Parabola

1 Uvod

O krivuljama drugog reda pisali su već stari Grci. Platonovi učenici pisali su o elipsi, paraboli, hiperboli te najranije o kružnici.

Definirat ćemo parabolu, izvod njene jednadžbe, jednadžbe njene tangente te ćemo se baviti pojmom dijametra parabole.

Opširnije o krivuljama drugog reda može se naći u knjigama Repetitorij više matematike 1, [1] te Elementarne matematike 2, [2], a o vezi košarke i parabole može se pronaći u diplomskom radu Modeliranje slobodnih bacanja

2 Parabola

Definicija 1. *Neka je d bilo koji pravac u ravnini i F točka te ravnine M koja ne leži na d. Skup svih točaka ravnine kojih je udaljenost od pravca d jednaka udaljenosti od točke F zove se **parabola**.*

Kraće, to je skup

$$P = \{T \in M; d(T, d) = d(T, F)\} \tag{1}$$

gdje je d **ravnalica** parabole, a F **fokus** ili **žarište**. Točka A zove se **tjeme parabole**. Okomica d koja ima nožište u N zove se **os parabole**.

3 Jednadžba parabole

Neka u Kartezijevom koordinatnom sustavu ravnalica ima jednadžbu $x + \frac{p}{2} = 0$, gdje je $p > 0$ bilo koji realan broj. Broj p se naziva **poluparametar**, dok se broj $2p$ zove **parametar parabole**. Fokus parabole tada ima koordinate $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Točka T leži na paraboli ako je $d(T, F) = d(T, d)$ gdje je $d(T, F) = r$ **radijvektor** točke T parabole. Tada vrijedi

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \tag{2}$$

Kvadriranjem i sređivanjem prethodne jednadžbe dobije se

$$y^2 = 2px \tag{3}$$

Stoga, ako točka T leži na paraboli, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu 3. Ako koordinate neke točke $T = \big(x, y\big)$ zadovoljavaju 3, onda T leži na paraboli.

Za svaku točku $T = \big(x, y\big)$ koja leži u I. i IV. kvadrantu, vrijedi sljedeće:

$$d(T,p) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad d(T,F) = x + \frac{p}{2} \tag{4}$$

Ako koordinate točke T zadovoljavaju jednadžbu 3, onda slijedi

$$d(T,p) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}. \tag{5}$$

Jednadžba 3 je jednadžba parabole koja se ujedno zove i **tjemena jednadžba parabole**.

3.1 Jednadžba translatirane parabole

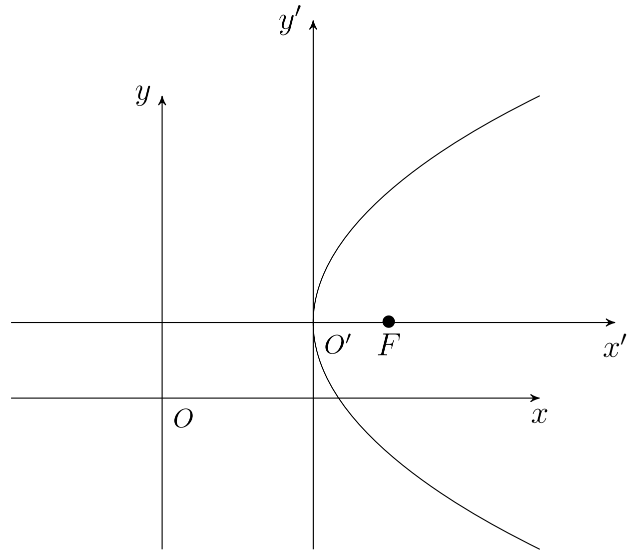
Translacijom koja ishodište O koordinatnog sustava preslikava u točku $O' = (a, b)$ parabola $y^2 = 2px$ preslikava se u parabolu

