

Indice

1	Aberrazioni	2
1.1	Aberrazioni primarie	2
1.1.1	Aberrazione sferica	2
1.1.2	Coma	7
1.1.3	Astigmatismo	8
1.1.4	Curvatura di campo	9
1.1.5	Distorsione	9
1.1.6	Aberrazione cromatica	9
1.2	Coefficienti di Seidel: lente sottile	10
1.3	Aberrazioni di fronte d'onda	12

Capitolo 1

Aberrazioni

1.1 Aberrazioni primarie

Nel precedente Capitolo tutti i sistemi ottici che abbiamo trattato avevano pesanti limitazioni:

- approssimazione gaussiana;
- luce monocromatica.

Ricordiamo che per approssimazione gaussiana abbiamo inteso: 1) raggi parassiali, 2) diottri sferici con piccola apertura numerica e 3) sistemi centrati (al limite oggetto e immagine poco distanti dall'asse ottico).

Nella pratica invece quello che succede è che l'immagine si presenta con dei *difetti*. Nella realtà infatti gli angoli in gioco possono non essere piccoli, le superfici non sono solo sferiche, i sistemi ottici hanno anche elementi decentrati, nell'intervallo di lunghezze d'onda nel quale lavorano l'indice di rifrazione non può essere considerato costante e inoltre la propagazione della luce è soggetta anche a fenomeni diffrattivi. In questo capitolo non tratteremo ancora i problemi dovuti alla diffrazione.

Questi difetti si chiamano *aberrazioni* e sono da distinguere da difetti nell'immagine dovuti ad altre cause: vedi gli errori di fabbricazione delle superfici, la disomogeneità dei materiali utilizzati, etc.

Allo scopo di interpretare meglio la propagazione di un raggio attraverso un sistema ottico, dalla teoria parassiale (esente da aberrazioni) passiamo alla *teoria del terzo ordine*:

$$\sin \phi \simeq \phi - \phi^3/3! \quad (1.1)$$

In questo caso nascono 5 aberrazioni monocromatiche (presenti quindi in sistemi rifrattivi così come nei riflettivi):

- *aberrazione sferica*;
- *coma*;
- *astigmatismo*;
- *curvatura di campo o di Petzval*;
- *distorsione*.

e a queste si aggiungono le aberrazioni cromatiche (presenti invece solo negli elementi rifrattivi):

- *aberrazione cromatica longitudinale o assiale*;
- *aberrazione cromatica laterale*.

Esaminiamo le singole aberrazioni.

1.1.1 Aberrazione sferica

Questa aberrazione è anche detta *aberrazione di apertura* perchè dipende dalla apertura della superficie considerata. In fig.1.1 (sopra), per una lente sottile, è evidente come i raggi parassiale convergano nel fuoco parassiale F mentre i raggi marginali (quelli che incontrano la lente ad una distanza h dall'asse ottico)

converghano in C . La distanza lungo l'asse ottico tra F e C è la componente longitudinale di questa aberrazione mentre la distanza dell'intersezione del raggio marginale sul piano focale parassiale dall'asse definisce quella laterale. Tra i due fuochi limite esiste una zona, detta del *circoletto di minima confusione*, dove è massima la concentrazione dei raggi. Questo cerchio è circa $1/4$ di quello sul piano focale parassiale.

Nel caso di un oggetto alla distanza finita s (vd fig.1.1 - sotto) il raggio marginale crea l'immagine in s'_h mentre il parassiale in s'_p .

Definiamo q il *fattore di forma* di una lente (*bending*) come:

$$q = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \quad (1.2)$$

mentre con p chiamiamo il *fattore di posizione*, pari a:

$$p = \frac{s' - s}{s' + s} \quad (1.3)$$

dove s e s' indicano sempre le posizioni dei coniugati.

Applicando la approssimazione al terzo ordine, si ricava:

$$\frac{1}{s'_h} - \frac{1}{s'_p} = \frac{h^2}{8f^3} \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{n+2}{n-1} q^2 + 4(n+1)pq + (3n+2)(n-1)p^2 + \frac{n^3}{n-1} \right] \quad (1.4)$$

chiamiamo la precedente quantità L_s , si veda (?). Notare la dipendenza dal quadrato della apertura (h) e dalla lunghezza focale alla terza potenza che comporta il segno della aberrazione.

La posizione di un'immagine per raggi marginali è legata a quella parassiale con la seguente relazione:

$$s'_h = \frac{s'_p}{1 + s'_p L_s} \quad (1.5)$$

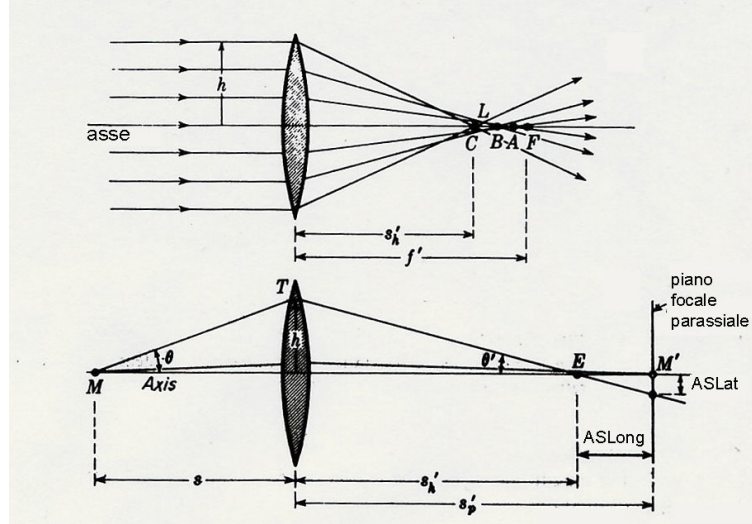


Figura 1.1: Aberrazione sferica longitudinale e laterale o trasversale. Sopra per oggetto all'infinito, sotto con distanze finite. [adattata da F.A. Jenkins e H.E. White, 1981]

