Quantum NOT

Funzioni utili

$$\mathrm{kron}(A,B) := \left|\begin{array}{l} Nrows \leftarrow \mathrm{rows}(A)\cdot\mathrm{rows}(B) \\ Ncols \leftarrow \mathrm{cols}(A)\cdot\mathrm{cols}(B) \\ Y_{Nrows-1,\,Ncols-1} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..Nrows-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..Ncols-1 \\ \quad\quad Y_{i,j} \leftarrow A_{\mathrm{floor}\left(\frac{i}{\mathrm{rows}(B)}\right),\,\mathrm{floor}\left(\frac{j}{\mathrm{cols}(B)}\right)}\cdot B_{\mathrm{mod}(i,\,\mathrm{rows}(B)),\,\mathrm{mod}(j,\,\mathrm{cols}(B))} \\ Y \end{array}\right.$$

Definizione porta logica e qubit

$$NOT_{sqrt} := \begin{pmatrix} \frac{1+j}{2} & \frac{1-j}{2} \\ \frac{1-j}{2} & \frac{1+j}{2} \end{pmatrix} \qquad NOT := NOT_{sqrt}^{\;2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica che la matrice sia unitaria $\quad \left|NOT_{sqrt}\cdot\left(\overline{NOT_{sqrt}}\right)^{T}\right| = 1$

Rappresentazione dei clasici bit 0 e 1

$$ket_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ket_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multi-qubit

$$\mathrm{ketN}(V) := \left|\begin{array}{l} y \leftarrow \left|\begin{array}{ll} ket_0 & \text{if } V_0 = 0 \\ ket_1 & \text{otherwise} \end{array}\right. \\ \text{for } i \in 1..\mathrm{last}(V) \\ \quad y \leftarrow \left|\begin{array}{ll} \mathrm{kron}(y, ket_0) & \text{if } V_i = 0 \\ \mathrm{kron}(y, ket_1) & \text{otherwise} \end{array}\right. \\ y \end{array}\right.$$

$$\mathrm{ketN}\left[(1\ \ 1)^{T}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio di una sovrapposizione di stati del qubit

$$a \cdot ket_0 + b \cdot ket_1 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Tabella di verità

$$NOT_{sqrt} \cdot ket_0 = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.5i \\ 0.5 - 0.5i \end{pmatrix} \qquad NOT_{sqrt} \cdot ket_1 = \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5i \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$$

$$NOT \cdot ket_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad NOT \cdot ket_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Numero di qubit necessario

con m qubit di ingresso e k numero di porte logiche quantistiche

$$m := 1 \qquad k := 2$$

$$Nqubit = m + k + 1$$

$$Nqubit := m + k + 1 = 4$$

Che si dividono in qubit di risposta, che tengono conto dello stato che evolve e qubit di cursore che tengono conto del progresso della computazione

Esiste una correlazione tra i due insiemi di qubit, se il qubit del cursore è nella posizione finale significa che i qubit di risposta possono essere letti, la computazione è finita.

Per l'esecuzione 3 qubit verranno usati a scopo di cursore e l'ultimo a scopo di risposta

E' necessario usare un operatore che lovara su tutti e 4 i qubit contemporaneamente,
la radice di NOT precedentemente definita, tuttavia, lavorava su un solo qubit alla volta.

Si procede facendo il prodotto di Kronecker tra nqubit-1 matrici identiche e la porta logica desiderata

$$NOT_{sqrt.4.4} := \left| \begin{array}{l} y \leftarrow identity(2) \\ \text{for } \; i \in 1 .. Nqubit - 2 \\ \quad y \leftarrow kron(y, identity(2)) \\ kron\left(y, NOT_{sqrt}\right) \end{array} \right.$$

$NOT_{sqrt.4.4} =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	).5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0	0	0	0	0
1	0.5-0.5i	).5+0.5i	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	).5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0	0	0
3	0	0	0.5-0.5i	).5+0.5i	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	).5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0
5	0	0	0	0	0.5-0.5i	).5+0.5i	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	).5+0.5i	0.5-0.5i	0
7	0	0	0	0	0	0	0.5-0.5i	).5+0.5i	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	).5+0.5i
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5-0.5i
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Verifica su un qubit:

$$NOT_{sqrt.4.4}{}^{2}\cdot ketN\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{T}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$ketN\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{T}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