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \tag{6}$$

Fokus translatirane parabole nalazi se u točki $F = (\frac{p}{2} + a, b)$, tjeme u $O' = (a, b)$, direktrisa je pravac $x = a - \frac{p}{2}$, a os joj leži na pravcu $y - b = 0$ (Slika 1)

Translatacijom parabole $y^2 = -2px, p > 0$, koja je ishodište O koordinatnog sustava translatira u točku $O' = (a, b)$ dobije se parabola

$$(y - b)^2 = -2p(x - a).$$



Slika 1: Translatirana parabola

4 Tangenta parabole

Pravac, koji nije paralelan s osi parabole, zove se **tangenta parabole** ako s njome ima tično jednu zajedničku točku. Koordinate sjecišta pravca i parabole dobiju se kao rješenje sustava:

$$\begin{aligned} y &= kx + l \\ y^2 &= 2px. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednakosti prethodnog sustava u drugu, dobije se

$$k^2x^2 + 2\big(kl - p)x + l^2 = 0$$

Rješenja prethodne kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{p - kl \pm \sqrt{p(p - 2kl)}}{k^2} \tag{7}$$

Pravac dira parabolu ako sustav ima jedinstveno rješenje, tj. ako je $p(p - 2kl) = 0$. Kako je $p \neq 0$, slijedi

$$p = 2kl \tag{8}$$

Jednakost 8 zove se **uvjet dodira pravca i parabole**.

4.1 Jednadžba tangente u točki parabole

Ako je zadano njeno diralište $D = \big(x_1, y_1\big)$, moguće je pronaći jednadžbu parabole. U slučaju dodira iz 7 slijedi da je

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2},$$

a kako D leži i na tangenti, slijedi da je $y_1 = kx_1 + l$, pa uvrštavanjem prethodne jednakosti dobije se $y_1 = \frac{p}{k}$. Znači, k i l su rješenja sustava

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2}, \qquad\qquad y_1 = \frac{p}{k}$$

Kako je $y_1^2 = 2px_1$, iz prethodnog sustava slijedi

$$k = \frac{p}{y_1}, \qquad\qquad l = \frac{px_1}{y_1}$$

pa ako se to uvrsti u jednadžbu pravca $y = kx + l$, sređivanjem se dobije:

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{9}$$

Jednadžba 9 je **jednadžba tangente parabole** kojoj je diralište
$D = \big(x_1, y_1\big)$.

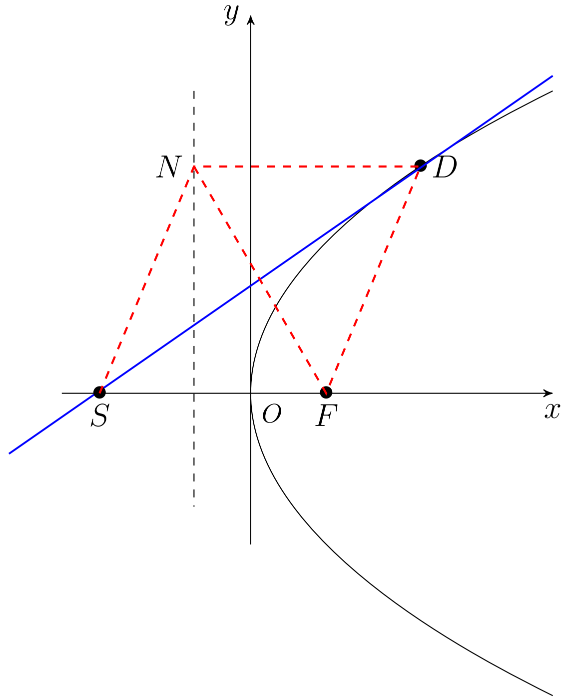
4.2 Zrcalno svojstvo parabole

Propozicija 1 (Zrcalno svojstvo parabole)**.** *Tangenta parabole je simetrala kuta radijvektora dirališta i paralele povučene diralištem s osi parabole.*

