Funzione

Una funzione f è una relazione tra gli insieme di A e B, che sono rispettivamente dominio e codominio, tale che la legge f verifica che:

> per ogni a appartenente all'insieme A, esiste una sola b appartenente all'insieme B tale che $b = f(a)$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b$$

L'immagine

La funzione immagine prende un sottoinsieme di A e ne restituisce il sottoinsieme corrispondente di B, quindi l'insieme delle parti di A fa riferimento all'insieme delle parti di B ($f : P(A) \to P(B)$) e viene definita in questa maniera:

$$f(E) := f(a)|a \in E$$

dove E è un qualsiasi sottinsieme di A, ed $f(E)$ è il sottinsieme di B che contiene tutte le immagini degl'elementi di E.

L'insieme immagine

Se prendiamo tutto l'insieme di A e lo mettiamo in E (invece che solo un sottoinsieme), l'immagine di A sotto la funzione f prende il nome di immagine di f:

$$imf := f(A)$$

questo forma il sottoinsieme di B formato da tutte le immagini degl'elementi A
quindi l'insieme immagine si trova all'interno del Coodominio

Controimmagine

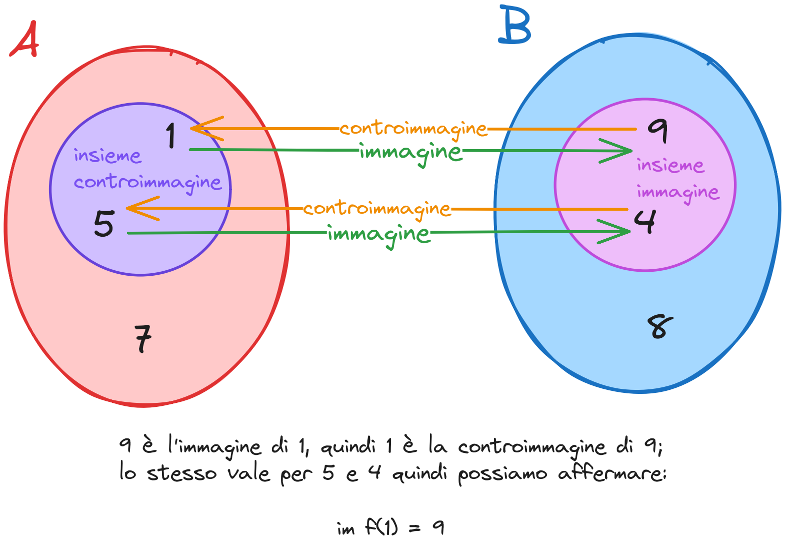
La funzione controimmagine, al contrario della funzione immagine va a restituire gli elementi dell'insieme A associati all'elemento dell'insieme B sul quale viene applicata la funzione immagine, quindi l'insieme delle parti di B fa riferimento all'insieme delle parti di A ($f : P(B) \to P(A)$), e si definisce:

$$f^{-1}(F) := a \in A|f(a \in F)$$

L'insieme controimmagine

quindi l'insieme delle controimmagini presenti nel dominio formano l'insieme controimmagine

spiegazione grafica:



Grafico

Il grafico di una funzione $G(f)$ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano tra il dominio ed il codominio AXB (ovvero tutte le coppie possibili tra A e B) e viene definito cosi:

> il $G(f)$ è uguale all'insieme di coppie a e b ristretto alle a appartenenti ad A, ed alle b appartenenti a B, dove $f(a) = b$

