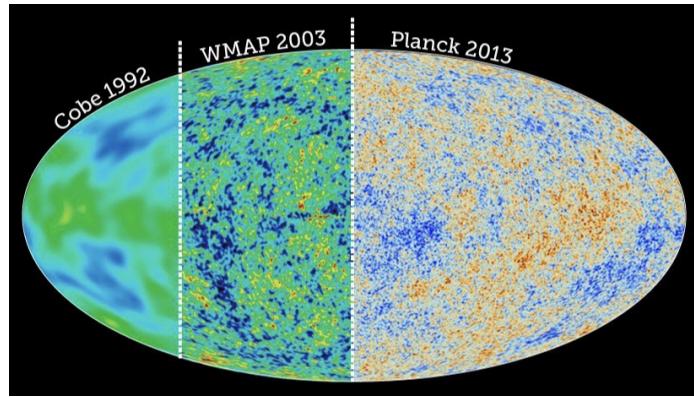


Figura 5 : Anisotropie della CMB misurate dai vari esperimenti.

Tutta la complessità delle fluttuazioni può essere descritta completamente da solo 6 parametri cosmologici: $\{H_0, \Omega_m, \Omega_b, T, A_s, n_s\}$.

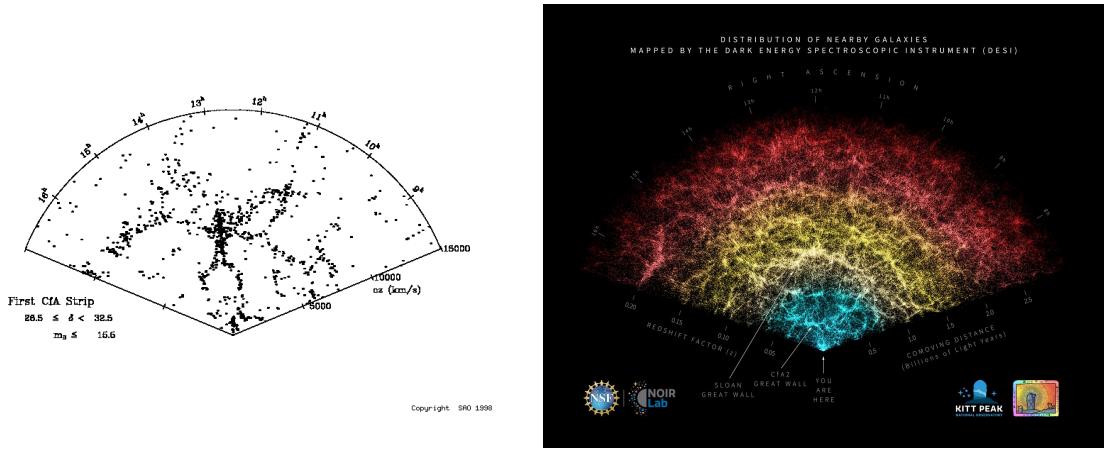
La radiazione della CMB rappresenta una “fotografia” dell'universo pochi istanti prima del disaccoppiamento radiazione-materia, quindi si possono interpretare le fluttuazioni di temperatura come disomogeneità di densità nell'universo a quell'istante. Se si simula l'evoluzione di un universo partendo da fluttuazioni simili a quelle osservate nella CMB si ottiene una distribuzione di materia a oggi simile a quella che effettivamente si misura.

Clusters

Con questa misura si intende più in generale come si dispone spazialmente la materia (sotto forma di galassie e ammassi) all'interno dell'universo.

Inizialmente si pensava che la probabilità di trovare una galassia in un particolare punto dell'universo fosse uguale ovunque. Questa teoria fu confutata per la prima volta nel 1989 con la pubblicazione della prima *Galaxy Survey* da parte di Margaret Geller e John Huchra. Dai dati della survey si osservò che le galassie si dispongono lungo filamenti formando quella che oggi viene detta *ragnatela cosmica*.

Le misure più recenti arrivano dalla collaborazione Desi e si spingono fino a distanze dell'ordine di 10^9 ly.



(a) Geller-Huchra Galaxy Survey

(b) Collaborazione Desi

Figura 6 : Distribuzione delle galassie nell'universo.

1.1. Oscillazioni Acustiche dei Barioni

Le Barionic Acoustic Oscillations (BAO) sono un ulteriore fenomeno da cui possiamo estrarre informazioni sull'evoluzione dell'universo. Nelle prime fasi la materia era *accoppiata* alla radiazione (principalmente attraverso scattering), dunque essa era soggetta alla forza gravitazionale e alla pressione di radiazione. Queste due forze hanno generato oscillazioni simili a onde sonore ma sotto forma di sovradensità. Quando è poi avvenuto il *disaccoppiamento* radiazione-materia, queste strutture sono rimaste "congelate" nello spazio sotto forma di gusci sferici attorno a nuclei molto densi.

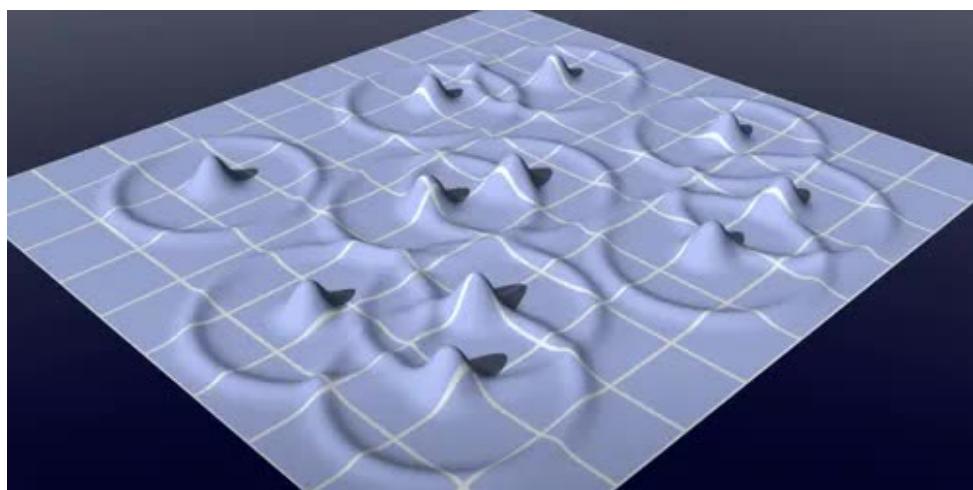


Figura 7 : Rappresentazione bidimensionale dei BAO.

1. INTRODUZIONE

I raggi di tali gusci oggi rappresentano un *righello standard*, tuttavia non sono semplici da misurare in quanto si sovrappongono l'uno con l'altro. Per risolvere questo problema, si costruisce un istogramma delle distanze tra coppie di galassie e in esso si osserva quello che viene detto *BAO bump*.

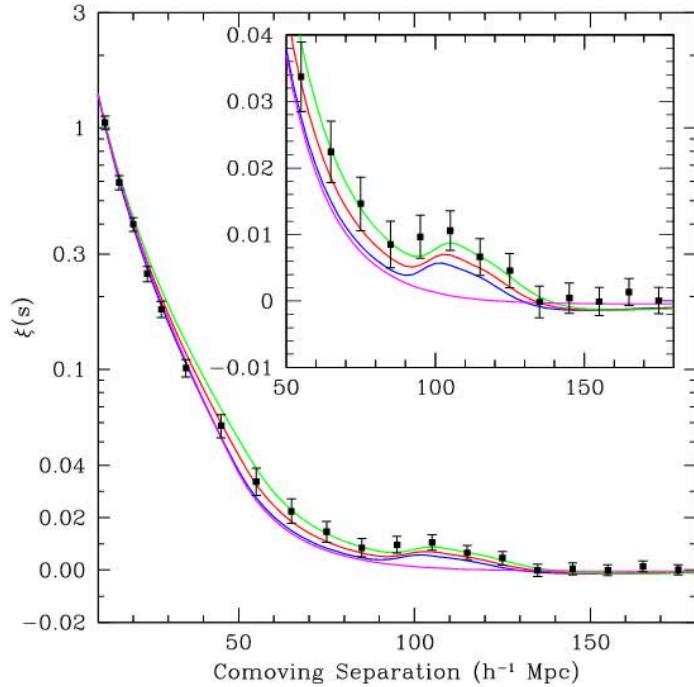


Figura 8 : Distribuzione della distanza tra coppie di galassie.

CAPITOLO 2

Equazioni per l'evoluzione dell'universo

Possiamo ora iniziare a ricavare le equazioni che governano l'evoluzione dell'universo. Per fare ciò iniziamo dalle evidenze sperimentaliste (da non confondere con le interpretazioni che diamo a esse) che sono state raccolte a partire dal '900:

- A grande scala (ossia oltre i 100 Mpc), l'universo che osserviamo sembra essere isotropo.
- Osservando le galassie, notiamo che in genere queste si stanno allontanando da noi tanto più velocemente quanto più sono lontane;

2.1. Il principio cosmologico

Iniziamo dalla prima evidenza, che ci permette di fare delle grandi semplificazioni ai calcoli. Le misure più recenti sono quelle ottenute dalle osservazioni *deep field* del telescopio Hubble (nel visibile) e del JWSP (nell'infrarosso). Queste possono essere viste come dei "carotaggi" nel cosmo in cui risultano visibili le galassie a tutte le distanze.

Da queste misure si osserva che l'universo è in prima approssimazione isotropo.

Un ulteriore conferma di questa evidenza risiede nella CMB, infatti come abbiamo detto in precedenza questa risulta essere uno spettro di corpo nero di $T = 2.725\text{ K}$ in tutte le direzioni con fluttuazioni incredibilmente piccole.

Questa isotropia può portarci alla condizione di omogeneità se assumiamo il **principio Copernicano** secondo il quale noi non ci troviamo in un luogo speciale dell'universo. Ciò ci porta a dire che l'universo è isotropo non solo rispetto a noi, bensì rispetto a un osservatore in qualunque luogo. Questi risultati vengono riassunti nel principio cosmologico

Legge 2.1: Principio cosmologico

L'universo a grande scala ($l \gtrsim 100\text{ Mpc}$), può essere considerato omogeneo e isotropo.

Osservazione

Il principio cosmologico potrebbe sembrare in contrasto con quello che abbiamo detto nel Capitolo 1, quando abbiamo parlato di ragnatela cosmica. Questo parzialmente è vero, tuttavia dobbiamo tenere a mente una cosa: quando parliamo di omogeneità non intendiamo per forza che le osservabili siano costanti e ovunque uguali, bensì che la struttura a grande scala abbia le stesse caratteristiche ovunque (eventualmente anche le disomogeneità locali).

Nella trattazione successiva avremo bisogno di assumere che l'universo sia effettivamente costante ovunque, in tal caso la struttura data dalla ragnatela cosmica verrà considerata come una perturbazione al primo ordine.

2.2. La legge di Hubble

Passiamo ora alla seconda evidenza: poco dopo la scoperta che delle galassie (in particolare della scoperta che questi oggetti fossero esterni alla Via Lattea), si scoprì che questi avevano un moto rispetto a noi.

Per misurare questo moto, si sfrutta il *redshift*.

Digressione: Effetto Doppler

Ricaviamo velocemente per ripasso la formula per la trasformazione della lunghezza d'onda data dall'effetto Doppler in relatività speciale.

Sia O il Sistema di Riferimento (SR) dell'osservatore che emette la luce e sia O' il SR dell'osservatore che la riceve, e siano λ_s e λ_o le lunghezze d'onda misurate rispettivamente alla sorgente da O e alla ricezione da O' . Assumiamo inoltre che i sistemi O e O' si stiano allontanando con velocità relativa v e che la luce venga emessa parallelamente a questa velocità. Nel caso generico questa velocità diventerà la $v_{\text{l.o.s.}}$ (lungo la linea di vista).

Il tempo che intercorre tra l'emissione di due fronti d'onda per l'osservatore O sarà

$$\Delta t_s = \frac{\lambda_s}{c}$$

mentre il tempo che intercorre tra la ricezione di due fronti d'onda sempre per O sarà (il secondo fronte deve percorrere uno spazio maggiore perché la sorgente si è allontanato)

$$\Delta t_r = \Delta t_s + \frac{v\Delta t_s}{c} = \Delta t_s(1 + \beta)$$

lo stesso tempo misurato dall'osservatore O' sarà

$$\Delta t'_r = \gamma \Delta t_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t_s(1 + \beta) = \Delta t_s \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

da cui

$$\lambda_o = c\Delta t'_r = \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \xrightarrow{\beta \ll 1} \lambda_s(1 + \beta) \quad (2.1)$$

Osservando una galassia si possono vedere le sue righe di emissione, se queste sono traslate rispetto ai valori che ci si aspetta (da misure di fisica nucleare fatte in laboratorio) questo significa che la galassia si sta allontanando o avvicinando.

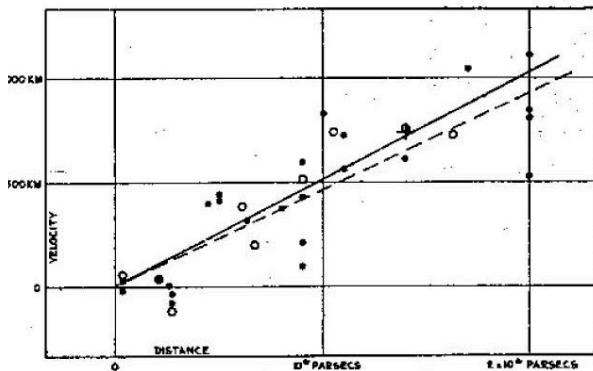
Definizione 2.1

Si definisce *redshift* \mathcal{Z} la quantità

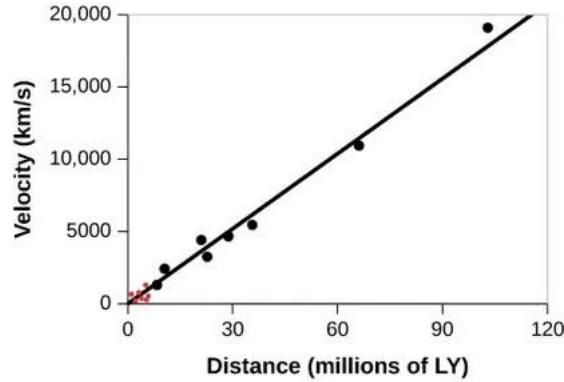
$$\mathcal{Z} = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} \simeq \beta \quad (2.2)$$

Se la sorgente si allontana dall'osservatore lo spettro risulterà spostato verso il rosso, se si avvicina risulterà spostato verso il blu (in tal caso si parla di *blueshift*).

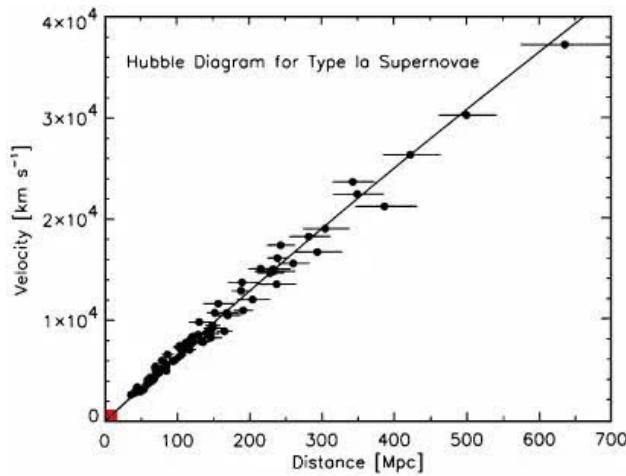
Hubble fu il primo a fare un catalogo di galassie misurandone la distanza e il redshift. Quello che notò fu una correlazione lineare tra queste due quantità: più una galassia è lontana più velocemente recede da noi. In realtà i dati presi da Hubble erano parecchio dispersi e il fit di una retta al giorno d'oggi sarebbe stato considerato molto azzardato, tuttavia con l'arrivo di nuovi dati prima da parte di Humason e in seguito da altri esperimenti il grafico si arricchì dimostrando la correttezza dell'ipotesi di Hubble.



(a) Dati originali di Hubble



(b) Dati di Hubble e Humason



(c) Dati recenti

Figura 9 : Andamento della velocità di recessione con la distanza.

Legge 2.2: Legge di Hubble-Lemaître

Esiste una proporzionalità diretta tra la distanza di una galassia e la sua velocità di recessione

$$v = H_0 d \quad (2.3)$$

con H_0 la **costante di Hubble**.

Notiamo che la dispersione si riduce all'aumentare della distanza. Ciò è dovuto al fatto che questa dispersione è data dai *moti peculiari* delle galassie, che ci aspettiamo essere dello stesso ordine di grandezza ovunque ($v_{\text{pec}} \approx 100 \text{ km/s}$). Quindi più aumentiamo la distanza e dunque la velocità di recessione, più i moti peculiari diventano trascurabili.

Per quanto riguarda il valore della costante di Hubble, questo è stato modificato più volte a causa di errori nella calibrazione delle distanze (la stima iniziale di Hubble era $H_0 \approx 500 \text{ km/s/Mpc}$). Ad oggi il valore è fissato a

$$H_0 \approx (70 \pm 1\%) \text{ km/s/Mpc} \quad (2.4)$$

tuttavia è presente una *tensione*, in quanto le stime date dalla CMS tendono a 67 km/s/Mpc mentre le misure dirette tendono a 71 km/s/Mpc. Questa discrepanza di $3 \div 5\sigma$ viene detta **tensione della costante di Hubble**.

2.3. Coordinate comoventi

Siamo quasi pronti per ricavare le equazioni per l'evoluzione dell'universo. Prima però introduciamo un concetto che ci accompagnerà in tutto il corso: le coordinate comoventi.

La legge di Hubble ha un andamento che ci permette di intrepretarla come se fossero le distanze stesse ad aumentare (vedremo in seguito l'interpretazione spaziotemporale). Possiamo quindi definire un sistema di coordinate che fattorizzi questa crescita delle distanze e in generale fattorizzi qualsiasi moto omogeneo degli oggetti all'interno dell'universo in modo tale che non siano loro a muoversi, bensì le coordinate stesse a cambiare. Questo sistema viene detto **coordinate comoventi**.

Indichiamo con \vec{x}_p le coordinate fisiche (quelle che effettivamente misuriamo) e con \vec{x}_c le coordinate comoventi. Verrà la relazione

$$\boxed{\vec{x}_p(t) = a(t)\vec{x}_c} \quad (2.5)$$

dove $a(t)$ è il **fattore di scala**.

Osservazione

In linea di principio il fattore di scala dovrebbe essere una matrice 3x3. Ma se così fosse vorrebbe dire che esistono delle direzioni preferenziali, mentre abbiamo detto che l'universo è isotropo. Dunque questo fattore non è nient'altro che uno scalare, cosa che rende questo sistema di coordinate molto comodo da usare.

Calcoliamo quanto vale la velocità a cui si muove una particella di fluido

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \dot{a}\vec{x}_c + \underbrace{a\dot{\vec{x}}_c}_{\vec{v}} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{x}_p + \vec{v} \quad (2.6)$$

Questa non è nient'altro che una versione più generale della legge di Hubble. Infatti tiene in conto delle **velocità peculiari** \vec{v} delle particelle rispetto alla griglia comovente e ammette una proporzionalità tra velocità e distanza variabile nel tempo

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.7)$$

Questo fattore viene detto **tasso di espansione** o **tasso di Hubble**, mentre tutto il termine $H\vec{x}_p$ viene detto **flusso di Hubble**.

Dato che il tasso di espansione varia nel tempo, avremo che la legge di Hubble è valida solo nell'universo locale (dove vediamo nel presente) mentre potrebbe avere diversi valori di H in tempi passati (e quindi a distanze maggiori). D'ora in poi indicheremo con uno zero a pedice le quantità valutate nel presente (H_0).

Possiamo anche vedere come trasforma la derivazione

$$\nabla_p = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_p} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_c} = \frac{1}{a} \nabla_c \quad (2.8)$$

$$\nabla_p^2 = \frac{1}{a^2} \nabla_c^2 \quad (2.9)$$

Una cosa da notare quando cambiamo tra le due coordinate, è che la derivata temporale parziale non è uguale. Questo perché cambia il punto in cui la valutiamo. Quello che rimane uguale è la derivata totale per il tempo, che segue il fluido in qualsiasi sistema di riferimento

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p + \vec{u} \cdot \nabla_p = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p + \frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_c \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_c + \dot{\vec{x}}_c \cdot \nabla_c = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_c + \frac{\vec{v}}{a} \cdot \nabla_c\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \neq \frac{\partial}{\partial t} \Big|_c \quad (2.10)$$

2.4. Equazioni di Friedmann da principi fluidodinamici

Possiamo ora ricavare le equazioni per l'evoluzione dell'universo in modo euristico. Iniziamo notando che alle scale a cui lavoriamo (100 Mpc), la dimensione delle galassie (10 kpc) è trascurabile. Quindi possiamo considerare le galassie come particelle puntiformi di un fluido molto rarefatto (le zone dense degli ammassi possono essere considerate anch'esse come singoli punti materiali) e non interagente²

Questo fluido rispetterà le equazioni di continuità e di Eulero. Iniziamo dalla continuità

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho &= 0 \\ \dot{\rho} &= -\rho (\nabla_p \cdot \vec{u})\end{aligned} \quad (2.11)$$

scriviamola ora in funzione delle coordinate comoving nel caso della materia che, essendo omogenea, sarà uguale al valore mediato (vedremo in seguito che per altre componenti potrei ottenere un risultato diverso)

$$\dot{\bar{\rho}}_m = -\bar{\rho}_m (\nabla_p \cdot \vec{u}) = -\bar{\rho}_m \frac{1}{a} \nabla_c \cdot (\dot{a} \vec{x}_c + \vec{v}) = -\bar{\rho}_m \left(\underbrace{\frac{\dot{a}}{a} \nabla_c \cdot \vec{x}_c}_3 + \underbrace{\frac{1}{a} \nabla_c \cdot \vec{v}}_0 \right)$$

ottenendo l'**equazione di continuità cosmologica**

$$\boxed{\dot{\bar{\rho}}_m = -3\bar{\rho}_m \frac{\dot{a}}{a}} \quad (2.12)$$

che si può integrare da un qualsiasi punto nel passato fino ad oggi (uso oggi come valore di scala perché so misurarlo)

$$\int_{\bar{\rho}_m(t)}^{\bar{\rho}_{m0}} d(\ln(\bar{\rho}_m)) = -3 \int_{a(t)}^{a_0} d(\ln(a)) \quad (2.13)$$

²Per maggiori approfondimenti consultare il corso Fondamenti di Astrofisica II: Galassie e strutture cosmiche.

$$\bar{\rho}_{m(t)} = \bar{\rho}_{m0} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3} \quad (2.14)$$

vediamo che c'è un andamento del tipo $\bar{\rho}_m(t) \propto a^{-3}$ che è ragionevole ricordando che a è legato alla distanza e dunque a^3 sarà legato al volume.

Passiamo ora all'equazione di Eulero

$$\rho \dot{\vec{u}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{press.}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{grav.}} \quad (2.15)$$

La pressione sarà omogenea ovunque e dunque il suo gradiente sarà nullo.

Il campo gravitazionale possiamo scriverlo con l'equazione di Gauss

$$\nabla_p \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (2.16)$$

e passando al potenziane ψ

$$\nabla_p^2 \psi = 4\pi G \rho \quad (2.17)$$

quindi

$$\cancel{\bar{\rho}_m} \dot{\vec{u}} = -\cancel{\bar{\rho}_m} \nabla_p \psi$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}\vec{x}_c + \vec{v}) = -\frac{1}{a} \nabla_c \psi$$

Posso ora sfruttare l'omogeneità per mandare a 0 le velocità peculiari del fluido (anche se quelle delle singole particelle possono non esserlo). Inoltre posso portare fuori dalla temporale \vec{x}_c sempre per omogeneità³.

$$\ddot{a}\vec{x}_c = -\frac{1}{a} \nabla_c \psi$$

Prendo ora la divergenza dell'equazione per poter sfruttare l'equazione di Poisson.

$$\nabla_c \cdot (\ddot{a}\vec{x}_c) = -\frac{1}{a} \nabla_c^2 \psi = -a \nabla_p^2$$

$$3\ddot{a} = -a 4\pi G \bar{\rho}_m$$

ottenendo la **seconda equazione di Friedmann**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}_m \quad (2.18)$$

$\frac{\ddot{a}}{a}$ viene detto **tasso di accelerazione** e possiamo notare che questo è negativo. Quindi se consideriamo solo la componente di materia, otteniamo che l'universo è destinato a fermare la sua espansione per poi contrarsi.

Posso ora lavorare la seconda equazione per combinarla con l'equazione di continuità. Iniziamo scrivendo

$$\ddot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{da}{da} \frac{da}{dt} = \dot{a} \frac{da}{da}$$

³In realtà potrei avere un moto omogeneo (come una contrazione o un moto di gruppo) rispetto alla griglia. Ma questo vorrebbe solo dire che ho scelto male le coordinate comovinge e posso riassorbirlo cambiando SR.

ora sostituiamo questo nell'equazione di Friedmann assieme all'equazione per l'evoluzione della densità

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\dot{a}}{da} &= -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} \\ \int_{\dot{a}(t)}^{\dot{a}_0} \dot{a} da &= -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}_{m0} a_0^3 \int_{a(t)}^{a_0} \frac{da}{a^2} \\ \frac{\dot{a}_0^2}{2} - \frac{\dot{a}^2}{2} &= -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}_{m0} \underbrace{\frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_{m0}} a^3}_{a_0^3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) = \frac{4\pi G}{3} (\bar{\rho}_{m0} a_0^2 - \bar{\rho}_m a^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Definendo (vedremo in seguito il significato)

$$k = \frac{1}{c^2} \left(\dot{a}_0^2 - \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_{m0} a_0^2 \right) \quad (2.20)$$

otteniamo la **prima equazione di Friedmann**

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_m - \frac{kc^2}{a^2}} \quad (2.21)$$

Abbiamo ottenuto le 3 equazioni (solo 2 sono indipendenti) che ci permettono di descrivere l'universo omogeneo e isotropo.

2.5. Dilatazione della luce

Ora che abbiamo scritto le equazioni per l'evoluzione di un universo omogeneo e isotropo in funzione del parametro α , andiamo a vedere un'altra interpretazione del redshift. Sappiamo che il redshift è una dilatazione delle lunghezze d'onda, ma le lunghezze d'onda non sono altro che lunghezze fisiche (le indichiamo con λ_p). Quindi possiamo scriverle con le coordinate comoving (le indichiamo con λ_c)

$$\lambda_p(t) = a(t)\lambda_c \quad (2.22)$$

Ma allora posso scrivere il redshift come

$$\mathcal{Z} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda(t_o)}{\lambda(t_e)} - 1 = \frac{a_0 \lambda_c}{a(t_e) \lambda_c} - 1$$

da cui

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1 + \mathcal{Z}} \quad (2.23)$$

Questa è una funzione monotona, quindi si può utilizzare \mathcal{Z} al posto di a riparametrizzando tutto.

Consideriamo ora una zona vicina a noi e sviluppiamo ambo i membri

$$\frac{a(t)}{a_0} \sim 1 + \underbrace{\frac{\dot{a}_0}{a_0}}_{H_0} (t - t_0)$$

$$\frac{1}{1+z} \sim 1 - z$$

$$c\mathcal{Z} = H_0(t-t_0)c$$

Ma $(t-t_0)c$ rappresenta la distanza d percorsa dalla luce per arrivare all'osservatore (e quindi la distanza della sorgente da noi).

$$c\mathcal{Z} = H_0 d \quad (2.24)$$

Quindi otteniamo nuovamente la legge di Hubble Lemaitre, questa volta però esplicitamente come un'approssimazione in un universo locale.

2.6. Gas interagente

Nella trattazione fatta fin'ora abbiamo sempre considerato il fluido come non interagente, sfruttando il fatto che le dimensioni delle galassie (le particelle del fluido) sono ordini di grandezza più piccole delle distanze tra le stesse. Tuttavia abbiamo anche visto che l'universo si sta espandendo, dunque possiamo concludere che in un tempo passato le particelle fossero molto più vicine e dunque interagenti.

Per descrivere questa situazione partiamo dalla prima legge della termodinamica

$$dU = T dS - p dV \quad (2.25)$$

ma questo lo consideriamo per tutto l'universo che non ha nulla con cui scambiare calore (è totalmente adiabatico), dunque $dS = 0$.

Inoltre possiamo scrivere l'energia come $U = mc^2 = \rho V c^2$ (andando ad assumere che tutta l'energia sia di massa⁴). Quindi $dU = V c^2 d\rho + \rho c^2 dV$.

$$V c^2 d\rho + \rho c^2 dV = -p dV \implies d\rho = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{dV}{V}$$

Ma $V \propto a^3 \Rightarrow \frac{dV}{V} = 3 \frac{da}{a}$ quindi

$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)$

(2.26)

Questa è l'equazione di continuità dove teniamo conto anche dei termini di interazione sotto forma di pressione.

Possiamo ora chiederci quali valori può assumere p . Partiamo dai gas perfetti

$$pV = Nk_B T \quad \text{e} \quad \langle E \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_b T \quad (2.27)$$

Posso ricavare quindi la pressione

$$p = \frac{N}{V}k_B T = \underbrace{\frac{N}{V}m}_{\rho} \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle = \frac{1}{3}\rho\langle v^2 \rangle$$

quindi

⁴Questa trattazione è molto euristica. Soprattutto se pensiamo che arriveremo a scrivere un risultato per la radiazione, che essendo *mass-less* non può avere l'energia sotto forma di massa. Inoltre in linea di principio nella trattazione con i fluidi non abbiamo fatto nulla che escludesse l'interazione di pressione, abbiamo solo escluso i termini relativistici.

Per adesso dobbiamo prendere questi risultati abbastanza per buoni, facendoci un'intuizione della loro provenienza. Tutto sarà più chiaro nella trattazione con la relatività generale.

$$\frac{p}{c^2} = \frac{1}{3}\rho \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} = \begin{cases} \approx 0 \text{ per particelle lente: polvere o materia} \\ \approx \frac{1}{3} \text{ per particelle relativistiche: radiazione} \end{cases} \quad (2.28)$$

Notiamo che in entrambi i casi i fluidi sono barotropici (dove la pressione è esprimibile in funzione della sola densità $p = p(\rho)$), possiamo quindi scrivere

$$p(\rho) = w\rho c^2 \text{ con } w = \begin{cases} w_m = 0 \\ w_r = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (2.29)$$

L'equazione di continuità per una determinata specie s diventa

$$\dot{\bar{\rho}}_s = -3H\rho(1+w_s) \quad (2.30)$$

che integrata dà

$$\bar{\rho}_s = \bar{\rho}_{s,0} \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(1+w_s)} \quad (2.31)$$

Abbiamo che per la materia $\rho \propto a^{-3}$ come avevamo ottenuto in precedenza, mentre per la radiazione $\rho \propto a^{-4}$. Quindi quest'ultima si diluisce più velocemente.

2.7. Abbondanze

Prendiamo la prima equazione di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Lavorare direttamente con le densità può però risultare scomodo. Quindi si tende ad esprimere rispetto ad un valore di riferimento:

Definizione 2.2

Si definisce **densità critica** ρ_c , il valore di densità tale per cui la costante k sia nulla

$$\boxed{\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}} \quad (2.32)$$

Si definisce **abbondanza** il rapporto tra una densità e la densità critica (entrambi valutati allo stesso tempo)

$$\boxed{\Omega_s = \frac{\bar{\rho}_s}{\rho_c}} \quad (2.33)$$

Di solito si utilizza il valore valutato oggi

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1.3 \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 7.7 \frac{\text{protoni}}{\text{m}^3} \quad (2.34)$$

e si scrive il valore ad epoche passate in funzione di quello presente

$$\rho_c(\mathcal{Z}) = \rho_{c0} \frac{H^2(\mathcal{Z})}{H_0^2} \quad (2.35)$$

Alcuni esempi di abbondanze di cui conosciamo i valori sono

$$\begin{aligned}\Omega_{m0} &\approx 0.3 && \text{da misure dirette} \\ \Omega_{r0} &\approx 9 \cdot 10^{-5} && \text{da misure della CMB} \\ \Omega_{k0} &\approx 0 && (\text{vediamo tra poco il significato})\end{aligned}$$

Riprendiamo ora l'equazione di Friedmann

$$\begin{aligned}H^2 &= \left(\frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_m + \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_r - \frac{Kc^2}{a^2} \right) \frac{H_0^2}{H_0^2} \\ &= H_0^2 \left(\frac{\bar{\rho}_m}{\rho_c} + \frac{\bar{\rho}_r}{\rho_c} - \frac{Kc^2}{a^2 H_0^2} \right) \\ &= H_0^2 \left[\underbrace{\left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} \frac{\bar{\rho}_{m0}}{\rho_c}}_{\Omega_{m0}} + \underbrace{\left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \frac{\bar{\rho}_r}{\rho_c}}_{\Omega_{r0}} - \underbrace{\left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} \frac{Kc^2}{a_0^2 H_0^2}}_{:= -\Omega_{k0}} \right] \\ \boxed{\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{r0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_{k0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2}} \quad (2.36)\end{aligned}$$

Se portiamo $\frac{H^2}{H_0^2}$ dall'altro lato otteniamo le abbondanze valutate in epoca passata (il fattore con gli H è quello che corregge le ρ_c)

$$1 = \Omega_m(\mathcal{Z}) + \Omega_r(\mathcal{Z}) + \Omega_k(\mathcal{Z}) \quad (2.37)$$

Quindi ad ogni epoca le abbondanze rappresentano la Valutando oggi si ottiene

$$1 = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{k0} \quad (2.38)$$

questo non quadra con i dati ed è il primo suggerimento del fatto che manca qualcosa (risolto con la costante cosmologica Ω_Λ).

2.8. Evoluzione delle densità delle specie

Proviamo a fare un grafico delle densità delle specie rispetto alla densità critica odierna

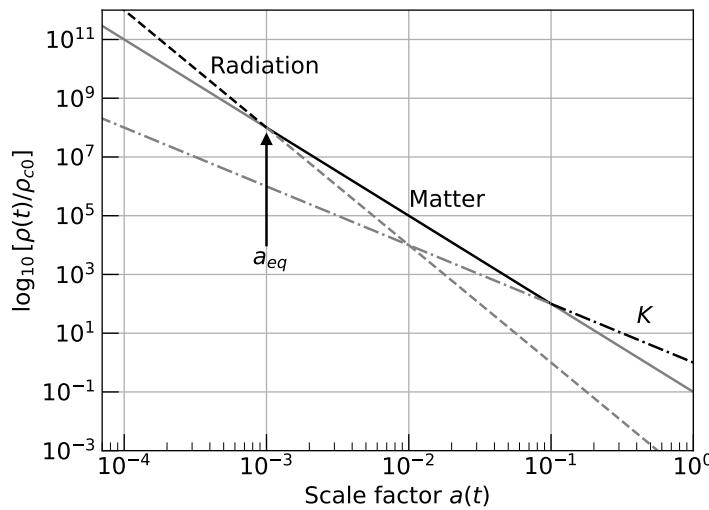


Figura 10 : Evoluzione delle densità delle specie (nella realtà K è una costante a 0).

Come possiamo notare la storia dell'universo può essere divisa in due **epocha**: una precedente dominata dalla radiazione, e una successiva dominata dalla materia. Queste due epocha sono separate da quella che viene detta **epoca dell'equivalenza** dove le densità erano comparabili. Possiamo calcolare a che fattore di scala (o redshift) si trovava questa epoca:

$$\bar{\rho}_m(a_{\text{eq}}) = \bar{\rho}_r(a_{\text{eq}})$$

$$\bar{\rho}_{m0} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \right)^{-3} = \bar{\rho}_{r0} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \right)^{-4}$$

$$\frac{a_{\text{eq}}}{a_0} = \frac{\bar{\rho}_{r0}}{\bar{\rho}_{m0}} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad (2.39)$$

$$z_{\text{eq}} = \frac{a_0}{a_{\text{eq}}} - 1 \approx 3.3 \cdot 10^3 \quad (2.40)$$

2.9. Evoluzione del fattore di scala

Fin'ora abbiamo collegato il fattore di scala ad una nozione di tempo nella storia dell'universo, senza mai formalizzare questo legame.