La componente longitudinale potremo scriverla, includendo la eq.1.4, come:

$$ASLong = s'_p - s'_h = s'_p s'_h L_s \quad (1.6)$$

Nel caso di lenti convergenti (ad esempio biconvesse) $ASLong$ è positiva (s'_h si trova a SX di s'_p) mentre in quelle divergenti (biconcave) è negativa.

Per la componente laterale abbiamo:

$$ASLat = ASLong \tan\theta' = s'_p h L_s \quad (1.7)$$

Nel caso particolare in cui l'oggetto si trova all'infinito abbiamo $s'_p = f$ e $s'_h = f/(1 + fL_s)$ per cui le componenti dell'aberrazione diventano:

$$ASLong = \frac{f^2 L_s}{1 + fL_s} \quad (1.8)$$

$$ASLat = fhL_s \quad (1.9)$$

Nell'intenzione di progettare una lente con aberrazione sferica minima, dobbiamo trovare il fattore di forma, q_{min} , tale da minimizzare L_s e quindi annullare la derivata di L_s rispetto a q . Noto q_{min} si può risalire quindi alla coppia di raggi di curvatura. In pratica:

$$\frac{dL_s}{dq} = \frac{h^2}{4f^3} \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\frac{n+2}{n-1} \right) q + 2(n+1)p \right] = \frac{h^2}{4f^3} \frac{(n+2)q + 2(n^2-1)p}{n(n-1)^2} = 0 \quad (1.10)$$

da cui ricaviamo:

$$q_{min} = -\frac{2(n^2-1)p}{n+2} \quad (1.11)$$

Nel grafico di fig.1.2 si vede come $ASLong$ dipende dal fattore di forma e che, nonostante abbia un valore minimo per q_{min} , questa non è mai nulla.

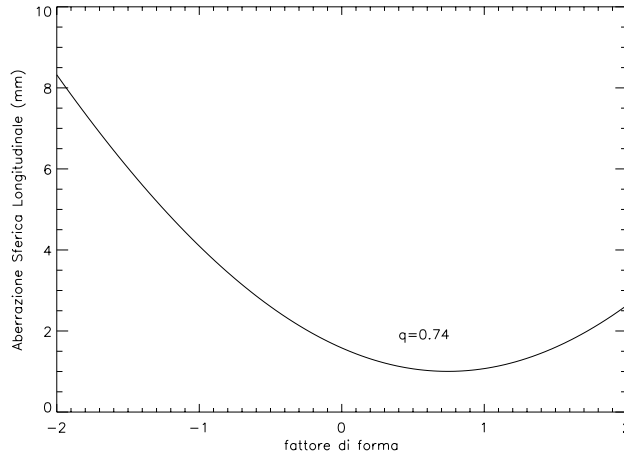


Figura 1.2: *Aberrazione sferica longitudinale in funzione del fattore di forma. Parametri usati: $h=10$ mm, $f = 100$ mm, lente in BK7, oggetto all'infinito. $ASLong$ minima (circa 1mm) per $q=0.74$.*

Il fattore di posizione possiamo anche scriverlo in funzione della lunghezza focale come:

$$p = \frac{2f}{s} - 1 = 1 - \frac{2f}{s'} \quad (1.12)$$

e viceversa:

$$s = \frac{2f}{1+p} \quad (1.13)$$

$$s' = \frac{2f}{1-p} \quad (1.14)$$

Ricaviamo ora il rapporto tra i raggi di curvatura della lente in funzione di q . Esplicitiamo r_2 da q (il ragionamento è simmetrico con r_1)

$$r_2 = r_1 \frac{q+1}{q-1} \quad (1.15)$$

e sostituiamolo nella formula del fabbricante di lenti (eq.??). Otteniamo quindi:

$$r_1 = \frac{2f(n-1)}{q+1} \quad (1.16)$$

$$r_2 = \frac{2f(n-1)}{q-1} \quad (1.17)$$

La stima dell'aberrazione sferica longitudinale si migliora sostanzialmente per grandi $|q|$ ricorrendo ad un'approssimazione con una *teoria del quinto ordine* ($\sin\theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$). La dipendenza di $ASLong$ con h diventa quindi del tipo:

$$ASLong = ah^2 + bh^4 \quad (1.18)$$

Superfici Asferiche

Trattando l'aberrazione sferica viene spontaneo dedurre come questa si possa eliminare "deformando" la superficie sferica rendendola sempre meno curva allontanandosi dall'asse ottico. Nella fig.1.3 il precedente concetto si evince graficamente nel caso di una lente piano-convessa. La **sag** o *coordinata z* (la coordinata lungo l'asse ottico normalmente) crescendo più lentamente al bordo permette ai raggi del bordo di convergere sempre nello stesso fuoco: è questa una *superficie asferica*. Mentre per una sfera dobbiamo definire un solo parametro (il raggio di curvatura o la curvatura stessa), nel caso delle superfici asferiche ne abbiamo altri. Un caso particolare delle superfici asferiche sono le *coniche di rivoluzione*.