$$G(f) = (a, b)|a \in A, b \in B, f(a) = b$$

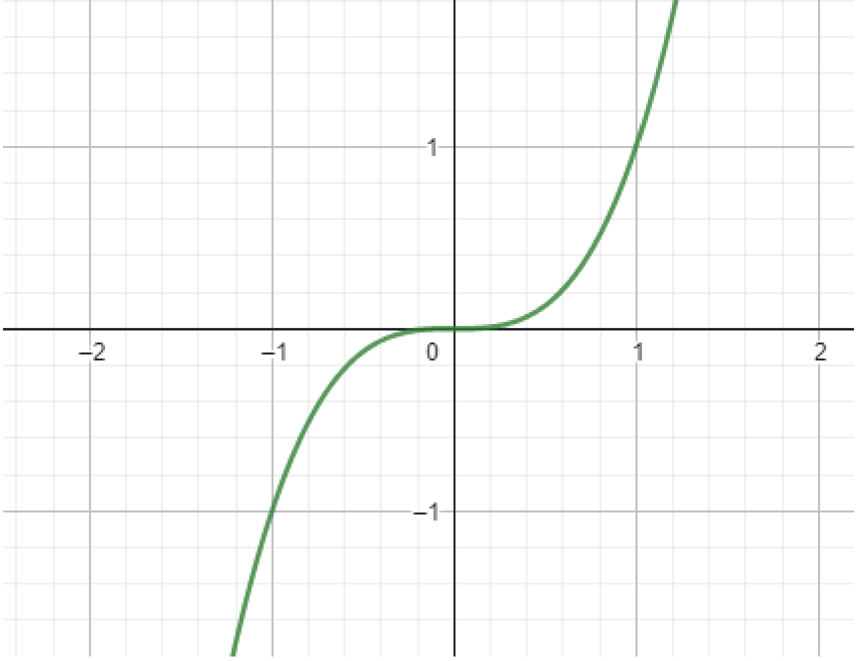
Iniettiva

Una funzione si dice iniettiva quando nessuna delle ordinate si incorcia con più di un punto della funzione.

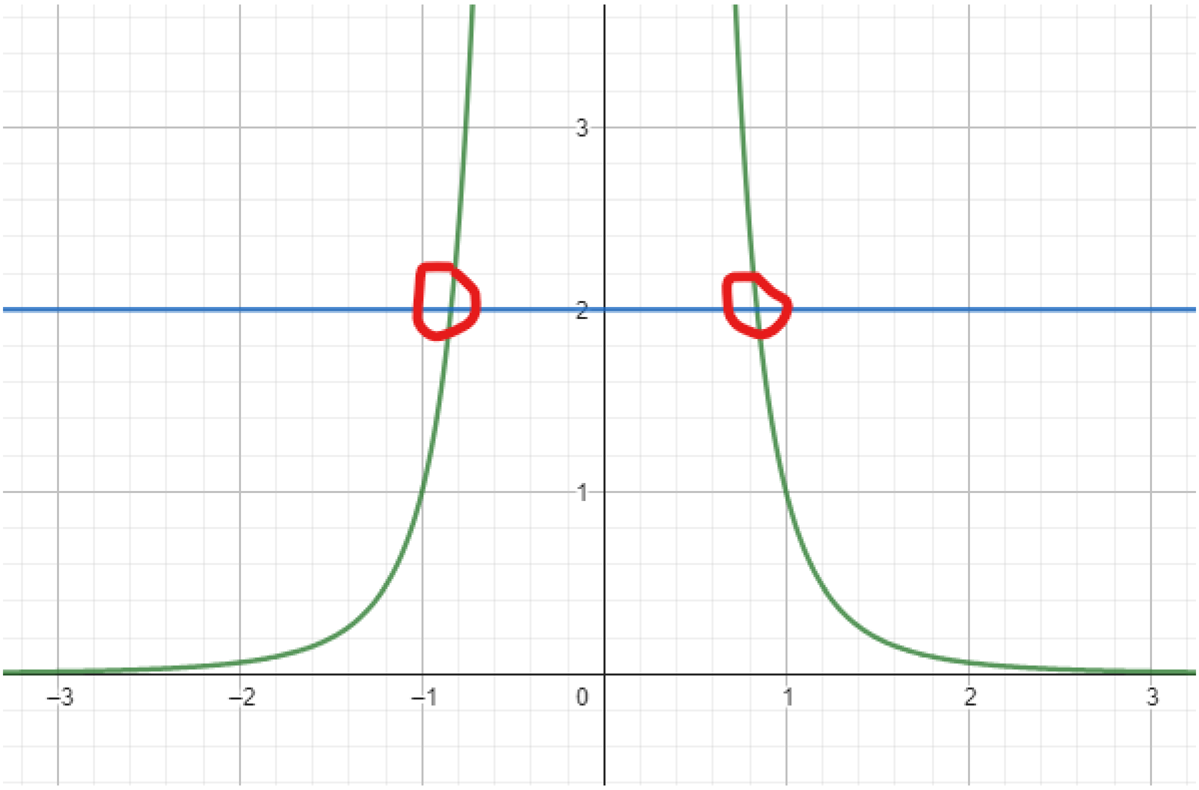
> Quindi $f : A \rightarrow B$ si dice iniettiva se per ogni $a1, a2$ appartenente all' insieme A, a_1 è diverso da a_2 come $f(a_1)$ è diverso da $f(a_2)$

$$\forall a_1, a_2 \in A, [a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$$