Possiamo procedere a studiare questa relazione nel caso di universo dominato da una singola specie, con $k = 0$.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_{s0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_s)}$$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \sim a^{-\frac{1}{2}(1+3w_s)} \implies dt \sim a^{\frac{1}{2}(1+3w_s)} da$$

$$t \sim a^{\frac{3}{2}(1+w_s)} \sim \begin{cases} a^{\frac{3}{2}} & \text{materia} \\ a^2 & \text{radiazione} \end{cases} \implies a \sim \begin{cases} t^{\frac{2}{3}} & \text{materia} \\ t^{\frac{1}{2}} & \text{radiazione} \end{cases} \quad (2.41)$$

Notiamo che queste due relazioni sono monotone e crescenti, quindi possiamo utilizzare a come un orologio (non lineare).

Se facciamo un grafico dell'evoluzione temporale dell'universo vediamo che questo decelera, come previsto dalla seconda equazione di Friedmann:

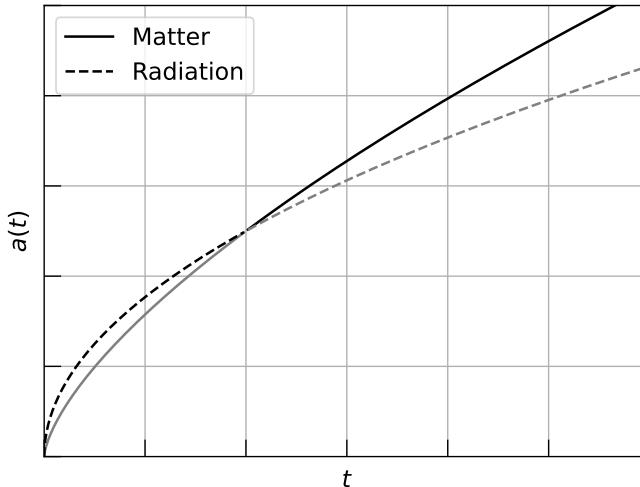


Figura 11 : Evoluzione delle densità delle specie.

CAPITOLO 3

Trattazione in relatività generale

3.1. Ripasso di relatività generale

La relatività generale è miglior teoria che abbiamo della gravità. Essa si basa sul principio che il campo gravitazionale non sia altro che una manifestazione della curvatura dello spazio tempo.⁵ Il linguaggio di questa teoria è quello della geometria differenziale, quindi tutte le equazioni dovranno essere scritte in forma **manifestamente covariante**.

Il concetto fondamentale della geometria differenziale è come trasformano le componenti degli oggetti sotto cambio di coordinate. Supponiamo di avere due sistemi di coordinate x^μ e \tilde{x}^ν e una mappa che li leggi $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\nu)$. Sia inoltre $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$ lo Jacobiano del cambio di coordinate.

Definizione 3.3

Un tensore ha un indice **covariante** (indicato con un indice basso U_μ) se trasforma con lo Jacobiano

$$\tilde{U}_\mu = U_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \quad (3.1)$$

Un tensore ha un indice **controvariante** (indicato con un indice alto V^μ) se trasforma con lo Jacobiano inverso

$$\tilde{V}^\mu = V^\nu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \quad (3.2)$$

Un generico tensore (n, m) è un oggetto che trasforma con n trasformazioni controvarianti e m trasformazioni covarianti

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = T^{\rho_1 \dots \rho_n}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_n}}{\partial x^{\rho_n}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_m}}{\partial \tilde{x}^{\nu_m}} \quad (3.3)$$

Uno **scalare** è un tensore $(0, 0)$ che quindi è uguale in tutti i sistemi di riferimento.

$$\tilde{\phi} = \phi \quad (3.4)$$

Tensori con un solo indice vengono anche detti **vettori controvarianti** e **vettori covarianti** (o **covettori**).

Un esempio di vettore controvariante è un normale vettore, infatti se immaginiamo di dimezzare la base, le componenti dovranno raddoppiarsi per lasciarlo invariato. Un esempio di vettore covariante è il gradiente di un campo scalare.

Un tensore fondamentale nella teoria è il **tensore metrico** (o **metrica**), un tensore simmetrico che ci permette di definire le distanze:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.5)$$

⁵Riportiamo di seguito una veloce e incompleta rassegna dei concetti più importanti di geometria differenziale e relatività generale. Tuttavia questa è carente di esempi e sottigliezze non ovvie. In caso di dubbi consultare un corso di Relatività Generale

Con la metrica possiamo anche alzare e abbassare gli indici

$$T_\mu = T^\nu g_{\mu\nu} \quad T^\mu = T_\nu g^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

dove $g^{\mu\nu}$ è la metrica inversa ($g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$).

Per fare fisica è necessario avere il concetto di derivazione anche di campi vettoriali. Tuttavia questi non trasformano “bene”. È quindi necessario definire il concetto di derivata covariante.

Definizione 3.4

La **derivata covariante** (di seguito indicata con ∇_μ o \mathcal{D}_μ) di un campo scalare è definita con la normale derivata

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \quad (3.7)$$

La derivata covariante di un campo vettoriale è definita come

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} V^\sigma \quad (3.8)$$

La derivata covariante di un campo vettoriale è definita come

$$\nabla_\mu U_\nu = \partial_\mu U_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} U_\sigma \quad (3.9)$$

La derivata covariante di un generico tensore è definita sommando alla derivata normale tante Γ per ogni indice controvariante e sottraendone tante per ogni indice covariante

$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ è quella che si dice **connessione**: un oggetto che trasforma in modo da far trasformare bene la derivata.

In linea di principio questa è l'unica condizione da applicare alla connessione, però noi siamo interessati ad una particolare connessione detta **connessione di Levi-Civita**. Questa ha la proprietà di essere *metric-compatible* (ovvero tale che la derivata covariante della metrica sia nulla) e *torsion-free* (ovvero simmetrica rispetto ai due indici bassi).

Imponendo queste condizioni si ottiene una relazione tra la connessione di Levi-Civita e la metrica codificata nei **simboli di Christoffel**

$$\boxed{\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})} \quad (3.10)$$

Un'idea intuitiva di cosa sia la connessione la si può avere pensandola come quell'oggetto che “connette” i piani tangenti su cui i vettori vivono.

Avendo definito la derivata covariante si può anche introdurre il concetto di trasporto parallelo di un tensore su una curva, imponendo che la derivata covariante del tensore lungo la curva sia nullo

$$\frac{\mathcal{D}T^{\mu_1\dots\mu_n}{}_{\nu_1\dots\nu_m}}{\mathcal{D}\lambda} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\lambda T^{\mu_1\dots\mu_n}{}_{\nu_1\dots\nu_m} = 0 \quad (3.11)$$

Dove λ è un parametro *affine* per parametrizzare la curva.

Si può anche definire il concetto di geodetica come la curva che trasporta parallelamente il proprio vettore tangente (è l'analogo della retta in spazio piatto)

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (3.12)$$

Possiamo ora procedere a scrivere l'equazione che descrive come viene generata la curvatura. Questa consisterà nella versione covariante dell'equazione di Poisson per la gravità

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G$$

Notiamo che il laplaciano ($\nabla^2 = \partial^i \partial_i$) non è nient'altro che la traccia del **tensore mareale** ($\partial_j \partial_i$). Questo contiene informazioni sulla curvatura (analogamente all'Hessiana per un campo scalare) ed è legato a quanto le geodetiche divergano o convergano.

L'unico oggetto che trasformi tensorialmente e contenga informazioni sulle derivate seconde è il **tensore di Riemann**

$$\mathcal{R}^\mu_{\nu\rho\kappa} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\kappa} \Gamma^\mu_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} \quad (3.13)$$

A noi interessa la traccia che è rappresentata dal **tensore di Ricci**

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\sigma_{\mu\sigma\nu} \quad (3.14)$$

Possiamo pensare che la traccia descrive come i volumi vengono contratti o dilatati, mentre la parte trace-less (detta *tensore di Weil*) descrive come vengono deformati.

Rimane un ultimo problema, ovvero che il tensore di Ricci non ha derivata covariante nulla, a differenza del tensore energia-impulso (nel secondo membro, che vedremo dopo) che rispetta una legge di continuità. Questo problema viene risolto definendo il **tensore di Einstein** che ha derivata nulla

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \quad (3.15)$$

dove $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ è lo **scalare di Ricci**.

3.1.1. Il tensore Energia-Impulso

Abbiamo visto il primo membro dell'equazione di Einstein $G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$. Passiamo ora al secondo.

Dobbiamo scrivere qualcosa di analogo al termine $4\pi G\rho$ dell'equazione di Poisson, ma che abbia 2 indici simmetrici e derivata covariante nulla. Sappiamo che la densità è legata alla massa, e questa la possiamo trovare nel quadrimomento $q^\mu = mu^\mu = \gamma(\frac{E}{c}, m\vec{v})$ con $q^\mu q^\nu g_{\mu\nu} = -m^2$.

La densità è una massa su volume e segue la relazione

$$m = \int dV \rho$$

ma in relatività parlare di volumi non è banale, in quanto questi sono ipersuperfici tridimensionali dello spazio-tempo valutati a tempo costante. Possiamo definire una relazione che sia più generale integrando una quantità su ipersuperfici 3D generiche (con una delle coordinate costanti) e imponendo che l'integrale sia uguale al quadrimomento.

$$q^\alpha = \frac{1}{3!} \int dx^\lambda dx^\mu dx^\nu \epsilon_{\lambda\mu\nu\beta} S^{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

dove $\frac{1}{3!}$ è un fattore combinatorio per compensare le permutazioni dei differenziali (per coloro con una conoscenza di base di geometria differenziale stiamo facendo l'Hodge per ottenere un oggetto ad un indice da contrarre con un indice di $S^{\alpha\beta}$). Per chi non dovesse essere familiare con questa notazione, basti sapere che ad esempio

$$\frac{1}{3!} \int dx^1 dx^2 dx^3 \epsilon_{1230} S^{\alpha 0} = \int dx^1 dx^2 dx^3 S^{\alpha 0}$$

dove gli indici λ, μ, ν e β devono essere obbligatoriamente diversi tra loro

Andiamo a studiare meglio le singole componenti per dare un senso fisico a $S^{\alpha\beta}$:

$$q^0 = \int dx^1 dx^2 dx^3 S^{00} + \int dx^0 dx^2 dx^3 S^{01} + \int dx^0 dx^1 dx^3 S^{02} + \int dx^0 dx^1 dx^2 S^{03}$$

Il primo integrale è integrato su un volume e ci restituisce un'energia $\frac{E}{c}$, quindi il termine S^{00} sarà una densità di Energia. Gli altri tre sono integrati su un'area e su un tempo, quindi S^{0i} rappresenta una densità di corrente di energia (di qui in avanti la chiameremo solo corrente di energia) in analogia a quello che è j^i per l'elettromagnetismo (che integrato su un area dà la corrente I , che a sua volta integrata sul tempo dà la variazione di carica).

Passiamo ai termini spaziali

$$q^i = \int dx^1 dx^2 dx^3 S^{i0} + \int dx^0 dx^2 dx^3 S^{i1} + \int dx^0 dx^1 dx^3 S^{i2} + \int dx^0 dx^1 dx^2 S^{i3}$$

Il primo integrale è integrato su un volume e ci restituisce un momento, quindi S^{i0} sarà una densità di momento. Gli altri tre sono integrati su un'area e su un tempo, quindi S^{ij} rappresenta una densità di corrente di momento. Questa non è nient'altro che una generalizzazione della pressione, infatti integrando la pressione su un'area otteniamo una forza, che integrata sul tempo dà un impulso. Questo è quello che in meccanica solida viene detto “tensore degli sforzi” con le componenti pressorie sulla diagonale e le componenti di taglio (shear) fuori dalla diagonale.

Osservazione

Questa “definizione” euristica del tensore $S^{\alpha\beta}$ l’abbiamo ottenuta da considerazioni fatte in relatività speciale, dove è sempre possibile definire ipersuperficie arbitrariamente grandi con una coordinata costante. In relatività generale ciò non è così semplice e necessita di una maggior cautela. Tuttavia noi ci faremo bastare l’intuizione che ci arriva dalla trattazione fatta sopra e non indagheremo oltre.

Possiamo a questo punto definire il **tensore energia-impulso**

$$T^{\alpha\beta} = cS^{\alpha\beta} \quad (3.17)$$

che rispetterà la condizione di continuità come il tensore di Einstein

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.18)$$

In linea di principio la densità di momento e la corrente di energia sono quantità diverse, ma noi sappiamo (a posteriori) dall’equazione di Einstein che $T_{\alpha\beta}$ è proporzionale a $G_{\alpha\beta}$ che è simmetrico. Quindi a noi interesserà solo la parte simmetrica di $T_{\alpha\beta}$.

Possiamo quindi scrivere l'**equazione di Einstein** che descrive come l’energia genera la curvatura

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

Il coefficiente di proporzionalità arriva da considerazioni dimensionali ($[\nabla^2(\psi)] = T^{-2}$, $[G_{\mu\nu}] = L^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[T_{\mu\nu}] = ML^2T^{-2}L^{-3}$) e imponendo che in approssimazione di campo debole l'equazione si riconduca a Poisson.

3.2. Metrica per universo omogeneo e isotropo

Possiamo ora andare a risolvere l'equazione di Einstein per un universo omogeneo e isotropo. Ciò consiste nel trovare l'espressione per il tensore metrico.

Per prima cosa dobbiamo imporre le condizioni di omogeneità e isotropia. Queste ci dicono che l'universo può essere rappresentato come una sequenza ordinata di sezioni spaziali ciascuna omogenea e isotropa, da cui la forma della metrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dl^2 \quad (3.20)$$

dove dl^2 rappresenta la distanza spaziale e a non è nient'altro che il fattore di scala che abbiamo introdotto in precedenza. Talvolta si usa ridefinire il tempo in modo tale da raccogliere a anche per il primo termine

$$ds^2 = a^2(\eta)(-c^2 d\eta^2 + dl^2) \quad (3.21)$$

η viene detto **tempo conforme**, ma lo riprenderemo solo in seguito.

Rimane ancora da capire come sia fatto dl^2 . Questo, dovendo valere le due condizioni, dovrà essere massimamente simmetrico (ovvero con scalari di curvatura costanti ovunque). Si dà il caso che ci siano solo 3 opzioni possibili:

Spazio piatto con curvatura = 0 (come lo spazio euclideo \mathbb{E}^3). La sua metrica la conosciamo

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.22)$$

Spazio sferico con curvatura > 0 (come una sfera ma tridimensionale \mathbb{S}^3). La sua metrica la possiamo costruire con un'immersione in \mathbb{R}^4 (la coordinata aggiuntiva la chiamiamo u)

$$\begin{cases} dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Spazio iperbolico con curvatura < 0 (indicato con \mathbb{H}^3). Esiste un teorema che ci dice che non possiamo immergerlo in \mathbb{R}^4 , tuttavia lo si può immagazzinare in $\mathbb{R}^{1,3}$ (spazio pseudoeuclideo con segnatura $(-, +) = (1, 3)$)

$$\begin{cases} dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -R^2 \end{cases} \quad (3.24)$$

Possiamo riassumere questi tre casi in una forma generica

$$\begin{cases} dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \kappa du^2 \\ u^2 = R^2 - \kappa x^i x_i \end{cases} \quad (3.25)$$

Dove κ può assumere i valori 0 per spazio piatto, +1 per spazio sferico, -1 per spazio iperbolico. Differenziando la seconda otteniamo

$$\begin{aligned} \cancel{\kappa} u du &= -\cancel{\kappa} x^i dx_i \\ dl^2 &= dx^i dx_i + \kappa \frac{\kappa^2 (x^i dx_i)^2}{u^2} = dx^i dx_i + \frac{\kappa^3 (x^i dx_i)^2}{R^2 - \kappa x^i x_i} \end{aligned}$$

Possiamo notare che per i valori accessibili $\kappa^3 = \kappa$ quindi

$$dl^2 = dx^i dx_i + \frac{\kappa(x^i dx_i)^2}{R^2 - \kappa x^i x_i} \quad (3.26)$$

Passiamo ora in coordinate sferiche 3D (r, θ, φ)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^i x_i = r^2 \\ x^i dx_i = r dr \\ dx^i dx_i = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{cases} \\ & dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \kappa \frac{r^2}{R^2} \frac{dr^2}{1 - \kappa \frac{r^2}{R^2}} = \frac{dr^2}{1 - \kappa \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Rinominando $K := \frac{\kappa}{R^2}$ otteniamo la **Metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)**:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.28)$$

Notiamo un paio di cose:

- La metrica è invariante sotto un riscalamento del tipo

$$\begin{cases} a \rightarrow a\lambda \\ r \rightarrow \frac{r}{\lambda} \\ K \rightarrow K\lambda \end{cases} \quad \text{per } \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

(dove il riscalamento di K corrisponde a fare $R \rightarrow \frac{R}{\lambda}$).

Questo significa che posso sfruttare questa libertà per fissare il valore del fattore di scala oggi $a_0 = a(t_0) \equiv 1$.

Quindi K (dunque anche R) rappresenta il valore oggi.

Un'interessante implicazione di ciò è che fino ad oggi a è rimasto nell'intervallo $(0, 1]$.

- La coordinata r è rappresenta una coordinata comovente, e non un'osservabile fisica (che misurerrei con degli ipotetici righelli).
La coordinata fisica sarà $r_p = ra(t)$ (come abbiamo definito precedentemente). Potremmo provare a scrivere la metrica in questo sistema di coordinate, ma risulterebbe molto più complicata e scomoda la trattazione. Conviene fare teoria in coordinate comoventi e fare la conversione in sede sperimentale.

Talvolta può essere comodo cambiare la coordinata radiale per semplificare ulteriormente la trattazione:

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr} \quad (3.30)$$

$$\chi = \int d\chi = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin(r\sqrt{K}) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} r(\chi) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\chi\sqrt{K}) & \text{per } K > 0 \\ \chi & \text{per } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\chi\sqrt{|K|}) & \text{per } K < 0 \end{cases} = \begin{cases} R \sin(\frac{\chi}{R}) & \text{per } \kappa > 0 \\ \chi & \text{per } \kappa = 0 \\ R \sinh(\frac{\chi}{R}) & \text{per } \kappa < 0 \end{cases} \quad (3.32) \\ &= \chi \operatorname{sinc}(\chi\sqrt{K}) := S_K(\chi) \end{aligned}$$

Quindi in queste coordinate la metrica diventa

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + S_K^2(\chi)d\Omega^2] \quad (3.33)$$

Se la scriviamo con il tempo conforme

$$ds^2 = a^2(\eta)[-c^2 d\eta^2 + d\chi^2 + S_K^2(\chi)d\Omega^2] \quad (3.34)$$

3.3. Nozioni di distanza

Abbiamo già detto che la metrica che abbiamo scritto è in funzione di coordinate comoving e ne abbiamo già viste due. Studiamo quindi cosa queste coordinate rappresentano, come si legano a nozioni fisiche e quali sono le distanze che misuriamo.

3.3.1. Radial comoving distance

La coordinata χ che abbiamo visto nella seconda espressione della metrica viene detta **radial comoving distance** (o **proper distance**).

Consideriamo un fotone ($ds^2 = 0$)

$$c^2 d\eta^2 = d\chi^2 \implies d\chi = \pm c d\eta$$

Prendendo un fotone che viene verso di noi $\chi = (\eta_0 - \eta)c$

Se volessi scriverlo in funzione del tempo t avrei

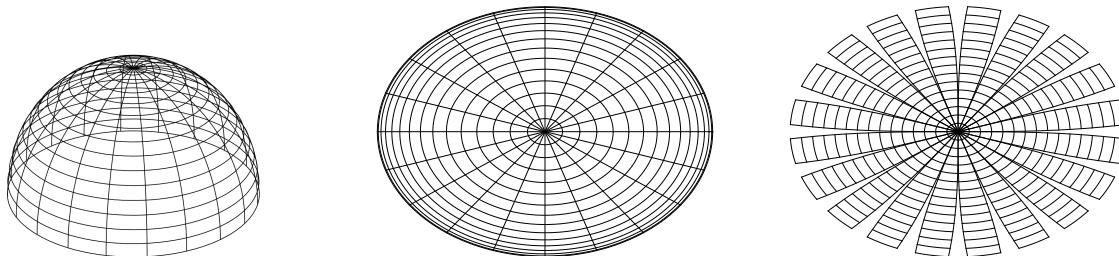
$$\chi(t) = c \int_t^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = c \int_a^{a_0} \frac{da}{\dot{a}a} = c \int_0^Z \frac{dZ}{H(Z)} \quad (3.35)$$

3.3.2. Angular comoving distance

La coordinata $r = S_K(\chi)$ viene detta **angular comoving distance** (o **transverse comoving distance** o **metric distance**). Essa rappresenta la distanza comovinga che lega le lunghezze d'arco a agli angoli sottesi.

Per uno spazio piatto la distanza angolare e radiale coincidono, così non è per spazi curvi dove per “appiattire” una delle due devo “stirare” l’altra.

La figura seguente cerca di dare un’intuizione di questo concetto.



(a) Rappresentazione immersa (b) Parametrizzazione in r e Ω (c) Parametrizzazione in χ e Ω

Figura 12 : Parametrizzazioni di uno spazio positivamente curvo.

3.3.3. Angular diameter distance

Passiamo ora alle distanze fisiche misurabili.

Si dice **angular diameter distance** d_A la distanza ottenuta confrontando la dimensione angolare di un oggetto con la sua reale dimensione fisica. Questo ovviamente lo si può fare solo per oggetti di cui si conosce la dimensione reale, detti **rigelli standard**. Un esempio di

righello standard sono le Barionic Acoustic Oscillations.

Questa all'atto pratico si definisce come

$$d_A \approx \frac{L}{\delta\theta} \quad (3.36)$$

dove L è la dimensione reale dell'oggetto, $\delta\theta$ la sua dimensione angolare e dove abbiamo fatto l'approssimazione di piccoli angoli (valida per osservazioni cosmologiche).

Voglio ora legarmi ad una delle distanze comoventi (è ovvio che mi interessa quella angolare). Per come l'ho definita e per come ho fissato il fattore di scala, so che la distanza comovente angolare r corrisponde alla distanza radiale fisica oggi (perché $a_0 = 1$). Ma l'osservazione che io sto facendo fa riferimento al tempo di emissione t , quindi

$$d_A = ra = \frac{r}{1 + \mathcal{Z}} \quad (3.37)$$

3.3.4. Luminosity distance

Si dice **luminosity distance** d_L la distanza ottenuta confrontando il flusso osservato a noi con la luminosità reale di un oggetto. Gli oggetti con luminosità nota vengono detti **candeles standard** (un esempio sono le supernove di tipo Ia). Operativamente si definisce tale che

$$F_o = \frac{L_e}{4\pi d_L^2} \quad (3.38)$$

Per collegarla alla distanza comovente (anche in questo caso mi interessa quella angolare), bisogna tenere conto di cosa succede ai fotoni nel viaggio fino a noi (possiamo ignorare l'azione diretta del fattore di scala su r perché tanto l'osservazione è fatta oggi). La luminosità è data da

$$L = \frac{E_\gamma}{\Delta} t$$

dove $E_\gamma = \hbar\nu = \hbar\frac{c}{\lambda}$ è l'energia dei singoli fotoni, mentre Δt è il tasso a cui vengono emessi. Ma la lunghezza d'onda dei fotoni viene stirata ($\lambda_e = a\lambda_o$) quindi perdono energia. Inoltre il tasso di arrivo cambia, ciò che rimane costante è $\Delta\eta = a\Delta t = \Delta t_0$. Quindi la luminosità osservata sarà

$$L_e = \frac{L_o}{a^2}$$

Quindi avrò

$$d_L^2 = \frac{r^2}{a^2}$$

$$d_L = \frac{r}{a} = (1 + \mathcal{Z})r \quad (3.39)$$

Possiamo poi scrivere una relazione tra le due distanze fisiche ottenendo la **relazione di Etherington sulla dualità delle distanze**

$$d_L(\mathcal{Z}) = (1 + \mathcal{Z})^2 d_A(\mathcal{Z}) \quad (3.40)$$

3.4. Tensore di Einstein per universo omogeneo e isotropo

Procediamo ora a calcolare il tensore di Einstein per la metrifica FLRW. Volendo semplificare i calcoli, scegliamo l'espressione nelle coordinate $x^\mu = (ct, \chi, \theta, \varphi)$.

In questa abbiamo

$$g_{00} = -1 \quad g_{11} = a^2 \quad g_{22} = a^2 S_K^2 \quad g_{33} = a^2 S_K^2 \sin^2(\theta) \quad (3.41)$$

Le funzioni metriche inverse sono

$$g^{00} = -1 \quad g^{11} = \frac{1}{a^2} \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 S_K^2} \quad g^{33} = \frac{1}{a^2 \sin^2(\theta) S_K^2} \quad (3.42)$$

Di seguito indicheremo la metrifica spaziale come γ_{ij} , che non dipende dal tempo.

Possiamo quindi calcolare i simboli di Christoffel

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$$

Ricordando che la metrifica è diagonale, ogni volta che uno dei due indici verrà fissato, potremo fissare anche l'altro.

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\cancel{\partial_0 g_{0\sigma}} + \cancel{\partial_0 g_{\sigma 0}} - \cancel{\partial_\sigma g_{00}}) = 0 \\ \Gamma^i{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{i\sigma} (\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \cancel{\partial_\sigma g_{00}}) = \frac{1}{2} g^{ii} (2\partial_0 g_{0i}) = 0 \\ \Gamma^0{}_{i0} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_i g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma i} - \cancel{\partial_\sigma g_{0i}}) = \frac{1}{2} g^{00} (\cancel{\partial_i g_{00}} + \partial_0 g_{0i}) = 0 = \Gamma^0{}_{0i} \\ \Gamma^0{}_{ij} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_i g_{j\sigma} + \partial_j g_{\sigma i} - \partial_\sigma g_{ij}) = \frac{1}{2} g^{00} (\cancel{\partial_i g_{j0}} + \cancel{\partial_j g_{0i}} - \partial_0 g_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} (-1) (-\partial_0 (a^2 \gamma_{ij})) = \frac{a\dot{a}}{c} \gamma_{ij} = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \\ \Gamma^i{}_{j0} &= \frac{1}{2} g^{i\sigma} (\partial_j g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma j} - \cancel{\partial_\sigma g_{j0}}) = \frac{1}{2} g^{ii} (\partial_j g_{0i} + \partial_0 g_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} (a^{-2} \gamma^{ii}) (\partial_0 (a^2 \gamma_{ij})) = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \\ \Gamma^i{}_{jk} &= \frac{1}{2} g^{i\sigma} (\partial_j g_{k\sigma} + \partial_k g_{\sigma j} - \cancel{\partial_\sigma g_{jk}}) = \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^{im}) (\partial_j \gamma_{km} + \partial_k \gamma_{mj} - \partial_m \gamma_{jk}) \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli per le componenti spaziali riportiamo di seguito i termini non nulli

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{ij} &= \frac{a\dot{a}}{c} \gamma_{ij} & \Gamma^i{}_{j0} &= \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} & \Gamma^1{}_{22} &= -S_K S'_K & \Gamma^1{}_{33} &= -S_K S'_K \sin^2(\theta) \\ \Gamma^2{}_{21} &= \frac{S'_K}{S_K} & \Gamma^2{}_{33} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) & \Gamma^3{}_{31} &= \frac{S'_K}{S_K} & \Gamma^3{}_{32} &= \cot(\theta) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Possiamo quindi calcolare il tensore di Ricci

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}$$

Svolgendo i conti ci si rende conto che anche il tensore di Ricci è diagonale (ci si può anche arrivare ricordando che l'universo è isotropo e se Ricci avesse componenti off-diagonal, questo

definirebbe direzioni preferenziali). Dunque mi basta calcolare 4 componenti (riportiamo di seguito solo i risultati):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{00} &= -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} \\ \mathcal{R}_{11} &= \frac{a\ddot{a}}{c^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{c^2} - 2\frac{S_K''}{S_K} = \frac{a^2}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right] \\ \mathcal{R}_{22} &= \frac{a\ddot{a}}{c^2} S_K^2 + 2\frac{\dot{a}^2}{c^2} S_K^2 - S_K S_K'' + 1 - (S_K')^2 = \frac{a^2}{c^2} S_K^2 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right] \\ \mathcal{R}_{33} &= \sin^2(\theta) \left[\frac{a\ddot{a}}{c^2} S_K^2 + 2\frac{\dot{a}^2}{c^2} S_K^2 - S_K S_K'' + 1 - (S_K')^2 \right] = \frac{a^2}{c^2} S_K^2 \sin^2(\theta) \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right]\end{aligned}$$

Gli ultimi tre risultati possono essere riuniti assieme formando

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{00} &= -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} \\ \mathcal{R}_{ij} &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right] g_{ij}\end{aligned}\tag{3.44}$$

Calcoliamo lo scalare di Ricci

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} = -\mathcal{R}_{00} + g^{ij} \mathcal{R}_{ij} \\ &= \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right] \underbrace{g^{ij} g_{ij}}_3 \\ &= \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right]\end{aligned}\tag{3.45}$$

Infine possiamo calcolare il tensore di Einstein $G^\mu_\nu = G_{\rho\nu} g^{\rho\mu} = \mathcal{R}^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu \mathcal{R}$ (questo è quello con la forma più semplice)

$$\begin{aligned}G^0_0 &= \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right] = -\frac{3}{c^2} \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right] \\ G^i_j &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right] \delta^i_j - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right] \delta^i_j \\ &= -\frac{1}{c^2} \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right] \delta^i_j\end{aligned}\tag{3.46}$$

3.5. Tensore energia-impulso per un gas perfetto

Vogliamo ora calcolare il tensore energia-impulso nel nostro caso (ricordiamo che approssimiamo tutto ad un fluido). Dato che stiamo considerando un universo omogeneo e isotropo non possiamo avere densità di momenti, correnti di energia o sforzi di taglio (altrimenti questi definirebbero una direzione preferenziale rompendo l'isotropia). Inoltre, sempre per isotropia, ci mettiamo nel sistema di riferimento a riposo con il fluido.

Dunque il tensore sarà diagonale

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}c^2 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \bar{p}\mathbb{1}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}c^2 + \bar{p} & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & 0_3 \end{pmatrix} + \bar{p} \begin{pmatrix} -1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}$$

La prima matrice la possiamo ottenere sfruttando il fatto che, essendo comoventi con il fluido, $u^\mu = (c, \vec{0})$, mentre la seconda non è nient'altro che Minkowski, quindi otteniamo

$$T^{\mu\nu} = \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + \bar{p} \eta^{\mu\nu} \quad (3.47)$$

passando in relatività generale

$$T^{\mu\nu} = \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + \bar{p} g^{\mu\nu} \quad (3.48)$$

quindi

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}c^2 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \bar{p}\frac{1}{a^2}\gamma^{ij} \end{pmatrix}$$

Bisogna però fare attenzione che in relatività generale alzare e abbassare gli indici non è banale quanto cambiare dei segni. Infatti si ottiene

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu\rho}g_{\nu\rho} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}c^2 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \bar{p}\delta^i{}_j \end{pmatrix} \quad T_{\mu\nu} = T^\rho{}_\nu g_{\mu\rho} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}c^2 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \bar{p}a^2\gamma_{ij} \end{pmatrix}$$

3.6. Equazioni di Friedmann

Siamo pronti per mettere insieme tutti i risultati ottenuti finora.

Iniziamo dall'equazione di continuità $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ per la componente $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\mu T^\mu{}_0 &= \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu{}_{\rho\mu} T^\rho{}_0 - \Gamma^\rho{}_{\mu 0} T^\mu{}_\rho \\ &= \partial_0 T^0{}_0 + \partial_i \cancel{T^i{}_0} + \cancel{\Gamma^0{}_{\rho 0} T^\rho{}_0} + \Gamma^i{}_{\rho i} T^\rho{}_0 - \cancel{\Gamma^0{}_{00} T^0{}_\rho} - \Gamma^0{}_{i0} T^i{}_\rho \\ &= \partial_0 T^0{}_0 + \Gamma^i{}_{0i} T^0{}_0 + \Gamma^i{}_{ji} \cancel{T^j{}_0} - \Gamma^0{}_{i0} \cancel{T^i{}_0} - \Gamma^j{}_{i0} T^i{}_j \\ &= \frac{d}{dt}(-\bar{\rho}c^2) + \underbrace{\frac{\dot{a}}{a} \delta^i{}_i}_{-3} (-\bar{\rho}c^2) - \underbrace{\frac{\dot{a}}{a} \bar{p} \delta^j{}_i \delta^i{}_j}_{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{\bar{\rho}} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right)} \quad (3.49)$$

Abbiamo riottenuto l'equazione di continuità cosmologica.

Non calcoliamo i termini $\nu = 1$, in quanto danno tutti soluzioni triviali $0 = 0$ (sopravvivono solo le derivate spaziali di T che sono nulle).

Passiamo ora all'equazione di Einstein $\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (3.50)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\bar{\rho} + 3\frac{\bar{p}}{c^2}\right) \quad (3.51)$$

Queste sono rispettivamente la prima e la seconda equazione di Friedmann. Notiamo che la prima è identica a quella già ottenuta in precedenza, solo che ora sappiamo il significato di K . La seconda invece ha un termine in più che nella trattazione classica ci siamo persi non avendo tenuto conto che anche la radiazione gravita.

3.7. Evoluzione in presenza di curvatura

Oggi dalle misure sappiamo che K è compatibile con 0, tuttavia è interessante capire come sarebbe l'evoluzione dell'universo in presenza di curvatura. In particolare abbiamo già visto che l'universo è stato inizialmente dominato dalla radiazione e ora è dominato dalla materia, e se ci fosse anche la curvatura (che si diluisce come $\sim a^{-2}$) questa dominerebbe in un futuro. Abbiamo inoltre risolto le equazioni per universi a singola componente trovando

$$a \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad \text{con} \quad \bar{p} = w\bar{\rho}$$

Andiamo ora a studiare come evolve l'universo a due componenti materia e curvatura. Iniziamo dall'equazione con le abbondanze

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2(\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{k0}a^{-2})$$

$$\dot{a}^2 = H_0^2(\Omega_{m0}a^{-1} + \Omega_{k0})$$

Passiamo poi al tempo conforme $\eta = \frac{t}{a} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}$ (indichiamo $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ e $Q' = \frac{dQ}{d\eta}$)

$$\begin{aligned} (a')^2 &= H_0^2(\Omega_{m0}a + \Omega_{k0}a^2) \\ &= H_0^2\Omega_{m0}a\left(1 + \frac{\Omega_{k0}}{\Omega_{m0}}a\right) \\ &= H_0^2\Omega_{m0}a\left(1 - \frac{-\Omega_{k0}}{\Omega_{m0}}a\right) \end{aligned}$$

Facciamo ora un cambio di variabile $y^2 = -\frac{\Omega_{k0}}{\Omega_{m0}}a \Rightarrow a = -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}}y^2 \Rightarrow a' = -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}}2yy'$. Notiamo che y può assumere anche valori immaginari (perché Ω_{k0} può essere positivo o negativo), ma questo non ci spaventa in quanto ci basta anteporre una i a tutti i conti, e trasformare le funzioni trigonometriche in iperboliche.

$$\frac{\Omega_{m0}^2}{\Omega_{k0}^2}4y^2(y')^2 = -H_0^2\Omega_{m0}\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}}y^2(1 - y^2)$$

$$y' = \frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{2}H_0^2\sqrt{-\Omega_{k0}}\sqrt{1 - y^2}$$

$$\int d\eta = \frac{2}{H_0^2\sqrt{-\Omega_{k0}}} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{2}{H_0^2 \sqrt{-\Omega_{k0}}} \arcsin(y) \\
y &= \sin\left(\underbrace{\frac{1}{2} H_0 \sqrt{-\Omega_{k0}} \eta}_{\theta}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
a &= -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} y^2 = -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta)) \\
a &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} (\cos(\theta) - 1)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Torniamo ora al tempo cosmologico t

$$t = \int dt = \int a d\eta = \frac{2}{H_0 \sqrt{-\Omega_{k0}}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} (\cos(\theta) - 1) \right]$$

ma notiamo che

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{2} d\theta$$

quindi

$$t = \frac{2}{H_0 \sqrt{-\Omega_{k0}}} \int \frac{1}{2} d\theta \left[\frac{1}{2} \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} (\cos(\theta) - 1) \right] = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m0}}{(-\Omega_{k0})^{\frac{3}{2}}} [\theta - \sin(\theta)] \tag{3.53}$$

mettendo assieme a e t

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m0}}{(-\Omega_{k0})^{\frac{3}{2}}} [\theta - \sin(\theta)] \\ a = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{k0}} (1 - \cos(\theta)) \end{cases} \tag{3.54}$$

Questa è la parametrizzazione di un cicloide.