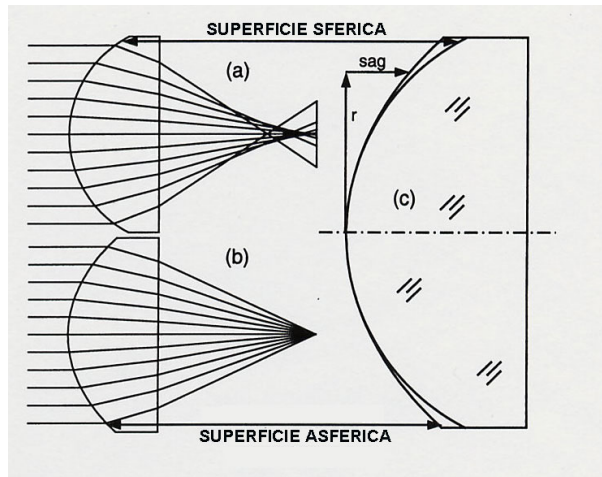


Figura 1.3: Applicazione di una superficie asferica ad una lente piano-convessa (b) per la correzione dell'aberrazione sferica (a). In (c) si evidenzia la diversità delle due superfici al bordo. [adattata da R.E. Fischer and B. Tadic-Galeb, 2000]

La **sag** per le coniche è:

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} \quad (1.19)$$

dove c è la curvatura al vertice, k la costante conica¹ e r è la coordinata radiale dall'asse ottico. Per una sfera $k = 0$, per un paraboloide $k = -1$, per un iperboloide $k < -1$, per un'ellissoide oblatto $-1 < k < 0$ e per un ellissoide prolato $k > 0$.

In fig.1.4 sono confrontate coniche aventi la stessa curvatura al vertice ma diverse costanti coniche.

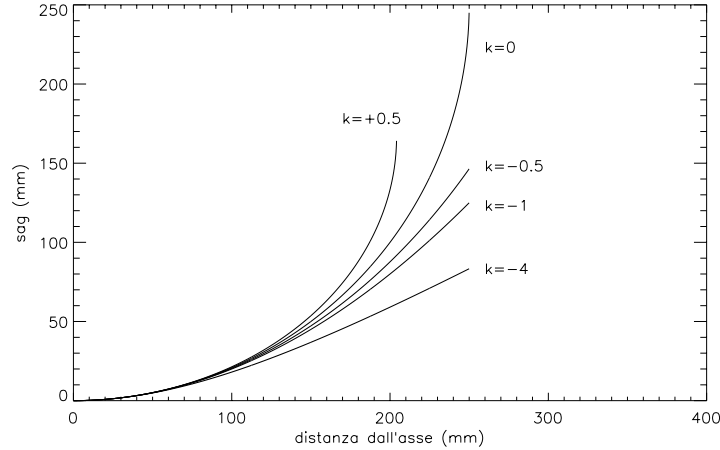


Figura 1.4: Confronto tra coniche con uguale raggio di curvatura pari a 250 mm ma differenti costanti coniche.

Ogni tipo di conica soddisfa la condizione tra coniugati, se non affetta da aberrazione sferica, nei seguenti casi per uno specchio: la sfera se l'oggetto (e quindi l'immagine) si trova al centro di curvatura, la parabola se l'oggetto è all'infinito e l'immagine al suo fuoco, l'ellisse, così come l'iperbole, se oggetto e immagine sono nei fuochi. Come vedremo per questo motivo le superfici coniche (specchi parabolici e/o iperbolic) sono largamente utilizzate in telescopi astronomici.

Le coniche, nei programmi di progettazione ottica, sono considerate *superfici standard*; in particolare una superficie piana è anche una conica con raggio di curvatura infinito.

Nel caso generale delle asferiche una espansione polinomiale in potenze della coordinata radiale si somma alla conica e la **sag** diventa:

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + \sum_i a_i r^{2i} \quad (1.20)$$

i termini a_i sono chiamati coefficienti di **figuring** con $i = 1, \dots, 8$, di norma.

Nel caso in cui invece viene a mancare la simmetria cilindrica nel sistema si impiegano *superfici biconiche*:

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k_x)c_x^2 x^2 - (1+k_y)c_y^2 y^2}} \quad (1.21)$$

Il vantaggio di impiegare superfici asferiche deriva dal maggiore numero di parametri che possono essere variati al fine di ottimizzare le prestazioni del sistema ottico in oggetto. Un esempio classico è il telescopio Schmidt nel quale si ricorre ad una lastra correttiva asferica (vd §??). In questo modo si riducono conseguentemente il numero dei componenti, che, nel caso ad esempio di materiali per lunghezze d'onda infrarosse, possono essere anche molto costosi. Inoltre le attuali macchine utensili a controllo numerico

¹Ricordiamo che la costante conica è legata alla ellitticità, ε , come $k = \varepsilon - 1$ e all'eccentricità, e , come $k = -e^2$.

permettono la lavorazione di superfici di questo tipo con estrema precisione sul profilo (dell'ordine del micron o meno) sostituendole alle "classiche" superfici sferiche.