L'evoluzione è possibile simulando l'equazione di Schroedinger

$$j \cdot h \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathrm{ket}(\Psi(t) \right) = H \cdot \mathrm{ket}(\Psi(t))$$

con $h := \frac{6.62607015 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot \pi}$

$$H = \frac{h^2}{2m} \cdot \left(\nabla^2 \right)_{\blacksquare} - V(r)$$ operatore Hamiltoniano

Perchè il sistema quantistico si comporti da circuito è necessario che l'Hamiltoniano sia tale da avere uno stato iniziale del registro $\mathrm{ket}(\Psi(0))$ che permetta di fare evolvere il registro in modo tale da emulare un circuito

La soluzione dell'equazione di Shroedinger può essere scritta come

$$\mathrm{ket}(\Psi(t)) = e^{-j \cdot \frac{H \cdot t}{h}} \cdot \mathrm{ket}(\Psi(0)) = U(t) \cdot \mathrm{ket}(\Psi(0))$$

Da cui si nota come a partire dallo stato iniziale l'evoluzione dipende dall'operatore

$$U(t) = e^{-j \cdot \frac{H \cdot t}{h}}$$

Se $\mathrm{ket}(\Psi(0))$ rappresenta l'ingresso del circuito è possibile ottenere la sua evoluzione tramite $U(t)$

L'obiettivo è trovare un operatore hemiltoniano H tale che $e^{-j \cdot \frac{H \cdot t}{h}}$ sia una matrice unitaria e tale che $U(t)$ mimi il circuito desiderato.
Siccome si vuole che i cursori funzionino come precedentemente descritto si dimostra [Feynman] che che l'Hamiltoniano è ricavabile come la somma dei prodotti scalari degli operatori di creazione e annichilimento con l' operatore di ogni gate (aumentato al numero di qubit) e l'hermitiano coniugato.

Chimando M_k il gate k-esimo aumentato, si definisce MM il prodotto scalare di tutti i gate

$$MM = \prod_{k=N-1}^{0} M_k$$ con abuso di notazione

Nel caso del NOT si ha

$$M := \left(NOT_{sqrt.4.4} \quad NOT_{sqrt.4.4} \right)^T$$

$$MM := NOT_{sqrt.4.4} \cdot NOT_{sqrt.4.4}$$

Gli operatori di creazione e annichilimento si usano per muovere i cursori avanti e indietro tra i siti (gli "stati") del sistema in evoluzione

$$c_{i+1} \cdot a_i M_{i+1}$$

dove c è l'opreatore di creazione e a di annichilimento

<u>Operatore di creazione e annichilimento</u>

$$c := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a := c^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'operatore c agisce sullo stato di un singolo spin, e converto uno stato da 0 a 1, l'opeatore a è l'inverso (sullo stesso singolo stato)

E' possibile adattare gli operatori in modo che operino sull'i-esimo qubit, per farlo si fa il prodotto di Kronecker tra N matrici, tutte identiche salvo la i-esima che si pone uguale all'operatore di interesse

Ad esemipio nel caso in esame se si volesse creare l'opeatore di creazione per il secondo qubit (c_1) sarebbe possibile calcolarlo come: Id ⊗ c ⊗ Id ⊗ Id

```
C(k) := | y ← | c   if k = 0
        |     | identity(2)   otherwise
        | for i ∈ 1 .. Nqubit − 1
        |   y ← | kron(y, c)   if k = i
        |       | kron(y, identity(2))   otherwise
        | y
```

```
A(k) := | y ← | a   if k = 0
        |     | identity(2)   otherwise
        | for i ∈ 1 .. Nqubit − 1
        |   y ← | kron(y, a)   if k = i
        |       | kron(y, identity(2))   otherwise
        | y
```

E' ora possibile calcolare l'operatore Hemiltoniano

$$H := \sum_{i=0}^{k-1} \left[C(i+1) \cdot A(i) \cdot M_i + \left[\overline{\left(C(i+1) \cdot A(i) \cdot M_i \right)} \right]^T \right]$$