- Se $K > 0 \Leftrightarrow \Omega_{k0} < 0$ ho effettivamente il cicloide.

All'inizio ho un *Big-Bang* seguito da un'espansione, poi una decelerazione che porta ad una contrazione e infine un *Big-Crunch*. Si parla di **universo chiuso**.

Se sviluppo attorno a 0 ottengo $t \sim a^{\frac{2}{3}}$ che effettivamente è il risultato che avevamo trovato per l'universo di sola materia.

- Se $K < 0 \Leftrightarrow \Omega_{k0} > 0$ le funzioni trigonometriche diventano iperboliche.

Questo significa che non ho mai la ricontrazione, quindi l'universo si espande per sempre. Si parla di **universo aperto**.

- Se $K = \Omega_{k0} = 0$ abbiamo il caso già visto in precedenza.

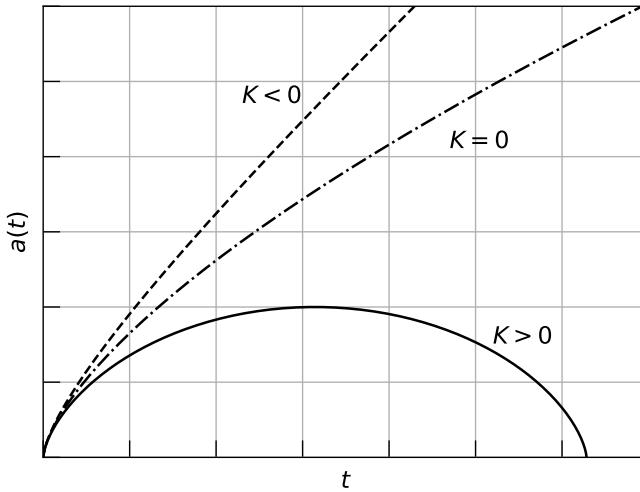


Figura 13 : Evoluzione del fattore di scala per universo dominato da materia e curvatura.

3.8. La costante cosmologica

Abbiamo già visto l'equazione

$$1 = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{k0}$$

e abbiamo visto che le misure odierne sono $\Omega_{r0} \approx 10^{-4}$, $\Omega_{m0} \approx 0.3$ e $\Omega_{k0} \approx 0$. È evidente che queste non sommano a 1. Dunque è necessario aggiungere qualcosa, quello che si fa è introdurre una nuova componente detta **costante cosmologica** Λ .

La costante cosmologica è stata inizialmente introdotta da Einstein, non soddisfatto del risultato di un universo che non fosse statico.

Si rese conto che poteva ridefinire il tensore $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda \quad (3.55)$$

Questo tensore continua a rispettare la legge di continuità $\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$ se $\Lambda = \text{cost}$ (dato che $g_{\mu\nu}$ ha derivata covariante nulla). Con questa modifica le equazioni di Friedmann diventano (questa è la versione finale che useremo)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.56)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\bar{\rho} + 3\frac{\bar{p}}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.57)$$

Einstein voleva ottenere un universo statico ($\ddot{a} = \dot{a} = 0$) e di sola materia ($\bar{p} = 0$). Imponendo queste condizioni si ottiene

$$\Lambda_E = 4\pi G\bar{\rho}_m \quad K_E = 4\pi G\bar{\rho}_m \frac{a^2}{c^2} \quad (3.58)$$

In seguito si osservò che l'universo si stava espandendo e questa idea venne accantonata (alcune fonti riportano che Einstein l'abbia definita l'errore più grande della sua vita) anche se in linea di principio questa non era da escludere.

Un'ulteriore cosa da notare è che l'universo di Einstein era in un punto di equilibrio instabile (anche un solo elettrone in più avrebbe causato la contrazione o l'espansione).

L'idea venne ripresa in considerazione negli anni '90 quando le osservazioni delle SNeIa misero in evidenza problemi nel modello.

3.8.1. Misura dell'espansione accelerata

La misura dell'espansione accelerata viene fatta con la stessa tecnica con cui è stata scoperta la legge di Hubble: si osservano oggetti di cui si riesce a misurare sia un qualche tipo di distanza (tendenzialmente la distanza di luminosità d_L) sia il redshift. L'unica differenza è che si osserva a distanze maggiori dove si riesce ad apprezzare un termine superiore dello sviluppo in serie che ha portato alla legge di Hubble. Gli oggetti osservati a così grande distanza sono le SNeIa e le onde gravitazionali.

Andiamo a considerare un ordine superiore nello sviluppo in serie di a nell'universo locale

$$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}|_{a=1}(t - t_0)^2$$

Definiamo il **parametro di decelerazione** (chiamato così per motivi storici)

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (3.59)$$

e otteniamo

$$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}H_0^2q_0(t - t_0)^2$$

Quindi q_0 sarà il nuovo parametro che dovremo determinare con un fit sui dati.

Andiamo dunque a sviluppare l'espressione per la distanza di luminosità

$$d_L(\mathcal{Z}) = (1 + \mathcal{Z})r(\mathcal{Z}) = (1 + \mathcal{Z})\chi \operatorname{sinc}(\chi\sqrt{K}) \sim (1 + \mathcal{Z})\chi$$

Sviluppiamo χ

$$\chi(\mathcal{Z}) = \int_0^{\mathcal{Z}} \frac{c d\mathcal{Z}'}{H(\mathcal{Z}')} = c \int_0^{\mathcal{Z}} \left[\frac{1}{H_0} + \frac{dH}{d\mathcal{Z}'} \Big|_{\mathcal{Z}=0} \mathcal{Z}' + \dots \right] d\mathcal{Z}' = \frac{c\mathcal{Z}}{H_0} - \mathcal{Z}^2 \frac{c}{2H_0^2} \frac{dH}{d\mathcal{Z}} \Big|_{\mathcal{Z}=0} + \dots$$

Dobbiamo calcolare la derivata di $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\frac{dH}{d\mathcal{Z}} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{da} \frac{da}{d\mathcal{Z}} = \left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \frac{1}{\dot{a}} (-a^2) = \frac{a^2 \dot{a}^2}{\dot{a}^2} \left(1 - \underbrace{\frac{\ddot{a}}{aH^2}}_{-q} \right) = \dot{a}(1 + q)$$

Reinserendo nello sviluppo di χ

$$\chi(\mathcal{Z}) = \frac{c}{H_0} (\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^2(q_0 + 1)) + \dots \quad (3.60)$$

Quindi

$$d_L = \frac{c\mathcal{Z}}{H_0} - \frac{1}{2} \frac{c\mathcal{Z}^2}{H_0} (1 + q_0) + \frac{c\mathcal{Z}^2}{H_0} + \dots = \frac{c\mathcal{Z}}{H_0} + \frac{c\mathcal{Z}^2}{2H_0} (1 - q_0) + \dots \quad (3.61)$$

Questa viene detta **espansione cosmografica** e ha la meravigliosa caratteristica di essere indipendente dal modello di universo scelto.

Ad oggi tuttavia si tende a fare il fit direttamente con tutto il modello cosmologico per non perdere termini nello sviluppo in serie.

Quando negli anni '90 si iniziò a fare misure a grandi distanza, si notò che il fit dava un'accelerazione invece che una decelerazione come atteso. Le opzioni principali per spiegare questo andamento erano 2:

- Violare la **strong energy condition** (SEC)

$$\bar{\rho} + 3\bar{p} > 0 \quad (3.62)$$

dove ricordiamo $\bar{\rho} = \sum_s \bar{\rho}_s$ e $\bar{p} = \sum_s \bar{p}$ con s le specie (radiazione, materia, ecc...)

- Reinserire la costante cosmologica nelle equazioni di Einstein

Si scelse di preservare la SEC e dunque si reinserì la costante cosmologica

3.8.2. Costante cosmologica come forma di energia

Al giorno d'oggi, nelle equazioni di Einstein si tende a spostare Λ dall'altro lato (mettiamo $c = 1$)

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T^\Lambda_{\mu\nu}) \quad \text{con} \quad T^\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu} \quad (3.63)$$

Questo per due motivi principali:

- Operativamente risulta più semplice trattare Λ come tutte le altre sorgenti
- Non sapremmo il significato di un termine aggiuntivo alla curvatura

Andiamo a vedere le componenti del tensore energia-impulso di Λ :

$$T^\Lambda_{00} = -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G}(-1) \quad T^\Lambda_{ij} = -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G}a^2\gamma_{ij}$$

Interpretando i termini come densità e pressione ($T_{00} = \rho c^2$ e $T_{ij} = pa^2\gamma_{ij}$) si ottiene

$$\bar{\rho}_\Lambda = \Lambda \frac{c^2}{8\pi G} \quad \bar{p}_\Lambda = -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G} = -\bar{\rho}_\Lambda c^2 \quad (3.64)$$

Quindi abbiamo una nuova specie con $w_\Lambda = -1$ (dove ricordiamo $\bar{\rho}_s = \bar{p}_s w_s c^2$).

Sottolineiamo inoltre che essendo Λ costante avremo $\bar{\rho} = \text{cost} \neq \bar{\rho}(t)$.

Questo ci porta ad aggiornare il grafico con le evoluzioni delle abbondanze al variare del fattore di scala (continuando a ignorare la curvatura)

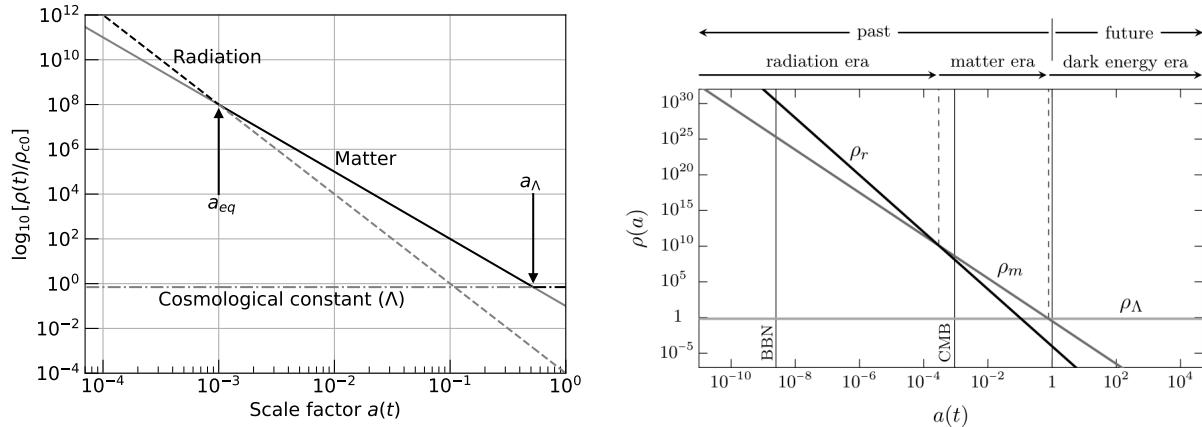


Figura 14 : Evoluzione delle densità delle specie.

Abbiamo ancora che per la maggior parte del tempo l'universo è descrivibile come epoche dominate da una singola componente, intervallate da epoche di equivalenza:

- **L'equivalenza materia-radiazione** che abbiamo già visto $\bar{\rho}_r(a_{\text{eq}}) = \bar{\rho}_m(a_{\text{eq}})$
- **L'equivalenza Λ -materia** dove $\bar{\rho}_m(a_{\text{eq}}) = \bar{\rho}_\Lambda$

Possiamo andare a calcolare il fattore di scala di quest'ultima dividendo per $\rho_{c,0}$

$$\frac{\bar{\rho}_{m,0}a_\Lambda^{-3}}{\rho_{c,0}} = \frac{\bar{\rho}_\Lambda}{\rho_{c,0}}$$

$$\Omega_{m,0}a_\Lambda^{-3} = \Omega_{\Lambda,0}$$

dove

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \frac{8\pi G}{3H_0^2} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (3.65)$$

Notiamo che è importante mettere il pedice 0, perché sebbene Λ sia costante, ρ_c non lo è, quindi ho un'evoluzione

$$\Omega_\Lambda(\mathcal{Z}) = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{H^2(\mathcal{Z})/H_0^2}$$

Risolvendo per a_Λ

$$a_\Lambda = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}} \approx \sqrt[3]{\frac{0.3}{0.7}} \approx 0.75 \implies \mathcal{Z}_\Lambda = \frac{1}{a_\Lambda} - 1 \approx 0.33$$

Notiamo che questo è un valore abbastanza vicino.

Calcoliamo ora l'andamento temporale del fattore di scala nella dominazione della costante cosmologica

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}_\Lambda = H_0^2\Omega_{\Lambda,0} \\ \dot{a} &= H_0 a \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \end{aligned}$$

$$a \sim \exp \left\{ \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \right\} \quad (3.66)$$

Ricapitolando le epoche di dominazione abbiamo

Radiation dominated con un andamento $a \sim t^{\frac{1}{2}}$

Matter dominated con un andamento $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ detto *universo di Einstein-De Sitter*

Curvature dominated con un andamento $a \sim \sqrt{-K}t$ detto *universo di Milne*.

Da notare come in questo caso sia concessa solo una curvatura positiva $K < 0$, quindi solo un universo chiuso

Λ dominated con un andamento $a \sim \exp \left\{ \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \right\}$ detto *universo di De Sitter* che è l'universo in cui ci troviamo noi oggi

Possiamo anche aggiornare la nostra equazione delle abbondanze

$$H^2(\mathcal{Z}) = H_0^2 [\Omega_{r,0}(1 + \mathcal{Z})^4 + \Omega_{m,0}(1 + \mathcal{Z})^3 + \Omega_{K,0}(1 + \mathcal{Z})^2 + \Omega_{\Lambda,0}] \quad (3.67)$$

3.9. Evoluzione delle disomogeneità e formazione delle galassie

Iniziamo ora un processo di rilassamento delle assunzioni che abbiamo fatto fin'ora.

Consideriamo per semplicità un universo matter-dominated con delle fluttuazioni rispetto all'omogeneità

$$\rho = (1 + \delta)\bar{\rho}$$

Consideriamo una regione sferica di raggio comovente R in cui la densità sia ρ immersa in un universo di densità $\bar{\rho}$. La massa all'interno della regione sarà

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

dove r è la dimensione fisica ($r = aR$).

Un punto sulla superficie sferica sarà soggetto ad un'accelerazione gravitazionale

$$\ddot{r} = -G\frac{M}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho r \quad (3.68)$$

moltiplicando entrambi i lati per \dot{r}

$$\dot{r}\ddot{r} = -G\frac{M}{r^2}\dot{r}$$

scriviamo poi

$$\dot{r}\ddot{r} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{r}^2}{dt} \quad \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Quindi possiamo integrare su t per toglierlo

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{r}^2}_{E_K} = \underbrace{\frac{GM}{r}}_{-E_P} + \underbrace{C}_{E_{\text{tot}}} \implies \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho r^2 + E_{\text{tot}} \quad (3.69)$$

dove tutte le energie sono per unità di massa.

Supponiamo ora che ad un tempo iniziale t_i le fluttuazioni siano sufficientemente piccole in modo tale che tutto segua le equazioni di Friedmann

$$r(t_i) = a(t_i)R \implies \dot{r}(t_i) = \dot{a}(t_i)R = H(t_i)r(t_i)$$

calcoliamo le energie da mettere nella formula ottenuta prima

$$\begin{aligned} E_{K,i} &= \frac{1}{2}\dot{r}_i^2 = \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 \\ -E_{P,i} &= \frac{GM}{r_i} = \frac{4\pi G}{3}r_i^2 \rho_i = \frac{4\pi G}{3}r_i^2 \bar{\rho}_i(1 + \delta_i) = \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 (1 + \delta_i) \end{aligned}$$

quindi

$$-E_{P,i} = E_{K,i}(1 + \delta_i) \implies E_{\text{tot}} = -E_{K,i}\delta_i$$

ma $E_{K,i} > 0$ quindi se la fluttuazione è positiva (zona di sovradensità locale), allora $E_{\text{tot}} < 0$ quindi il sistema è legato.

Possiamo poi scrivere le equazioni che regolano l'evoluzione di questa sfera, usando l'Equazione (3.68) e l'Equazione (3.69)

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{4\pi G}{3}\rho r \\ \dot{r}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho r^2 - 2|E_{\text{tot}}| \end{cases} \implies \boxed{\begin{cases} \frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \\ \frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{2|E_{\text{tot}}|}{r^2} \end{cases}} \quad (3.70)$$

Ma queste non sono altro che equazioni di Friedmann dove invece dell'evoluzione del fattore di scala abbiamo l'evoluzione della sfera e dove $2|E_{\text{tot}}|$ gioca il ruolo di una curvatura positiva.

Inoltre queste equazioni noi le abbiamo già risolte quando abbiamo considerato l'universo a doppia componente materia-curvatura, e sappiamo che la soluzione è un cicloide

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} \frac{1-\delta_i}{\delta_i} [1 - \cos(\theta)] = \frac{GM}{2|E|r_i} [1 - \cos(\theta)] \\ t = \frac{1}{2H_i} \frac{1-\delta_i}{(\delta_i)^{\frac{3}{2}}} [\theta - \sin(\theta)] = \frac{GM}{(2|E|)^{\frac{3}{2}}} [\theta - \sin(\theta)] \end{cases} \quad (3.71)$$

Quello che fisicamente accade è che inizialmente la bolla sovradensa evolve espandendosi assieme all'universo circostante. In seguito inizia a decelerare e contrarsi, disaccoppiandosi dal comportamento omogeneo del flusso di Hubble che coinvolge tutto l'universo circostante.

Questo possiamo intuire essere il modo in cui si sono formate le galassie, e il motivo per cui possiamo parlare di questi oggetti puntiformi in un universo a grande scala omogeneo. Notiamo inoltre che tanto più è massiva una sovradensità, tanto più sarà grande e tanto più ci metterà a contrarsi.

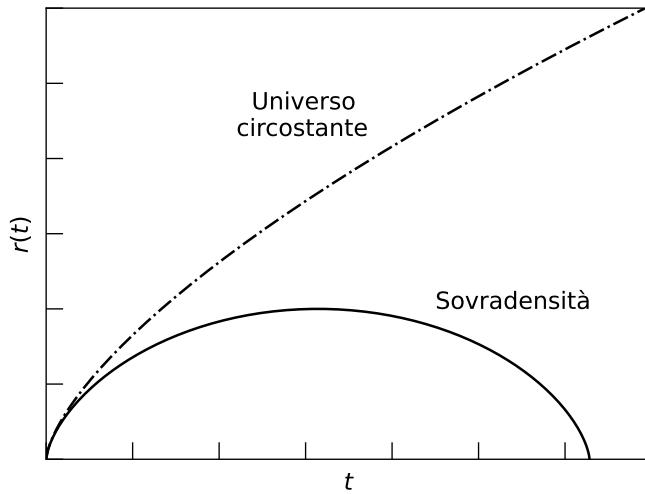


Figura 15 : Evoluzione di una sovradensità.

CAPITOLO 4

Modello a Big Bang Caldo

Abbiamo studiato fin'ora quello che succede a scale macroscopiche, vedendo l'evoluzione del fattore di scala. Passiamo adesso a studiare le scale microscopiche delle particelle fondamentali, per vedere come queste si comportano all'interno di un universo che si evolve e come contribuiscono all'evoluzione dell'universo stesso.

In questo capitolo, verranno utilizzate le unità naturali $c = \hbar = k_B = 1$.

4.1. Ripasso modello standard

Prima di iniziare facciamo ripasso del modello standard. Questo è un modello che raggruppa le particelle fondamentali conosciute e descrive le interazioni tra loro. Facciamo un breve elenco della classificazione delle particelle e delle loro masse:

Fermioni sono particelle a spin semi-intero e sono i costituenti della materia.

Si dividono a loro volta in

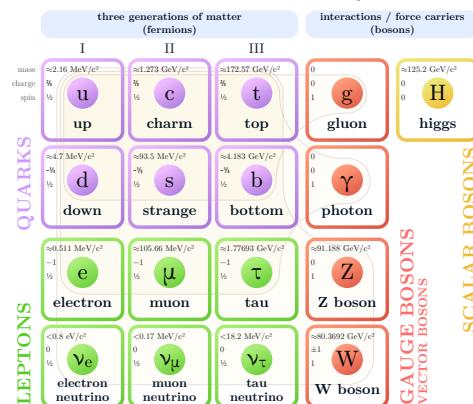
- Quark: che sentono interazione elettromagnetica, forte e debole.
Sono divisi in tre generazioni:
 - Quark up “ u ” ($m = 1.9 \text{ MeV}$) e quark down “ d ” ($m = 1.4 \text{ MeV}$)
 - Quark charm “ c ” ($m = 1.32 \text{ GeV}$) e quark strange “ s ” ($m = 0.087 \text{ GeV}$)
 - Quark top “ t ” ($m = 171 \text{ GeV}$) e quark bottom “ b ” ($m = 4.2 \text{ GeV}$)
- Leptoni: che sentono interazione elettromagnetica debole.
Anch'essi sono divisi in tre generazioni:
 - Elettrone “ e ” ($m = 0.5 \text{ MeV}$) e neutrino elettronico “ ν_e ” ($m < 0.08 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}$)
 - Muone “ μ ” ($m = 106 \text{ MeV}$) e neutrino muonico “ ν_μ ” ($m < 0.017 \text{ MeV}$)
 - Tauone “ τ ” ($m = 1.78 \text{ GeV}$) e neutrino tauonico “ ν_τ ” ($m < 18.2 \text{ GeV}$)

Bosoni sono particelle a spin intero e sono i portatori delle interazioni.

Si dividono in

- Bosoni vettori: a spin 1
 - Fotone “ γ ” ($m = 0$) portatore dell'interazione elettromagnetica
 - Bosoni “ W^\pm ” ($m = 80 \text{ GeV}$) e “ Z^0 ” ($m = 91 \text{ GeV}$) portatori dell'interazione debole
 - Gluoni “ $g_{1,\dots,8}$ ” ($m = 0$) portatore dell'interazione forte
- Bosoni scalari: a spin 0
 - Bosone di Higgs “ H ” ($m = 125 \text{ GeV}$) responsabile del meccanismo che fornisce la massa

Standard Model of Elementary Particles



4.2. Evoluzione del quadri-momento con l'espansione dell'universo

Sappiamo che le particelle possono essere più o meno relativistiche in base alla loro velocità (quindi al rapporto energia-massa $E^2 = m^2 + |\vec{q}|^2$), fino ai due limiti estremi:

- Limite non relativistico: $E \approx m$ che in precedenza abbiamo chiamato materia
- Limite ultra-relativistico: $E \approx |\vec{q}|$ che in precedenza abbiamo chiamato radiazione

Vediamo ora come evolve il momento. Partiamo dall'equazione delle geodetiche

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

ma $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ e $P^\alpha = mu^\alpha$, quindi moltiplicando per m^2 otteniamo

$$m \frac{dP^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} P^\beta P^\gamma = 0$$

inoltre $\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{d}{dx^0} = u^0 \frac{d}{dt}$

$$P^0 \dot{P}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} P^\beta P^\gamma = 0 \quad (4.1)$$

Studiamo la componente $\alpha = 0$ per il caso *mass-less*:

$$\begin{aligned} P^0 \dot{P}^0 &= -\Gamma^0_{\beta\gamma} P^\beta P^\gamma = -\Gamma^0_{ij} P^i P^j \\ &= -\dot{a} a \gamma_{ij} P^i P^j = -\dot{a} a \frac{1}{a^2} g_{ij} P^i P^j \\ &= -\frac{\dot{a}}{a} (-g_{00} P^0 P^0) \end{aligned}$$

$$E \dot{E} = -\frac{\dot{a}}{a} E E \implies \frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a} \implies E \propto a^{-1}$$

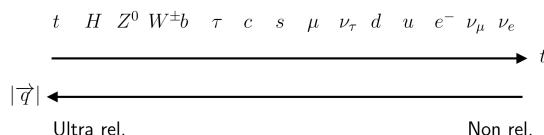
Faccendo i calcoli per particelle massive (per cui $P^\mu P_\mu = -m^2$) si ottiene

$$|\vec{q}| \propto a^{-1} \quad \text{con} \quad \vec{q} = a P^i \hat{e}_i \quad (4.2)$$

Questo significa che il momento delle particelle (e di conseguenza la parte cinetica dell'energia) viene diluito con l'espansione dell'universo. Avevamo già visto euristicamente questo concetto quando abbiamo notato che la lunghezza d'onda dei fotoni si dilata (perdendo momento).

Tra l'altro, questo è il motivo per cui $\rho_r \propto a^{-4}$, infatti si ha una perdita di densità con a^{-3} dovuta all'aumento del volume e una diluizione dell'energia (che nel caso dei fotoni è tutta cinetica) con a^{-1} . Per ρ_m non c'è la parte di diluizione dell'energia, in quanto questa è per lo più energia di massa che non varia con l'espansione.

Il fatto che le particelle perdano momento, significa che con il passare del tempo si ha un passaggio da stati ultra-relativistici a non relativistici. Quindi, oltre alla variazione delle densità delle specie che abbiamo già visto in precedenza, bisognerebbe considerare un flusso tra materia e radiazione dovuto al "raffreddamento". Questo è un fenomeno che avviene a tempi diversi per particelle diverse, infatti particelle più leggere dovranno diluire la loro energia cinetica molto di più perché questa diventi trascurabile rispetto alla massa.



Nel modello standard ci sono delle energie di scala, di cui alcuni esempi sono

- $\Lambda_{\text{QCD}} = (150 \div 200) \text{ MeV}$: energia scala della QCD oltre la quale smette di essere efficacie il processo di confinamento, dunque è possibile osservare quark e gluoni liberi (detto *quark-gluon plasma*)
- $\Lambda_{\text{EW}} = 150 \text{ GeV}$: energia sotto la quale si rompe la simmetria elettrodebole. Ad energia superiore l'interazione elettromagnetica e debole vengono unificate e i bosoni γ , W^\pm e Z^0 vengono sostituiti da un altro tipo di bosoni vettoriali tutti massless.

Queste energie corrisponderanno a diversi tempi evolutivi dell'universo (in cui l'energia media si trovava al di sopra o al di sotto di queste soglie). Per diverse fasi evolutive il comportamento microscopico sarà differente.

4.3. Statistica delle specie

Il nostro intento è andare a studiare il comportamento delle varie specie nelle prime fasi dell'universo. Queste si trovavano in uno stato di gas caldo, è dunque necessaria una descrizione statistica.

La quantità fondamentale è la **funzione di distribuzione** $f_s(\vec{x}, \vec{q}, t)$ che rappresenta la densità di probabilità che una particella della specie s al momento t si trovi nella posizione \vec{x} con momento \vec{q} .

Se vogliamo ottenere la **densità numerica** n_s (quantità che useremo molto), bisogna integrare su tutti gli stati di momento possibili. Tuttavia è necessario tenere conto che, a causa della meccanica quantistica, lo spazio delle fasi è quantizzato dunque è necessario moltiplicare la misura $d^3x d^3p$ per un fattore $\frac{g_s}{(2\pi)^3}$ (in SI $\frac{g_s}{(2\pi\hbar)^3}$) dove g_s rappresenta la molteplicità di uno stato per la specie (ad esempio per gli elettroni che hanno 2 stati di spin possibili $g_s = 2$) e il fattore 2π rappresenta la dimensione di una celletta fondamentale dello spazio delle fasi⁶.

La **densità numerica** sarà

$$n_s(\vec{x}, t) = g_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) \quad (4.3)$$

mentre il numero totale N_s lo si può ottenere integrando sulle posizioni

$$N_s(t) = \int n_s(\vec{x}, t) d^3x = g_s \int \frac{d^3x d^3q}{(2\pi)^3} f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) \quad (4.4)$$

Vogliamo ora legare la funzione di distribuzione a quantità macroscopiche che abbiamo già visto: la densità di energia ρ_s e la pressione p_s .

Per quanto riguarda l'energia è sufficiente sfruttare la relazione $E_s(\vec{q}) = \sqrt{m_s^2 + |\vec{q}|^2}$ valida per ciascuna particella, ottenendo

$$\rho_s(\vec{x}, t) = g_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) E_s(\vec{q}) = g_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) \sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2} \quad (4.5)$$

Per quel che riguarda la pressione bisogna fare un ragionamento più delicato.

⁶Questa spiegazione è molto euristica. Per una spiegazione più rigorosa fare riferimento ad un corso di meccanica statistica o più semplicemente a Struttura della Materia.

Consideriamo una superficie dS orientata con versore normale \hat{n} , che abbia delle particelle da un lato. La pressione esercitata dalle particelle sulla superficie sarà data dagli urti (e quindi dal trasferimento di momento) che le prime fanno sulla seconda.

Prendiamo in considerazione un volume conico con apertura di un angolo solido $d\Omega$ e le particelle con momento \vec{q} (e quindi velocità \vec{v}). Le particelle che riusciranno a raggiungere la superficie in un tempo dt saranno quelle entro una distanza $R = |\vec{v}| dt$.

Quindi bisogna considerare le particelle dentro un volume $|\vec{v}| dt R^2 d\Omega$.

Tra tutte le particelle all'interno di questo volume non tutte hanno la direzione giusta per raggiungere la superficie. Assumiamo che le particelle abbiano una distribuzione isotropa, la frazione di quelle con direzione compatibile sarà data dalla frazione di angolo solido occupata dalla superficie (dal punto di vista delle particelle) $\frac{dS \cos(\theta)}{4\pi R^2}$ dove mettiamo il $\cos(\theta)$ perché dal punto di vista delle particelle ci interessa solo la parte ortogonale della superficie.

Quindi il numero di particelle a cui siamo interessati sarà

$$n|\vec{v}| dt R^2 d\Omega \frac{dS \cos(\theta)}{4\pi R^2}$$

Ciascuna di queste urtando con momento \vec{q} contro la superficie scambierà con quest'ultima (assumendo un urto totalmente elastico) un impulso $2\vec{q} \cdot \hat{n}$ (perché deve cambiare la direzione ortogonale alla superficie). Quindi l'impulso scambiato dI sarà

$$dI = \frac{n}{4\pi} |\vec{v}| dt d\Omega dS 2|\vec{q}| \cos^2(\theta)$$

Ma la pressione non è nient'altro che impulso scambiato per unità di tempo per unità di area

$$p = \frac{dI}{dt dS}$$

Quindi otteniamo, riscrivendo $\vec{v} = \frac{\vec{q}}{E}$ (relazione in realtà valida solo in relatività speciale) e integrando su metà dell'angolo solido (perché le particelle abbiamo detto essere solo da un lato⁷) si ottiene che la pressione data da particelle con momento \vec{q} sarà

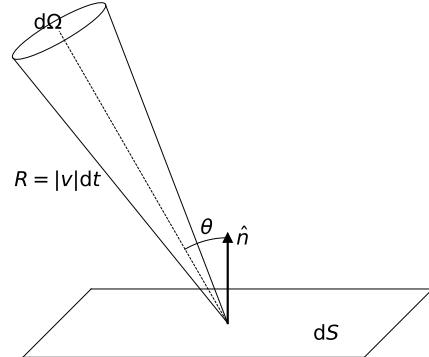
$$p(\vec{q}) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{n}{2\pi} \frac{|\vec{q}|^2}{E} \cos^2(\theta) d(\cos(\theta)) d\varphi = \frac{n}{2\pi} \frac{|\vec{q}|^2}{E} 2\pi \frac{1}{3} = n \frac{|\vec{q}|^2}{3E} \quad (4.6)$$

Per darci un senso di questo risultato possiamo pensare che $\frac{|\vec{q}|^2}{E}$ ci dà una pressione che va distribuita su 3 dimensioni.

Non ci rimane quindi che integrare sui momenti ottenendo

$$p_s(\vec{x}, t) = g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) \frac{|\vec{q}|^2}{3E} = g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) \frac{|\vec{q}|^2}{3\sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2}}$$

(4.7)



⁷Il motivo vero per cui integriamo su metà dell'angolo solido è che quando facciamo i prodotti scalari dobbiamo trascurare i valori negativi perché corrispondono a particelle che si allontanano. Il risultato è però equivalente a considerare particelle solo da un lato.

4.4. Funzioni di distribuzione

Possiamo ora andare a concentrarci sulla forma che hanno le funzioni di distribuzione. Iniziamo imponendo le condizioni di omogeneità e isotropia. L'omogeneità ci dice che non c'è dipendenza dalla posizione, mentre l'isotropia ci dice che non c'è dipendenza dalla direzione del momento bensì solo dal suo modulo (che indicheremo per semplicità come q). Sappiamo inoltre che in un universo omogeneo e isotropo la dipendenza temporale rientra solo implicitamente per scalare le distanze e i momenti. Quindi avremo $f_s(\vec{x}, \vec{q}, t) = f_s(q)$.

Questo semplifica anche l'integrazione che infatti diventa $d^3q \rightarrow 4\pi q^2 dq$.

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dq q^2 f_s(q) \\ \rho_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dq q^2 f_s(q) E(q) \\ p_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dq f_s(q) \frac{q^4}{3E(q)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Le condizioni che abbiamo appena descritto corrispondono a quello che viene detto **equilibrio termodinamico**: se il gas collide abbastanza da raggiungere la massima entropia possibile (si dice che il gas *termalizza*) si ottiene che le particelle seguono la **distribuzione di Fermi-Dirac** f_{FD} se sono fermioni o la **distribuzione di Bose-Einstein** f_{BE} se sono bosoni.

$$\begin{aligned} f_{FD}(q) &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{E(q)-\mu}{T}\right\} + 1} \\ f_{BE}(q) &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{E(q)-\mu}{T}\right\} - 1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

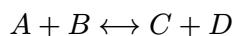
dove T è la temperatura (che possiamo definire solo perché siamo in equilibrio) e μ è il **potenziale chimico**. Quest'ultimo rappresenta la risposta del sistema (quindi la sua variazione in energia intera) quando viene cambiato il numero di particelle a entropia e volume costanti:

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} \quad (4.10)$$

Quando si possono trascurare gli effetti quantistici (perché ci sono molte particelle, o la temperatura è molto bassa rispetto alla massa) le due distribuzioni convergono alla **distribuzione di Maxwell-Boltzmann** f_{MB}

$$f_{MB}(q) = \exp\left\{-\frac{E(q)-\mu}{T}\right\} \quad (4.11)$$

Tutto il discorso che abbiamo fatto fin'ora vale per una singola specie. Quando abbiamo un sistema con più specie al suo interno, bisogna anche che ci sia **equilibrio chimico**. Questo significa che possono anche esserci scambi tra specie (attraverso interazioni) ma nel complesso, le concentrazioni delle singole specie non possono cambiare.