1.1.2 Coma

Un oggetto puntiforme nel piano focale di un sistema ottico si può presentare come un'immagine a forma di cometa, da cui il nome di aberrazione comatica o coma. Vediamo il caso della fig.1.5.

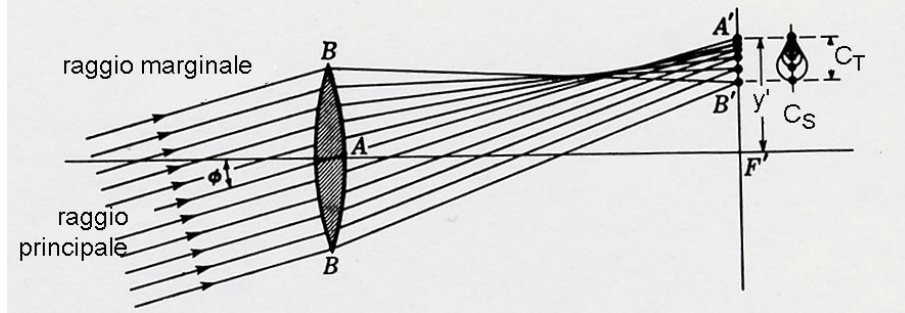


Figura 1.5: *Formazione di coma negativa da singola lente. Solo i raggi tangenziali sono tracciati. [adattata da F.A. Jenkins e H.E. White, 1981]*

I raggi che attraversano corone anulari della lente crescenti formano sul piano immagine cerchi di diametro e distanza crescenti dalla posizione parassiale. L'effetto risultante è una distribuzione luminosa asimmetrica, a forma di coma appunto, dove il massimo non coincide più con il raggio principale. Nel caso di telescopi astronomici questa aberrazione comporta una errata stima della posizione dell'oggetto osservato.

Le dimensioni del coma sono: C_T , componente tangenziale, e C_S , componente sagittale.

Un raggio sulla lente lo determiniamo in coordinate polari: h e ψ , mentre la posizione del raggio principale sul piano immagine con y' . Per un oggetto all'infinito distante φ dall'asse abbiamo: $y' = f \tan \varphi$.

Applicando la teoria del terzo ordine si ricava:

$$C_S = \frac{h^2}{f^3} y' (Gp + Wq) \quad (1.22)$$

dove

$$G = \frac{3(2n+1)}{4n} \quad e \quad W = \frac{3(n+1)}{4n(n-1)} \quad (1.23)$$

mentre $C_T = 3C_S/2$.

In fig.1.6 si riporta l'andamento della sola componente tangenziale per una lente con caratteristiche dichiarate nella didascalia. Differentemente dall'aberrazione sferica, il coma ha un valore del fattore di forma per il quale si annulla e nello stesso tempo discrimina valori positivi e negativi.

Annullando l'eq.1.22 ricaviamo questo valore di q_{min} :

$$q_{min} = -\frac{Gp}{W} \quad (1.24)$$

Notiamo che il valore $q_{min} = 0.84$ è simile a quello trovato nel caso dell'aberrazione sferica ($q_{min} = 0.74$), quindi una lente con questo fattore di forma ha contemporaneamente minima aberrazione sferica e niente coma. Un sistema ottico che risponde a questi requisiti si chiama *aplanatico*.

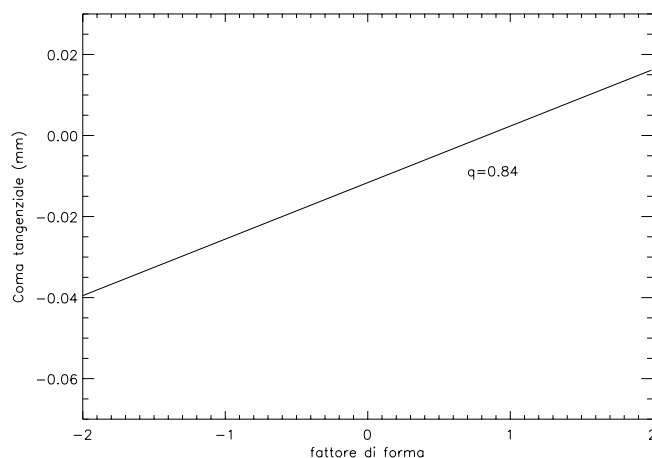


Figura 1.6: *Coma tangenziale in funzione del fattore di forma della lente. Parametri usati: $h=10$ mm, $f=100$ mm, lente in BK7, oggetto all'infinito, angolo di incidenza pari a 11 gradi. Coma tangenziale (e quindi anche sagittale) nulla per $q=0.84$.*

1.1.3 Astigmatismo

I raggi provenienti da un oggetto fuori asse creano un'immagine detta *tangenziale*, quelli passanti sul piano tangenziale, ed una *sagittale*, quelli passanti sul piano ortogonale al primo. In fig.1.7 si vedono le posizioni relative di questi due fuochi.