H =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0.5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0.5-0.5i	0.5+0.5i	0	0	0	0	0
4	0	0	0.5-0.5i	0.5+0.5i	0	0	0	0	0.5+0.5i	0.5-0.5i	0
5	0	0	0.5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0	0	0.5-0.5i	0.5+0.5i	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5+0.5i
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5-0.5i
8	0	0	0	0	0.5-0.5i	0.5+0.5i	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0.5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0.5-0.5i	0.5+0.5i	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0.5+0.5i	0.5-0.5i	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5-0.5i
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5+0.5i
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Operatore di evoluzione

E' ora possibile calcoalre $U(t)$, tramite l'esponenziale di matrice

$$\mathrm{expm}(X) := \left| \begin{array}{l} v \leftarrow \mathrm{eigenvals}(X) \\ M \leftarrow \mathrm{eigenvecs}(X) \\ v \leftarrow \overrightarrow{e^{v}} \\ M \cdot \mathrm{diag}(v) \cdot M^{-1} \end{array} \right.$$

Il calcolo verrà ora eseguito con un fattore di scala diverso, trascurando la costante di Plank ridotta, in modo da non incomnere in errori numerici, questo si traduce nel riscalare l'asse del tempo tale che un secondo nel riferimento riscalato equivalga a una costante di Plank ridotta secondi.

$U(t) := \operatorname{expm}(-j \cdot H \cdot t)$

$U(1) =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0.578	0	.349-0.349i	.349-0.349i	0	0
3	0	0	0	0.578	.349-0.349i	.349-0.349i	0	0
4	0	0	.349-0.349i	.349-0.349i	0.156	0	0	0
5	0	0	.349-0.349i	.349-0.349i	0	0.156	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0.578	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0.578
8	0	0	0	-0.422	.349-0.349i	.349-0.349i	0	0
9	0	0	-0.422	0	.349-0.349i	.349-0.349i	0	0
10	0	0	0	0	0	0	.349-0.349i	.349-0.349i
11	0	0	0	0	0	0	.349-0.349i	.349-0.349i
12	0	0	0	0	0	0	0	-0.422
13	0	0	0	0	0	0	-0.422	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	...

Evoluzione per un tempo fisso

Avendo $U(t)$ è ora possibile calcolare l'evoluzione dei registri al tempo t, mediante

$$\operatorname{ket}(\Psi(t)) = U(t) \cdot \operatorname{ket}(\Psi(0))$$

Lo stato iniziale dell'evoluzione $\operatorname{ket}(\Psi(0))$ definisce lo stato iniziale dei qubit. Per quanto riguarda i qubit di cursore si settano tutti a $\operatorname{ket}(0)$ eccetto il primo che si setta a $\operatorname{ket}(1)$. Lo stato degli ingressi, (dell'ingresso in questo caso) può essere una sovrapposizione qualsiasi degli m qubit di ingresso. In questo caso il qubit di ingresso è unico, per cui potrà essere inzializzato solamente a $\operatorname{ket}(0)$ o a $\operatorname{ket}(1)$.