Dal punto di vista di potenziale chimico, ciò si traduce nella condizione

$$\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D \quad (4.12)$$

Se vale l'equilibrio termodinamico per le singole specie e vale l'equilibrio chimico tra specie, significa che possiamo definire una temperatura globale e si parla di **bagno termico**. Se ci sono

delle specie che sono in equilibrio termodinamico ma non in equilibrio chimico con il bagno, si dice che queste sono **disaccoppiate dal bagno termico**.

4.5. Quantità macroscopiche nei limiti ultra- e non relativistico

Vogliamo andare a vedere le distribuzioni delle quantità n_s , ρ_s e p_s nel limite non relativistico (quello che all'inizio chiamavamo materia o polvere) e nel limite ultra relativistico (quello che chiamavamo radiazione). Prima di iniziare introduciamo una convenzione: spesso torna utile adimensionalizzare le forme di energia raccogliendo la temperatura

$$X_s = \frac{m_s}{T} \quad Y = \frac{q}{T} \quad W_s = \frac{\mu_s}{T} \quad (4.13)$$

dove Y non ha il pedice perché il momento non ha dipendenza dalla specie. Le espressioni per le quantità macroscopiche in queste quantità diventano

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} T^3 \int_0^{+\infty} dY \frac{Y^2}{\exp\left\{\sqrt{X_s^2 + Y^2} - W_s\right\} \pm 1} = \frac{g_s}{2\pi^2} T^3 I_{\pm}(X_s, W_s) \\ \rho_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} T^4 \int_0^{+\infty} dY \frac{Y^2 \sqrt{X_s^2 + Y^2}}{\exp\left\{\sqrt{X_s^2 + Y^2} - W_s\right\} \pm 1} = \frac{g_s}{2\pi^2} T^4 J_{\pm}(X_s, W_s) \\ p_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} T^4 \int_0^{+\infty} dY \frac{Y^4}{3\sqrt{X_s^2 + Y^2} \exp\left\{\sqrt{X_s^2 + Y^2} - W_s\right\} \pm 1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove $I_{\pm}(X_s, W_s)$ e $J_{\pm}(X_s, W_s)$ raccolgono gli integrali.

4.5.1. Limite non relativistico

Il limite relativistico corrisponde a $Y \ll X_s$ e ad una temperatura molto minore della massa. Ma questo significa che le due distribuzioni convergono a Maxwell-Boltzmann.

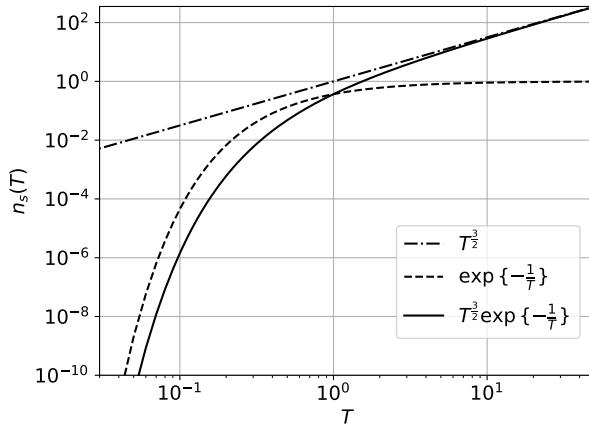
Iniziamo calcolando n_s

$$\begin{aligned} \sqrt{X_s^2 + Y} &= X_s \sqrt{1 + \left(\frac{Y}{X_s}\right)^2} = X_s \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{X_s}\right)^2 + \dots\right) \sim X_s + \frac{Y^2}{2X_s} \\ I_{\pm}(X_s, Y) &\sim e^{-X_s + W_s} \int_0^{+\infty} dY Y^2 \exp\left\{-\frac{Y^2}{2X_s}\right\} \quad \text{definisco } A = \frac{1}{2X_s} \\ &= e^{-X_s + W_s} \int_0^{+\infty} dY \left(-\frac{d}{dA} \exp\{-AY^2\}\right) \\ &= e^{-X_s + W_s} \left(-\frac{d}{dA} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dY \exp\{-AY^2\}\right) \quad \text{ho una gaussiana} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \\ &= e^{-X_s + W_s} \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dA} \sqrt{\frac{\pi}{A}}\right) = e^{-X_s + W_s} \frac{\sqrt{\pi}}{4} A^{-\frac{3}{2}} \\ &= e^{-X_s + W_s} \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2X_s)^{-\frac{3}{2}} \\ n_s &= \frac{g_s}{2\pi^2} T^3 \exp\left\{-\frac{m_s - \mu_s}{T}\right\} \frac{\sqrt{\pi}}{4} 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_s}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$n_s = g_s \left(\frac{m_s T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{m_s - \mu_s}{T} \right\} \quad (4.15)$$

Dato che m_s e μ_s sono fissati dalla specie, abbiamo solo T che può variare e porta a due regimi:

- Se $T \gg m_s$ ho $n_s \propto (m_s T)^{\frac{3}{2}}$
- Se $T \ll m_s$ ho $n_s \propto \exp\{-\frac{m_s}{T}\}$



Il motivo per cui si ha la caduta esponenziale a basse temperature è che le particelle hanno molta poca energia cinetica, quindi è molto improbabile che riescano in un'interazione a produrre nuove partecelle. È invece possibile che queste annichilino tra loro, dunque è favorevole la diminuzione di n_s che all'equilibrio poi dà questo andamento.

Passiamo ora a ρ_s

$$J_{\pm}(X_s, Y) \approx e^{-X_s + W_s} \int_0^{+\infty} dY Y^2 \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2X_s} \right\} \left(X_s + \frac{Y^2}{2X_s} \right)$$

Possiamo dividere la somma in due integrali, di cui il primo è uguale a quello che abbiamo già risolto. Quindi rimane solo il secondo che si risolve in modo analogo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2X_s} \int_0^{+\infty} dY \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2X_s} \right\} Y^4 &= A \frac{1}{2} \frac{d^2}{dA^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dY \exp \{-AY^2\} \\ &= \frac{A}{2} \frac{d^2}{dA^2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \\ &= \frac{A}{2} \frac{3}{4} A^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{8} \sqrt{\pi} A^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Anche questo è simile all'integrale di prima, infatti otteniamo

$$J_{\pm}(X_s, Y) = I_{\pm} X_s + \frac{3}{2} I_{\pm}$$

quindi

$$\rho_s = m_s n_s + \frac{3}{2} n_s T \quad (4.16)$$

possiamo notare che questa è l'analogo statistico dell'approssimazione $E = m + E_K$

Terminiamo con p_s

$$\frac{Y^4}{\sqrt{X_s^2 + Y^2}} = \frac{Y^4}{X_s} \left(1 + \left(\frac{Y}{X_s} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{Y^4}{X_s} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{X_s} \right)^2 + \dots \right) \sim \frac{Y^4}{X_s}$$

$$p_s = \frac{g_s}{2\pi^2} T^4 e^{-X_s + W_s} \int_0^{+\infty} dY \frac{Y^4}{X_s} \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2X_s} \right\}$$

Ma questo integrale è uguale a quello che abbiamo appena calcolato moltiplicato per $\frac{2}{3}$, quindi otteniamo

$$p_s = 0 + n_s T \quad (4.17)$$

Lo 0 è stato messo per evidenziare come non ci siano termini che dipendono dalla massa, in accordo con quello che avevamo ottenuto nei primi capitoli (dove avevamo trovato $w = 0$ per la materia).

4.5.2. Limite ultra-relativistico

In questo limite abbiamo che $E_s \approx q$ e quindi $X_s \rightarrow 0$. Possiamo anche trascurare W_s , questo può essere dimostrato (almeno per elettroni e protoni) ma non lo faremo. Un'intuizione della verità di questa affermazione può arrivarcici pensando ai fotoni, che sono sempre ultra-relativistici. Esiste un fenomeno detto “doppio scattering Compton” in cui si ha $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma + \gamma$. Ma questo significa che l’energia interna del sistema non dipende dal numero di fotoni presenti, quindi $\mu = 0$.

Dobbiamo quindi valutare

$$I_{\pm}(0, 0) = \int_0^{+\infty} dY \frac{Y^2}{e^Y \pm 1} \quad J_{\pm}(0, 0) = \int_0^{+\infty} dY \frac{Y^3}{e^Y \pm 1} \quad (4.18)$$

Questi due integrali possono essere risolti utilizzando due integrali notevoli (che arrivano direttamente dalla definizione della zeta di Riemann $\zeta(x)$)

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{x^n}{e^x - 1} = \zeta(n+1)n! \quad \int_0^{+\infty} dx \frac{x^n}{e^x + 1} = \zeta(n+1)n!(1 - 2^{-n}) \quad (4.19)$$

Quindi

$$n_s = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_s T^3 \begin{cases} 1 & s \in \text{BE} \\ \frac{3}{4} & s \in \text{FD} \end{cases} \quad (4.20)$$

Notiamo che la densità numerica scala con una potenza doppia rispetto al caso non relativistico. Questo è dovuto al fatto che ad alta energia è molto più semplice generare nuove particelle dalle interazioni.

$$\rho_s = \frac{3\zeta(4)}{\pi^2} g_s T^4 \begin{cases} 1 & s \in \text{BE} \\ \frac{7}{8} & s \in \text{FD} \end{cases}$$

Usando $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

$$\rho_s = \frac{\pi^2}{30} g_s T^4 \begin{cases} 1 & s \in \text{BE} \\ \frac{7}{8} & s \in \text{FD} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$p_s = \frac{g_s}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \frac{q^4}{3\mathcal{A}} f_{s(q)}$$

$$p_s = \frac{1}{3} \rho_s$$

(4.22)

Anche questo è uguale al risultato che abbiamo ottenuto nei primi capitoli ($w = \frac{1}{3}$ per la radiazione).

Notiamo che in tutti i risultati in limite ultra-relativistico, la massa della specie non compare. Quindi significa che in questa approssimazione, tutte le specie si comportano allo stesso modo (a meno della molteplicità).

Con i risultati che abbiamo ottenuto, proviamo ora a calcolare l'abbondanza odierna dei fotoni

$$\Omega_{\gamma 0} = \frac{\bar{\rho}_{\gamma 0}}{\rho_c c^2} \quad \text{con} \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

dove abbiamo diviso per c^2 perché ρ_c l'avevamo scritta come densità di massa, mentre $\bar{\rho}_{\gamma 0}$ l'abbiamo scritta come densità di energia. Scrivendo l'espressione ottenuta per $\bar{\rho}_{\gamma 0}$ (reinserendo le dovute costanti) e facendo il calcolo si ottiene

$$\Omega_{\gamma 0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2 c^2} \frac{g_{\gamma}^2}{\hbar^2 c^3} \frac{\pi^2}{30} \left(\frac{T_{\gamma 0} k_B}{3K} \right)^4 \approx 5 \cdot 10^{-5} \quad (4.23)$$

Questo risultato è circa metà dell'abbondanza di radiazione che abbiamo già visto ($9 \cdot 10^{-5}$). Quindi c'è qualcosa che non stiamo considerando. Sono i neutrini, che ancora oggi possono essere considerati ultra-relativistici e dunque radiazione.

Un'ultima cosa che possiamo fare prima di procedere è andare a sfruttare queste relazioni per collegare la temperatura ai parametri legati al tempo. Sappiamo che $\rho_r \sim a^{-4}$ e che $\rho_r \sim T^4$. Quindi per specie ultra relativistiche vale la relazione

$$T_s \sim a^{-1}$$

(4.24)

4.6. Equilibrio chimico

Abbiamo già detto che siamo in equilibrio chimico se per qualunque tipo di interazione $A + B \leftrightarrow C + D$, questa è fatta in entrambi i versi in modo tale che la concentrazione delle singole specie non cambi ($\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$).

Per raggiungere questo stato sono necessarie due condizioni:

- L'energia del sistema deve essere molto maggiore della massa di tutte le particelle (altrimenti alcune di esse non verrebbero generate perché sotto soglia).
- L'interazione deve avere abbastanza tempo per avvenire.

Questa condizione non è necessariamente soddisfatta in un universo in espansione.

Sappiamo che il *rate* di espansione è H . Definiamo un **rate di interazione (interaction rate)** Γ come il numero medio di interazioni che avvengono in un intervallo di tempo.

- Se $\Gamma \gg H$ le interazioni hanno tempo di avvenire e il sistema può raggiungere l'equilibrio chimico.
- Se $\Gamma \ll H$ le particelle vengono allontanate le une dalle altre troppo in fretta e non hanno tempo di interagire.

Il nostro interesse è studiare in quali intervalli di temperatura queste condizioni sono soddisfatte. Ci concentreremo per semplicità sui primi istanti di vita dell'universo in cui tutto era ultra-relativistico e l'evoluzione era radiation dominated.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_{r0} = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_r a^{-4}$$

$$H \sim T^2 \sqrt{G} \quad (4.25)$$

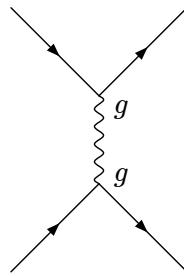
dove lasciamo la dipendenza da G poiché questa costante è molto diversa da 1 ($G \approx 6.7 \cdot 10^{-39}$ GeV) e vogliamo valutare degli ordini di grandezza.

Dobbiamo ora valutare Γ . Ne avremo uno per ogni reagente e avrà una forma del tipo (direttamente dalla definizione di sezione d'urto che si vede ad un corso di particelle)

$$\Gamma_A = n_B \langle v_{AB} \rangle \sigma_{AB,CD} \quad (4.26)$$

Sappiamo che $n_B \sim T^3$, mentre $\langle v_{AB} \rangle \approx 1$ (in unità di c) perché le particelle sono tutte ultra-relativistiche.

Per quanto riguarda σ sappiamo che a livello fondamentale le interazioni possono essere descritte con diagrammi di Feynman



L'ampiezza di interazione sarà legata al valore di aspettazione del diagramma, che a sua volta è proporzionale alla costante di accoppiamento dell'interazione

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2}{T^2} \quad \text{con } \alpha = \frac{g^2}{4\pi} \quad (4.27)$$

dove abbiamo diviso per T^2 per far quadrare le dimensioni ($[\sigma] = L^2 = E^{-2}$).

La costante di accoppiamento dipende dal tipo di interazione

$$\alpha_{EM} \approx \frac{1}{137} \quad \alpha_W \approx 10^{-6} \div 10^{-5} \quad \alpha_S \approx \mathcal{O}(1)$$

questi valori però non sono costanti, bensì variano con l'energia.

Ad alte energie le interazioni elettromagnetica e debole diventano più efficienti (e tendono asintoticamente ad unirsi nell'interazione elettrodebole). Ad esempio ad un'energia dell'ordine della massa del bosone Z^0 , si ha $\alpha_{EM} \approx \frac{1}{127}$ e $\alpha_W \approx 10^{-2}$.

L'interazione forte invece si comporta in modo opposto (infatti ad alta energia si ha il deconfinamento di quark e gluoni). All'energia $E \approx m_{Z^0}$, si ha $\alpha_S \approx 10^{-2}$.

Quindi se consideriamo energie abbastanza alte possiamo assegnare lo stesso valore a tutte le costanti di accoppiamento

$$\alpha_{EM} \approx \alpha_W \approx \alpha_S \approx \alpha$$

Mettendo tutto assieme otteniamo l'andamento per il rate di interazione

$$\Gamma_A \sim T^3 \alpha^2 T^{-2} \sim \alpha^2 T \quad (4.28)$$

Quindi

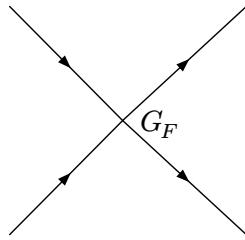
$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha T}{\sqrt{G}T^2} \sim \frac{10^{15} \text{ GeV}}{T} \quad (4.29)$$

Se vogliamo $\Gamma \gg H$ dovremo avere $T \ll 10^{15} \text{ GeV}$.

Questo significa che inizialmente si parte da una temperatura altissima e l'universo si espande in modo incredibilmente veloce da non far interagire le particelle. Poi si scende sotto 10^{15} GeV e iniziano ad avvenire le interazioni che portano al raggiungimento dell'equilibrio chimico. La temperatura poi continua a scendere fino a quando non passa sotto la massa del quark top. A questo punto il quark diventa non relativistico e inizia ad annichilire senza poter essere prodotto (perché non c'è più abbastanza energia) quindi piano piano si esaurisce completamente (quando la temperatura scende inizia a calare tanto si raggiunge il decadimento esponenziale che abbiamo visto nell'approssimazione non relativistica). Poi è il turno del bosone di Higgs che fa la stessa fine.

Quando però la temperatura scende sotto una certa soglia, le interazioni non hanno più una costante di accoppiamento che può essere considerata uguale per tutti. Quindi le specie iniziano a differenziarsi in base a quali interazioni sentono.

Prendiamo ad esempio l'interazione debole. Quando si raggiunge la temperatura corrispondente alla massa del bosone Z^0 (la prima ad essere raggiunta dopo il bosone di Higgs, $m_{Z^0} \approx 100 \text{ GeV}$), inizia a non essere più possibile risolvere tutta l'interazione che sembra invece un'interazione puntiforme come descritto dalla teoria di Fermi



In questa teoria la costante di accoppiamento diventa

$$\alpha_W \sim G_F E^2 \quad (4.30)$$

con G_F la costante di Fermi ($G_F \approx 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$). Questo andamento di α_W con l'energia (che qui abbiamo ricavato solo da uno studio dimensionale) deriva dal fatto che la forza di interazione dipende dalla risoluzione con cui si campiona.

Possiamo quindi vedere cosa succede ai neutrini (gli unici che sentono solo l'interazione debole) quando si scende sotto i 100 GeV

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{T^3 (G_F T^2)^2 T^{-2}}{\sqrt{G} T^2} \sim T^3 \frac{10^{-10} \text{ GeV}^{-4}}{10^{-19}} \sim \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^3 \quad (4.31)$$

La situazione si ribalta: sotto il MeV i neutrini non sono più in equilibrio chimico, quindi si disaccoppiano dal resto del bagno. Questo vorrebbe dire che il numero di neutrini potrebbe cambiare, ma dagli esperimenti di particelle sappiamo che in questi regimi i neutrini interagiscono molto poco.

Quindi questi continuano ad evolvere in modo separato con una loro temperatura. Si dice che l'universo diventa *trasparente* per loro.

4.7. Entropia dell'universo

Finché ci troviamo in equilibrio termodinamico e chimico (nel range tra 10^{15} GeV e 1 MeV) ci troviamo in un bagno termico, in cui vale la prima legge della termodinamica

$$dU + p dV = T dS + \sum_i \mu_i dN_i \quad (4.32)$$

Quindi posso calcolare l'entropia del sistema

$$\begin{aligned} T dS &= \underbrace{\frac{dU}{d(\rho V)}}_{d(\rho V)} + p dV - \sum_i \mu_i dN_i \\ &= \rho dV + V d\rho + p dV - \sum_i \mu_i dN_i \\ &= V \left[(\rho + p) d\ln(V) + d\rho - \frac{1}{V} \sum_i \mu_i dN_i \right] \end{aligned}$$

Calcolo quindi la derivata temporale

$$\frac{dS}{dt} = \frac{V}{T} \left[(\rho + p) \frac{d\ln(V)}{dt} + \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{V} \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt} \right]$$

Possiamo ora notare che i primi due termini nella parentesi non sono altro che la legge di continuità. Infatti

$$\frac{d\ln(V)}{dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d\cancel{Z}a^3}{dt} = \frac{1}{a^3} 3a^2 \dot{a} = 3 \frac{\dot{a}}{a}$$

quindi

$$(\rho + p) \frac{d\ln(V)}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) + \dot{\rho} = 0$$

Rimettendo nell'equazione sopra otteniamo

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{T} \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt}} \quad (4.33)$$

ma dato che siamo all'equilibrio chimico, il numero di paticelle di ciascuna specie non varia, quindi

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad (4.34)$$

Quindi per buona parte della sua vita, l'universo ha subito un'espansione adiabatica.

Però noi sappiamo anche che i fotoni hanno $\mu_\gamma = 0$ quindi gli è concesso di variare in numero anche mantenendo l'equilibrio chimico. Dunque potremmo aspettarci un alto numero di fotoni. Definiamo il **rapporto tra barioni e fotoni** (barion-to-photon ration) η

$$\boxed{\eta = \frac{N_b}{N_\gamma} = \frac{n_b}{n_\gamma}} \quad (4.35)$$

Proviamo a valutarlo oggi, assumendo che tutta la componente di barioni sia data da protoni (ci sarebbero anche gli elettroni ma hanno massa trascurabile)

$$n_{b0} = \frac{\bar{\rho}_b}{m_p} = \frac{\Omega_{b0}\rho_c}{m_p} \quad n_{\gamma0} = \frac{g_\gamma}{(\hbar c)^3} \frac{\zeta(3)}{\pi^3} T_{\gamma0}^3 k_B^3$$

Facendo il calcolo si ottiene $\eta \approx 6 \cdot 10^{-10}$. Questo significa che ci sono quasi 2 miliardi di fotoni (stiamo contando solo quelli primordiali della CMB, poi ci sono quelli emessi dalle sorgenti) per ogni barione (dove barione è inteso in senso cosmologico ossia qualsiasi materia che non sia materia oscura).

Torniamo all'entropia e cerchiamo di scriverla come un differenziale perfetto (tenendo conto che la variazione del numero di particelle è nulla)

$$dS = \frac{1}{T}[(\rho + p)dV + Vdp] = \frac{1}{T}[d((\rho + p)V) - Vdp]$$

ma sappiamo che

$$p = \frac{1}{3}\rho = \frac{1}{3}g\frac{\pi^2}{30}T^4 \implies \frac{dp}{dT} = \frac{4}{3}\frac{\rho}{T} = \frac{\rho + p}{T} \implies dp = \frac{1}{T}(\rho + p)dT$$

quindi

$$dS = d\left[\frac{\rho + p}{T}V\right] \quad (4.36)$$

Ma questo è una quantità moltiplicata per un volume. Quindi posso definire una **densità di entropia** s

$$s = \frac{\rho + p}{T} \quad (4.37)$$

Dato che l'entropia totale deve restare costante e il volume si espande, la densità di entropia si diluisce con il tempo.

4.8. Numero di gradi di libertà

Consideriamo ora solo le particelle ultra-relativistiche (siamo in un universo primordiale, quindi radiation dominated). La densità di energia di queste sarà

$$\rho_r = \sum_{i \in \text{u-rel}} \rho_i = \frac{\pi^2}{30} \left[\sum_{i \in \text{BE}} g_i T_i^4 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{FD}} g_i T_i^4 \right]_{i \in \text{u-rel}} \quad (4.38)$$

Dato che i fotoni sono le particelle di gran lunga più abbondanti nell'universo, di solito si usa la temperatura di quest'ultima come valore di riferimento:

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_*(T_\gamma) T_\gamma^4 \quad (4.39)$$

dove g_* viene detto **numero efficace di gradi di libertà in energia**

$$g_*(T) = \sum_{i \in \text{BE}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{FD}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (4.40)$$

Noi sappiamo che man mano che le specie diventano non relativistiche e si svuotano, ci sono sempre meno specie che contribuiscono a questo conteggio. Quindi ci aspettiamo una funzione “a gradini”.

Prendiamo ora la densità di entropia

$$s_r = \sum_{i \in \text{u-rel}} s_i = \sum_{i \in \text{UR}} \frac{p_i + \rho_i}{T_i} = \frac{4}{3} \sum_{i \in \text{UR}} \frac{\rho_i}{T_i} = \frac{2\pi^2}{45} \tilde{g}_*(T_\gamma) T_\gamma^3 \quad (4.41)$$

dove \tilde{g}_* viene detto **numero efficace di gradi di libertà in entropia**

$$\tilde{g}_*(T) = \sum_{i \in \text{BE}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{FD}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (4.42)$$

Osservazione

Finché siamo nel bagno termico tutte le specie condividono la stessa temperatura T quindi tutti i rapporti $\frac{T_i}{T}$ fanno 1. Se è così, allora $g_* = \tilde{g}_*$.

Nel momento in cui una qualsiasi specie si disaccoppia, questa specie potrà avere una temperatura diversa. In tal caso il contributo dato a g_* e a \tilde{g}_* sarà diverso (perché dipendono da una potenza diversa del rapporto tra temperature) e quindi $g_* \neq \tilde{g}_*$.

4.8.1. Valori effettivi

Andiamo ora a vedere effettivamente i valori che assume g_* . Iniziamo dal momento in cui tutte le specie erano ultra-relativistiche.

- Per i bosoni abbiamo

$$\begin{aligned} 2 &+ \text{ fotoni (2 polarizzazioni)} \\ 2 \cdot 8 &+ \text{ gluoni (8 colorazioni e 2 polarizzazioni)} \\ 3 \cdot 3 &+ \text{ bosoni } W^\pm, Z^0 \text{ (3 stati di spin)} \\ 1 &= \text{ bosone di Higgs} \\ 28 & \end{aligned}$$

- Per i fermioni abbiamo

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \cdot 2 &+ \text{ leptoni } e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm \text{ (2 spin e 2 part.-antipart.)} \\ 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 &+ \text{ quark (3 colori, 2 spin e 2 part.-antipart.)} \\ 3 \cdot 2 &= \text{ neutrini (2.-antipart)} \\ 90 & \end{aligned}$$

dove non ho moltiplicato per 2 spin i neutrini in quanto la teoria ci dice che esistono solo quelli *left-handed*.

Se sono tutti nel bagno termico (con la stessa temperatura)

$$g_* = 28 + \frac{7}{8} 90 = 106.75$$

Man mano che le specie diventano non relativistiche dobbiamo togliere il loro contributo (ad esempio quando per primo il quark top transisce dobbiamo togliere $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ gradi di libertà fermionici).

Facendo il conto dopo ogni transizione si ottengono i risultati riportati nella seguente tabella e mostrati nel grafico.

Evento/Particelle che transiscono	Energia scala	g_* rimanenti
Big Bang		106.75
t	170 GeV	96.25
H, Z^0, W^\pm	100 GeV	86.25
b	4 GeV	75.75
c, τ	1.5 GeV	61.75
QCD phase transition	150 MeV	17.25
$\pi^{\pm,0}, \mu$	100 MeV	10.75
Disaccoppiamento ν	1 MeV	5.5
e	0.5 MeV	2

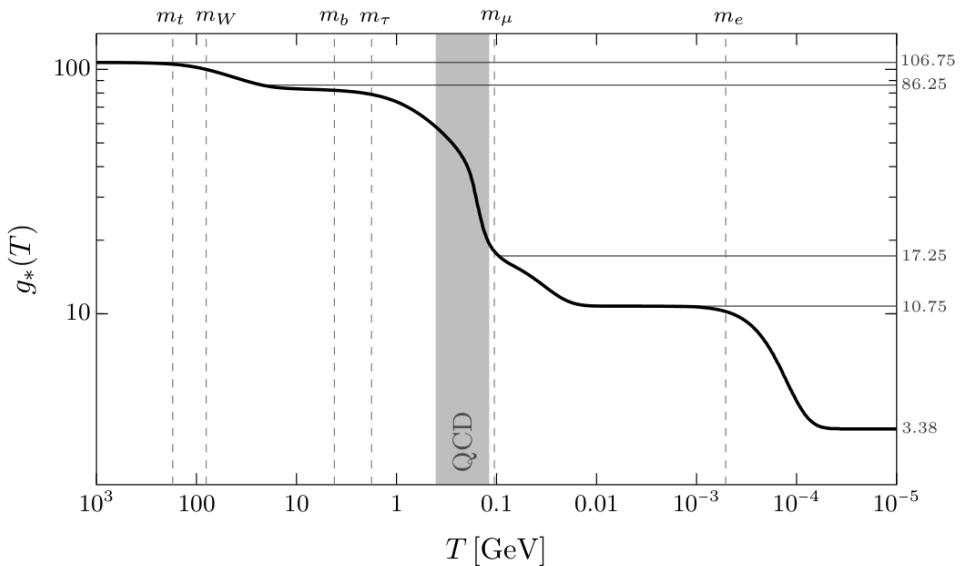


Figura 22 : Evoluzione del numero efficace di gradi di libertà in energia

La zona evidenziata in grigio corrisponde alla **trasizione di fase della QCD**. Questo è il processo in cui si stabilisce il confinamento di quark e gluoni che si condensano a formare adroni. Tutti gli adroni formatisi, fatta eccezione per i pioni $\pi^{\pm,0}$, hanno una massa maggiore dell'energia a cui avviene la transizione dunque si formano già non relativistici (motivo della grande caduta di g_* che perde tutti i quark e gluoni in un colpo solo).

4.9. Evoluzione della temperatura

Vogliamo ora vedere come evolve la temperatura legandola al fattore di scala. Noi sappiamo che l'entropia totale del bagno termico rimane costante, e questa sarà data dalla densità di entropia per il volume, quindi

$$sa^3 = \text{cost} = \frac{2\pi^2}{45} \widetilde{g}_*(T) T^3 a^3$$

dove usiamo semplicemente T perché in questa fase $T_\gamma = T$. Quindi otteniamo che la temperatura del bagno evolve come

$$T \propto a^{-1} [\widetilde{g}_*(T)]^{-\frac{1}{3}} \quad (4.43)$$

Cerchiamo di capire cosa succede nella pratica. Supponiamo di avere il bagno termico e ad un certo punto avviene la transizione di una specie. Quella specie non contribuirà più nel conteggio dei gradi di libertà. Quindi g_* scende e T sale. Nella realtà T non sale, bensì rallenta la diminuzione data dal fattore a , come si vede nel grafico seguente

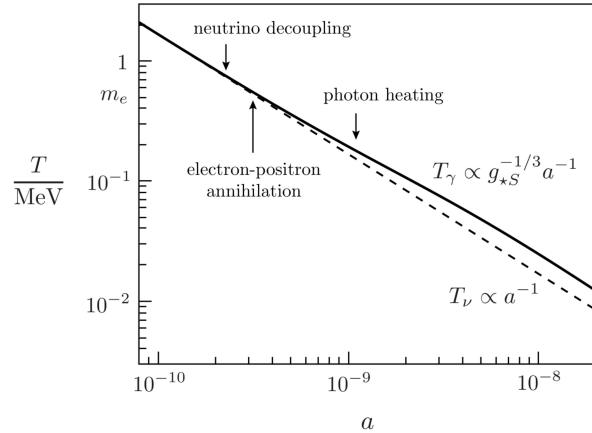


Figura 23 : Evoluzione della temperatura durante la transizione di fase degli elettroni.

Dal punto di vista fisico, quando la specie transisce ci sono molte annichilazioni e quindi un grosso rilascio di energia (tipicamente sotto forma di fotoni). Questa energia viene redistribuita al bagno che riesce a resistere temporaneamente al calo di temperatura (come se avessi del calore che viene fornito al bagno). Questo è esattamente analogo a quanto avviene nelle transizioni di stato (e.g. da liquido a solido) dove durante la transizione la temperatura non scende perché ho il *calore latente*.

Dato che l'energia viene ridistribuita al bagno, se ho una specie che non interagisce più, questa non riceverà l'energia liberata e quindi non sentirà l'effetto della transizione di fase. Un esempio è la transizione di fase degli elettroni che avviene dopo che i neutrini si sono disaccoppiati.

4.9.1. Disaccoppiamento dei neutrini

Prima di trattare cosa succede ai neutrini durante la transizione degli elettroni facciamo un paio di considerazioni. Innanzitutto notiamo che se il potenziale chimico dei neutrini μ_ν è circa 0 (come ci si aspetta da quanto ci dicono i particellari), allora possiamo dire che l'entropia dei soli neutrini sarà anch'essa conservata (e dunque sarà conservata anche l'entropia del bagno senza neutrini). Infatti

$$\frac{dS_\nu}{dt} = -\frac{1}{T} \mu_\nu \frac{dN_\nu}{dt} = 0$$

In secondo luogo possiamo considerare il numero di neutrini. Sappiamo che questi sono stabili quindi il loro numero non varia nel tempo (ci sono le oscillazioni tra una famiglia e l'altra ma il numero totale è costante)

$$N_\nu = V n_\nu \propto a^3 n_\nu \propto a^3 g a^{-3} \int d^3 q \frac{1}{\exp\{-\frac{q}{T}\} + 1}$$

dove abbiamo trascurato la loro massa e il loro potenziale chimico. Sapendo che questo deve essere costante, vuol dire che l'integrale non può dipendere da a . Tuttavia c'è una dipendenza

da a nascosta nel trimomento, infatti passando al momento comovente $|\vec{P}| = a|\vec{q}|$ l'integrale diventa

$$\int d^3q \frac{1}{\exp\left\{-\frac{|\vec{P}|}{aT}\right\} + 1}$$

Se vogliamo che questo non dipenda da a vuol dire che la temperatura deve controbilanciare. Quindi concludiamo che per i neutrini dopo il disaccoppiamento si ha

$$T_\nu \propto a^{-1} \quad (4.44)$$

Passiamo ora a studiare cosa succede quando c'è la transizione di fase degli elettroni (a $T \approx m_e \approx 0.5 \text{ MeV}$). Consideriamo l'entropia del bagno termico (senza i neutrini) che dovendosi conservare sarà uguale prima e dopo la transizione

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_*(T) T^3 a^3 \Big|_{T > m_e} &= \widetilde{g}_*(T) T^3 a^3 \Big|_{T < m_e} \\ \frac{\widetilde{g}_*(T > m_e)}{\widetilde{g}_*(T < m_e)} &= \frac{[Ta]_{T < m_e}^3}{[Ta]_{T > m_e}^3} \end{aligned}$$

Prima della transizione nel bagno rimangono solo più elettroni e fotoni quindi

$$\widetilde{g}_*(T > m_e) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{11}{2}$$

Dopo ci sono solo più i fotoni

$$\widetilde{g}_*(T < m_e) = 2$$

Quindi

$$\frac{11}{4} = \frac{[Ta]_{T < m_e}^3}{[Ta]_{T > m_e}^3}$$

Dato che i fotoni fanno parte del bagno sia prima che dopo (a noi interessa solo il dopo) abbiamo che

$$T|_{T < m_e} = T_\gamma|_{T < m_e}$$

Inoltre prima della transizione i anche i neutrini avevano la stessa temperatura del bagno. Infatti erano avvenuto da poco il disaccoppiamento (a $T \approx 1 \text{ MeV}$) e nel lasso di tempo tra 1 MeV e 0.5 MeV sia i neutrini che il bagno erano evoluti allo stesso modo anche senza "parlarsi" (perché non essendo successo "niente di interessante", erano soggetti solo all'espansione dell'universo uguale per tutti) mantenendo la stessa temperatura.

$$T|_{T > m_e} = T_\nu|_{T > m_e}$$

Questo ovviamente non è vero dopo 0.5 MeV perché per il bagno è successa la transizione degli elettroni, di cui i neutrini non si sono accorti. Quindi

$$\frac{11}{4} = \frac{[T_\gamma a]_{T < m_e}^3}{[T_\nu a]_{T > m_e}^3}$$

Possiamo ora sfruttare l'evoluzione della temperatura per i neutrini. Infatti abbiamo che $T_\nu a$ rimane costante e ha valore uguale sia prima che dopo la transizione (di cui tanto i neutrini non si accorgono)

$$\frac{11}{4} = \left[\frac{T_{\gamma\alpha}}{T_{\nu\alpha}} \right]_{T < m_e}^3$$

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \quad (4.45)$$

Questa relazione è valida a qualunque tempo successivo alla transizione degli elettroni (che sono stati gli ultimi a transire). Possiamo quindi valutarlo oggi

$$T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_{\gamma 0} = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} 2.73 \text{ K} \approx 1.95 \text{ K} \quad (4.46)$$

Ciò significa che possiamo aspettarci un **fondo cosmico di neutrini (Cosmic neutrinos Background, CνB)** con una temperatura di circa 1.95 K.