In realtà poiché ogni lente, come ad esempio quella rappresentata nella figura, la possiamo approssimativamente considerare come la somma di 2 lenti cilindriche, abbiamo una linea focale tangenziale ed una sagittale. Intendiamo per linee focali tangenziali e sagittali il luogo geometrico dei punti immagine generati da fasci di raggi che attraversano la lente parallelamente al piano tangenziale e sagittale rispettivamente. Le linee focali tangenziale e sagittale (curve) sono rispettivamente su piani ortogonali ai piani tangenziale e sagittale.

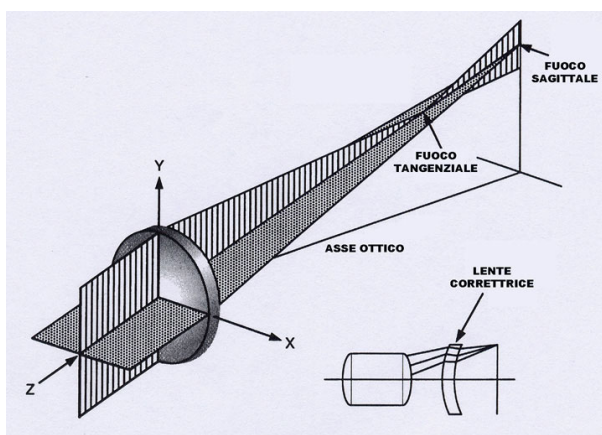


Figura 1.7: *Posizione dei fuochi tangenziale e sagittale e relative linee focali per un oggetto fuori dell'asse ottico. [adattata da R.E. Fischer and B. Tadic-Galeb, 2000]*

1.1.4 Curvatura di campo

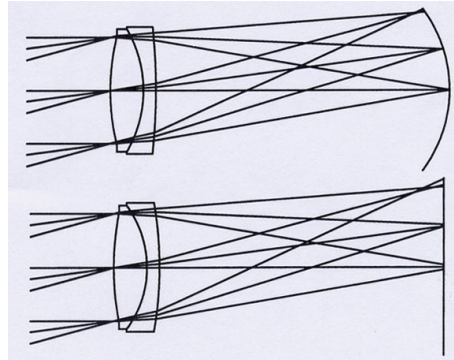


Figura 1.8: Esempio di piano focale curvo in presenza di un doppietto acromatico. [adattata da R.E. Fischer and B. Tadic-Galeb, 2000]

Differentemente dalle precedenti tre aberrazioni la curvatura di campo, se isolata, mantiene soddisfatta la relazione dei coniugati: oggetto puntiforme genera immagine puntiforme. Nel caso di un oggetto esteso la condizione di prima è soddisfatta solo su una superficie curva: la *superficie di Petzval*; per questo si chiama anche *curvatura di Petzval*. In fig.1.8 è mostrato un esempio della curvatura di campo con un doppietto acromatico (vd dopo).

Questo difetto dell'immagine su piano focale piano è tanto maggiore quanto maggiore è l'apertura numerica e/o l'angolo di campo.

1.1.5 Distorsione

Anche questo tipo di aberrazione primaria come la curvatura di campo, se sola, mantiene la corrispondenza tra coniugati. Il difetto consiste nella presenza di ingrandimento variabile con l'angolo di campo. Possiamo quindi avere una distorsione positiva o negativa (vd fig.1.9) dipendentemente dall'ingrandimento laterale.

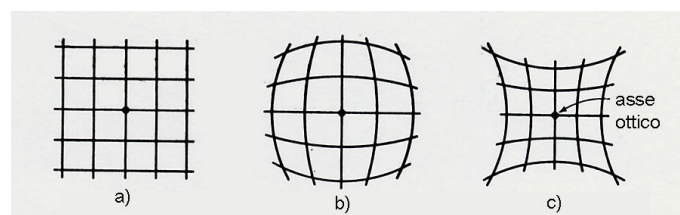


Figura 1.9: Immagini di una griglia nei casi: a) senza distorsione, b) con distorsione positiva e c) con distorsione negativa [adattata da F.A. Jenkins e H.E. White, 1981]

1.1.6 Aberrazione cromatica

Nel momento in cui non si considera più luce monocromatica ci rendiamo subito conto che la lunghezza focale di una semplice lente dipende dalla lunghezza d'onda rifratta. L'equazione ?? si riscriverà come:

$$\frac{1}{f} = (n(\lambda) - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.25)$$

Abbiamo quindi un fuoco per ogni colore, come si vede nella fig.1.10, e per il caso di lente convergente sempre più lontani con il crescere di λ . La distanza tra i fuochi estremi (di solito quelli corrispondenti

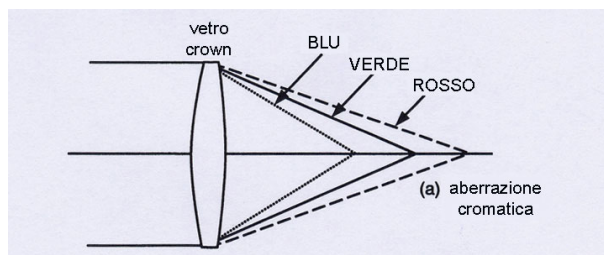


Figura 1.10: Posizione dei fuochi per differenti colori con una lente di vetro crown. [adattata da R.E. Fischer and B. Tadic-Galeb, 2000]

alla riga C (6562 - rosso) e alla riga F (4861 - blu) o G (4307 - violetto)) costituisce la componente *longitudinale* o *assiale* della aberrazione cromatica, C_{long} .