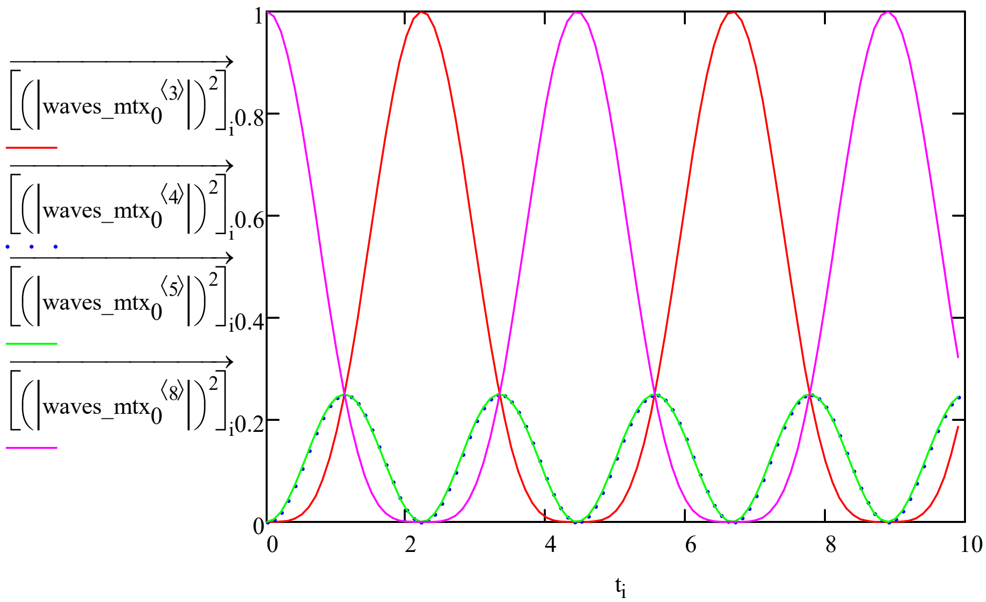
Per cui a seconda che l'ingresso sia $\operatorname{ket}(0)$ o $\operatorname{ket}(1)$ si può definire lo stato iniziale come

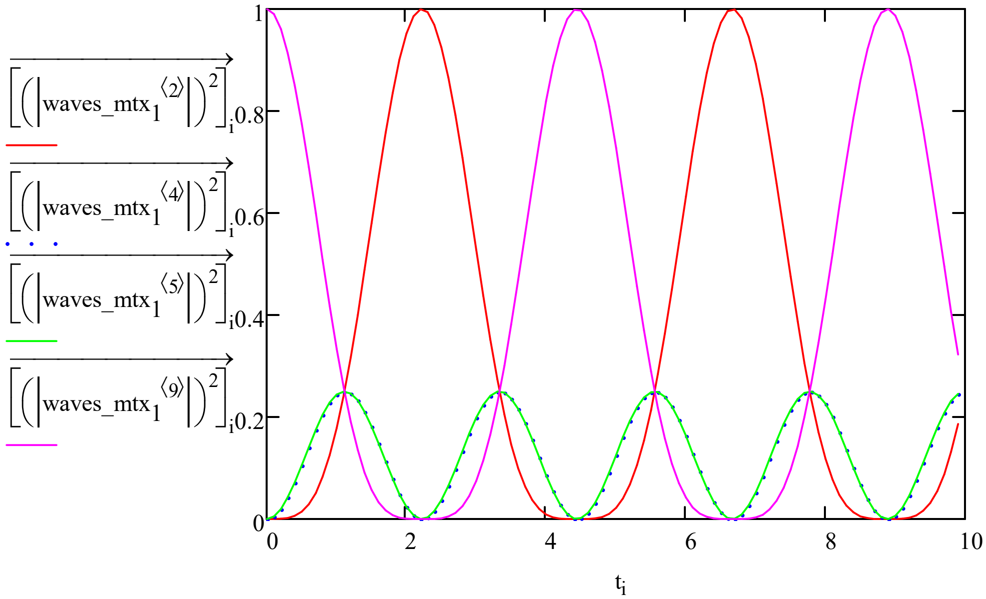
$$\Psi 0_0 := \mathrm{ketN}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \Psi 0_1 := \mathrm{ketN}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$i := 0..99 \qquad dt := 0.1 \qquad t_i := i\cdot dt \qquad j := 0..\mathrm{last}(\Psi 0_0)$

$\mathrm{Wave}_0(t) := U(t)\cdot\Psi 0_0 \qquad \mathrm{waves\_mtx0}_{i,j} := \mathrm{Wave}_0(t_i)_j$

$\mathrm{Wave}_1(t) := U(t)\cdot\Psi 0_1 \qquad \mathrm{waves\_mtx1}_{i,j} := \mathrm{Wave}_1(t_i)_j$





Si nota che in entrambi i casi le curve rosse (evoluzione dello stato iniziale) e le curve viola (evoluzione dello stato finale) sono sfasate di $180°$ il che giustifica l'operazione NOT che è eseguita dalla ipotetica macchina quantistica.
Si nota inoltre come l'evoluzione dei cursori (curva verde) permetta di comprendere il momento adatto in cui effettuare la misura.