Bisogna però tenere conto che ad un certo punto anche i neutrini diventeranno non relativistici annichilendosi e diventando molto più rari.

Volendo ora possiamo correggere la stima che avevamo fatto dell'abbondanza della radiazione che avevamo fatto nell'Equazione (4.23), aggiungendo ai fotoni della CMB anche i neutrini della CνB. Facendo il conto si ottiene effettivamente un risultato compatibile con quanto atteso ($\Omega_{r0} \approx 9 \cdot 10^{-5}$).

4.10. Scale temporali ed energetiche

Abbiamo visto in precedenza che ci sono alcune scale energetiche fondamentali dettate dalla fisica delle particelle. È nostro interesse ora cercare di legare queste scale energetiche a valori temporali dopo il Big Bang. Per fare ciò possiamo utilizzare l'equazione di Friedmann (in regime radiaton-dominated)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_r = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4$$

$$H = \frac{2}{3} \left[\frac{\pi^3 G}{5} g_*(T) \right]^{\frac{1}{2}} T^2 \quad (4.47)$$

Ma sappiamo che in un universo radiation-dominated la relazione tra tempo e fattore di scala segue $a \sim t^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \dot{a} \sim \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = H = \frac{1}{2t}$.

Quindi posso legare le energie ai tempi a cui le incontriamo. Riportiamo di seguito una tabella con gli eventi, la loro energia e il tempo a cui sono avvenuti dopo il Big Bang

Evento	Temperatura	Tempo
EW phase transition	100 GeV	20 ps
QCD phase transition	150 MeV	20 μs
Disaccoppiamento ν	1 MeV	1 s

4.11. Equazione di Saha

Supponiamo di essere in equilibrio chimico per la rezione $A + B \leftrightarrow C + D$

$$\begin{aligned} \mu_A + \mu_B &= \mu_C + \mu_D \\ \mu_A + \mu_B + m_A + m_B - m_A - m_B &= \mu_C + \mu_D + m_C + m_D - m_C - m_D \\ -\frac{m_A - \mu_A}{T} - \frac{m_B - \mu_B}{T} + \frac{m_A}{T} + \frac{m_B}{T} &= -\frac{m_C - \mu_C}{T} - \frac{m_D - \mu_D}{T} + \frac{m_C}{T} + \frac{m_D}{T} \quad (4.48) \end{aligned}$$

Possiamo poi esprimere questi termini in funzione delle funzione della densità numerica per specie non relativistiche

$$n_s(T) = g_s \left(\frac{m_s T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{m_s - \mu_s}{T} \right\}$$

Definiamo anche

$$n_s^{(0)}(T) = g_s \left(\frac{m_s T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{m_s}{T} \right\}$$

che sarebbe la densità numerica che avrebbe la specie se avesse potenziale chimico nullo (sarà utile successivamente).

In questo modo possiamo scrivere

$$\exp \left\{ -\frac{m_A - \mu_A}{T} \right\} \exp \left\{ -\frac{m_A}{T} \right\} = \frac{n_A(T)}{n_A^{(0)}(T)} \quad (4.49)$$

Quindi esponenziando ambo i lati dell'Equazione (4.48) si ottiene

$$\frac{n_A(T)}{n_A^{(0)}(T)} \frac{n_B(T)}{n_B^{(0)}(T)} = \frac{n_C(T)}{n_C^{(0)}(T)} \frac{n_D(T)}{n_D^{(0)}(T)} \quad (4.50)$$

Questa viene detta **Equazione di Saha**, che descrive la relazione tra concentrazioni numeriche di specie non relativistiche all'equilibrio chimico.

4.12. Nucleosintesi primordiale

Passiamo ora allo studio di un altro evento imporante nella storia dell'universo. Consideriamo lo stato dopo l'annichilazione $e^+ e^-$. Troviamo fotoni e neutrini che sono relativistici. Poi ci sono in quantità molto minore tutte le specie non relativistiche, tra cui elettroni, protoni e neutroni (gli unici a questo punto sufficientemente abbondanti da essere interessanti).

Iniziamo considerando quali sono le interazioni che agiscono su queste particelle:

- L'interazione gravitazionale è ancora trascurabile
- L'interazione debole è diventata poco efficiente e sta per superare la soglia oltre la quale non riuscirà più a tenere il passo con l'espansione
- L'interazione forte è confinata all'interno degli adroni e schermata. Sopravvive solo una forza residua a molto corto raggio (analoga alle interazioni di Van der Waals per le molecole) detta **interazione nucleare forte** agente tra i nucleoni trasportata da pioni virtuali
- L'interazione elettromagnetica rimane ancora efficiente

Tra queste quella dominante è la nucleare forte che continua a dominare anche sulla elettromagnetica. Sotto l'azione di questa forza, i nucleoni tendono ad aggregarsi negli stati stabili: i nuclei atomici.

Definizione 4.5

Indichiamo con Z il numero di protoni detto **numero atomico**, con A il numero di protoni e neutroni detto **numero di massa**.

Dato il nucleo ${}^A_Z E$ questo avrà massa

$$m_E = Zm_p + (A - Z)m_n - B_E \quad (4.51)$$

dove B_E è l'**energia di legame**

Questo processo (detto **nucleosintesi primordiale**) è analogo a quello che è successo durante la transizione di fase della QCD. La differenza è che per la QCD l'energia di legame era dell'ordine dei GeV mentre in questo caso siamo sull'ordine dei MeV.

Anche in questo caso i nuclei vengono prodotti già non relativistici.

Siamo ora interessati a quale sia la temperatura sotto la quale dobbiamo scendere per avere un numero apprezzabile di nuclei formati (vedremo che non è solo leggermente sotto l'energia di legame, bensì molto al di sotto).

Supponiamo che un particolare nucleo sia in equilibrio chimico con i protoni e neutroni liberi

$$\mu_E = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n \quad (4.52)$$

Andiamo ora a valutare l'argomento dell'esponenziale nell'espressione della densità numerica non relativistica.

$$\begin{aligned} -\frac{m_E - \mu_E}{T} &= -Z\frac{m_p}{T} - (A - Z)\frac{m_n}{T} + \frac{B_E}{T} + Z\frac{\mu_p}{T} + (A - Z)\frac{\mu_n}{T} \\ &= Z\frac{m_p - \mu_p}{T} - (A - Z)\frac{m_n - \mu_n}{T} + \frac{B_E}{T} \end{aligned}$$

Esponenziando e scrivendo in funzione delle densità numeriche di protoni e neutroni otteniamo

$$\exp\left\{-\frac{m_E - \mu_E}{T}\right\} = \left[\frac{n_p(T)}{g_p} \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^Z \left[\frac{n_n(T)}{g_n} \left(\frac{m_n T}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^{A-Z} \exp\left\{\frac{B_E}{T}\right\}$$

Dove $g_n = g_p = 2$.

Assumiamo inoltre che la massa dei nucleoni sia circa uguale ($m_p \approx m_n \approx m_N$). Infatti la differenza tra le masse, che d'ora in poi chiameremo $Q = m_n - m_p \approx 1.3$ MeV è molto minore delle masse stesse.

Quindi otteniamo

$$\exp\left\{-\frac{m_E - \mu_E}{T}\right\} = 2^{-A} n_p^Z n_n^{A-Z} \left(\frac{m_N T}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}A} \exp\left\{\frac{B_E}{T}\right\}$$

Possiamo quindi scrivere la densità numerica del nucleo facendo l'approssimazione $m_E \approx Am_N$

$$n_E(T) = g_E 2^{-A} n_p^Z n_n^{A-Z} A^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_N T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}(1-A)} \exp\left\{\frac{B_E}{T}\right\} \quad (4.53)$$

Per avere idea quantitativa di quanti ce ne siano ci serve una scala, quindi si usa calcolare il rapporto rispetto al numero di barioni (qualsiasi materia non oscura).

Si definisce la quantità

$$x_E = \frac{N_E}{N_B} = \frac{n_E}{n_B} = \frac{n_E}{n_\gamma \eta} \quad (4.54)$$

Possiamo sfruttare l'equazione trovata sopra per capire l'andamento.

$$x_E \propto \frac{(x_p n_\gamma \eta)^Z (x_n n_\gamma \eta)^{A-Z}}{n_\gamma \eta} T^{\frac{3}{2}(1-A)} \exp\left\{-\frac{B_E}{T}\right\} \quad (4.55)$$

Ricordando che $n_\gamma \propto T^3$ e trascurando x_p e x_n (sono dell'ordine dell'unità e a noi interessano solo gli ordini di grandezza) si ottiene

$$x_E \propto \eta^{A-1} T^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\frac{B_E}{T}} \propto \eta^{A-1} e^{\frac{B_E}{T}} \quad (4.56)$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato il termine con andamento a potenza, in quanto domina l'esponenziale. Questo è vero perché $B_E > T$, infatti siamo a temperature al di sotto del MeV, mentre le energie di legame anche solo le più basse sono $B_D \approx 2.2$ MeV (D è il deutone), $B_{^3H} \approx 7.8$ MeV, $B_{^3He} \approx 3.4$ MeV e $B_{^4He} \approx 25$ MeV.

Prendiamo il logaritmo dell'espressione

$$\ln(x_E) \propto (A-1) \ln(\eta) + \frac{B_E}{T} \quad (4.57)$$

$$T = \frac{B_E}{(1-A) \ln(\eta) + \ln(x_E)} \quad (4.58)$$

Questa è la temperatura sotto la quale bisogna scendere per avere un determinato x_E . Se supponiamo di voler raggiungere $x_E \approx 1 \Rightarrow \ln(x_E) \approx 0$, notiamo che dobbiamo andare a temperature molto più basse di B_E (perché ricordiamo che $\eta \approx 6 \cdot 10^{-10}$).

Fisicamente questo succede perché c'è un numero enorme di fotoni. Quindi anche se l'energia di legame ricade nella coda della distribuzione, questa sarà popolata da un numero cospicuo di fotoni che potranno quindi distruggere il nucleo. Per far sì che non ci siano più abbastanza fotoni che possono distruggere il nucleo è necessario dunque che l'energia di legame sia incredibilmente in profondità nella coda.

Possiamo pensare ora a quale nucleo si forma prima. Si potrebbe pensare che quelli con energia di legame maggiore si formino prima, ad esempio tra i quattro elencati sopra ci si aspetterebbe si sia formato prima l'elio. Tuttavia per la formazione diretta dell'elio sarebbe necessario uno scattering a 4 corpi che è cinematicamente soppresso. Dunque per formare l'elio è prima necessario formare il deutone ($p + n \rightarrow D + \gamma$). Una volta che ho deutoni a sufficienza posso poi formare elio. Ma D si forma a temperature più basse, quindi devo aspettare di più rispetto a quello che avrei se potessi formare direttamente 4He . Si parla di **Deuterion Bottleneck**, infatti una volta che ho il deutone la produzione di elio è incredibilmente efficiente e veloce.

Facendo il conto con la formula sopra, per raggiungere $x_D \approx 1$ bisogna aspettare fino a

$$T \approx 0.1 \text{ MeV}$$

Se si usa invece la formula completa si ottiene

$$T \approx 0.05 \text{ MeV} \quad (4.59)$$

Questa è la temperatura a cui avviene la nucleosintesi

4.12.1. Concentrazione di elio

Vogliamo andare ora a calcolare quanto elio è stato prodotto nella nucleosintesi primordiale. In particolare siamo interessati nel rapporto tra la massa di elio e la massa totale barionica indicato con Y_p

$$Y_p = \frac{\sum m_{^4\text{He}}}{\sum m_b} = \frac{4m_N N_{^4\text{He}}}{m_N(N_p + N_n)} = \frac{4m_N \frac{N_n}{2}}{m_N(N_p + N_n)} = 2x_n \quad (4.60)$$

Dove abbiamo sostituito $\frac{N_n}{2}$ a $N_{^4\text{He}}$ perché stiamo supponendo che tutti i neutroni vengano usati per formare elio. Dobbiamo notare tre cose:

- A denominatore abbiamo tutti i protoni e tutti i neutroni, anche quelli usati per formare l'elio (perché nella massa barionica stiamo considerando anche l'elio)
- Non stiamo contando gli elettroni (che sono barioni nel senso cosmologico di materia non oscura) perché hanno massa trascurabile
- Abbiamo sostituito con N_n e non con N_p perché ci sono meno neutroni che protoni. Questo perché sappiamo che la densità numerica dipende inversamente dalla massa della specie, ed essendo i neutroni più massivi si diradano più velocemente.

Quindiabbiamo

$$Y_p = 2 \frac{N_n}{N_p + N_n} = 2 \frac{n_n}{n_p + n_n} = \frac{2}{1 + \frac{n_p}{n_n}} \quad (4.61)$$

Concentriamoci su $\frac{n_p}{n_n}$. Le interazioni che influenzano questo rapporto sono $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ e $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e$. Notiamo che sono entrambe mediate dall'interazione debole.

Se siamo ancora prima del disaccoppiamento dei neutrini (quindi in equilibrio chimico) possiamo usare l'equazione di Saha, sfruttando il fatto che i neutrini e gli elettroni hanno potenziale chimico pressoché nullo (quindi la loro densità numerica è uguale a quella con (0) ad apice)

$$\frac{n_p n_{e^-}}{n_n n_{\nu_e}} = \frac{n_p^{(0)} n_{e^-}^{(0)}}{n_n^{(0)} n_{\nu_e}^{(0)}} \\ \frac{n_p}{n_n} = \frac{g_p \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_p}{T}}}{g_n \left(\frac{m_n T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_n}{T}}} \approx e^{\frac{Q}{T}} \quad (4.62)$$

Questa relazione è valida solo fino a quando non avviene il disaccoppiamento dei neutrini. Dopo sappiamo che l'interazione debole non riesce a tenere il passo con l'espansione dell'universo. Quando avviene il disaccoppiamento, anche i neutroni smettono di interagire (trascuriamo l'interazione nucleare forte che lavora solo a corto range). Quindi possiamo usare la formula vista sopra per calcolare fino a $x_n(T = 1 \text{ MeV})$. In realtà facendo i conti più correttamente il disaccoppiamento dei neutrini avviene a $T = 0.8 \text{ MeV}$.

Se i neutroni fossero stabili, oltre questo punto il rapporto si congelerebbe, tuttavia questi decadono con un tempo di decadimento $\tau_n \approx 890 \text{ s}$. Dunque ho quello che si chiama il **freeze-out** dei protoni, mentre i neutroni piano piano diminuiscono.

Dobbiamo calcolare come evolve il rapporto nel lasso di tempo tra $T = 0.8 \text{ MeV}$ e $T = 0.05 \text{ MeV}$, che se si trasforma in relazione temporale dà un risultato molto vicino a τ_n . È come se fosse una corsa contro il tempo tra il decadimento e la ricombinazione.

$$x_n(T = 0.05 \text{ MeV}) = x_n(T = 0.8 \text{ MeV}) \exp\left\{-\frac{t(T = 0.05 \text{ MeV})}{\tau_n}\right\}$$

Se si fanno tutti i conti si ottiene

$$Y_p \approx 0.25 \quad (4.63)$$

che corrisponde effettivamente alla concentrazione che si osserva nell'universo.

Notiamo che se vogliamo ottenere la frazione numerica di He dobbiamo dividere per un fattore 4 (perché l'elio ha 4 volte la massa dei singoli protoni), ottenendo $x_{\text{He}} = \frac{n_{\text{He}}}{n_b} = \frac{Y_p}{4} \approx 6.25\%$.

Questo è un risultato molto importante in cosmologia perché permette di legare una quantità misurata astronomicamente (Y_p) a una misurata cosmologicamente (η). La stessa relazione può essere calcolata anche per altri nuclei, anche se la cosa è molto più complicata (non basta l'equazione di Saha, bisogna utilizzare l'equazione di Boltzmann collisionale) ottenendo il risultato riportato qui di fianco.

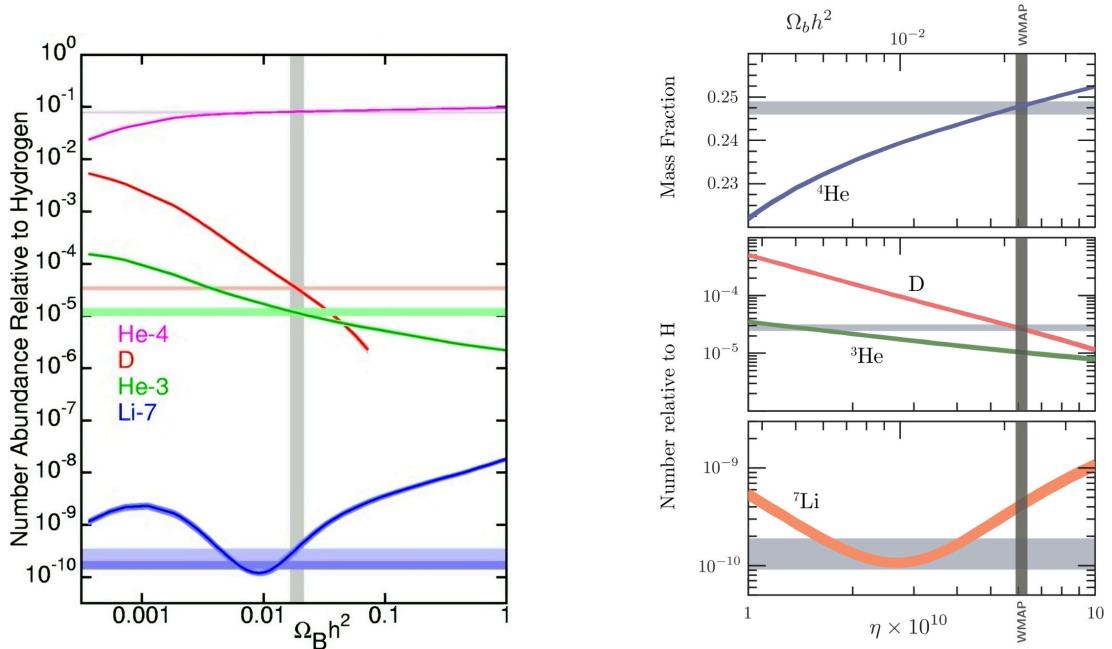


Figura 24 : Andamento delle concentrazioni dei nuclei in funzione di η .

Le bande orizzontali rappresentano i valori sperimentali.

Come si può notare, i valori per il litio non sono in accordo. Questo è un problema ancora aperto in cosmologia detto **Lithium problem**.

4.13. Ricombinazione atomica

A questo punto ci troviamo in un universo in cui sono presenti dei nuclei e degli elettroni, entrambi non relativistici e un gran numero di fotoni. L'unica interazione rimanente oltre a quella gravitazionale è quella elettromagnetica che è ancora dominante. In analogia a quanto successo nella nucleosintesi, gli elettroni iniziano a legarsi con i nuclei formando atomi elettricamente neutri



dove i γ_s hanno energie uguali alle energie di legame atomiche.

Questo fenomeno viene detto **ricombinazione**, anche se un termine più corretto dovrebbe

essere *combinazione* dato che gli atomi non sono mai stati combinati prima di questo momento. Tuttavia si utilizza ricombinazione per ragioni storiche.

Inidchiamo con $I_E = \sum_{i=1}^Z I_{E,i}$ la somma di tutte le energie di legame per un determinato atomo

$$\begin{cases} I_{\text{H}} = I_{\text{H},1} \approx 13.6 \text{ eV} \\ I_{\text{He},1} \approx 25 \text{ eV} \\ I_{\text{He},2} \approx 55 \text{ eV} \end{cases} \quad (4.65)$$

Notiamo innanzitutto che ci troviamo ad una scala di energia diversa dalla nucleosintesi (lì avevamo i MeV, qui abbiamo i eV).

Inoltre anche qui notiamo una scala di energie ben definita e dato che non ci sono fenomeni analoghi al bottleneck del deuterio, questa scala impone direttamente un ordine temporale: viene ricombinato inizialmente He^{++} poi He^+ e infine H^+ .

Dato che l'elio è presente in quantità inferiore e la sua ricombinazione avviene prima e più velocemente, possiamo concentrarci solo sulla ricombinazione dell'idrogeno che dura più a lungo.

Innanzitutto facciamo l'assunzione di essere in equilibrio non relatinistico, in questo modo vale l'equazione di Saha

$$\frac{n_A n_B}{n_C n_D} = \frac{n_A^{(0)} n_B^{(0)}}{n_C^{(0)} n_D^{(0)}}$$

Nel nostro caso abbiamo $p^+ + e^- \rightarrow \text{H} + \gamma$, che implica (assumendo tutto non relativistico)

$$m_p + m_e = m_{\text{H}} + I_{\text{H}} \quad \text{e} \quad \mu_p + \mu_e = \mu_{\text{H}} \quad (4.66)$$

(notiamo che diversamente dalla nucleosintesi abbiamo $\mu_e \neq 0$ perché ora gli elettroni sono diventati non relativistici).

$$\frac{n_p n_e}{n_{\text{H}}} = \frac{n_p^{(0)} n_e^{(0)}}{n_{\text{H}}^{(0)}} \quad (4.67)$$

noi vogliamo ottenere la concentrazione numerica

$$x_{\text{H}} = \frac{N_{\text{H}}}{N_b} = \frac{n_{\text{H}}}{n_b} = 1 - x_p \quad (4.68)$$

dove x_p è la frazione di protoni, e nell'ultima uguaglianza abbiamo fatto l'assunzione che tutto ciò che non è idrogeno siano protoni liberi. Dobbiamo fare l'ulteriore assunzione (che per il momento non è stata ancora sperimentalmente smentita) che l'universo sia nel complesso elettricamente neutro, dunque che il numero di elettroni sia uguale a quello di protoni $x_e = x_p$

$$1 - x_e = \frac{n_{\text{H}}}{n_b} = \frac{n_{\text{H}}^{(0)}}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \frac{\overbrace{\frac{n_p}{n_b}}^{=x_p} \overbrace{\frac{n_e}{n_e}}^{=x_e}}{=} \quad (4.69)$$

Possiamo ora scrivere l'espressione degli $n_s^{(0)}$

$$n_s^{(0)} = g_s \left(\frac{m_s T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{m_s}{T} \right\}$$

dove $g_{\text{H}} = 4 = 3 + 1$ dato dal singoletto e tripletto. Facciamo poi l'approssimazione $m_{\text{H}} \approx m_p$ (solo nel termine con la potenza, nell'esponenziale che è più sensibile teniamo tutto)

$$1 - x_e = \left(\frac{2\pi}{T m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{I_H}{T} \right\} x_e^2 \eta n_\gamma$$

Andando a scrivere l'espressione di n_γ otteniamo

$$1 - x_e = x_e^2 \underbrace{\left(\frac{2\pi}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{I_H}{T} \right\} \eta \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^{\frac{3}{2}}}_{f(T)} = f(T) x_e^2 \quad (4.70)$$

$$f(T) x_e^2 + x_e - 1 = 0$$

$x_e(T) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4f(T)}}{2f(T)}$

con $f(T) = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{I_H}{T} \right\}$

(4.71)

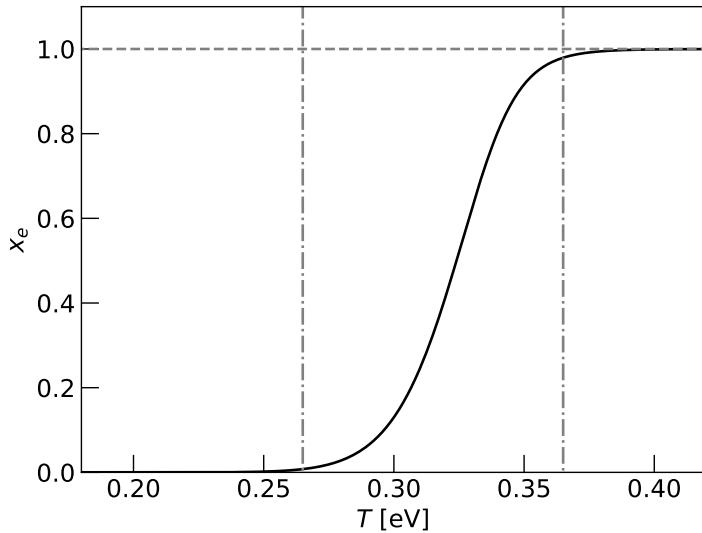


Figura 25 : Evoluzione della frazione di elettroni liberi durante la ricombinazione.

Possiamo chiederci a che redshift (e quindi a che tempo) corrisponde questo evento (ricordiamo che la nucleosintesi è avvenuta circa 3 minuti dopo il Big Bang).

$$T \sim [\widetilde{g}_*(T)]^{-\frac{1}{3}} a^{-1} \sim [\widetilde{g}_*(T)]^{-\frac{1}{3}} (1 + \mathcal{Z})$$

Ma dopo che c'è stata la ricombinazione di e^\pm , nel bagno termico sono rimasti solo più fotoni e dunque \widetilde{g}_* non è più cambiata da quel momento fino ad oggi

$$T = T_{\gamma 0} (1 + \mathcal{Z}) \implies \mathcal{Z} = \frac{T}{T_{\gamma 0}} - 1$$

Facendo il calcolo per $T \approx 0.35$ eV (temperatura a cui inizia il processo) si ottiene $\mathcal{Z} \approx 1400$ che corrisponde ad un tempo $t \approx 3 \cdot 10^5$ y. Ma quel redshift si trova in un universo che è già matter-dominated. Quindi è passato moltissimo tempo da quando è avvenuta la nucleosintesi. Se si fa il conto anche per l'altro estremo ($T \approx 0.25$ eV) si ottiene una durata di $\Delta \mathcal{Z} \approx 400$. Dunque oltre a metterci molto tempo ad iniziare è un processo molto lungo.

Se vogliamo mettere una soglia di ricombinazione, un modo possibile (ne vedremo poi uno ancora migliore) è scegliere un threshold sulla x_e e convertirlo in redshift. Se ad esempio scegliamo $x_e = 0.5$ otteniamo $\mathcal{Z}_{\text{rec}} \approx 1270$ e $t_{\text{rec}} \approx 2.9 \cdot 10^5$ y.

4.14. Disaccoppiamento dei fotoni e CMB

Fermiamoci ora a riflettere sulle interazioni che avvengono prima della ricombinazione e che mantengono in equilibrio chimico i fotoni, i protoni e gli elettroni.

Tra fotoni e elettroni l'interazione avviene sotto forma di scattering Compton, mentre tra fotoni e protoni sotto forma di scattering Rutherford. Per entrambi i tipi di scattering vale la formula per il tasso di reazione di $\Gamma = n\sigma c$, e perché questo riesca ad avvenire è necessario avere $\Gamma \gg H$ (dove $H = H_0\sqrt{\Omega_{m0}}a^{-\frac{3}{2}}$ perché siamo in regime matter dominated).

La concentrazione di protoni (che scende tanto più velocemente tanto più la specie è massiva) cala molto più velocemente di quella degli elettroni. Quindi dato che le sezioni d'urto sono comparabili (essendo entrambi processi elettromagnetici) possiamo trascurare gli scattering Rutherford e pensare che i fotoni fossero accoppiati al bagno solo attraverso lo scattering Compton.

A queste temperature lo scattering Compton tende a semplice scattering Thompson (essendo gli elettroni non relativistici) che ha sezione d'urto non dipendente dalla temperatura

$$\sigma_{\text{Th}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^{-2} \quad (4.72)$$

dunque

$$\Gamma_\gamma = n_e \sigma_{\text{Th}} c = x_e n_b \sigma_{\text{Th}} c = x_e \eta n_\gamma \sigma_{\text{Th}} c \quad (4.73)$$

dove l'unica dipendenza dalla temperatura è data da x_e che lentamente scende a causa della ricombinazione. Ad un certo punto non ci saranno più abbastanza elettroni liberi con cui interagire e dunque si avrà il **disaccoppiamento dei fotoni** dal bagno.

Calcoliamo a che temperatura avviene

$$H(T_{\text{dec}}) = \Gamma(T_{\text{dec}})$$

$$H_0 \sqrt{\Omega_{m0}} \left(\frac{T_{\text{dec}}}{T_{\gamma0}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta \sigma_{\text{Th}} c T_{\text{dec}}^3 x_e(T_{\text{dec}}) \quad (4.74)$$

$$T_{\text{dec}} \approx 0.27 \text{ eV} \implies z_{\text{dec}} \approx 1200 \quad (4.75)$$

Tutto questo discorso è una buona approssimazione di quello che è successo davvero, ma molto semplificata. Infatti se fosse andata solo così, ogni volta che un elettrone veniva catturato si aveva l'emissione di un γ a 13.6 eV che poteva andare a estrarre l'elettrone di un idrogeno formato in precedenza, rallentando incredibilmente la ricombinazione.

Nella realtà gli elettroni non sono stati catturati subito al livello fondamentale, bensì si sono combinati ad un livello intermedio per poi decadere a quello fondamentale. In questo modo c'era il rilascio di due fotoni nessuno dei quali con energia sufficiente a strappare un elettrone già ricombinato.

Un'altra approssimazione che abbiamo fatto non del tutto vera è che tutto il processo di ricombinazione sia avvenuto in equilibrio. Tuttavia durante la ricombinazione stava avvenendo il disaccoppiamento dei fotoni che ha rotto l'equilibrio. Questo ha avuto come effetto il fatto che alcuni elettroni siano riusciti a scappare alla ricombinazione.

Combinando le due correzioni il grafico di Figura 25 viene traslato verso temperature più basse e non arriva mai a 0, bensì si ferma a $x_e \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$

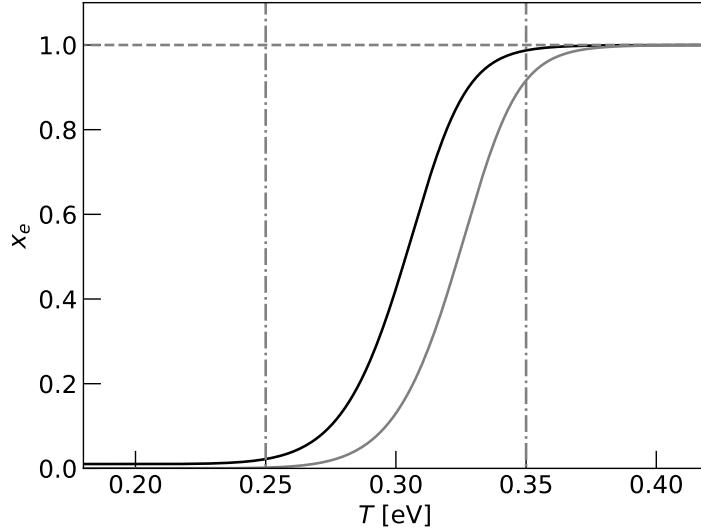


Figura 26 : Evoluzione della frazione di elettroni liberi durante la ricombinazione con le correzioni per le approssimazioni.

Il valore minimo raggiunto è innalzato per renderlo visibile.

Con il valore esatto risulterebbe indistinguibile.

4.15. Last scattering

Abbiamo visto che ad un certo punto i fotoni smettono di interagire con gli elettroni. Ci sarà quindi un momento in cui ciascun fotone scatterà per l'ultima volta.

Per calcolare questo dobbiamo studiare la probabilità che ci siano enne scattering in un tempo Δt . Questa sarà data dalla distribuzione di Poisson

$$\mathcal{P}(n, \Delta t) = \frac{(\Gamma_\gamma \Delta t)^n}{n!} e^{\Gamma_\gamma \Delta t} \quad (4.76)$$

Ma dato che Γ_γ varia nel tempo bisogna utilizzare una versione generalizzata

$$\Gamma_\gamma \Delta t \rightarrow \int dt \Gamma_\gamma(t)$$

Questo integrale non è nient'altro che la profondità ottica

$$\tau(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \Gamma_\gamma(t) \quad (4.77)$$

(questa si riconduce alla formula ottenuta nei corsi di astrofisica che Γ_γ è equivalente al libero cammino medio, dato che $c = 1$).

Quindi possiamo pensare al disaccoppiamento come il processo che ha reso l'universo otticamente sottile per i fotoni. Passiamo alla parametrizzazione in redshift

$$\tau(z_2, z_1) = \int_{z_2}^{z_1} dz \frac{\Gamma_\gamma}{(1+z)H(z)} \quad (4.78)$$

Vogliamo calcolare il tempo più lungo senza avere scattering, quindi ottenere z_{dec} tale che $\tau(0, z_{\text{dec}})$ mi dia la massima probabilità $\mathcal{P}(0, \tau) = e^{-\tau}$.

Per semplicità passo in redshift $\mathcal{P}(\tau) d\tau = g(z) dz$ dove g è la densità di probabilità in redshift, anche detta **visibilità**.

$$\varrho(\mathcal{Z}) = e^{-\tau} \frac{d\tau}{d\mathcal{Z}} \quad (4.79)$$

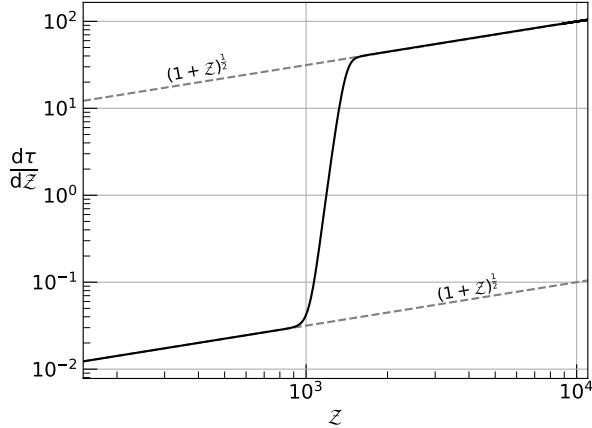
Sviluppando i vari termini ho

$$\begin{aligned}\Gamma_\gamma &\sim x_e(T)T^3 \sim x_e(\mathcal{Z})(1+\mathcal{Z})^3 \\ H &\sim (1+\mathcal{Z})^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Quindi

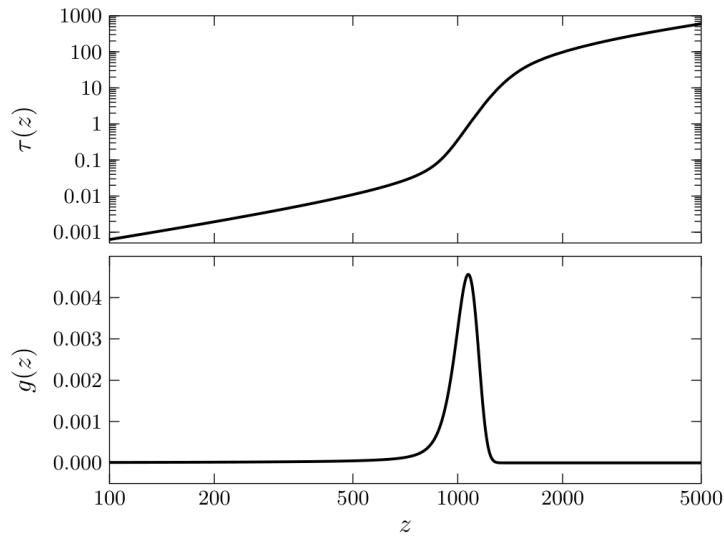
$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{d\mathcal{Z}} &= \frac{1}{d\mathcal{Z}} \frac{\Gamma_\gamma d\mathcal{Z}}{(1+\mathcal{Z})H(\mathcal{Z})} \\ &\sim (1+\mathcal{Z})^3(1+\mathcal{Z})^{-1}(1+\mathcal{Z})^{-\frac{3}{2}}x_e(\mathcal{Z}) \\ &\sim (1+\mathcal{Z})^{\frac{1}{2}}x_e(\mathcal{Z})\end{aligned}\quad (4.80)$$

Ma x_e è costante prima e dopo la ricombinazione, quindi ho due andamenti paralleli che vengono interpolati durante la ricombinazione



Integrando otteniamo τ che avrà un andamento analogo a legge di potenza con esponente di uno più grande alla sua derivata.