Dalla teoria del terzo ordine nel caso di una lente singola, coincidente con lo stop di apertura, si ricava:

$$C_{long} = \frac{P}{V} h^2 \quad (1.26)$$

dove P è la potenza, V il numero di Abbe e h la distanza dall'asse ottico².

Lo spostamento lungo il piano immagine prende invece nome di *aberrazione cromatica laterale*, C_{lat} . In questa approssimazione $C_{lat} = 0$.

Una conseguenza della variazione della lunghezza focale è la variazione dell'ingrandimento laterale.

Poiché una sola lente non può essere corretta per il cromatismo, un semplice sistema ottico destinato a ridurre l'aberrazione cromatica è un doppietto: il *doppietto cromatico* (vd §??): due lenti di vetri diversi (crown e flint) incollate o due lenti dello stesso vetro separate. Insieme all'eliminazione della aberrazione cromatica si riducono l'aberrazione sferica e il coma (*soluzione aplanatica*).

1.2 Coefficienti di Seidel: lente sottile

Nella teoria del terzo ordine le *aberrazioni di raggio*, cioè le deviazioni dal comportamento descritto dalle formule parassiali, si possono esprimere nei termini di 5 somme, le *somme di Seidel*. L. Seidel nel 1856 ha dimostrato che tracciando i soli raggi marginale e principale si ricavano cinque coefficienti legati alle aberrazioni primarie:

S_1 : aberrazione sferica

S_2 : coma

S_3 : astigmatismo

S_4 : curvatura di campo

S_5 : distorsione.

Potendo invece tracciare molti raggi da un singolo oggetto in maniera da distribuirli uniformemente sulla pupilla di entrata di un sistema, cosa attualmente facile a farsi con l'ausilio di programmi al calcolatore, si ottiene sul piano immagine una mappa delle loro intersezioni, lo *spot diagram* che, come vedremo (§??), risulta utile per una prima analisi della qualità dell'immagine. La sua dimensione è legata alla distribuzione dell'energia mentre la sua forma alle aberrazioni dominanti.

Riportiamo i coefficienti di Seidel nel semplice caso di lente sottile per capire come le aberrazioni primarie sono legate ai parametri del sistema ottico.

La lente non ha alcuno stop di apertura se non la sua stessa dimensione.

Il primo coefficiente (aberrazione sferica) è:

²Ricordiamo che nelle formule dove appare la potenza (o potere diottrico) di un elemento ottico, si devono considerare tutte le lunghezze in metri per essere congruenti dimensionalmente.

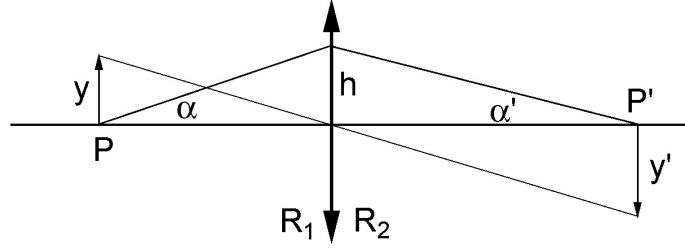


Figura 1.11: Definizione dei parametri usati nella stima dei coefficienti di Seidel per una lente sottile (vd testo)

$$S_1 = \frac{h^2 P}{4} \left[\left(h P \frac{n}{n-1} \right)^2 + \frac{n+2}{2} (\Lambda + U)^2 + 2U(\Lambda + U) \right] \quad (1.27)$$

con P , potenza della lente:

$$P = (n-1)(c_1 - c_2) \quad (1.28)$$

dove $c_1 = 1/R_1$ e $c_2 = 1/R_2$ e, riferendoci alla fig.1.11, con Λ , parametro di forma della lente (N.B. diverso dal fattore q !):

$$\Lambda = h(c_1 + c_2) \quad (1.29)$$

ed infine il parametro che descrive i coniugati, U :

$$U = \alpha + \alpha' \quad (1.30)$$

Il secondo coefficiente (coma) è:

$$S_2 = -H \frac{h}{2} P \left(\frac{n+1}{n} \Lambda + \frac{2n+1}{n} U \right) \quad (1.31)$$

avendo chiamato H l'invariante di Lagrange (vd eq.??): $H = n\alpha y = n'\alpha' y'$.

Gli altri coefficienti sono:

$$S_3 = H^2 P \quad (1.32)$$

$$S_4 = H^2 \frac{P}{n} \quad (1.33)$$

$$S_5 = 0 \quad (1.34)$$

Notiamo che allo scopo di ridurre i coefficienti di Seidel, cioè di cercare di migliorare le prestazioni del sistema ottico, si deve agire modificando i parametri della lente. E' questo il primo passo della *progettazione ottica*: posti i requisiti che si vogliono raggiungere in un sistema ottico si modifica il sistema in maniera opportuna cercando di soddisfare allo stesso tempo tutte le possibili condizioni al contorno imposte (numero di elementi, ingombro totale, peso, costo dei materiali, ecc.).

La correzione delle sole aberrazioni primarie (vd Seidel) è un caso particolare, perché non esiste un metodo generale che consenta di ottenere la configurazione ottimale (la cosiddetta *ricetta ottica*) partendo dalle prestazioni aberrazionali del sistema.