Dokaz. Neka je $D = \big(x_1, y_1\big)$ diralište tangente parabole $y^2 = 2px$ i $\overline{FD}$ radijvektor dirališta. Paralela s osi parabole u provučena kroz točku D siječe direktrisu u točki N. Točka S je sjecište tangente s osi x. Iz jednadžbe tangente slijedi da je $S = (-x_1, 0)$. Treba pokazati da je $|\angle FDS| = |\angle SDN|$ tj. da su trokuti $\triangle SFD$ i $\triangle SDN$ tj. sukladni. Po definiciji parabole je $|FD| = |DN|$. Nadalje, $N = \big(-\frac{p}{2}, \pm\sqrt{2px_1}\big)$ pa je

$$|SN| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = x_1 + \frac{p}{2},$$

a kako je $|SF| = x_1 + \frac{p}{2}$, slijedi da je $|SN| = |DN|$. Kako je $\overline{SD}$ zajednička stranica tih trokuta slijedi da se oni podudaraju u sve tri stanice, pa su sukladni, što povlači da je $|\angle FDS| = |\angle SDN|$. ■



Slika 2: Skica dokaza Propozicije 1 Zrcalno svojstvo parabole

4.3 Tangenta povučene iz točke izvan parabole

Točka T zove se **unutarnja točka parabole** ako svaki pravac kroz T siječe parabolu u dvije različite točke. Nadalje, skup svih unutarnjih točaka naziva se **nutrinom parabole**. Točka koja ne leži na parabole i nije unutarnja zove se **vanjska točka parabole**. Skup svih vanjskih točaka parabole zove se **vanjština parabole**.

Propozicija 2. *Točka $T = \left(x_0, y_0\right)$ unutarnja je točka parabole $y^2 = 2px$ ako i samo ako vrijedi ${y_0}^2 - 2px_0 < 0$, a vanjska ako je ${y_0}^2 - 2px_0 > 0$.*

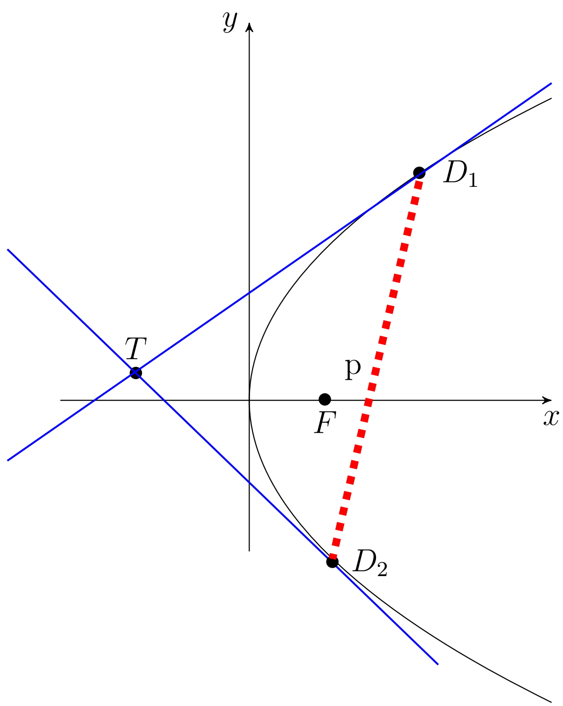
Propozicija 3. *Iz vanjske točke parabole, koja ne leži na tjemenoj tangenti, mogu se povući točno dvije tangente na parabolu. Iz točke na tjemenoj tangenti može se povući samo jedna tangenta na parabolu.*

4.4 Pol i polara parabole

Tangente povučene iz točke T na parabolu mogu se odrediti i pomoću polare. **Polara** točke $T = \big(x_0, y_0\big)$ s obzirom na parabolu $y^2 = 2px$ je pravac p zadan jednadžbom

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{10}$$

Točka T zove se **pol pravca** p.



Slika 3: Pol i polara parabole

Geometrijski gledano, značenje polare dano je sljedećom propozicijom.