Quindi ϱ sarà 0 sia a valori di \mathcal{Z} piccoli (a causa di $\frac{d\tau}{d\mathcal{Z}}$) che a valori grandi (a causa di $e^{-\tau}$).



Notiamo che la distribuzione non è simmetrica (perché x_e non lo è). Definiamo il **last scattering** come il punto in cui è più probabile che sia avvenuto lo scattering, dunque il picco della distribuzione, che si trova a $Z_{ls} \approx 11000$ (corrispondente a $t_{ls} \approx 400000$ anni dopo il Big Bang). La luce che riceviamo dalla CMB proviene proprio da quell'ultimo scattering avvenuto in quel momento. Possiamo notare che la distribuzione ha una larghezza di $\Delta Z \approx 80$ (corrispondente a $t \approx 150 \div 200$ anni). Questo significa che la CMB non è stata prodotta istantaneamente (se vogliamo, non è “infinitamente sottile”), bensì ha uno “spessore” di circa 1000 anni.

CAPITOLO 5

Inflazione cosmologica

5.1. Horizon problem e Flatness problem

Andiamo ora a trattare un aspetto problematico che ha il modello cosmologico descritto dal Big Bang e dalle equazioni di Friedmann (per il momento useremo Big Bang e singolarità in modo intercambiabile, scopriremo molto presto che questo non è corretto). Il problema risiede nell'alto grado di omogeneità che osserviamo nell'universo.

Abbiamo già visto come la CMB sia un corpo nero praticamente perfetto a una temperatura omogenea di $\bar{T} = 2.73 \text{ K}$ ovunque, con piccolissime fluttuazioni. Di queste fluttuazioni è possibile fare la trasformata in armoniche sferiche

$$T(\hat{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_l^m(\hat{n})$$

con $\langle a_{lm} \rangle = \bar{T}$ e $\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle$ la covarianza (si prende il complesso coniugato perché a_{lm} possono assumere valori complessi).

Se le fluttuazioni fossero casuali (come rumore bianco) si avrebbe un andamento costante per i coefficienti della trasformata. Quello che invece si osserva è una struttura complessa

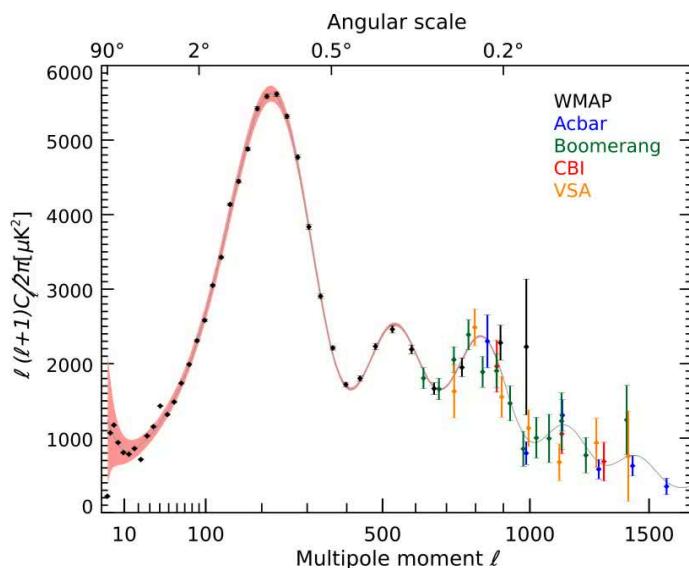


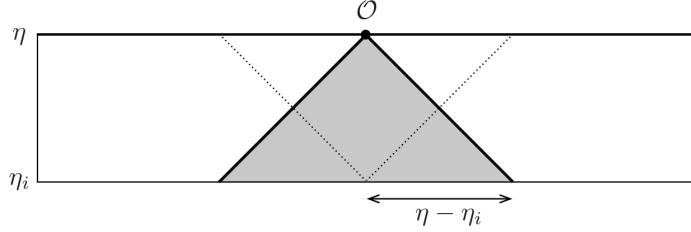
Figura 29 : Sviluppo in armoniche sferiche delle anisotropie della CMB.

Questa struttura fa pensare a un collegamento causale tra tutte le zone osservate e questo non è quello che ci saremmo aspettati.

Dato un determinato punto dell'universo a un tempo t , possiamo determinare qual è la distanza causalmente connessa a un tempo passato t_i . Per fare ciò ci basta calcolare la distanza percorsa dalla luce da t_i a t , che corrisponde alla distanza radiale comovente che avevamo definito in precedenza

$$\chi(\eta) = c(\eta - \eta_i)$$

dove abbiamo usato il tempo conforme η (con $a d\eta = dt$) per semplicità.



Se prendiamo come tempo iniziale il Big Bang $t_i = 0^8$ questa distanza viene detta **orizzonte comovente** d_h e rappresenta quale zona dell'universo al Big Bang è collegata ad un punto al tempo t . Possiamo pensarla come la distanza massima da cui possiamo ricevere luce emessa al Big Bang

$$\begin{aligned} d_h(\eta) &= c(\eta - 0) = c \int_0^\eta \frac{dt}{a(t)} = c \int_0^a \frac{dt}{da} \frac{da}{a} = c \int_0^a \frac{da}{a \dot{a}} \\ &= c \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_0^{\ln(a)} c \frac{d \ln(a)}{\mathcal{H}(\ln(a))} \end{aligned} \quad (5.1)$$

dove $\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \frac{c' da}{c dt} = \dot{a} = aH$ è il **fattore di Hubble conforme**. $dN = d \ln(a)$ viene detto solitamente numero di “e-folds” (con e numero di Nepero) e lo si può pensare come un analogo del tempo di dimezzamento dei decadimenti.

Notiamo che questo integrale non è risolvibile analiticamente.

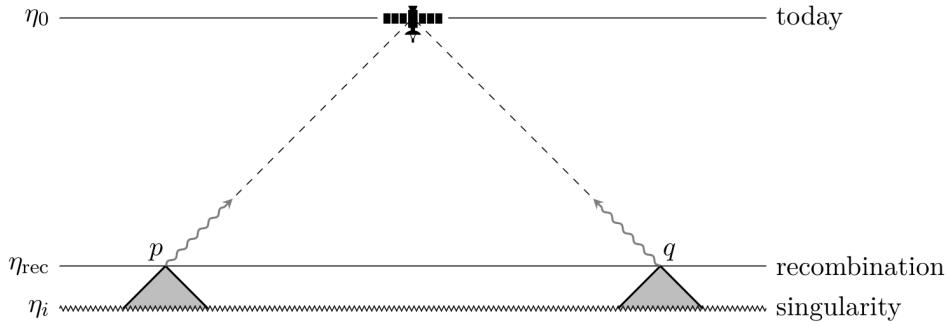
$c\mathcal{H}^{-1}$ viene detto **raggio di Hubble comovente**, banalmente perché se prendiamo la legge di Hubble $v = H_0 d$ e poniamo come velocità quella della luce otteniamo la distanza

$$r_{H0} = \frac{c}{H_0} \implies r_H = \frac{c}{H} \implies \frac{r_H}{a} = \frac{c}{\mathcal{H}}$$

Per specie ordinarie \mathcal{H} è una funzione decrescente, verifichiamolo:

- Radiation dominated: $\rho \sim a^{-4} \implies H \sim \sqrt{\rho} \sim a^{-2} \implies \mathcal{H} \sim a^{-1}$
- Matter dominated: $\rho \sim a^{-3} \implies H \sim a^{-\frac{3}{2}} \implies \mathcal{H} \sim a^{-\frac{1}{2}}$

Questo significa che \mathcal{H}^{-1} è crescente, dunque l'integrale per il tempo conforme è dominato dai contributi a tempi fisici più grandi. Quindi il tempo conforme tra il Big Bang e ricombinazione sarà molto minore rispetto al tempo tra la ricombinazione e il presente.



Ma questo significa che la maggior parte dei punti della CMB hanno coni luce passati che non si incrociano, quindi devono essere causalmente disconnessi. Può essere utile pensare a cosa

⁸È importante tenere a mente che il Big Bang è un punto nel tempo, non nello spazio, quindi può essere pensato come una “ipersuperficie di tipo spazio”

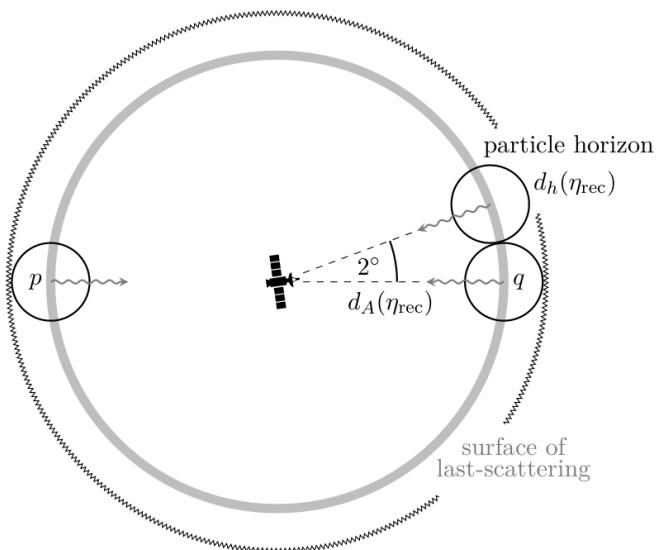
succederebbe se le cose fossero al contrario: se la ricombinazione fosse più vicina a noi che alla singolarità, la base del triangolo tratteggiato sarebbe più corta mentre i trinagoli grigi sarebbero più grandi e si sorvapporrebbero.

Possiamo provare a quantificare il problema: calcolando il rapporto tra l'orizzonte comovente oggi e alla ricombinazione si ottiene che oggi è circa 50 volte quello alla ricombinazione.

Un risultato più interessante è l'angolo sotteso dall'orizzonte alla ricombinazione, questo si ottiene facendo

$$\theta = \frac{2\chi(\text{sing} - \text{rec})}{\chi(\text{rec} - \text{oggi})} = \frac{2\mathcal{C}(\eta_{\text{rec}} - 0)}{\mathcal{C}(\eta_0 - \eta_{\text{rec}})} \approx 2^\circ \quad (5.2)$$

Questo corrisponde a circa quattro volte la dimensione angolare del Sole o della Luna



Quindi da un lato ci aspettiamo di avere zone di omogeneità non più grandi di 2° , dall'altra osserviamo che la CMB è omogenea ovunque. Si potrebbe pensare che i vari punti si siano evoluti separatamente tutti verso un equilibrio comune. Tuttavia con questa spiegazione bisognerebbe avere che le perturbazioni all'omogeneità siano rumore bianco, mentre invece si osserva l'andamento mostrato prima. Questo viene detto **Horizon problem**.

L'altro problema del modello cosmologico presentato fin'ora è quello che viene detto **Flatness problem** e consiste nel fatto che sia altamente improbabile che l'universo tra tutti i valori possibili di curvatura abbia esattamente 0, come si osserva.

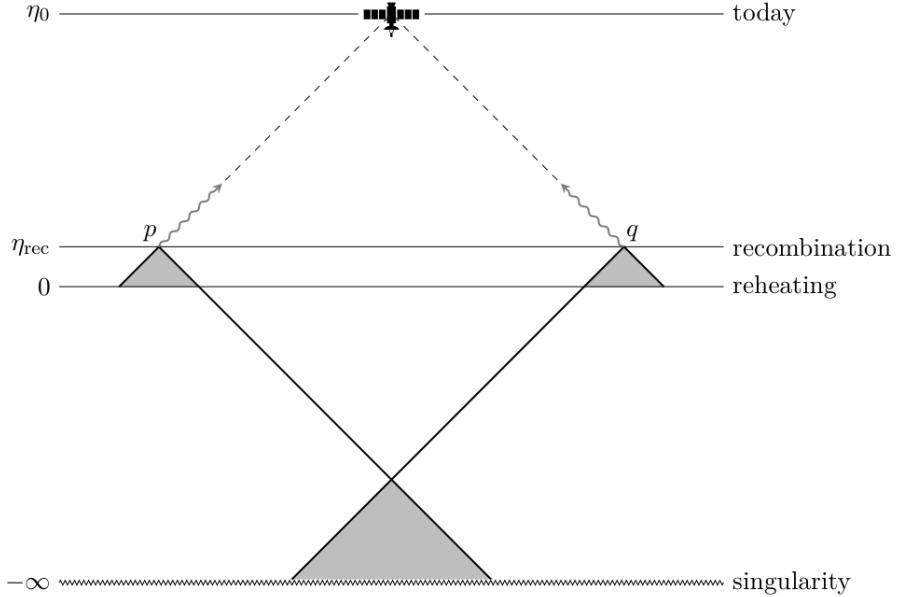
5.2. Inflazione

Per poter spiegare queste due osservazioni utilizzando il modello cosmologico visto fin'ora, servirebbe quindi che le condizioni iniziali fossero accuratamente *fine-tuned* in modo tale da far raggiungere uno stato dove tutte le parti sembrano essere state causalmente connesse, anche senza mai esserlo state. È inutile dire che questa spiegazione non è per nulla soddisfacente, e dunque se ne è cercata una alternativa.

Una possibile spiegazione alternativa è che prima del Big Bang caldo (anche detto **reheating**, che a questo punto non coincide più con la singolarità!) ci sia sia stato un periodo in cui l'omogeneità e la correlazione tra le fluttuazioni si sono generate. In questo periodo è necessario che il raggio di Hubble si sia ristretto

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^{-1} < 0 \quad (5.3)$$

Ma ricordando che $\mathcal{H} = \dot{a}$ si ottiene $\ddot{a} > 0$, quindi un'espansione accelerata. Questo periodo di accelerazione viene detto **inflazione**.



Possimo provare a valutare quanto deve essere stata grande questa espansione. Se consideriamo un universo radiation-dominate abbiamo $\mathcal{H}^{-1} \sim a \sim T^{-1}$, quindi calcoliamo il rapporto tra il raggio di Hubble conforme oggi e alla fine dell'inflazione (che corrisponde al Big Bang caldo). Alla fine dell'inflazione abbiamo la temperatura di reheating $T \approx 10^{15} \text{ GeV}$ (temperatura a cui tutte le interazioni iniziano ad avvenire con tasso maggiore all'espansione dell'universo, vedi Equazione (4.29) della Sezione 4.6).

$$\frac{(\mathcal{H}^{-1})_{\text{reheating}}}{(\mathcal{H}^{-1})_{\text{oggi}}} = \frac{T_{\text{oggi}}}{T_{\text{reheating}}} = \frac{2.73 \text{ K}}{10^{15} \text{ GeV}} \approx 10^{-28} \approx e^{-65} \quad (5.4)$$

Quindi tra il reheating e noi ci sono state 65 *e-folds*, e se vogliamo avere la causalità è necessario che ce ne siano state altrettante durante l'inflazione prima del reheating. Ma noi sappiamo che il reheating è avvenuto dopo 10^{-30} s . Dunque nei primi 10^{-30} s l'universo si è espanso di 28 ordini di grandezza con espansione accelerata.

Questo se ci pensiamo risolve anche il flatness problem. Infatti qualsiasi valore di curvatura avesse l'universo all'inizio, la grande espansione che ha subito ha fatto sì che la piccola parte di universo oggi osservabile ci sembra piatta (analogamente a come la piccola parte di Terra visibile entro l'orizzonte ci sembra piatta).

5.3. Fisica dell'inflazione

Andiamo ora alcune condizioni sui processi fisici che devono aver causato l'inflazione. Innanzitutto vogliamo che

$$\frac{d\mathcal{H}^{-1}}{d \ln(a)} < 0 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}^1}{d \ln(a)} &= -\frac{a}{\mathcal{H}^2} \frac{d\mathcal{H}}{da} = -\frac{\alpha'}{a^2 H} \frac{d(aH)}{da} = -\frac{1}{\dot{a}aH^2} \frac{d(aH)}{dt} \\
&= -\frac{1}{a^2 H^3} (\dot{a}H + a\dot{H}) = -\frac{1}{aH} \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{H}{H^2} + \frac{a}{a} \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \\
&= -\frac{1 + \frac{\dot{H}}{H^2}}{aH} = -\frac{1 - \varepsilon_H}{aH}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

dove abbiamo introdotto lo **slow-roll parameter** $\varepsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$.

Per avere $\frac{d\mathcal{H}^{-1}}{d \ln(a)} < 0$ serve avere $\varepsilon_H < 1$, ma ε può essere riscritto usando le equazioni di Friedmann:

$$\varepsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = 1 - \frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = 1 + \frac{1}{2\rho} (\bar{\rho} + 3\bar{p}) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\rho} \right) \tag{5.7}$$

Ma allora imporre $\varepsilon_H < 1$ equivale a $\bar{\rho} + 3\bar{p} < 0$ che corrispondere a rompere la strong energy condition ($w > -\frac{1}{3}$).

Quindi vogliamo qualcosa che si comporti in modo simile alla costante cosmologica.

5.3.1. Inflatone

Il modello più semplice prevede l'esistenza di un campo scalare $\phi(\vec{x}, t)$ detto **inflatone**. In un universo omogeneo e isotropo potremo scriverlo come la somma di un valore medio più piccole fluttuazioni

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \tag{5.8}$$

Per il momento concentriamoci sulla parte omogenea e consideriamo una teoria non interagente. La densità di lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{5.9}$$

Questa però è valida in uno spazio di Minkowski, se consideriamo l'universo in espansione avremo (stiamo banalmente mettendo la forma volume)

$$\int dt d^3x \mathcal{L} \rightarrow \int dt d^3x_c a^3 \mathcal{L}$$

quindi la lagrangiana diventa (considerando già che le derivate non temporali sono nulle perché siamo omogenei)

$$\mathcal{L}_{\bar{\phi}} = \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right) a^3 \tag{5.10}$$

Possiamo risolvere l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\phi})} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\phi}} \tag{5.11}$$

dove

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\phi}} = a^3 \frac{dV}{d\bar{\phi}}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\phi})} \right) = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} a^3 \right) = -\ddot{\bar{\phi}} a^3 - \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} a^2 3\dot{a}$$

quindi

$$a^3 \ddot{\bar{\phi}} + 3a^3 H \dot{\bar{\phi}} + a^3 \frac{dV}{d\bar{\phi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\bar{\phi}} + 3H \dot{\bar{\phi}} + \frac{dV}{d\bar{\phi}} = 0} \quad (5.12)$$

Questa è una sorta di equazione di Klein-Gordon con un termine di viscosità in più, anche detta **Hubble friction**.

Supponiamo ora che l'inflatone domini l'universo subito dopo la singolarità. Vogliamo scrivere densità di energia e pressione per questa specie. Data la forma della lagrangiana, avremo che la densità di energia non sarà nient'altro che la densità di Hamiltoniana

$$\boxed{\bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 + V(\phi)} \quad (5.13)$$

Per la pressione possiamo derivare l'espressione sopra

$$\dot{\bar{\rho}}_\phi = \left(\dot{\bar{\phi}} \ddot{\bar{\phi}} + \frac{dV}{dt} \right) = \dot{\bar{\phi}} \left(\ddot{\bar{\phi}} + \frac{dV}{d\bar{\phi}} \right) = -\dot{\bar{\phi}} 3H \dot{\bar{\phi}}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato l'equazione di Eulero-Lagrange. A questo punto basta usare la legge di continuità $\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p})$ ottenendo

$$\begin{aligned} -3H \dot{\bar{\phi}}^2 &= -3H \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 + V + \bar{p}_\phi \right) \\ \boxed{\bar{p}_\phi} &= \frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 - V(\phi) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Con queste due è possibile calcolare l'accelerazione $\ddot{a} \propto -(\bar{\rho}_\phi + 3\bar{p}_\phi)$.

Possiamo notare che il rapporto tra densità e pressione non è costante come le altre specie

$$w_\phi = \frac{\bar{p}_\phi}{\bar{\rho}_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 + V(\phi)} \quad (5.15)$$

Tuttavia se l'energia cinetica è trascurabile si ottiene un rapporto $w_\phi \rightarrow -1$ come per la costante cosmologica, che come abbiamo già visto dà un universo di De Sitter con un'espansione esponenziale.

Quindi è necessario che inizialmente il potenziale sia alto e vari poco (si parla di **potenziale slow-roll**)

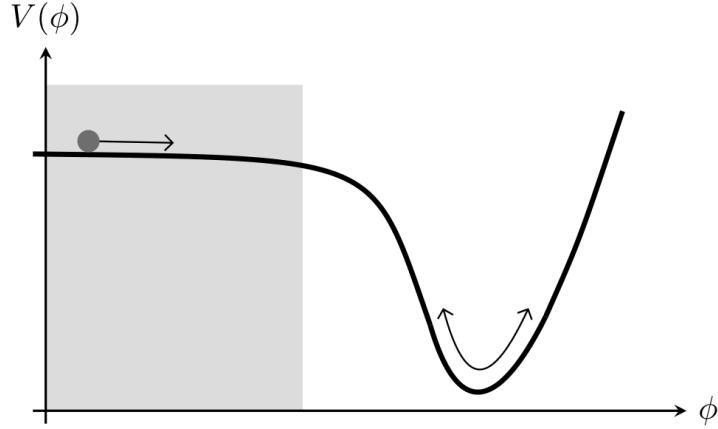


Figura 34 : Esempio di potenziale slow-roll.
L'inflazione avviene nella zona evidenziata in grigio.

Poi man mano che aumenta l'energia cinetica, l'inflazione finisce. In questo periodo c'è stato un "super raffreddamento". Una volta che si arriva al minimo, il campo inizia ad oscillare rilasciando energia e decadendo in tutte le particelle del modello standard.

Vediamo cosa succede al problema dell'orizzonte Abbiamo che $\dot{\rho} = -3H\bar{\rho}(1+w) \Rightarrow \bar{\rho} \sim a^{-3(1+w)}$ quindi

$$\eta(a) = \int \frac{da}{a^2 H} \propto \int \frac{da}{a^{\frac{1}{2}(1-3w)}} = \frac{2}{1+3w} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (5.16)$$

Senza inflazione alla singolarità ($a \rightarrow 0$) avremmo ottenuto $\eta \rightarrow 0$. Con l'inflazione per $a \rightarrow 0$ si ottiene $\eta \rightarrow -\infty$.

Quindi tra la singolarità e l'inflazione c'è un'infinità di tempo conforme, il che rende tutti i punti dell'universo causalmente connessi

CAPITOLO 6

Disomogeneità nell'universo

Fin'ora abbiamo trattato l'universo come omogeneo e questa approssimazione ci ha portato a dei buoni risultati, con predizioni teoriche che sono state verificate sperimentalmente. Tuttavia per poter comprendere le strutture a larga scala dell'universo è necessario considerare delle disomogeneità.

Dato che l'approssimazione omogenea è all'ordine zero corretta, possiamo procedere allo studio delle approssimazioni con la teoria perturbativa.

6.1. Teoria perturbativa Newtoniana

Prima di iniziare fissiamo la notazione e ripassiamo alcuni concetti: indichiamo con \vec{x} le coordinate comoving e con \vec{r} le coordinate fisiche, con $\vec{r} = a\vec{x}$.

Quando facciamo derivate (gradienti e divergenze) se non viene riportato nessun pedice viene sottinteso che la derivazione è rispetto alle coordinate comoving (∇_x), altrimenti verranno scritte come ∇_r , e vale la relazione $\nabla_r = \frac{1}{a}\nabla_x$.

Ricordiamo infine che la velocità del fluido è data da

$$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v} = H\vec{r} + \vec{v}$$

con $H = \frac{\dot{a}}{a}$ il fattore di Hubble e $\vec{v} = a\dot{\vec{x}}$ le velocità peculiari (che anch'esse sono non omogenee al primo ordine).

Possiamo ora iniziare facendo uno studio analogo a quello che abbiamo fatto all'inizio del corso, passando dalla trattazione fluidodinamica dell'universo.

In questo caso però le nostre quantità (densità ρ , pressione p e potenziale gravitazionale ψ) saranno scritte come la somma del loro valore medio più una perturbazione

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, \vec{x}) \\ p(t, \vec{x}) &= \bar{p}(t) + \delta p(t, \vec{x}) \\ \psi(t, \vec{x}) &= \bar{\psi}(t, \vec{x}) + \delta\psi(t, \vec{x}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

dove notiamo che per il potenziale gravitazionale anche l'ordine zero dipenderà dalla posizione (altrimenti nell'equazione di Poisson il laplaciano sarebbe identicamente nullo).

Guardiamo per prima l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\psi = 4\pi Ga^2\rho \tag{6.2}$$

$$\nabla^2(\bar{\psi} + \delta\psi) = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \delta\rho)$$

dove abbiamo cancellato i termini medi sfruttando il fatto che la relazione vale anche per il solo ordine zero

$$\boxed{\nabla^2\delta\psi = 4\pi Ga^2\delta\rho} \tag{6.3}$$

Passiamo all'equazione di continuità

$$\dot{\rho}_m = -\frac{\rho_m}{a}\nabla \cdot \vec{u} \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\rho}_m + \delta\rho_m) = -\frac{\bar{\rho}_m + \delta\rho_m}{a}\nabla \cdot (\dot{a}\vec{x} + \vec{v})$$

$$\dot{\overline{\rho}} + \delta \dot{\rho}_m = -\overline{\rho} \frac{\dot{a}}{a} \nabla \cdot \vec{x} - \delta \rho_m \frac{\dot{a}}{a} \underbrace{\nabla \cdot \vec{x}}_3 - \overline{\rho}_m \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v} - \frac{1}{a} \underbrace{\rho_m \nabla \cdot \vec{v}}_{\mathcal{O}(2)}$$

$$\boxed{\delta \dot{\rho}_m - 3H\delta\rho_m = -\overline{\rho}_m \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v}} \quad (6.5)$$

Questa equazione è corretta, tuttavia può essere scritta in un modo più utile introducendo una nuova quantità

Definizione 6.6

Si definisce **density contrast** δ la quantità

$$\delta(t, \vec{x}) = \frac{\rho(t, \vec{x}) - \overline{\rho}(t)}{\overline{\rho}(t)} = \frac{\delta\rho(\vec{x}, t)}{\overline{\rho}(t)} \quad (6.6)$$

Questa potrà assumere valori nell'intervallo $[-1, +\infty)$, poiché ρ non può essere negativa.
Per poter applicare la teoria perturbativa è necessario che sia molto prossima a 0.

È necessario inoltre riscrivere la pressione in funzione della densità. Ricordiamo che per fluidi barotropici avevamo

$$\overline{p} = w\overline{\rho} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{\rho}} \overline{\rho} \quad (6.7)$$

Possiamo estendere questa relazione:

$$p = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} = (\overline{\rho} + \delta\rho) \frac{\partial}{\partial \overline{\rho}} [\overline{p} + \delta p] = w\overline{\rho} + c_s^2 \delta\rho \quad (6.8)$$

dove c_s è la velocità del suono

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (6.9)$$

Riprendendo l'equazione di continuità da cui siamo partiti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{\rho}{a} \nabla \cdot \vec{u} \\ \frac{d}{dt} [(1 + \delta)\overline{\rho}] &= -\frac{(1 + \delta)\overline{\rho}}{a} [\nabla \cdot (\dot{a}\vec{x} + \vec{v})] \\ (1 + \delta)\dot{\overline{\rho}} + \dot{\delta}\overline{\rho} &= -3H(1 + \delta)\overline{\rho} - \frac{1}{a}\overline{\rho}(\nabla \cdot \vec{v}) \\ \dot{\delta} &= -\frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Passiamo infine all'equazione di Eulero

$$\begin{aligned} \rho \dot{\vec{u}} &= -\frac{1}{a} \nabla p - \frac{\rho}{a} \nabla \psi \\ (1 + \delta)\overline{\rho} \frac{d}{dt} [\dot{a}\vec{x} + \vec{v}] &= -\frac{1}{a} \nabla (w\overline{\rho} + c_s^2 \delta\rho) - \frac{(1 + \delta)\overline{\rho}}{a} \nabla (\overline{\psi} + \delta\psi) \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$(1 + \delta)\vec{\rho}[\ddot{a}\vec{x} + H\vec{v} + \dot{\vec{v}}] = -\frac{c_s^2 \vec{\rho}}{a} \nabla \delta - \frac{(1 + \delta)\vec{\rho}}{a} \nabla(\bar{\psi} + \delta\psi)$$

Vogliamo ricollegarci all'equazione di Poisson, quindi prendiamo la divergenza

$$\nabla \cdot \left\{ (1 + \delta) [\ddot{a}\vec{x} + H\vec{v} + \dot{\vec{v}}] \right\} = -\frac{c_s^2}{a} \nabla^2 \delta - \nabla \cdot \left\{ \frac{1 + \delta}{a} \nabla(\bar{\psi} + \delta\psi) \right\}$$

Ora possiamo notare che i termini $(1 + \delta)$ stanno moltiplicando termini già del primo ordine, quindi possiamo trascurare δ

$$\nabla \cdot [\ddot{a}\vec{x} + H\vec{v} + \dot{\vec{v}}] = -\frac{c_s^2}{a} \nabla^2 \delta - \frac{1}{a} \nabla^2(\bar{\psi} + \delta\psi)$$

$$3\ddot{a} + H\nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \dot{\vec{v}} = -\frac{c_s^2}{a} \nabla^2 \delta - \cancel{4\pi G \frac{\vec{\rho}}{a}} - \frac{1}{a} \nabla^2 \delta\psi$$

dove abbiamo cancellato i due termini usando l'equazione di Friedmann per le quantità medie

$$\boxed{\nabla \cdot \dot{\vec{v}} + H\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{c_s^2}{a} \nabla^2 \delta - \frac{1}{a} \nabla^2 \delta\psi} \quad (6.12)$$

Questa equazione vorremo però riscriverla in funzione unicamente di δ invece che di \vec{v} . Per fare ciò basta sfruttare l'Equazione (6.10). Derivandola per il tempo ottengo

$$\ddot{\delta} = -\frac{H}{a} \nabla \cdot \vec{v} - \frac{1}{a} \nabla \cdot \dot{\vec{v}} \quad (6.13)$$

Sostituendo sopra

$$\begin{aligned} -a\ddot{\delta} + 2H\nabla \cdot \vec{v} &= -\frac{c_s^2}{a} \nabla^2 \delta - \frac{1}{a} \nabla^2 \delta\psi \\ \ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - c_s^2 \nabla^2 \delta - 4\pi G \sum_i \delta_i \bar{\rho}_i &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito l'equazione di Possion, ma abbiamo messo la sommatoria per sottolineare che l'interazione gravitazionale arriva da tutte le componenti insieme. Quindi se volessimo studiare l'evoluzione delle disomogeneità di una singola specie, nel contributo gravitazionale dovremmo mettercelle tutte. Separando per specie avremo un sistema di equazioni accoppiate, dove il termine di accoppiamento deriva proprio da quella sommatoria.

6.2. Evoluzione delle perturbazioni

Vogliamo ora andare a studiare la funzione che abbiamo appena ottenuto, per sapere come evolvono le perturbazioni. Tuttavia è più comodo lavorare nello spazio di Fourier, in questo modo metteremo in relazione l'evoluzione a \vec{k} che è legata alla scala della perturbazione.

Come notazione useremo δ sia per la funzione nello spazio delle x che in quello delle k (le si distingue vedendo quali variabili compaiono nell'equazione)

$$\delta(\vec{k}, t) = \int d^3x \delta(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}, t) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (6.15)$$

Trasformando l'equazione otteniamo

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + c_s^2 k^2 \delta - 4\pi G \sum_i \delta_i \bar{\rho}_i = 0 \quad (6.16)$$

Questa equazione è valida per tutte le specie. Noi ora la studieremo per perturbazioni di materia, ma il risultato per la radiazione sarà del tutto analogo.

Per quanto riguarda i termini nella sommatoria avremo solo radiazione e materia, poiché Λ essendo costante non ha perturbazioni⁹.

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}_m) \delta_m = 4\pi G \bar{\rho}_r \delta_r \quad (6.17)$$

Questa è l'espressione di un oscillatore armonico smorzato con forzante.

La soluzione completa è difficile da ottenere, e non ne vale la pena in una trattazione Newtoniana che poi andrà rivista. Quindi la studieremo solo in alcuni casi particolari.

6.2.1. Universo statico

Il primo caso che consideriamo è un universo senza espansione ($H = 0$).

In questo caso le densità medie non variano nel tempo e se c'è una componente dominante, questa continuerà a dominare per sempre

Caso radiation-dominated

Avremo $\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_m$ quindi possiamo trascurare $\delta_m \bar{\rho}_m$

$$\ddot{\delta}_m + c_s^2 k^2 \delta_m = 4\pi G \bar{\rho}_r \delta_r \quad (6.18)$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con forzante. La forzante $\propto \bar{\rho}_r \delta_r$ in linea di principio è variabile nel tempo e rispetta un'equazione differenziale analoga (effettivamente si ottiene che segue un oscillatore armonico semplice), tuttavia possiamo mediare su tempi abbastanza lunghi e rendere quel termine costante¹⁰. Dunque otteniamo oscillazioni con pulsazione $\omega = c_s k$ attorno ad un valore $4\pi G \bar{\rho}_r \delta_r$.

Caso matter-dominated

Abbiamo $\bar{\rho}_r \ll \bar{\rho}_m$ quindi possiamo trascurare $\delta_r \bar{\rho}_r$

$$\ddot{\delta}_m + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}_m) \delta_m = 0 \quad (6.19)$$

Abbiamo un oscillatore armonico semplice con

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}_m \quad (6.20)$$

Notiamo che questo valore può diventare negativo, rendendo la pulsazione immaginaria e quindi l'oscillazione instabile. Ciò avviene se la k scende sotto il valore

$$k < \frac{\sqrt{4\pi G \bar{\rho}_m}}{c_s} \quad (6.21)$$

Si definisce dunque la **lunghezza d'onda di Jeans**

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}_m}} \quad (6.22)$$

⁹Esistono nuove teorie che considerano perturbazioni anche sulla costante cosmologica, ma sono ancora poco accreditate e molto complicate, dunque non le studieremo

¹⁰Un modo forse più formale consiste nel trasformare con Laplace rispetto al tempo. In questo modo l'approssimazione della mediazione su lunghi tempi delle oscillazioni della radiazione corrisponde a dire che nello spazio delle ω le δ_r tendono a 0 per alte pulsazioni.

Sotto questa lunghezza scala si hanno oscillazioni stabili con pulsazione determinata dalla velocità del suono nel plasma.

Sopra questa lunghezza scala si ha un collasso esponenziale (analogo all'instabilità di Jeans trattata nei corsi di Astrofisica).

6.2.2. Universo in espansione

Passiamo ora alla versione più completa con $H > 0$. Anche in questo caso tratteremo solo le epoche di dominazione di una sola specie. Vedremo che in tutti i risultati avremo una combinazione di due soluzioni entrambe instabili, una detta **decaying mode** e una detta **growing mode**

Caso radiation-dominated

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + c_s^2 k^2 \delta_m \approx 0 \quad (6.23)$$

dove abbiamo messo il termine noto a zero mediando su tempi sufficientemente lunghi (in realtà darebbe un valore costante non nullo che però traslerebbe solo la soluzione).

Possiamo poi sfruttare l'approssimazione di plasma non compresso secondo cui $c_s^2 \approx w$ che per la materia è 0.

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m = 0 \quad (6.24)$$

Questa è un'equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti non costanti. Le due soluzioni sono

$$\begin{cases} \delta_m = \text{cost} \\ a^2 \dot{\delta}_m = \text{cost} \end{cases} \quad (6.25)$$

dove la seconda è stata ottenuta notando che l'equazione può essere riscritta come

$$a^{-2} \frac{d}{dt} [a^2 \dot{\delta}_m] = 0$$

La seconda va ancora risolta separando le variabili $d\delta_m \propto a^{-2} dt$. Ma ricordiamo che in un universo radiation-dominated si ha $a \propto t^{1/2}$, dunque $d\delta_m \propto \frac{dt}{t}$ che dà

$$\begin{cases} \delta_m \sim \ln(a) & \text{growing mode} \\ \delta_m \sim \text{cost} & \text{decaying mode} \end{cases} \quad (6.26)$$

Vediamo quindi che in questo periodo di dominazione le fluttuazioni crescono molto lentamente (dovuto al fatto che a cresce molto lentamente con t).