Il processo quindi è di tipo iterativo variando i parametri in gioco: normalmente raggi di curvatura, tipo di superfici, distanze, indici di rifrazione. A causa dell'elevato numero dei *tracciamenti* di raggi che devono essere realizzati per questo scopo sono largamente impiegati i calcolatori.

1.3 Aberrazioni di fronte d'onda

Le aberrazioni le possiamo però quantificare non solo come aberrazioni di raggio ma anche come *aberrazioni di fronte d'onda*.

Il fronte d'onda di un fascio luminoso è il luogo dei punti in cui è costante il cammino ottico a partire dall'oggetto, *i.e.* punti aventi la stessa fase. Idealmente un fronte d'onda è quindi una superficie sferica centrata sull'oggetto; ogni raggio viaggia perpendicolarmente alla superficie di questa sfera. Le aberrazioni di un sistema ottico perturbano questa superficie e le differenze tra questa e quella ideale rappresentano ciò che chiamiamo la *funzione di aberrazione del fronte d'onda* (**wave aberration function**) o **optical path difference** (OPD).

Nella fig.1.12 (SX) sono definiti il fronte d'onda sferico parassiale (quello che converge nel fuoco parassiale), quello reale aberrato (il fronte d'onda distorto dalle aberrazioni) e il fronte d'onda di riferimento che meglio approssima quest'ultimo. E' chiaro che la funzione di aberrazione di fronte d'onda, W , nel caso di sistemi ottici a simmetria cilindrica, è dipendente dalla posizione nella pupilla di uscita e dalla posizione dell'oggetto nel campo di vista (vd fig.1.12 DX). Per descrivere il primo caso ricorriamo alle coordinate polari, ρ e ϕ , essendo la prima la distanza dal centro della pupilla normalizzata alla sua dimensione e la seconda l'angolo di rotazione intorno all'asse ottico misurato dall'intersezione del piano tangenziale³ con quello della pupilla di uscita. Per definire invece la posizione dell'oggetto, sfruttando la simmetria cilindrica del sistema, chiamiamo h la sua distanza dall'asse ottico normalizzata al campo.

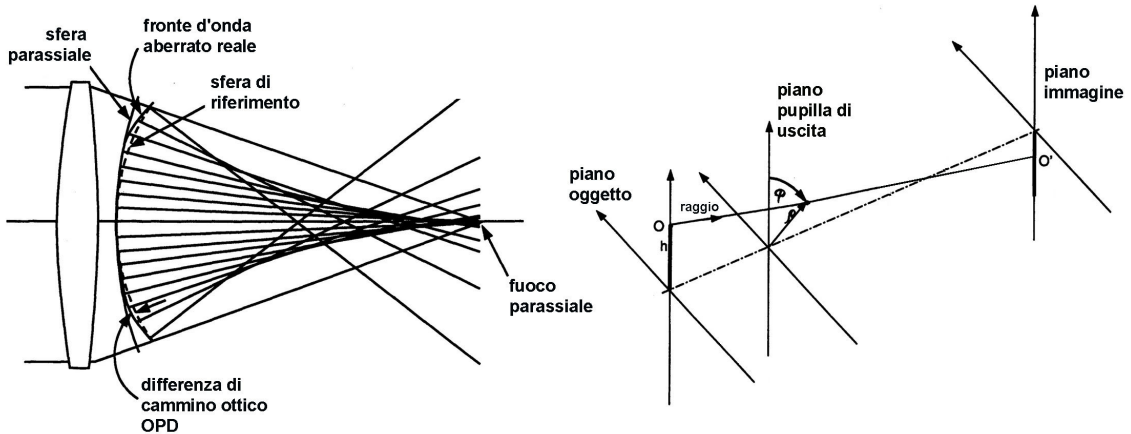


Figura 1.12: Geometria usata per definire l'aberrazione di fronte d'onda. A SX la sfera di riferimento con il fronte reale. A DX le coordinate impiegate nel polinomio del fronte d'onda [adattata da R.E. Fischer and B. Tadic-Galeb, 2000].

Avendo scelto la sfera di riferimento con centro sul piano focale parassiale, possiamo scrivere in forma polinomiale la funzione $W(\rho, \phi, h)$ in potenze di ρ^2 , h^2 e $h\rho\cos\phi$:

$$W(\rho, \phi, h) = W_{040}\rho^4 + W_{131}h\rho^3\cos\phi + W_{222}h^2\rho^2\cos^2\phi + W_{220}h^2\rho^2 + W_{311}h^3\rho\cos\phi + \dots \quad (1.35)$$

dove gli indici i, j, l dei coefficienti W si riferiscono alle potenze di h , ρ e $\cos\phi$. Questi coefficienti si ricavano tracciando un certo numero di raggi e interpolando il risultato con il polinomio $W(\rho, \phi, h)$.

I cinque termini della serie di W rappresentano i cinque contributi aberrazionali monocromatici primari di Seidel mentre tra i residui ci sono le aberrazioni di ordine superiore. Nel caso di sistemi ottici con moderate aperture e campi di vista, le aberrazioni primarie sono dominanti su quelle di ordine superiore.

³Ricordiamo che il *piano tangenziale* è quel piano che contiene l'oggetto e l'immagine mentre il *piano sagittale* è quello ortogonale ad esso.