Propozicija 4. *Polara one vanjske točke parabole, koja ne leži na tjemenoj tangenti, spojnica je diralište tangenata povučenih iz te točke na parabolu.*

Dokaz. Neka su $D_i = \big(x_i, y_i\big), i = 1, 2$ diralište tangenata povučenih iz točke $T = \big(x_0, y_0\big)$ na parabolu $y^2 = 2px$. Jednadžbe tangenata glase $yy_i = p\big(x + x_i\big), i = 1, 2$. Kako te tangente prolaze točkom T, slijedi da je $yy_i = p\big(x_0 + x_i\big), i = 1, 2$, a iz ovih jednadžbi se može zaključiti da dirališta $D_i, i = 1, 2$ leže na polari $yy_i = p\big(x - x_0\big), i = 1, 2$ točke T. ■

"Talent wins games, but teamwork and intelligence wins championships."

— Michael Jordan

5 Parabola i košarka

U današnje vrijeme košarkaši se smatraju superzvijezdama. Slobodna bacanja bitan su dio košarkaške utakmice te ponekad ona upravo odlučuju o pobjedniku.

Najbolji primjer je Shaquille O'Neal na slici 4, koji se smatra jednim od najboljih košarkaša u povijesti. Tijekom regularne sezone 2004./2005. njegov postotak šuta slobodnih bacanja bio je 53.1%, dok mu je za vrijeme playoff-a postotak pao na 43%.

Slika 4: Shaquille O'Neal

5.1 Košarkaške norme

⇒ Promjer košarkaške lopte $P_l = \left[24{,}25\right]$ cm, a mi ćemo uzeti da je 24.384 cm.

⇒ Promjer košarkaškog obruča P_o je 45.72 cm.

⇒ Udaljenost od linije bacanja pa do središta obruča iznosi 4.2672 m.

⇒ Slobodna bacanja šutamo nekoliko centimetara ispred linije slobodnih bacanja tako da ćemo za hoizontalnu udaljenost uzeti l =4.1257 m.

⇒ Visina obruča je na 3.05 m od poda.

⇒ U prosjeku visina koju lopta postigne jednaka je 1.25 m visine igrača. S obzirom da je Shaq visok 2.17 m, njegova lopta će dosegnuti visinu od 2.7 m. Prijeđenu vertikalnu udaljenost ćemo dobiti tako da izračunamo $h = 3.05 - 1.25 \cdot H$

5.2 Zanimljivost

Možemo izmodelirati kut izbacivanja za igrača određene visine, detaljnije o modeliranju može se pronaći u Diplomskom radu *Modeliranje slobodnih bacanja* [3].

Računanje ćemo provoditi za osobe visoke 1.72 m. Prvo ćemo odrediti u kojem se intervalu treba nalaziti početni kut kako se ne bi dobila rješenja koja su fizički nemoguća.

Podaci koje koristimo	
l	4.1275
h	$3.05 - 1.25 \cdot 1.72$
g	-9.81
Pl	0.24384
Po	0.4572
kut	50

Slika 5: Podaci

S obzirom na dane podatke u Matlab–u možemo vidjeti kako izgleda putanja lopte.

MATLAB kod 1: Putanja lopte igrača

```
v0=(l/cosd(kut))*sqrt(-g/2*(l*tand(kut)-h))
vx=v0*cosd(kut)
vy=v0*sind(kut)
```

```
T=(vy+sqrt(vx*vy+2*g*h))/(-g)
nt=500
t=linspace(0,T,nt)
x=vx*t
y=vy*t+g*t.*t/2
plot(x,y)
```

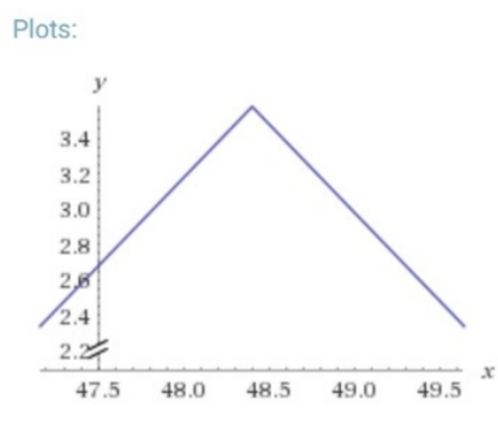
Nakon toga treba izračunati koliki su ϕ_{low} i ϕ_{high}.