Caso matter-dominated

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - \underbrace{4\pi G \bar{\rho}_m \delta_m}_{\frac{3}{2} H^2} = 0 \quad (6.27)$$

dove abbiamo nuovamente posto $c_s = 0$. Questo può anche essere pensato come se stessimo trascurando tutto ciò che ha una scala minore a λ_J .

In un universo matter-dominated vale $a \sim t^{2/3} \Rightarrow \dot{a} \sim \frac{2}{3} t^{-1/3} \Rightarrow H = \frac{2}{3t}$

$$\ddot{\delta}_m + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_m - \frac{2}{3t^2} \delta_m = 0 \quad (6.28)$$

Per risolvere questa equazione differenziale facciamo l'ansatz che la soluzione sia del tipo $\delta_m \sim t^\alpha$ ottenendo

$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} + \frac{4}{3t}\alpha t^{\alpha-1} - \frac{2}{3t^2}t^\alpha = 0$$

$$3\alpha(\alpha - 1) + 4\alpha - 2 = 0$$

$$3\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -1 \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\begin{cases} \delta_m \sim t^{\frac{2}{3}} \sim a & \text{growing mode} \\ \delta_m \sim t^{-1} & \text{decaying mode} \end{cases} \quad (6.30)$$

Quindi le zone sovradense continuano ad aumentare di densità con $t^{\frac{2}{3}}$ svuotando le zone sottodense circostanti che continuano a perdere materia.

Caso Λ -dominated

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m = 0 \quad (6.31)$$

Anche in questo caso le due soluzioni sono

$$\begin{cases} \delta_m = \text{cost} \\ a^2\dot{\delta}_m = \text{cost} \end{cases} \quad (6.32)$$

In questo caso però ho crescita esponenziale $a \sim \exp\{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0 t\}$ che mi dà

$$\begin{cases} \delta_m \sim \text{cost} & \text{growing mode} \\ \delta_m \sim e^{-2t} & \text{decaying mode} \end{cases} \quad (6.33)$$

Dunque le regioni sottodense vengono stirate rendendo ancora più estrema la loro sottodensità, mentre le regioni sovradense è come se si disaccoppiassero e smettessero di crescere.

CAPITOLO 7

Teoria perturbativa relativistica

Possiamo ora passare a vedere la teoria perturbativa nel formalismo relativistico. Questa è molto più complicata di quella Newtoniana, dunque non faremo tutti i conti bensì delineeremo solo il procedimento per ottenere i risultati.

Partiamo dall'equazione di Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

7.1. Perturbazione della metrica

Iniziamo dal tensore di Einstein. Questo dipende dalla metrica che possiamo perturbare

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \quad (7.1)$$

Per semplificare la trattazione consideriamo la metrica FRW piatta, inoltre la scriviamo in termini del tempo conforme per poter fattorizzare il fattore di scala. Inoltre scomponiamo la perturbazione in una parte scalare S , una parte vettoriale \vec{V} e una parte tensoriale $\bar{\bar{T}}$ (tutte nel senso tridimensionale, non nel senso covariante).

$$a^{-2}(\eta)[g(\eta, \vec{x})] = \begin{pmatrix} -1 & \vec{0}^\top \\ \hline \vec{0} & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2S & \vec{V}^\top \\ \hline \vec{V} & 2\bar{\bar{T}} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

dove i fattori 2 sono solo delle convenzioni usate per semplicità.

Abbiamo scomposto la perturbazione in questo modo perché esiste un teorema (che non dimostreremo) che ci dice che al primo ordine le perturbazioni S , \vec{V} e $\bar{\bar{T}}$ evolvono indipendentemente le une dalle altre (possiamo aspettarcelo perché nel momento in cui moltiplichiamo una per l'altra, otteniamo qualcosa di secondo ordine che va trascurato).

Adesso vogliamo estrarre quantità scalari anche da \vec{V} e $\bar{\bar{T}}$. Per fare ciò scomponiamo il vettore in una parte *curl-free* e una *divergence-free* (che possiamo sempre fare per il teorema di Helmholtz)

$$\vec{V} = \vec{V}_\parallel + \vec{V}_\perp \quad (7.3)$$

dove \vec{V}_\parallel è la parte *curl-free* ($\nabla \times \vec{V}_\parallel = 0$) mentre \vec{V}_\perp è la parte *divergence-free* ($\nabla \cdot \vec{V}_\perp = 0$). Possiamo poi sfruttare il fatto che un campo vettoriale con rotore nullo può essere espresso come gradiente di un campo scalare $\vec{V} = -\nabla V_\parallel$

$$\vec{V} = \nabla V_\parallel - \vec{V}_\perp \quad (7.4)$$

Notiamo che il numero di gradi di libertà è sempre 3: 1 per il campo scalare V_\parallel , e 2 per il campo vettoriale \vec{V}_\perp in quanto una componente è fissata dalla condizione *divergence-free*.

Per il tensore ripetiamo il processo per ciascun indice

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}_{\parallel\parallel} + \bar{\bar{T}}_{\perp\perp} + \bar{\bar{T}}_{(\parallel\perp)} \quad (7.5)$$

dove $\bar{\bar{T}}_{(\parallel\perp)}$ è stato simmetrizzato.

- $\bar{\bar{T}}_{\parallel\parallel}$ posso scriverlo come doppio gradiente di un campo scalare

$$\bar{\bar{T}}_{\parallel\parallel} = \nabla\nabla^T T_{\parallel\parallel}$$

- $\bar{\bar{T}}_{\parallel\perp}$ posso scrivere la componente \parallel come gradiente

$$\bar{\bar{T}}_{\parallel\perp} = -\nabla\vec{T}_{\parallel\perp}^T$$

- $\bar{\bar{T}}_{\perp\perp}$ posso dividerlo nella traccia (scalare) $T_{\perp\perp}$ e nella parte *transverse-traceless* $\bar{\bar{T}}_{\perp\perp}^{T.T.}$ (l'analogo del tensore di Weil) che avrà due gradi di libertà (come le polarizzazioni delle onde gravitazionali)

$$\bar{\bar{T}}_{\perp\perp} = T_{\perp\perp} + \bar{\bar{T}}_{\perp\perp}^{T.T.}$$

Quindi posso scrivere

$$\bar{\bar{T}} = \nabla\nabla^T T_{\parallel\parallel} - \nabla\vec{T}_{\parallel\perp}^T + T_{\perp\perp} + \bar{\bar{T}}_{\perp\perp}^{T.T.} \quad (7.6)$$

Ricapitolando i gradi di libertà abbiamo:

- 4 scalari: S , V_{\parallel} , $T_{\parallel\parallel}$ e $T_{\perp\perp}$
- 4 vettoriali: 2 da V_{\perp} e 2 da $\vec{T}_{\parallel\perp}$
- 2 tensoriali da $\bar{\bar{T}}_{\perp\perp}^{T.T.}$

che sommano a 10 come ci aspettiamo.

Noi in realtà siamo interessati solo alle componenti scalari (intuitivamente perché la densità è uno scalare) e si può dimostrare che le componenti tensoriali sono legate alle onde gravitazionali, mentre le componenti vettoriali non vengono osservate (e dai calcoli si ottiene che se ci fossero state sarebbero decadute).

Possiamo scrivere ora la distanza infinitesima

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2S)d\eta^2 + 2V_i dx^i d\eta + \gamma_{ij}(1 + 2T_{\perp\perp})dx^i dx^j \right] \quad (7.7)$$

A questo punto bisognerebbe calcolare $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ e \mathcal{R} da cui si ricava $G_{\mu\nu}$ che si può poi inserire nell'equazione

$$\cancel{G_{\mu\nu}} + \delta G_{\mu\nu} = \cancel{8\pi G \bar{\bar{T}}_{\mu\nu}} + 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (7.8)$$

Noi non faremo questi conti.

7.2. Perturbazioni del tensore energia impulso

Dobbiamo ora calcolare $\delta T_{\mu\nu}$. In linea di principio si procede in modo analogo a quanto abbiamo fatto per $\delta g_{\mu\nu}$, è però importante concentrarsi anche sul significato fisico delle perturbazioni che otteniamo con questo metodo.

Sappiamo che $T_{\mu\nu}$ rappresenta il flusso di quadrimomento attraverso una superficie dove viene fissata una coordinata. Sappiamo inoltre che l'energia e l'impulso possono essere ricondotte alla funzione di distribuzione $f_s(\vec{q}, \vec{x})$. Quindi possiamo imporre la perturbazione su f

$$f_s(\vec{q}, \vec{x}) = \bar{f}_s(q) + \delta f_s(\vec{q}, \vec{x}) \quad (7.9)$$

a questo punto possiamo vedere come si traduce in perturbazione del tensore energia impulso (studiamo la versione con un indice alto e uno basso per non doverci preoccupare dei fattori a). Partiamo dalla versione di ordine 0

$$\overline{T}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\bar{\rho} & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \bar{p}\mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

con

$$-\overline{T}^0_0 = \bar{\rho} = \sum_s g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \bar{f}_s(q) E_s(q) \quad (7.11)$$

quindi la versione perturbata sarà

$$-\delta T^0_0 = \sum_s g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \delta f_s(\vec{q}, \vec{x}) E_s(q) = \delta \rho(t, \vec{x}) \quad (7.12)$$

dove la dipendenza da t è implicita dentro la dipendenza da \vec{q} .

Passiamo alla componente T^i_0 . Sappiamo che all'ordine 0 è nullo perché altrimenti avremmo individuato una direzione preferenziale che avrebbe violato l'isotropia. Facendo effettivamente i calcoli (che noi non vediamo) si ottiene

$$\delta T^i_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p}) v^i \quad (7.13)$$

dove v^i è la velocità peculiare del fluido in un determinato punto.

Infine consideriamo T^i_j . All'ordine 0 abbiamo

$$\overline{T}^i_j = \bar{p} \delta^i_j = \sum_s g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \bar{f}_s(q) \frac{|\vec{q}|^2}{3E_s(q)} \delta^i_j \quad (7.14)$$

Questo possiamo vederlo come l'ordine 0 di qualcosa di più generico dove abbiamo non solo una f di ordine superiore, ma anche dove $|\vec{q}|^2 \delta^i_j$ è un caso particolare di $q^i q_j$.

$$T^i_j = \sum_s g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} (\bar{f}_s(q) + \delta f_s(\vec{q}, \vec{x})) \frac{q^i q_j}{3E_s(q)} \quad (7.15)$$

possiamo espandere ricordando che $q^i q_j$ ha la traccia di ordine zero e la parte traceless di ordine 1.

Si ottiene

$$\delta T^i_j = \underbrace{\sum_s g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \delta f_s(\vec{q}, \vec{x}) \frac{|\vec{q}|^2}{3E_s(q)}}_{\delta p(t, \vec{x})} + \underbrace{\sum_s g_s \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \bar{f}_s(q) \frac{q^i q_j}{3E_s(q)}}_{\Pi^i_j} \quad (7.16)$$

dove $\delta p(t, \vec{x})$ è la perturbazione alla pressione, mentre Π^i_j viene detto **anisotropic stress tensor** ed è automaticamente traceless (la traccia è finita nell'ordine 0).

Ricapitolando abbiamo

$$\begin{cases} \delta T^0_0 = -\delta \rho \\ \delta T^i_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p}) v^i \\ \delta T^i_j = \delta p \delta^i_j + \Pi^i_j \end{cases} \quad (7.17)$$

Come avevamo fatto per la metrica, la parte vettoriale e tensoriale possono essere scomposte estraendo degli scalari. In particolare

$$\vec{v} = -\nabla v + \vec{v}_\perp \quad \text{e} \quad \bar{\Pi} = \nabla \nabla^\top \Pi + \nabla \vec{\Pi}_\perp^\top + \bar{\Pi}_{\perp\perp} \quad (7.18)$$

quindi le perturbazioni scalari del tensore energia impulso saranno $\delta\rho$, δp , v e Π . Il nostro obiettivo sarà mettere in relazione queste grandezze scalari con quelle trovate per la metrica.

7.3. Cambi di coordinate e gauge

Prima di andare avanti nella trattazione, soffermiamoci un attimo a studiare cosa succede alle perturbazioni sotto cambio di sistema di riferimento. Consideriamo una trasformazione infinitesima

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha(x^\mu) \quad (7.19)$$

Sappiamo che le funzioni scalari non cambiano $\varphi(x^\mu) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}^\mu)$. È importante tenere bene a mente che questa è un'affermazione che si riferisce alla funzione scalare completa (quindi per noi ordine 0 più ordine 1), non è detto che questo valga per i singoli ordini (per come lo abbiamo costruito sappiamo che vale anche per l'ordine 0 da solo).

Possiamo sviluppare rispetto a δx

$$\varphi(x^\mu) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}^\mu + \delta x^\mu) \approx \tilde{\varphi}(x^\mu) + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha \quad (7.20)$$

Adesso scomponiamo entrambi i membri nell'ordine 0 e ordine 1

$$\cancel{\varphi}(x^0) + \delta\varphi(x^0, x^i) = \cancel{\varphi}(x^0) + \delta\tilde{\varphi}(x^0, x^i) + \underbrace{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha}_{=\partial_0 \tilde{\varphi}} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu}_{\mathcal{O}(2)} \quad (7.21)$$

$$\boxed{\tilde{\varphi} = \varphi - (\partial_0 \tilde{\varphi}) \delta x^0} \quad (7.22)$$

Quindi vediamo che le perturbazioni di campi scalari non trasformano come semplici campi scalari.

Per i tensori la situazione sarà ancora più complicata. Prendiamo ad esempio la metrica:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \\ &= \partial_\mu(x^\alpha + \delta x^\alpha) \partial_\nu(x^\beta + \delta x^\beta) (\bar{g}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) \\ &= (\delta^\alpha_\mu + \partial_\mu \delta x^\alpha) (\delta^\beta_\nu + \partial_\nu \delta x^\beta) (\bar{g}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) \\ &= \underbrace{\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}}_{g_{\mu\nu}} + 2(\partial_\mu \delta x^\alpha) \bar{g}_{\nu\alpha} + \mathcal{O}(2) \\ \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda) &= g_{\mu\nu}(x^\lambda) + 2(\partial_\mu \delta x^\alpha)|_{x^\lambda} \bar{g}_{\nu\alpha}(x^\lambda) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Queste vanno ancora sviluppate rispetto a δx . Facciamolo per una componente (le altre sono analoghe)

$$\tilde{g}_{00} = g_{00} + 2(\partial_0 \delta x^\alpha) \bar{g}_{0\alpha}$$

$$-\tilde{a}^2(1+2\tilde{S}) = -a^2(1+2S) + 2\delta\eta'(-a^2)$$

Sviluppiamo $\tilde{a}^2 = a^2 = [a(\eta + \delta\eta)]^2 \approx [a + a'\delta\eta]^2 \approx a^2 + 2aa'\delta\eta$ (dove la prima uguaglianza arriva dal fatto che a è un campo scalare) e otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha^2 + a^2 2\tilde{S} + 2aa'\delta\eta &= \alpha^2 + a^2 2S + 2a^2\delta\eta' \\ \tilde{S} &= S - \mathcal{H}\delta\eta + \delta\eta' \end{aligned} \quad (7.24)$$

Facendo lo stesso calcolo per tutte le componenti si ottengono le relazioni per le perturbazioni scalari sotto cambio di coordinate:

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{S} = S - \mathcal{H}\delta\eta + \delta\eta' \\ \tilde{V}_{\parallel} = V_{\parallel} + \delta\eta \\ \tilde{T}_{\perp\perp} = T_{\perp\perp} - \mathcal{H}\delta\eta \\ \tilde{T}_{\parallel\parallel} = T_{\parallel\parallel} + \delta x_{\parallel} \end{cases}} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{cases} \tilde{\rho} = \delta\rho - \bar{\rho}'\delta\eta \\ \tilde{p} = \delta p - \bar{p}'\delta\eta \\ \tilde{v} = v - \delta x'_{\parallel} \\ \tilde{\Pi} = \Pi \end{cases}} \quad (7.25)$$

dove δx_{\parallel} arriva dalla solita decomposizione $\delta x^i = \delta\vec{x}_{\parallel} + \delta\vec{x}_{\perp} = -\nabla\delta x_{\parallel} + \delta\vec{x}_{\perp}$.

Queste espressioni ci dicono che possiamo cambiare le nostre perturbazioni scalari cambiando sistema di riferimento. In particolare abbiamo 2 gradi di libertà (δx_{\parallel} e $\delta\eta$) sulle perturbazioni scalari. Questa caratteristica viene detta **invarianza di gauge**.

Possiamo quindi scegliere dei gauge (dei sistemi di coordinate) in cui gli scalari hanno una forma semplice e che ci semplificano la vita. Un'altra cosa che posso fare è costruire delle quantità che siano invarianti di gauge.

Alcuni gauge di particolare interesse sono

Newtonian gauge o longitudinal gauge in cui si fissa $V_{\parallel} = T_{\parallel\parallel} = 0$.

In questo modo la metrica diventa completamente diagonale (da cui il nome longitudinal)

$$ds^2 = a^2 [-(1+2S)d\eta^2 + (1+T_{\perp\perp})\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (7.26)$$

Spatially flat gauge in cui si pone $T_{\parallel\parallel} = T_{\perp\perp} = 0$.

In questo modo le perturbazioni non coinvolgono la parte puramente spaziale della metrica.

Synchronous gauge in cui si pone $S = V_{\parallel} = 0$.

In questo modo le perturbazioni non coinvolgono le parti temporali, dunque gli orologi non vengono perturbati.

Questo gauge non è totalmente determinato perché ho dipendenza solo da $\delta x'_{\parallel}$ che è una derivata, quindi δx_{\parallel} viene fissato a meno di una costante di integrazione.

Comoving-synchronous gauge in cui si pone $V_{\parallel} = v = 0$.

Questo corrisponde a sedersi sulla perturbazioni (mettersi in un sistema comovente con le velocità peculiari).

Due tra i più importanti invarianti di gauge vengono detti **potenziali di Bardeen**

$$\boxed{\Psi = S - \mathcal{H}(V_{\parallel} + T'_{\parallel\parallel}) - (V_{\parallel} + T'_{\parallel\parallel})'} \quad (7.27)$$

$$\boxed{\Phi = T_{\perp\perp} - \mathcal{H}(V_{\parallel} + T'_{\parallel\parallel})} \quad (7.28)$$

Se ci mettiamo nel gauge longitudinale possiamo riscrivere la metrica in funzione di questi

$$ds^2 = a^2 [-(1+2\Psi)d\eta^2 + (1+2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (7.29)$$

in quanto Ψ e Φ corrispondono rispettivamente a S e $T_{\perp\perp}$. Vedremo inoltre che in questo caso Ψ corrisponde al potenziale gravitazionale newtoniano ψ (da cui deriva il nome del gauge).

Altri invarianti di gauge sono:

Comoving gauge density perturbation Δ definita in modo tale che

$$\bar{\rho}\Delta = \delta\rho - \bar{\rho}'(v - V_{\parallel}) \quad (7.30)$$

questo è l'analogo comovente al density contrast $\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}$

Curvature perturbation

$$\begin{cases} \zeta = -T_{\perp\perp} + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'} \\ \mathcal{R} = -T_{\perp\perp} + \mathcal{H}(v + V_{\parallel}) \end{cases} \quad (7.31)$$

7.4. Evoluzione delle perturbazioni

7.4.1. Conservazione del tensore energia-impulso

Possiamo ora esprimere le condizioni sull'evoluzione delle perturbazioni imponendo l'equazione di conservazione del tensore energia impulso, e l'equazione di Einstein. Iniziamo dalla prima

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \quad \text{con} \quad T^{\mu}_{\nu} = \sum_s T_{(s)}^{\mu}_{\nu}$$

Questo significa che è il tensore totale a conservarsi. Quello delle singole componenti può invece variare

$$\nabla_{\mu} T_{(A)}^{\mu\nu} = Q_{(A)}^{\nu} \quad (7.32)$$

a patto che

$$\sum_s Q_{(s)}^{\nu} = 0 \quad (7.33)$$

Questo si ricondurrà a condizioni sulle funzioni di distribuzione f da cui le T sono dipendenti. Se ci sono interazioni tra specie, le f saranno regolate dall'equazione di Boltzmann collisionale, mentre se non ci sono interazioni saranno governate dall'equazione di Liouville.

Nel “late universe” (quello matter dominated, relativamente vicino a noi) durante il quale si sono formate le strutture, tutte le specie erano disaccoppiate, dunque la conservazione delle T può essere fatta per le singole specie. In linea di principio non sappiamo se questo vale anche per energia oscura e materia oscura, che potrebbero interagire tra loro anche in questo periodo (ovviamente se Λ è davvero una costante, non c'è di sicuro interazione).

Dobbiamo valutare la conservazione sulle perturbazioni che ricordiamo essere

$$\begin{cases} \delta T^0_0 = -\delta\rho \\ \delta T^i_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i \\ \delta T^i_j = \delta p \delta^i_j + \Pi^i_j \end{cases}$$

All'ordine 0 avevamo visto che l'unica componente non identicamente nulla era $\nabla_{\mu} \bar{T}^{\mu}_0$ che ci dava

$$\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p}) \quad \text{o} \quad \bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) \quad (7.34)$$

Per la perturbazione possiamo aspettarci che ci siano termini analoghi (dati dalla diluizione causata dall'espansione). Ci sarà poi un termine legato alla divergenza delle velocità. Per quanto riguarda la diluizione dobbiamo tenere conto che non abbiamo più solo il fattore di scala a , infatti mettendoci in longitudinal gauge

$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]$$

quindi in ruolo giocato da a viene adesso sostituito da $a\sqrt{1+2\Phi} \sim a(1+\Phi)$.

$$\mathcal{H} = \frac{d \ln(a)}{d\eta} \rightarrow \frac{d \ln[a(1+\Phi)]}{d\eta} = \frac{1}{a(1+\Phi)} [a'(1+\Phi) + a\Phi'] = \mathcal{H} + \frac{\Phi'}{1+\Phi}$$

svolgendo tutti i calcoli (non visti a lezione) si ottiene

$$\boxed{\delta\rho' = -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) - 3\Phi'(\bar{\rho} + \bar{p}) - \nabla \cdot \vec{v}(\bar{\rho} + \bar{p})} \quad (7.35)$$

dove prendendo solo la parte scalare di \vec{v} la divergenza viene sostituita dal laplaciano $\nabla \cdot \vec{v} = -\nabla^2 v$

Possiamo passare alle altre componenti dell'equazione di conservazione, che imporranno condizioni su altre quantità. Non siamo tanto interessati all'evoluzione di δp , dato che questo è legato a $\delta\rho$ dall'equazione di stato (per mezzo di c_s). Quello che più ci interessa è come evolve v . Questo però non compare da solo in nessuna delle componenti di δT . Dobbiamo quindi vedere come evolve la densità di momento $\vec{v}(\bar{\rho} + \bar{p})$. Otterremo l'analogo dell'equazione di Eulero, che sarà legata al gradiente di pressione e al potenziale gravitazionale. Ci sarà anche il termine dovuto alla diluizione che va con una potenza di a . Ci aspettiamo che ci sia un contributo 3 dato che si tratta di una densità, e un contributo 1 dato dal legame tra momento fisico e momento comovente $\vec{q} = a^{-1}\vec{P}$. Quindi davanti al termine di diluizione avremo un fattore $3 + 1 = 4$.

Si ottiene

$$[(\bar{\rho} + \bar{p})\vec{v}]' = \underbrace{-4\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})\vec{v}}_{\text{espansione}} - \underbrace{\nabla p - \nabla^\top \cdot \bar{\Pi}}_{\text{pressioni}} - \underbrace{-(\bar{\rho} + \bar{p})\nabla\Psi}_{\text{gravità}} \quad (7.36)$$

espandendo il primo membro si ottiene

$$\begin{aligned} [(\bar{\rho} + \bar{p})\vec{v}]' &= (\bar{\rho} + \bar{p})'\vec{v} + (\bar{\rho} + \bar{p})\vec{v}' \\ &= [\bar{\rho}(1+w)']\vec{v} + \bar{\rho}(1+w)\vec{v}' \\ &= \bar{\rho}'(1+w)\vec{v} + \bar{\rho}w'\vec{v} + \bar{\rho}(1+w)\vec{v}' \\ &= -3\mathcal{H}\bar{\rho}(1+w)^2\vec{v} + \bar{\rho}w'\vec{v} + \bar{\rho}(1+w)\vec{v}' \end{aligned} \quad (7.37)$$

Anche il secondo membro può essere scritto sfruttando l'equazione di stato

$$-4\mathcal{H}\bar{\rho}(1+w)\vec{v} - \bar{\rho}(1+w)\nabla\Psi - c_s^2 \nabla \delta\rho - \nabla^\top \cdot \bar{\Pi}$$

Possiamo mettere assieme e isolare \vec{v}'

$$\boxed{v_{i'} = -\frac{c_s^2 \partial_i \delta\rho + \partial_j \Pi_i^j}{\bar{\rho}(1+w)} - \partial_i \Psi - \frac{w'}{1+w} v_i - \mathcal{H} v_i (1-3w)} \quad (7.38)$$

il termine $\frac{w'}{1+w}$ ci aspettiamo sia 0 per radiazione e materia. Abbiamo già visto però che per l'inflatone w dipende dal tempo e dunque può dare un termine non nullo. Questo è valido in generale per dei campi scalari o non.

7.4.2. Equazione di Einstein

Passiamo ora all'equazione di Einstein

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (7.39)$$

Per l'universo omogeneo avevamo solo le componenti 00 e ii , mentre per le perturbazioni avremo anche tutti i termini off diagonal. Anche in questo caso riporteremo solo il risultato e ci concentreremo sul significato fisico di quest'ultimo.

La componente ii dà

$$\Phi'' + \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + \mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi = 4\pi Ga^2\delta p \quad (7.40)$$

La componente ij con $i \neq j$ avrà a secondo membro solo Π_{ij} . Quindi questa equazione ci dice di che cosa Π è sorgente. Si ottiene

$$\Psi + \Phi = -8\pi Ga^2\Pi \quad (7.41)$$

Dunque se non c'è stress anisotropo, si ha che Ψ e Φ sono uguali. Quindi Π è sorgente di discrepanza tra i due. Questo crea un diversità nel modo in cui lo spazio e il tempo reagiscono a perturbazioni.

È importante soffermarci sul significato fisico di Π . Sappiamo che $\delta p \delta_j^i + \Pi_j^i \leftrightarrow \frac{q^i q_j}{E_s}$. Noi vogliamo quindi estrarre la parte trace-less da $\frac{q^i q_j}{E_s}$. Per fare ciò usiamo un proiettore

$$\mathcal{P}_j^i = \hat{\mathbf{e}}^i \hat{\mathbf{e}}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_j^i q^j q_i = (\hat{\mathbf{e}} \cdot \vec{q})^2 - \frac{1}{3} |\vec{q}|^2 = |\vec{q}|^2 \left(\frac{(\hat{\mathbf{e}} \cdot \vec{q})^2}{\cos(\theta)} - \frac{1}{3} \right) \quad (7.42)$$

dove θ è l'angolo tra \vec{q} e $\hat{\mathbf{e}}$. Ma $\cos^2(\theta) - \frac{1}{3}$ è legato a $\mathcal{L}_2(\cos(\theta))$ il polinomio di legendre di ordine 2 (quello che descrive la forma degli orbitali atomici). Quindi la parte trace-less è data dall'integrale di f pesata su \mathcal{L} , dunque legata alla distribuzione di quadrupolo.

Ciò che genera Π deve essere qualcosa fuori dall'equilibrio. Inoltre, dato che dipende da $\frac{q^2}{E}$ non può essere una specie non relativistica (che tende a $\frac{q^2}{m} \rightarrow 0$).

Possono essere fotoni o neutrini. I fotoni però si sono disaccoppiati tardi, quindi sono molto poco fuori dall'equilibrio. L'unica specie candidata rimanente sono i neutrini. Facendo i conti per i neutrini si ottiene che questi generano una differenza tra Φ e Ψ di qualche decimo di per cento, che noi possiamo trascurare. Dunque d'ora in avanti possiamo approssimare (solo nel gauge longitudinale) $\Phi \approx -\Psi$.

Possiamo inserire questa relazione nell'equazione che avevamo trovato per $\delta\rho'$

$$\delta\rho' = -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) \underbrace{-3\Phi'}_{+3\Psi'}(\bar{\rho} + \bar{p}) - \nabla \cdot \vec{v}(\bar{\rho} + \bar{p}) \quad (7.43)$$

Questo ci dice che la perturbazione di densità aumenta se c'è una buca di potenziale.

Passiamo alla componente 00 . Si ottiene

$$\Phi' - \mathcal{H}\Psi = -4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})v \quad (7.44)$$

Infine la componente 00

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (7.45)$$

Questa ricorda un po' l'equazione di Poisson per la gravità all'ordine 0 $\nabla^2\Psi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}$ (sfruttando il fatto che $\Phi \approx -\Psi$). C'è però un termine aggiuntivo. Questo è un termine puramente relativistico. Per vedere quando diventa importante possiamo trasformare con Fourier

$$-k^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (7.46)$$

Vediamo che il primo termine scala con k^2 mentre il secondo con \mathcal{H}^2 (assumiamo che la derivata rispetto ad η sia anch'essa dell'ordine di \mathcal{H}). Ricordiamo che \mathcal{H}^{-1} è il raggio di Hubble che è un indicatore della scala di causalità.

- Se $k\mathcal{H}^{-1} \ll 1 \Rightarrow \lambda \gg \mathcal{H}^{-1}$ la dimensione scala della perturbazione è molto maggiore del raggio di Hubble (quindi siamo a scale cosmologiche). In questo caso il termine relativistico è dominante.
- Se $k\mathcal{H}^{-1} \gg 1 \Rightarrow \lambda \ll \mathcal{H}^{-1}$ la dimensione scala della perturbazione è molto minore del raggio di Hubble (quindi siamo nell'universo vicino). In questo caso il termine relativistico è trascurabile.

Queste caratteristiche possiamo vederle direttamente nello spettro di potenza della CMB: se guardiamo a bassi l (quindi a grandi scale) dobbiamo per forza tenere in considerazione le correzioni relativistiche. Se invece guardiamo ad alti l abbiamo una buona descrizione anche tenendo conto solo dei termini Newtoniani.

Possiamo ora combinare l'equazione 0i con la 00 ottenendo

$$\nabla^2\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho - 3\mathcal{H}(-4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})v) \quad (7.47)$$

ma $3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) = -\bar{\rho}'$ quindi

$$\boxed{\nabla^2\Phi = -4\pi Ga^2(\delta\rho - \bar{\rho}'v) = -4\pi Ga^2\bar{\rho}\Delta} \quad (7.48)$$

Abbiamo ottenuto una relazione tra invarianti di gauge (Φ e Δ), quindi sarà valida in tutti i gauge. Tornando a vederla come equazione di Poisson possiamo vedere il termine aggiuntivo $\bar{\rho}'v$ come se la materia che esce non debba essere contata tra quella che genera la buca di potenziale.

7.5. Crescita delle strutture di materia

Vogliamo ora studiare la formazione delle strutture a grande scala. Ricapitoliamo le equazioni che ci interessano.

$$\begin{cases} \Phi'' + \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + \mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi = 4\pi Ga^2\delta p \\ \Psi + \Phi = -8\pi Ga^2\Pi \\ \Phi' - \mathcal{H}\Psi = -4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})v \\ \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -4\pi Ga^2\delta\rho \end{cases} \quad (7.49)$$

Supporremo che queste evolvano in fasi a dominazione di una singola specie, quindi con $w \approx c_s^2 \approx \text{cost}$. Iniziamo dalla prima equazione cercando di analizzare termine per termine. Possiamo riscrivere il secondo membro sfruttando la quarta e l'equazione di stato

$$4\pi Ga^2\delta p = w4\pi Ga^2c_s^2\delta\rho = w\nabla^2\Phi - 3w\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi)$$

Valutiamo poi \mathcal{H}'

$$\mathcal{H}' = \left(\frac{a'}{a}\right)' = \frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{a''}{a} &= \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta}(a\dot{a}) = \frac{d}{dt}(a\dot{a}) = \dot{a}^2 + \frac{a^2}{a}\ddot{a} \\
&= \mathcal{H}^2 - a^2 \frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho} + 3\bar{p}) = \mathcal{H}^2 - \underbrace{\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}a^2}_{\frac{\mathcal{H}^2}{2}}(1+3w) = \frac{\mathcal{H}^2}{2}(1-3w) \\
\Rightarrow \quad \mathcal{H}' &= \frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{\mathcal{H}^2}{2}(1-3w) - \mathcal{H}^2 = -\frac{\mathcal{H}^2}{2}(1+3w) \\
\Rightarrow \quad 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 &= -\mathcal{H}^2(1+3w) + \mathcal{H}^2 = -3w\mathcal{H}^2
\end{aligned}$$

Sostituendo ora nella prima equazione e sfurttando $\Phi'' = -\Psi''$ si ottiene

$$\boxed{\Psi'' + 3\Psi'\mathcal{H}(1+w) - w\nabla^2\Psi = 0} \quad (7.50)$$

Passiamo nello spazio di Fourier

$$\Psi'' + 3(1+w)\mathcal{H}\Psi' + k^2w\Psi = 0 \quad (7.51)$$

Possiamo ora risolverla nei due periodi di dominazione

Durante la dominazione della materia ($w = 0$) vale

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' = 0 \quad (7.52)$$

Inoltre in questo periodo vale

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2 \underset{\propto a^{-3}}{\underline{\bar{\rho}}} \sim a^{-1} \implies \mathcal{H} \sim a^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2\eta}$$

quindi si ottiene che la soluzione *growing-mode* è un andamento costante, mentre quella *decaying-mode* è una decrescita con una potenza negativa di η . Dunque nell'universo che si espande il potenziale gravitazionale locale si congela.

Durante la dominazione della radiazione ($w = \frac{1}{3}$) vale

$$\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' + \frac{k^2}{3}\Psi = 0 \quad (7.53)$$

In questo caso c'è una differenza di comportamento in base alla scala (se la perturbazione ha scala maggiore del raggio di Hubble \mathcal{H}^{-1})

- Se $k \ll \mathcal{H}$ (quindi $\lambda \gg \mathcal{H}^{-1}$) posso trascurare il terzo termine. Inoltre ho

$$\mathcal{H}^2 \sim a^{-2} \implies \mathcal{H} \sim \frac{1}{\eta}$$

Dunque ho nuovamente che la *growing-mode* è costante e la *decaying-mode* è una decrescita a potenza negativa.

Posso provare quindi a collegare il comportamento a queste scale tra i due periodi. Per far ciò sfrutto un invariante di Gauge che avevo definito in precedenza:

$$\begin{aligned}
\zeta &= -T_{\perp\perp} + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'} = \Psi + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{-3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})} \\
&= \Psi + \mathcal{H}\frac{1}{-3\mathcal{H}\bar{\rho}(1+w)} \frac{k^2\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Psi)}{4\pi Ga^2}
\end{aligned} \quad (7.54)$$

ma se $k \ll \mathcal{H} \Rightarrow \Psi = \text{cost}$ quindi

$$\zeta = \Psi + \frac{2}{3} \frac{\Psi}{1+w} = \frac{5+3w}{3+3w} \Psi \quad (7.55)$$

Essendo Ψ costante, anche ζ lo sarà quindi

$$\begin{aligned} \zeta(a_{\text{RD}}) = \zeta(a_{\text{MD}}) &\implies \frac{6}{4} \Psi(a_{\text{RD}}) = \frac{5}{3} \Psi(a_{\text{MD}}) \\ &\implies \boxed{\Psi(a_{\text{MD}}) = \frac{9}{10} \Psi(a_{\text{RD}})} \end{aligned} \quad (7.56)$$

Quindi a grande scala il potenziale gravitazionale rimane costante, tranne nella transizione tra le due dominazioni dove scende (gradualmente) del 10%.