Una decomposizione del fronte d'onda largamente utilizzata nelle recenti ottiche mobili (vd §??), con sorgente all'infinito, è quella di una base di funzioni ortogonali collegate alle aberrazioni primarie ed a quelle di ordini superiori introdotte da Frits Zernike nel 1934 (?). Queste funzioni sono i seguenti *polinomi di Zernike* $Z_{J,(n,m)}(\rho, \phi)$, dove J è il numero del polinomio, n è la potenza della distanza radiale (ordine del polinomio) e m il fattore moltiplicativo dell'angolo azimutale (?).

I polinomi, corrispondenti alle sole aberrazioni fino al terzo ordine, li possiamo descrivere, in base al loro ordine, nel seguente modo (vd Tab.1.1):

Ordine zero: fronte d'onda piano imperturbato;

Primo ordine: fronte d'onda piano inclinato rispetto all'asse ottico lungo le due direzioni ortogonali (corrisponde ad uno spostamento dell'immagine stellare noto come **Tip-Tilt**);

Secondo ordine: fronte d'onda a sezione parabolica lungo uno o entrambi gli assi: corrisponde ad uno sfocamento e ad astigmatismo;

Terzo ordine: fronte d'onda corrispondente al coma e all'aberrazione triangolare del quinto ordine (trifoglio);

Quarto ordine: fronte d'onda corrispondente all'aberrazione sferica;

dal quinto ordine vengono descritte deformazioni del fronte d'onda molto complesse e non più corrispondenti ad aberrazioni primarie.

ordine (n)	J	m	$Z_{J,(n,m)}$	aberrazione
0	1	0	1	costante
1	2	1	$2\rho \cos\phi$	tilt
1	3	1	$2\rho \sin\phi$	tilt
2	4	1	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	defocus
2	5	2	$\sqrt{6}(\rho^2 \sin 2\phi)$	astigmatismo
2	6	2	$\sqrt{6}(\rho^2 \cos 2\phi)$	astigmatismo
3	7	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho)\sin\phi$	coma
3	8	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho)\cos\phi$	coma
4	11	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	aberrazione sferica

Tabella 1.1: *Polinomi di Zernike Standard.*

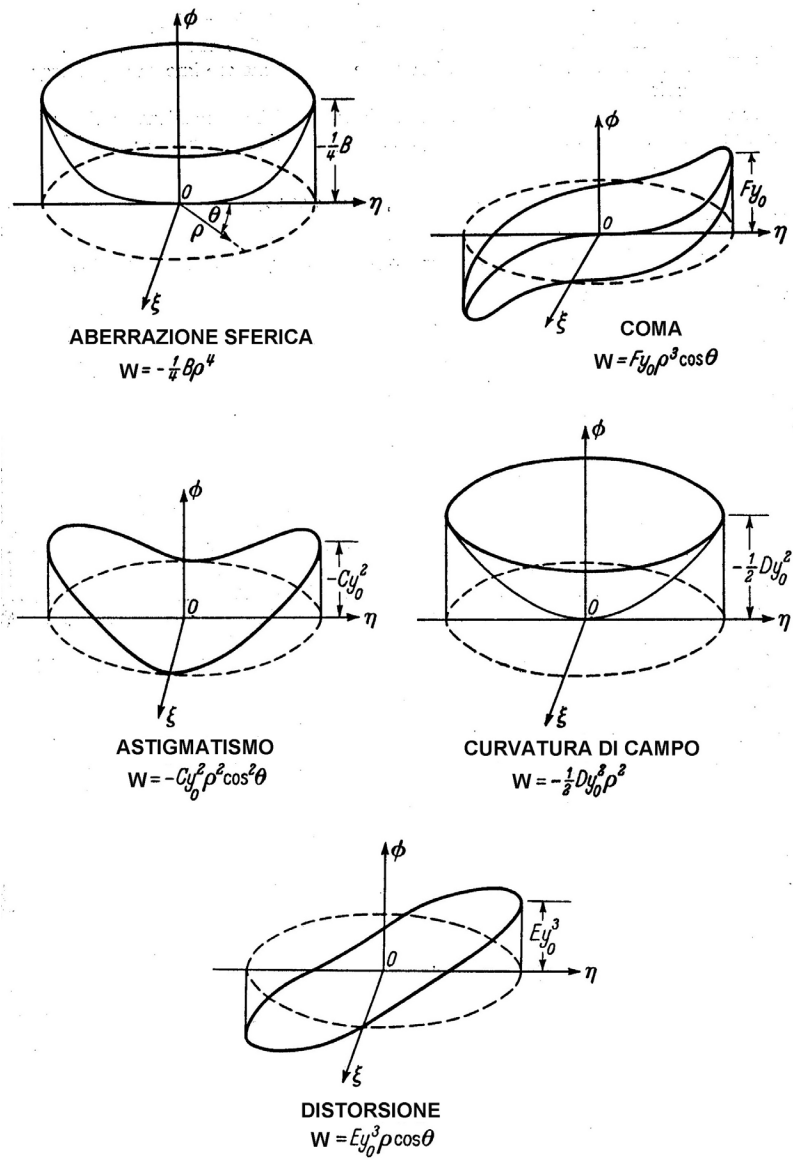


Figura 1.13: Funzione di aberrazione di fronte d'onda (ϕ nel testo è W) per le 5 aberrazioni primarie [adattata da M. Born e E. Wolf, 1980]