MATLAB kod 2: Putanja lopte igrača nastavak

```
function f=funimin(n)
v0=(l/cosd(kut))*sqrt(-g/2*(l*tand(kut)-h))
t=(v0*sind(kut)+sqrt(v0*v0*sind(kut)*sind(kut)+2*g*h))/(-g)
f=(v0*cos(n)*t-(l-Po/2))^2+(v0*sin(n)+0.5*g*t^2-h)^2-(Pl/2)^2
end
x=fminbnd(@funmin, 44,50,optimset('TolX',le-8,'Display','iter'))

function f= funmax(n)
v0=(l/cosd(kut))*sqrt(-g/2*(l*tand(kut)-h))
t=(v0*sind(kut)+sqrt(v0*v0*sind(kut)*sind(kut)+2*g*h))/(-g)
f=((v0*cosd(n)/(-g))*(v0*sind(n)+sqrt(v0^2*sind(n)^2+2*g*h)))
+((Pl-P0)/2)-l
end
```

Dobili smo funkciju oblika $e(\phi_0) = \min\{51.98° - \phi_0, \phi_0 - 44.8254°\}$. Iz te funkcije slijedi da je najbolji početni kut $\phi_0 = 48.4027°$, a početna brzina $v_0 = 7.1110\,\mathrm{m/s}$



Slika 6: Kut bacanja

5.3 Vjerojatnost pogotka

Top 10 NBA šutera slobodnih udaraca		
Top	Ime igrača	Uspješnost
1.	Steve Nash	90.43%
2.	Mark Price	90.39%
3.	Stephen Curry	90.21%
4.	Peja Stojkovic	89.48%
5.	Chauncey Billups	89.40%
6.	Ray Allen	89.31%
7.	Rick Barry	89.31%
8.	Calvin Murphy	89.16%
9.	Scott Skiles	88.91%
10.	J. J. Redick	88.89%

Ako promatramo osobu koja uspješno pogađa slobodno bacanje u 88.91% kao Scott Skiles,

$$\mathbb{P}\big(X \in \{0,1\}\big) := \begin{cases} 0.8891, & \text{ako je } X = 1; \\ 0.1109, & \text{ako je } X = 0; \end{cases} \tag{11}$$

gdje X označava uspjeh pogađanja pa možemo probati izračunati kolika je vjerojatnost da će košarkaš pogoditi koš 8 za redom od 10 gađanja.

$$\mathbb{P}(X = 8) = \binom{3}{2}\Big(\mathbb{P}(X = 1)\Big)^8\Big(\mathbb{P}(X = 0)\Big)^2 = \tag{12}$$

$$= \binom{3}{2}\big(0.8891\big)^8\big(0.1109\big)^2 \tag{13}$$

$$= 3 \cdot 0.3905 \cdot 0.0123 = \tag{14}$$

$$= 0.0144 \tag{15}$$

U prethodnom računu iz rješenja(12) morali smo odabrati od 3 moguća mjesta jedno jer onda dalje može izvršiti 8 uzastopnih bacanja, a zatim ima 8 uspješnih šuteva pa vjerojatnost pogodtka ide na potenciju 8, a preostala su točno dva promašaja pa vjerojatnost promašaja ide na potenciju 2.

Sadržaj

Popis slika

Literatura

[1] B Apsen, *Repetitorij više matematike 1*, Tehnička knjiga, Zagreb 1990.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga

[3] Nikolina Mihić, *Modeliranje slobodnih bacanja*, Diplomski rad

[4] Parabola, Zadaća