- Se $k \gg \mathcal{H}$ (quindi $\lambda \ll \mathcal{H}^{-1}$) non posso trascurare più il terzo termine.

$$\Psi'' + \frac{4}{\eta} \Psi' + \frac{k^2}{3} \Psi = 0 \quad (7.57)$$

moltiplicando tutto per η^2 ottengo

$$\eta^2 \Psi'' + 4\eta \Psi' + \eta^2 \frac{k^2}{3} \Psi = 0$$

per risolvere questa equazione cambio variabile

$$\begin{aligned} y &= \frac{k\eta}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \psi(y) = \frac{\Psi}{y} \\ y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + 2y \frac{d\psi}{dy} + (y^2 - 2)\psi &= 0 \end{aligned}$$

Questa è l'equazione per le funzioni di Bessel di ordine 1 (l'ordine l è determinato dal 2 nel terzo termine che corrisponde a $l(l+1)$).

$$\psi(y) = C_1 j_1(y) + C_2 n_1(y) \implies \Psi(k, \eta) = A_{\vec{k}} \frac{j_1\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{k\eta}{\sqrt{3}}} + B_{\vec{k}} \frac{n_1\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{k\eta}{\sqrt{3}}} \quad (7.58)$$

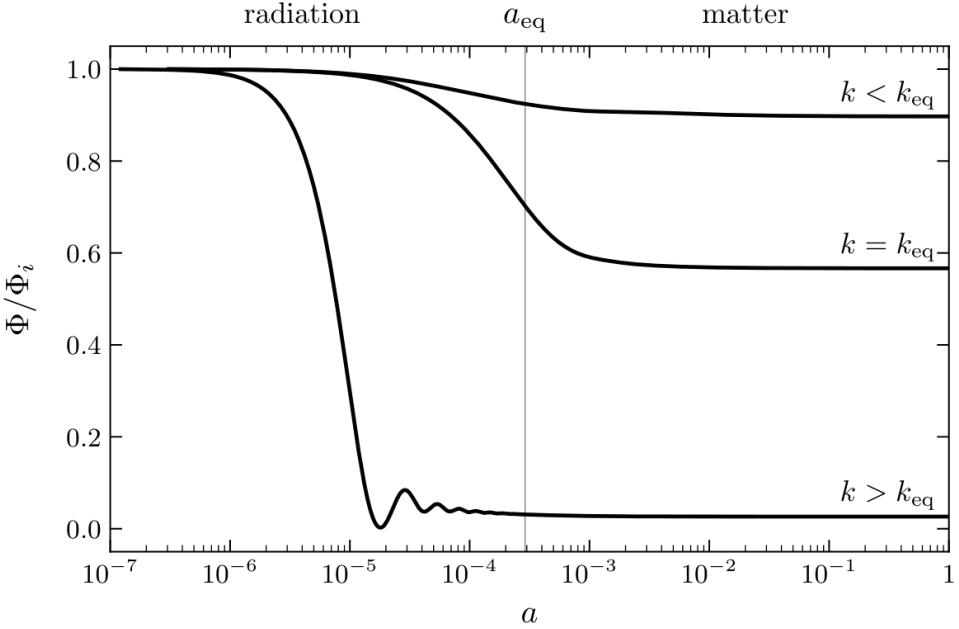
dove j_1 e n_1 sono le funzioni di Bessel

$$\begin{cases} j_1(y) = \frac{\sin(y)}{y^2} - \frac{\cos(y)}{y} \\ n_1(y) = \frac{\cos(y)}{y^2} - \frac{\sin(y)}{y} \end{cases} \quad (7.59)$$

come si può notare n_1 diverge per $y \rightarrow 0$ (quindi per $\eta \rightarrow 0$), dunque Ψ non può dipendere da n_1 , quindi $B_{\vec{k}} = 0$. j_1 invece per $y \rightarrow 0$ va come $j_1 \sim \frac{y}{3} + \mathcal{O}(3)$ e diverge per $\eta \rightarrow \infty$.

$$\Psi(k, \eta) = A_{\vec{k}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{k\eta}{\sqrt{3}}} - \cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) \right] \quad (7.60)$$

Possiamo quindi graficare l'evoluzione di Ψ nel tempo, per diverse scale (per semplicità lo si rapporta al valore oggi)



Ricordiamo che k sono numeri d'onda comoventi, quindi vengono stirati assieme alla “griglia” e in questo sistema di coordinate rimangono uguali. Invece \mathcal{H}^{-1} si allarga rispetto alla griglia al passare del tempo. Se un modo di oscillazione entra nel raggio di Hubble prima di η_{eq} viene soppresso, mentre se entra dopo η_{eq} sopravvive solo ridotto del 10%.

Possiamo quindi passare al calcolo delle perturbazioni di massa

$$-k^2 \Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \Delta \quad (7.61)$$

Quest’ultima equazione va valutata nei quattro casi (2 dominazioni per 2 scale)

- Se $k \gg \mathcal{H}$ allora $\Delta \approx \delta$ e abbiamo lo stesso andamento che avevamo visto nel caso newtoniano

$$\Delta \approx \begin{cases} \ln(a) & \text{se rad. dom.} \\ a & \text{se mat. dom} \end{cases} \quad (7.62)$$

- Se $k \ll \mathcal{H}$ allora

$$-k^2 \Psi = 4\pi G a^2 \underbrace{\bar{\rho} \Delta}_{\mathcal{H}^2} \quad (7.63)$$

ma dato che Ψ deve essere costante, avremo che $\Delta \propto \mathcal{H}^{-2}$

$$\Delta \propto \begin{cases} a^2 & \text{se rad. dom.} \\ a & \text{se mat. dom.} \end{cases} \quad (7.64)$$

Quindi una volta entrati nell’era di dominazione della materia, le perturbazioni a tutte le scale evolvono linearmente. Al contrario durante la dominazione della radiazione le piccole scale vengono soppresse con una crescita solo logaritmica in confronto a quella quadratica delle grandi scale.

Possiamo poi fare una supposizione dicendo che la $\Delta(k, a)$ sia scomponibile in fattori che evolvono in funzione dello spazio e del tempo separatamente

$$\Delta(k, a) = G(a) + T(k) + \Delta(k, a_i) \quad (7.65)$$

dove G viene detta **growth function** mentre T viene detta **transfer function**.

Questa approssimazione non è esatta, però descrive abbastanza bene l'andamento generale. Cerchiamo a valutare G e T andando a studiare due casi particolari: il caso di un modo k_1 che entra nel raggio di Hubble dopo l'equivalenza e uno k_2 che ci entra prima. Per semplicità possiamo definire indichiamo con $k_{\text{eq}} = \mathcal{H}(a_{\text{eq}})$ e con a_k il fattore di scala a cui vale $k = \mathcal{H}(a_k)$. Possiamo iniziare studiando il caso $k_1 < k_{\text{eq}}$. Questo evolverà quadraticamente fino all'equivalenza e poi linearmente

$$\frac{\Delta_m(k_1, a)}{\Delta_m(k_1, a_i)} = \frac{\Delta_m(k_1, a_{\text{eq}})}{\Delta_m(k_1, a_i)} \frac{\Delta_m(k_1, a)}{\Delta_m(k_1, a_{\text{eq}})} = \frac{a_{\text{eq}}^2}{a_i^2} \frac{a}{a_{\text{eq}}}$$

Vediamo che otteniamo una dipendenza solo da a e non da k , quindi possiamo concludere

$$\frac{G(a)}{G(a_i)} = \frac{a_{\text{eq}}^2}{a_i^2} \frac{a}{a_{\text{eq}}} \quad \text{e} \quad T(k < k_{\text{eq}}) = 1 \quad (7.66)$$

Passiamo ora a $k_2 > k_{\text{eq}}$. Questo ha un'evoluzione quadratica fino al quando non entra all'interno del raggio di Hubble, dopo ha una crescita logaritmica fino all'equivalenza e infine anche questo ha crescita lineare. Dobbiamo fare inoltre un'approssimazione forte: dato che la crescita logaritmica è molto più lenta delle altre due, la trascureremo approssimando che in quel tratto rimanga Δ rimanga costante

$$\frac{\Delta_m(k_2, a)}{\Delta_m(k_2, a_i)} = \frac{\Delta_m(k_2, a_{k_2})}{\Delta_m(k_2, a_i)} \underbrace{\frac{\Delta_m(k_2, a_{\text{eq}})}{\Delta_m(k_2, a_{k_2})} \frac{\Delta_m(k_2, a)}{\Delta_m(k_2, a_{\text{eq}})}}_{\approx 1} = \frac{a_{k_2}^2}{a_i^2} \frac{a}{a_{\text{eq}}} = \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_i}\right)^2 \frac{a}{a_{\text{eq}}} \frac{a_{k_2}^2}{a_{\text{eq}}^2}$$

possiamo poi sfruttare il fatto che nel periodo di dominazione della radiazione vale la relazione $\mathcal{H}^2 \sim a^2 \bar{\rho} \sim a^{-2}$ per riscrivere $\frac{a_{k_2}^2}{a_{\text{eq}}^2} = \left(\frac{k_{\text{eq}}}{k_2}\right)^2$ (da notare come a_{eq} e a_{k_2} sono costanti e non dipendono da a , bensì da k). Quindi si ottiene

$$\frac{\Delta_m(k_2, a)}{\Delta_m(k_2, a_i)} = \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_i}\right)^2 \frac{a}{a_{\text{eq}}} \left(\frac{k_{\text{eq}}}{k_2}\right)^2$$

Riconosciamo il termine $\frac{G(a)}{G(a_i)}$ accompagnato da un nuovo termine dipendente solo da k

$$T(k > k_{\text{eq}}) = \left(\frac{k_{\text{eq}}}{k}\right)^2 \quad (7.67)$$

7.6. Spettro di potenza

Possiamo provare a fare della statistica per le fluttuazioni (che saranno le quantità che poi potremo misurare). La media sarà nulla perché ρ deve essere centrata su $\bar{\rho}$

$$\langle \Delta(a, \vec{k}) \rangle = 0 \quad (7.68)$$

Per quanto riguarda la varianza la cosa si fa più interessante

$$\langle \Delta^2 \rangle - \langle \Delta \rangle^2 = \int d^3x \Delta^2(x)$$

Tuttavia noi conosciamo $\Delta(\vec{k})$, quindi dobbiamo scrivere $\Delta(x)$ come l'antitrasformata (il quadrato in realtà è un modulo quadro, quindi avremo la trasformata per il complesso coniugato)

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^2 \rangle &= \int d^3x \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Delta(\vec{k}) \right] \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Delta(\vec{k}) \right]^* \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \Delta(\vec{k}) \Delta^*(\vec{k}') \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3k' \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') \Delta(\vec{k}) \Delta^*(\vec{k}') \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\Delta(\vec{k})|^2
\end{aligned}$$

dove δ_D è la delta di Dirac (questa in realtà era una dimostrazione poco formale del teorema di Parseval che ci garantisce l'uguaglianza tra gli integrali nei due spazi).

Ora possiamo imporre l'isotropia richiedendo che la varianza possa dipendere solo dal modulo di k . In linea di principio Δ può continuare a dipendere da \vec{k} , l'importante è che il suo quadrato dipenda solo dal modulo.

$$\langle \Delta^2 \rangle = \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 |\Delta(\vec{k})|^2 = \int d\ln(k) \frac{k^3}{2\pi} |\Delta|^2 \quad (7.69)$$

abbiamo riscritto l'integrale passando al logaritmo perché come integrando troviamo una quantità molto importante (che arriva dal mondo del *signal processing*) detta **matter power spectrum** \mathcal{P}

$$\mathcal{P}_m(k) = \frac{k^3}{2\pi} |\Delta|^2(k) \quad (7.70)$$

Spesso si usa la **matter power spectrum density** P_m che a volte viene chiamata essa stessa power spectrum

$$P_m(k) = \frac{2\pi}{k^3} \mathcal{P}_m(k) = |\Delta|^2(k) \quad (7.71)$$

Le definizioni che abbiamo ottenuto fin'ora arrivano da una ragionamento che non è del tutto formalmente corretto. Vogliamo ora riformularlo con una teoria un po' più solida. Innanzitutto possiamo riflettere sul fatto che ha senso parlare di varianza se pensiamo alle fluttuazioni come a variabili stocastiche (considerazione sensata se pensiamo che arrivano da fluttuazioni quantistiche). Quindi pensiamo a una perturbazione $f(\vec{x})$ come a un elemento estratto da una distribuzione di probabilità $\mathbb{P}[f]$. Notiamo che questa non è una distribuzione di probabilità nel senso che siamo abituati a vedere, infatti si tratta di un funzionale che prende come argomento una funzione invece che un numero. Dato che stiamo lavorando con funzionali, avremo due nozioni di media

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \int_V d^3x f(\vec{x}) \quad \text{e} \quad \langle f \rangle = \int \mathcal{D}f f \mathbb{P}[f] \quad (7.72)$$

La prima definizione è una media sul volume per una particolare realizzazione di f (quella dell'universo in cui viviamo). La seconda invece è una media di ensemble ossia una media su tutte le realizzazioni di f pesate per la distribuzione di probabilità che ciascuna avvenga. Purtroppo noi non siamo dotati di infiniti universi e quindi possiamo osservare una sola realizzazione di f . Però possiamo fare l'ipotesi che essendo il volume dell'universo incredibilmente grande, i due valori medi tendano a coincidere. Questa viene detta **ipotesi ergodica** (è come se facessi delle medie su sottovolumi più piccoli che rappresentano diverse realizzazioni di f).

Torniamo a parlare di varianza $\text{Var}[\Delta_m] = \langle \Delta_m^2 \rangle$. Dato che stiamo lavorando su volumi finiti dobbiamo utilizzare la serie di Fourier invece che la trasformata

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \int_V d^3x [\Delta_m(\vec{x})]^2 &= \frac{1}{V} \int_V d^3x \left[\sum_{\vec{k}_1} \Delta_m(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right] \left[\sum_{\vec{k}_2} \Delta_m(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \right]^* \\ &= \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \Delta_m(\vec{k}_1) \Delta_m^*(\vec{k}_2) \int_V \frac{d^3x}{V} e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}} \\ &= \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \Delta_m(\vec{k}_1) \Delta_m^*(\vec{k}_2) \delta_K(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ &= \sum_{\vec{k}} |\Delta_m(\vec{k})|^2\end{aligned}$$

La varianza però non è altro che un caso particolare della covarianza

$$\langle \Delta_m(\vec{x}_1) \Delta_m(\vec{x}_2) \rangle = \xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \int \mathcal{D}\Delta_m \mathbb{P}[\Delta_m] \Delta_m(\vec{x}_1) \Delta_m(\vec{x}_2) \quad (7.73)$$

dove ξ viene detto **fattore di correlazione** (è quello che in teoria dei campi viene detto correlatore). In linea di principio noi non sappiamo com'è fatta \mathbb{P} , però possiamo sfruttare il principio cosmologico per ottenere delle proprietà di ξ

- Dato che deve esserci invarianza traslazionale, ξ può dipendere solo dalla distanza tra i due punti $\vec{s} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$
- Dato che deve esserci invarianza rotazionale, può dipendere solo dal modulo della distanza e non dalla direzione

Quindi $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \xi(s)$. Questa condizione ha un'interessante conseguenza detta **integral constraint** sull'integrale di ξ rispetto a s

$$\begin{aligned}d^3s \xi(s) &= \int d^3s \frac{1}{V} \int d^3x \Delta_m(\vec{x}) \Delta_m(\vec{x} + \vec{s}) \\ &= \frac{1}{V} \int d^3x_1 \int d^3x_2 \Delta_m(\vec{x}_1) \Delta_m(\vec{x}_2) \\ &= \frac{1}{V} \int d^3x_1 \Delta_m(\vec{x}_1) \int d^3x_2 \Delta_m(\vec{x}_2) = 0\end{aligned} \quad (7.74)$$

dove l'ultima uguaglianza arriva dal fatto che il valor medio della singola Δ_m deve essere nullo. Questo risultato vuol dire che se la varianza (corrispondente a $\xi(0)$) è positiva, allora alle distanze maggiori di zero ci aspettiamo ci sia anticorrelazione. Ciò possiamo spiegarcelo pensando che attorno ad una sovradensità è più probabile che ci sia una sottodensità.

Possiamo adesso scrivere la covarianza in spazio di Fourier

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_m(\vec{k}_1) \Delta_m^*(\vec{k}_2) \rangle &= \left\langle \int_{V_1} \frac{d^3x_1}{V} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1} \Delta_m(\vec{x}_1) \int_{V_2} \frac{d^3x_2}{V} e^{+i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2} \Delta_m^*(\vec{x}_2) \right\rangle \\
&= \frac{1}{V_1 V_2} \int_{V_1} d^3x_1 \int_{V_2} d^3x_2 e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1} e^{+i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2} \underbrace{\langle \Delta_m(\vec{x}_1) \Delta_m(\vec{x}_2) \rangle}_{\xi(s)} \\
&= \frac{1}{V_1 V_2} \int_{V_1} d^3s \int_{V_2} d^3x_2 \underbrace{e^{-i\vec{k}_1 \cdot (\vec{x}_2 + \vec{s})} e^{+i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2}}_{e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}_2} e^{+i\vec{k}_1 \cdot \vec{s}}} \xi(s) \\
&= \delta_K(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \frac{1}{V} \int_V d^3s e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{s}} \xi(s)
\end{aligned} \tag{7.75}$$

Però noi sappiamo grazie all'integral constraint che $\xi(s)$ è sommabile, quindi possiam far tendere il volume all'infinito, in modo tale che la delta di Kronecker diventi delta di Dirac e che l'integrale diventi la trasformata di Fourier

$$\langle \Delta_m(\vec{k}_1) \Delta_m^*(\vec{k}_2) \rangle = \delta_D(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \mathcal{F}[\xi](\vec{k}) \tag{7.76}$$

Il fatto che ci sia la delta di Dirac significa che sono presenti solo varianze (non ci sono i «termini off-diagonal» della matrice). Quindi i vari modi \vec{k} non si *parlano* tra loro.

Possiamo ora sfruttare il fatto che ξ dipende solo dal modulo di s . Questo fa sì che la trasformata di Fourier assuma una forma particolare, detta trasformata di Hankel

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\xi](\vec{k}) &= \int ds e^{-i\vec{k} \cdot \vec{s}} \xi(s) \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \int_0^{+\infty} ds s^2 e^{-iks \cos(\theta)} \xi(s) \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} ds s^2 \left[\frac{e^{-iks \cos(\theta)}}{-iks} \right]_{-1}^{+1} \xi(s) \\
&= 4\pi \int_0^{+\infty} ds s^2 \frac{-e^{-iks} + e^{+iks}}{2i} \frac{\xi(s)}{ks} \\
&= 4\pi \int_0^{+\infty} ds s^2 \frac{\sin(ks)}{ks} \xi(s) = \mathcal{F}[\xi](k)
\end{aligned} \tag{7.77}$$

Vediamo quindi che anche la trasformata dipende solo dal modulo di \vec{k} come ci aspettavamo. Possiamo analogamente calcolare l'antitrasformata

$$\xi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi^2} k^2 \frac{\sin(ks)}{ks} \mathcal{F}[\xi](k) = \mathcal{F}[\xi](k) \tag{7.78}$$

Adesso abbiamo due formule per la varianza che possiamo confrontare

$$\xi(0) = \sum_{\vec{k}} |\Delta_m(\vec{k})|^2 \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\Delta_m(\vec{k})|^2 = \int d\ln(k) \underbrace{\frac{k^3}{2\pi^2} |\Delta_m(\vec{k})|^2}_{\mathcal{P}_m(k)}$$

e

$$\xi(0) = \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 1 \mathcal{F}[\xi](k)$$

quindi

$$\mathcal{F}[\xi](k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_m(k) = P_m(k) \quad (7.79)$$

Rimane solo più un passaggio da fare: queste informazioni le abbiamo scritte in funzione di Δ che però cambia l'andamento in base a se ci troviamo prima o dopo l'equivalenza. Vorremmo quindi riscrivere lo spettro di potenza in funzione di qualcosa che non cambi. La soluzione è scriverlo in funzione della curvatura perturbation ζ . Per far ciò iniziamo dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G a^2 \Delta_m \bar{\rho}$$

riscriviamo il secondo termine in funzione dell'evoluzione di $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{m0} a^{-3} = \Omega \rho_c a^{-3}$

$$\begin{aligned} 4\pi G a^2 \Delta_m(\vec{k}, a) \bar{\rho}_m &= \frac{G(a)}{G(a_i)} T(k) 4\pi G a^2 a^{-3} \Omega_m \rho_c \Delta_m(\vec{k}, a_i) \\ &= \frac{G(a)/a}{G(a_i)/a_i} T(k) \underbrace{4\pi G \Omega_m \rho_c \Delta_m(\vec{k}, a_i) a^{-1}}_{\nabla^2 \Psi(k^2, a_i)} \end{aligned}$$

quindi

$$\Psi(\vec{k}, a) = \frac{G(a)/a}{G(a_i)/a_i} \Psi(\vec{k}, a_i) T(k) \quad (7.80)$$

Abbiamo quindi una scomposizione come avevamo per Δ_m , ma il growth rate viene riscalato per a . Si definisce quindi il **growth suppression rate**

$$g(a) \propto \frac{G(a)}{a} \quad (7.81)$$

tornando allo spettro di potenza

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(k, a) &= \frac{k^3}{2\pi^2} |\Delta_m(\vec{k}, a)|^2 = \left[\frac{G(a)}{G(a_i)} \right]^2 T^2(k) \frac{k^3}{2\pi^2} |\Delta_m(\vec{k}, a)|^2 \\ &= \left[\frac{G(a)}{G(a_i)} \right]^2 T^2(k) \frac{k^3}{2\pi^2} \left(-\frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 \frac{k^{-2}}{a_i} \right)^{-2} |\Psi(\vec{k}, a_i)|^2 \end{aligned} \quad (7.82)$$

a questo punto passiamo a $\zeta = \frac{5+3w}{3+3w} \Psi$ con $w = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(k, a) &= \left[\frac{G(a)}{G(a_i)/a_i} \right]^2 T^2(k) \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{k^4}{\Omega_m^2 H_0^4} \frac{4}{9} \left| \frac{3}{5} \zeta(\vec{k}, a_i) \right|^2 \\ &= \left[\frac{G(a)}{G(a_i)/a_i} \right]^2 T^2(k) \frac{k^4}{\Omega_m^2 H_0^4} \underbrace{\frac{4}{25} \frac{k^3}{2\pi^2} |\zeta(\vec{k}, a_i)|^2}_{\mathcal{P}_{\zeta\zeta}(k)} \end{aligned} \quad (7.83)$$

Ho quindi questo spettro di potenza che ora non varia l'evoluzione in base all'equivalenza

$$\mathcal{P}_{\zeta\zeta}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\zeta(\vec{k}, a_i)|^2 \quad (7.84)$$

In linea di principio non sappiamo nulla su $\mathcal{P}_{\zeta\zeta}$, ma possiamo fare un ansatz che abbia la forma di potenza

$$\mathcal{P}_{\zeta\zeta}(k) = A \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n-1} \quad (7.85)$$

questo viene detto **ansatz di Harrison-Zel'dovich**. Dato che vediamo tante galassie che sono strutture a media scala, ci aspettiamo che la potenza cresca con potenza circa 0. Se avesse una potenza più grande, sarebbe più alta a larga scala e quindi vedremmo molti più ammassi. Se avesse una potenza più piccola, sarebbe più alta a piccola scala e quindi vedremmo molti più buchi neri.

7.7. Formazione delle strutture

Siamo arrivati all'espressione per lo spettro di potenza

$$\mathcal{P}_m(k, a) = \left[\frac{G(a)}{G(a_i)/a_i} \right]^2 T^2(k) k^4 \frac{4}{25H_0^2\Omega_m^2} \mathcal{P}_{\zeta\zeta}(k, a)$$

con

$$T(k) = \begin{cases} 1 & k < k_{\text{eq}} \\ k^{-2} \ln\left(\frac{k}{k_{\text{eq}}}\right) & k > k_{\text{eq}} \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{\zeta\zeta} = A_s \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s - 1}$$

nell'approssimazione di Harrison-Zel'dovich. Possiamo riscrivere come

$$\mathcal{P}_m(k, a) \propto D^2(a) T^2(k) k^{3+n_s}$$

Possiamo determinare le costanti A_s e n_s dalle osservazioni della CMB e delle Large Scale Structures ottenendo $A_s \approx 10^{-9}$ e $n_s \approx 0.96$.

Possiamo quindi fare i grafici dello spettro di potenza

mettere grafico

Tendenzialmente però si tende ad utilizzare la densità P , perché è anche quella che si misura (basta moltiplicare \mathcal{P} per k^3).

mettere grafico

Dal punto di inversione che osserviamo, possiamo ricavare informazioni sul punto di equivalenza. C'è però un problema: se andiamo a k alti, ad un certo punto arriviamo alle scale delle singole galassie e delle singole stelle. Queste strutture però sono soggette a fenomeni più complessi rispetto alla sola interazione gravitazionale, e questi effetti non possono essere catturati da un'approssimazione al primo ordine. Dunque bisogna aggiungere una correzione ad alti k ottenuta tramite simulazioni. Tendenzialmente però si tende ad utilizzare la densità P , perché è anche quella che si misura (basta moltiplicare \mathcal{P} per k^3).

mettere grafico

Fin'ora infatti ci siamo concentrati sul caso in cui il density contrast δ fosse molto minore di 1. Adesso che andiamo a guardare la formazione delle strutture dobbiamo spingerci a $\delta > 1$.

Per la formazione delle strutture esistono due possibili scenari:

Bottom-up si formano prima le strutture piccole che poi si uniscono per formare quelle a scala maggiore

Top-down si formano prima le strutture grandi che poi coagulano anche a piccola scala

Si può dimostrare che il modello Bottom-up è favorito nel caso di Cold Dark Matter (che correntemente è il modello più accreditato), mentre quello Top-down è favorito nel caso di Hot Dark Matter.

Digressione

Al momento ci sono due teorie maggiori su cosa costituisca la materia oscura

I MACHOs (MAssive Compact Halo Objects) oggetti molto grandi e massivi che non sono visibili come i buchi neri

Le WIMPs (Weakly Interactive Massive Particles) particelle molto massive che interagiscono solo tramite l'interazione debole

Ad oggi sono favorite le WIMPs.

7.7.1. Modello di collasso sferico

Per studiare come si formano le strutture iniziamo da un caso semplificato: il modello a collasso sferico. Questo l'avevamo già visto nella Sezione 3.9, notando che l'evoluzione di una sovradensità a simmetria sferica era identica all'evoluzione di un universo dominato da materia e curvatura. Ricordiamo che una particolarità di questo caso era il completo disaccoppiamento della perturbazione dall'universo circostante, che ci permetterà di semplificare molto la trattazione. Avevamo ottenuto la parametrizzazione

$$\begin{cases} r = \frac{GM}{2|E|}(1 - \cos(\theta)) \\ t = \frac{GM}{(2|E|)^{\frac{3}{2}}}(\theta - \sin(\theta)) \end{cases} \quad (7.86)$$

dove $\theta = 2|E|\eta$ è il parametro e E è l'energia interna del sistema.

Possiamo aspettarci che nel primo periodo, le perturbazioni fossero molto piccole. Quindi possiamo sviluppare in attorno a $\theta = 0$

$$\begin{cases} r = \frac{GM}{2|E|} \frac{\theta^2}{2} \\ t = \frac{GM}{(2|E|)^{\frac{3}{2}}} \frac{\theta^3}{6} \end{cases} \quad (7.87)$$

ottenendo

$$r(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (7.88)$$

che è esattamente quello che avevamo già ottenuto in precedenza per perturbazioni in un universo matter dominated.

Vogliamo ora scrivere δ , per fare ciò ci servono ρ e $\bar{\rho}$. ρ è facile ottenerlo perché essendo la struttura disaccoppiata la massa è sempre la stessa, quindi la densità sarà data semplicemente dalla massa sul volume.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r^2(\theta)}$$

Per $\bar{\rho}$ possiamo usare l'equazione di Friedman

$$\bar{\rho} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

usando il fatto che in dominazione della materia vale $H = \frac{2}{3t}$ otteniamo

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2(\theta)}$$

possiamo quindi scrivere l'espressione per δ

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = 1 - \delta = \frac{18M\pi G t^2}{4\pi r^3} = \frac{9(\theta - \sin(\theta))^2}{2(1 - \cos(\theta))^3} \quad (7.89)$$

possiamo graficare questo risultato confrontandolo con l'approssimazione lineare
mettere grafico

Se però guardiamo i risultati delle simulazioni osserviamo un risultato differente da entrambi. Questo sempre perché il processo di formazione delle galassie coinvolge processi non solo gravitazionali

mettere grafico

Infatti quello che si ottiene che a $\theta = 2\pi$ si ha la formazione di un alone di materia oscura.

All'atto pratico quando si vogliono poi fare simulazioni a grande scala dell'universo non si possono tenere conto di tutti questi processi e allora si segue l'approssimazione solo gravitazionale fino ad un certo punto e dopo si sostituisce il valore con il risultato della formazione dell'alone. Tendenzialmente il limite prima di sostituire è $\delta_{\text{linear}(\theta=2\pi)} = 1.69$.

Per capire quale valore sostituirci bisogna andare a guardare i processi che effettivamente avvengono. Il processo principale è quello di **virializzazione**. Il teorema del viriale ci dice se il sistema è virializzato

$$T_{\text{vir}} = -\frac{1}{2}V_{\text{vir}} \quad (7.90)$$

con T l'energia cinetica e V la potenziale. Possiamo riscriverlo in funzione dell'energia totale

$$E_{\text{vir}} = T_{\text{vir}} + V_{\text{vir}} = \frac{1}{2}V_{\text{vir}}$$

Dato che l'energia si conserva, questa sarà uguale al punto di inversione (dove $E = V_{\text{turn-around}}$ perché l'energia cinetica è nulla). Quindi si ha

$$\frac{1}{2}V_{\text{vir}} = V_{\text{turn-around}} \quad (7.91)$$

ora possiamo sfruttare il fatto che il potenziale segue $V \propto \frac{1}{r}$ ottenendo

$$r_{\text{vir}} = \frac{1}{2}r_{\text{turn-around}} \Rightarrow \rho_{\text{vir}} = 8\rho_{\text{turn-around}} \quad (7.92)$$

mentre per $\bar{\rho}$ si sfrutta il fatto che il θ a cui avviene la virializzazione è il doppio di quello a cui c'è il turn around

$$\bar{\rho}_{\text{vir}} = \frac{\bar{\rho}_{\text{turn-around}}}{4} \quad (7.93)$$

quindi il density contrast diventa

$$1 + \delta_{\text{vir}} = \frac{\rho_{\text{vir}}}{\bar{\rho}_{\text{vir}}} = \frac{8\rho_{\text{turn-around}}}{\bar{\rho}_{\text{turn-around}}/4} = 32(1 + \delta_{\text{turn-around}}) \approx 178 \quad (7.94)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il valore ottenuto prima (dato che al turn around gli altri processi sono ancora trascurabili).

Per ricapitolare in una simulazione a grande scala possiamo usare sempre il modello lineare, però quando in una zona viene raggiunto un valore $\delta_{\text{lin}} = 1.69$ lo si sostituisce (dopo un tempo prefissato) con il valore $\delta \approx 178$.

7.7.2. Teoria di Press-Schechter

Abbiamo appena visto che quando viene raggiunta una perturbazione che in teoria lineare eccede $\delta_{\text{lin}} = 1.69$, si forma un alone virializzato con $\delta_{\text{vir}} = 178$. Questo fatto è stato sfruttato da Press e Schechter per formulare una teoria che descrivesse la statistica di comparizione degli aloni di materia oscura. Questa viene chiamata **teoria di Press-Schechter**.

Il primo passo consiste nell'introduzione di un filtro (il termine inglese *smoothing* rende bene l'idea) della densità evoluta linearmente. Questo fa sì che vengano rimossi i contributi sotto una scala R . Per fare ciò si considera la massa contenuta all'interno di una distanza R da un punto \vec{x}

$$\begin{aligned} M(\vec{x}, < R) &= \int_{V_R} d^3y \rho(y) = \int d^3y \rho(\vec{y}) \Theta\left(1 - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{R}\right) \\ &= \int d^3y (\bar{\rho} + \delta\rho(\vec{y})) \Theta\left(1 - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{R}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R^3 + \frac{4\pi}{3} R^3 \int d^3y \delta\rho(\vec{y}) \underbrace{\frac{\Theta(\dots)}{\frac{4\pi}{3} R^3}}_{W_{\text{TH}}} \end{aligned}$$

dove W_{TH} viene detta **funzione top-hat** (per via della sua forma) che sarà

$$W_{\text{TH}}(|\vec{x} - \vec{y}|, R) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{se } |\vec{x} - \vec{y}| < R \\ 0 & \text{se } |\vec{x} - \vec{y}| > R \end{cases} \quad (7.95)$$

quindi indicando con $\langle M \rangle_R$ la massa media (ottenuta come densità media per volume)

$$M(\vec{x}, < R) = \langle M \rangle_R + \langle M \rangle_R \underbrace{\frac{1}{\rho} \int d^3y \delta\rho(\vec{y}) W_{\text{TH}}(|\vec{x} - \vec{y}|, R)}_{\delta_M} = \langle M \rangle_R [1 + \delta_M] \quad (7.96)$$

dove

$$\delta_M(\vec{x}) = \frac{1}{\rho} \int d^3y \delta\rho(\vec{y}) W_{\text{TH}}(|\vec{x} - \vec{y}|, R) \quad (7.97)$$

Notiamo che questo calcolo non sta aggiungendo informazione “fisica”, dunque la statistica di δ_M sarà la stessa di δ . Possiamo pensarlo come il processo analogo al *blurring* (sfocamento) che si può fare nelle immagini, dove ogni pixel viene sostituito con la media pesata dei vicini. In questo caso W_{TH} rappresenta il peso. In termini tecnici stiamo facendo la convoluzione di δ con W_{TH} .

Possiamo adesso passare nello spazio di Fourier, dove la convoluzione diventa un prodotto

$$\delta_M(\vec{k}) = \delta(\vec{k}) W_{\text{TH}}(\vec{k}, R) \quad (7.98)$$

è necessario fare la trasformata di Fourier di W_{TH} che si può dimostrare essere

$$\begin{aligned}
W_{\text{TH}}(\vec{k}, R) &= \int d^3y e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} W_{\text{TH}}(|\vec{y}|, R) \\
&= \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)] = W_{\text{TH}}(k, R)
\end{aligned} \tag{7.99}$$

Notiamo che anche la trasformata dipende solo dal modulo di \vec{k} come ci saremmo potuti aspettare. Notiamo inoltre che W_{TH} è una funzione monotona decrescente di k .

Possiamo adesso passare a fare statistica. Vogliamo chiederci quale sia la probabilità di incontrare un alone di massa M . Per fare questo ci serve sapere quale sia la densità di probabilità, che in linea di principio non sappiamo, ma che possiamo decidere di assumere come gaussiana

$$\mathbb{P}(\delta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M} \exp\left\{-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right\} \tag{7.100}$$

dove σ_M^2 è la varianza che sarà data da

$$\sigma_M^2 = \int d\ln(k) \mathcal{P}_m(k) |W_{\text{TH}}(k, R)|^2 \tag{7.101}$$