Iniettiva

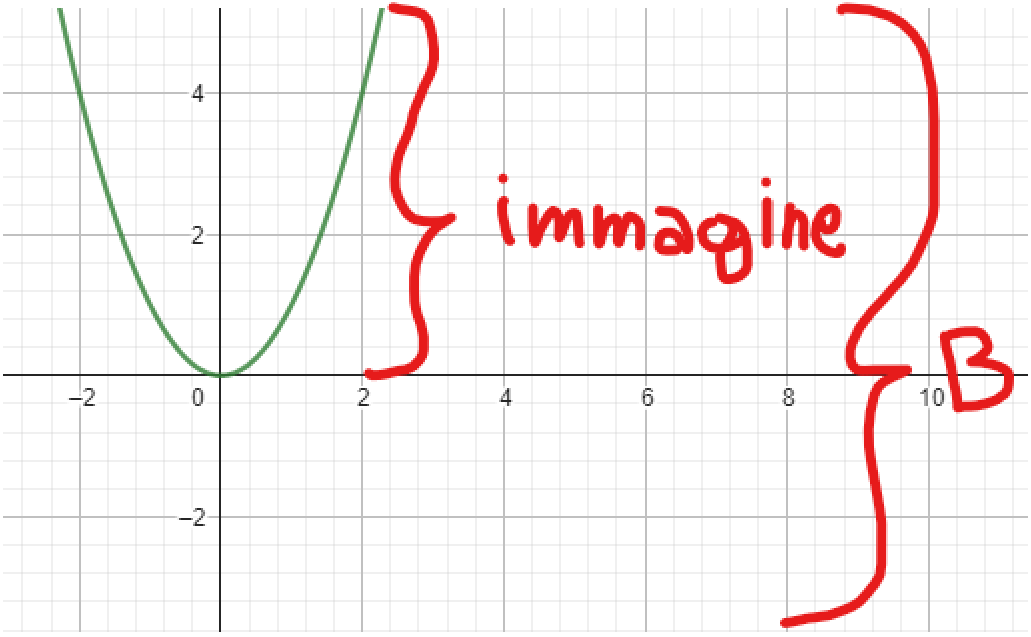


non iniettiva



Suriettiva

Una funzione si dice suriettiva quando l'immagine della funzione corrisponde al codominio B; quindi per ogni valore y del codominio vi è un valore x corrispondente della funzione.



> quindi $f : A \to B$ si dice suriettiva se per ogni b appartenente a B, esiste almeno un' a appartenente ad A tale che $f(a) = b$

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Biettiva / Biunivoca

Una funzione si dice biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva

> per ogni y presente nel codominio (uguale all'immagine della funzione), è presente una sola x corrispondente tale che f(x) = y

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$$

se la funzione è biunivoca possiamo ricavarne l'inversa $f^{-1}(b) = a$ rappresentando la funzione inversa:

$$f^{-1} : B \to A, f^{-1}(b) = a \implies f(a) = b$$

Funzioni composte

Un funzione composta sostanzialmente è la composizione, indicata dal simbolo $\circ$, per esempio avendo le due funzioni:

- $A \to f(a) \to B$ dove la funzione f, passa dall'insieme A all'insieme B
- $B \to g(b) \to C$ dove la funzione g, passa dall'insieme B all'insieme C
  possiamo creare una funzione composta $g \circ f$, che implicherà un passaggio dall'insieme A all'insieme C:

$$g \circ f : A \to G \implies (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Proprietà

- se sia f che g sono iniettive, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà iniettiva:

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2), g(a_1) \neq g(a_2) \implies (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$$

- se sia f che g sono suriettive, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà suriettiva:

$$\forall c \in C, \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$$

- se sia f che g sono biunivoche, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà biunivoca

Composizione inversa

allo stesso modo della composizione $g \circ f$ che ci fa passare dall'insieme A all'insieme C, esistono le composizioni inverse che ci fanno ritornare all'insieme di partenza:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Funzioni reali monotone

Una funzione monotona è una funzione con andamento, crescente o decrescente, che non cambia mai; in una funzione monotona crescente infatti non può esserci nemmeno un punto in cui la funzione decresca e viceversa, in sostanza le due leggi per una funzione monotona sono:

- crescente: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$
- decrescente:$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$

bisogna anche fare una distinzione tra funzioni monotone strettamente cresc/decresc, e funzioni monotone debolmente cresc/ decresc:

- le funzioni strettamente monotone non hanno segmenti della funzione in cui la loro variazione può essere pari a 0, e quindi x_1 sarà sempre o maggiore o minore di x_2 ; la legge in particolare di queste è

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$$

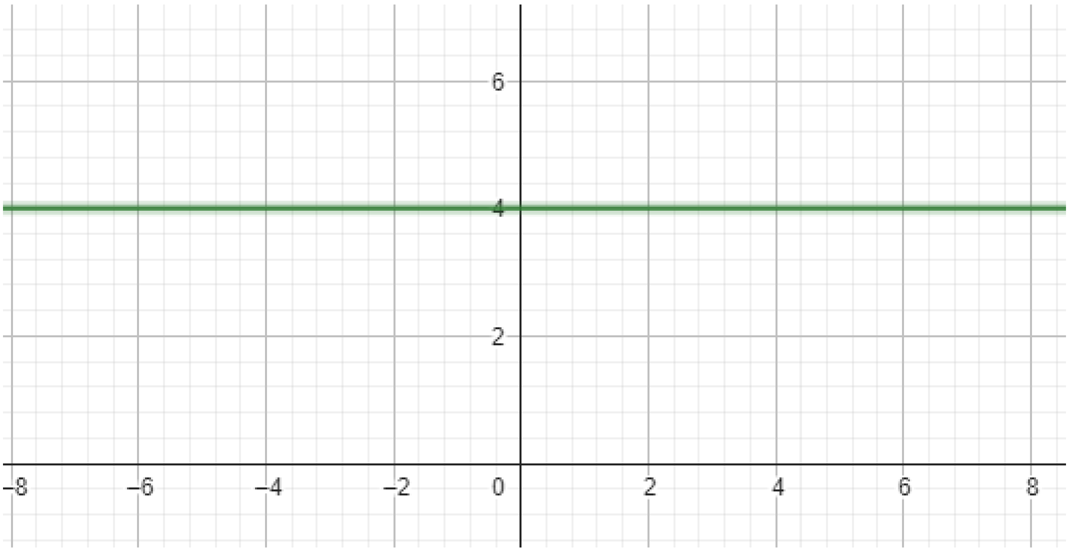
- le funzioni debolmente monotone invece hanno punti della funzione in cui rimangono invariate e quindi è possibile la condizione $x_1 = x_2$; di conseguenza le leggi saranno:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \leq x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \geq x_2$$

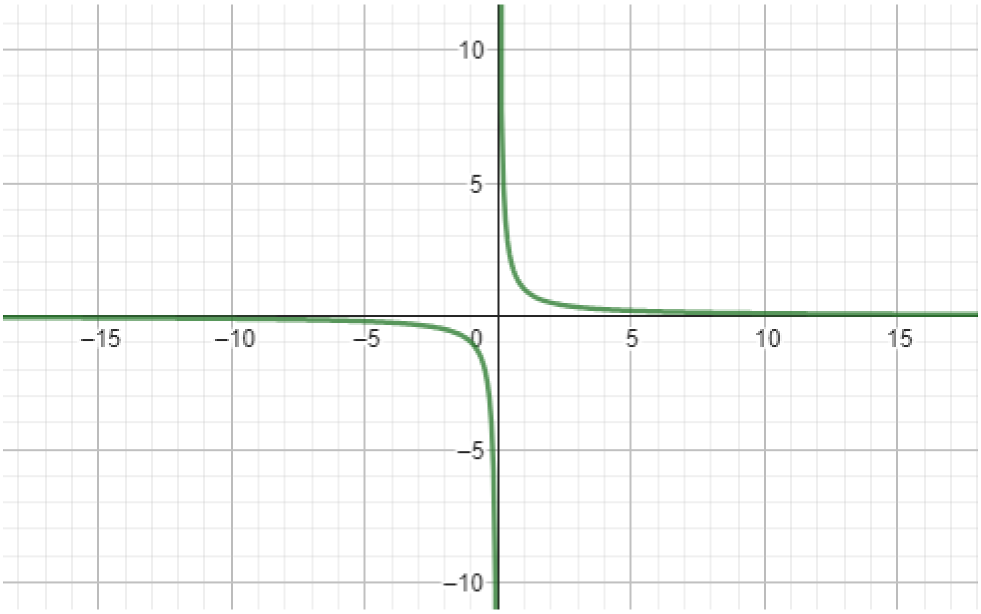
caso particolare

ovviamente una funzione come detto prima non può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente, ma al contrario può essere debolmente crescente e debolmente decrescente contemporaneamente; ciò accade quando una funzione non subisce alcuna variazione (costanti) rispettando entrambe le leggi delle funzioni debolmente monotone, come per esempio:



strettamente monotone & iniettivita

una funzione strettamente monotona, quindi strettamente crescente o decrescente sarà sempre iniettiva; in quanto ne rispetta la legge; al contrario, non tutte le funzioni iniettive sono strettamente monotone, per esempio:

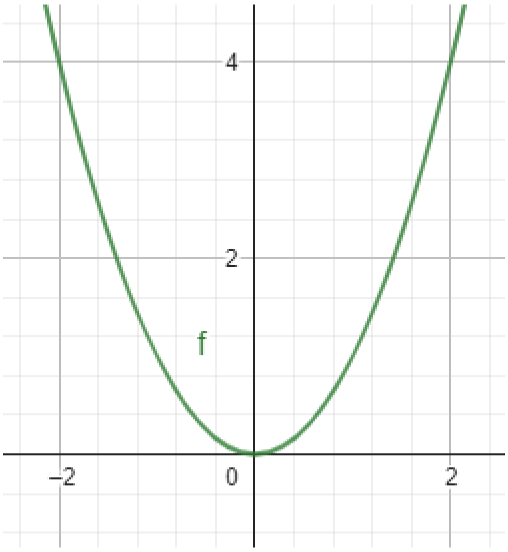


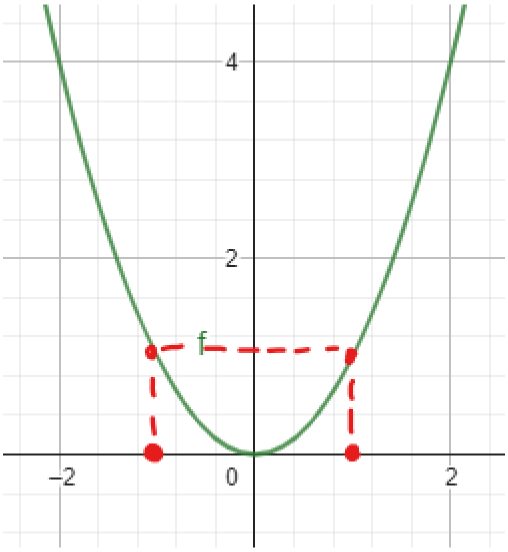
la funzione è iniettiva in quanto nessuna y incontra più di una x della funzione, ma allo stesso tempo non è strettamente monotona in quanto non mantiene un andamento crescente o decrescente, bensì si alterna.

Funzioni simmetriche

le funzioni simmetriche sono coloro che si specchiano sul grafico e si dividono in due gruppi:

- **pari**: ovvero quelle che si specchiano sull'asse delle ordinate

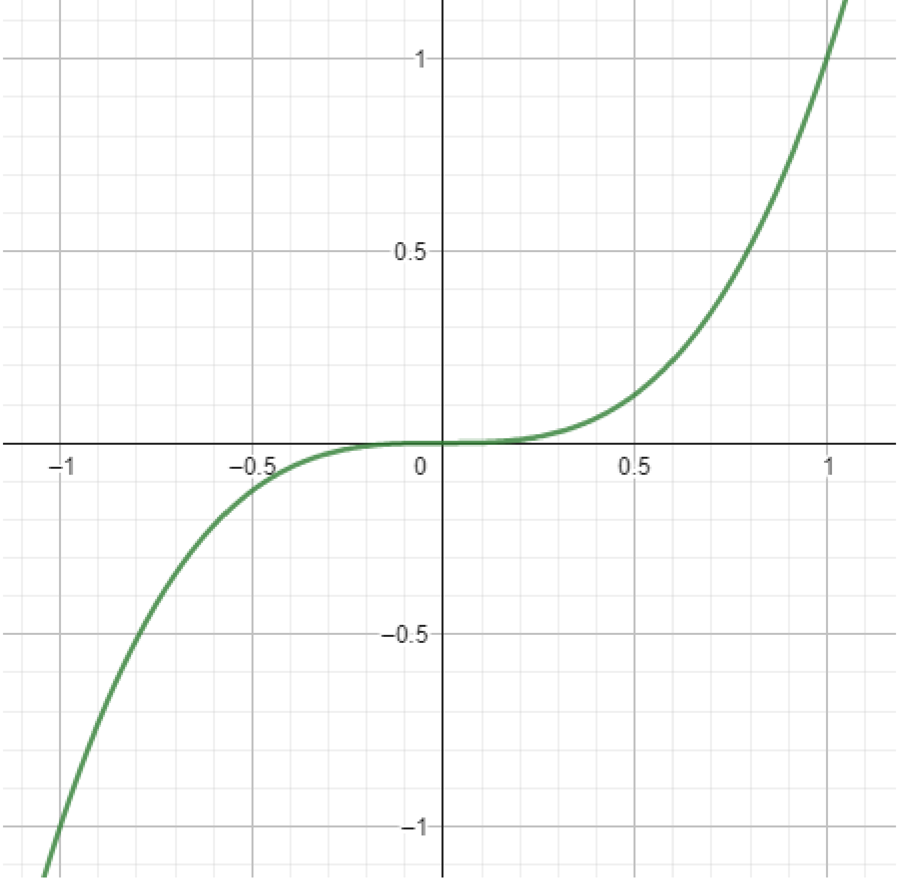


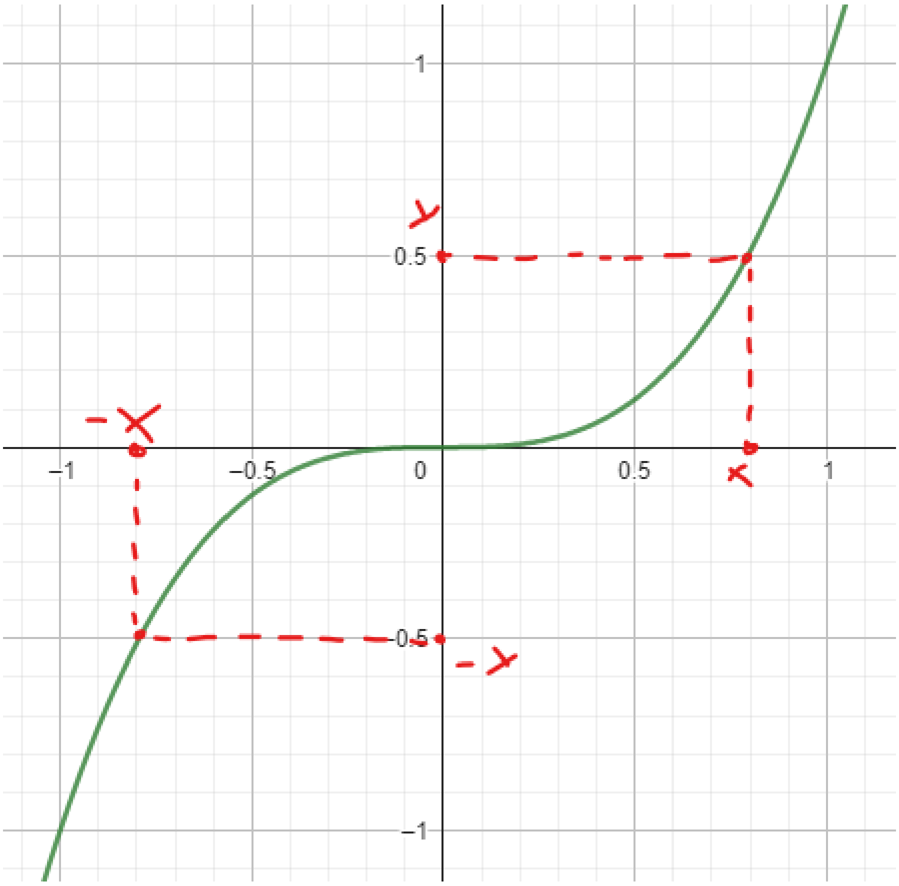


nelle funzioni pari in particolare vediamo come sia ad x che al suo opposto corrisponde la stessa y, quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(x) = f(-x)$$

- **dispari**: ovvero quelle che si specchiano sull'origine





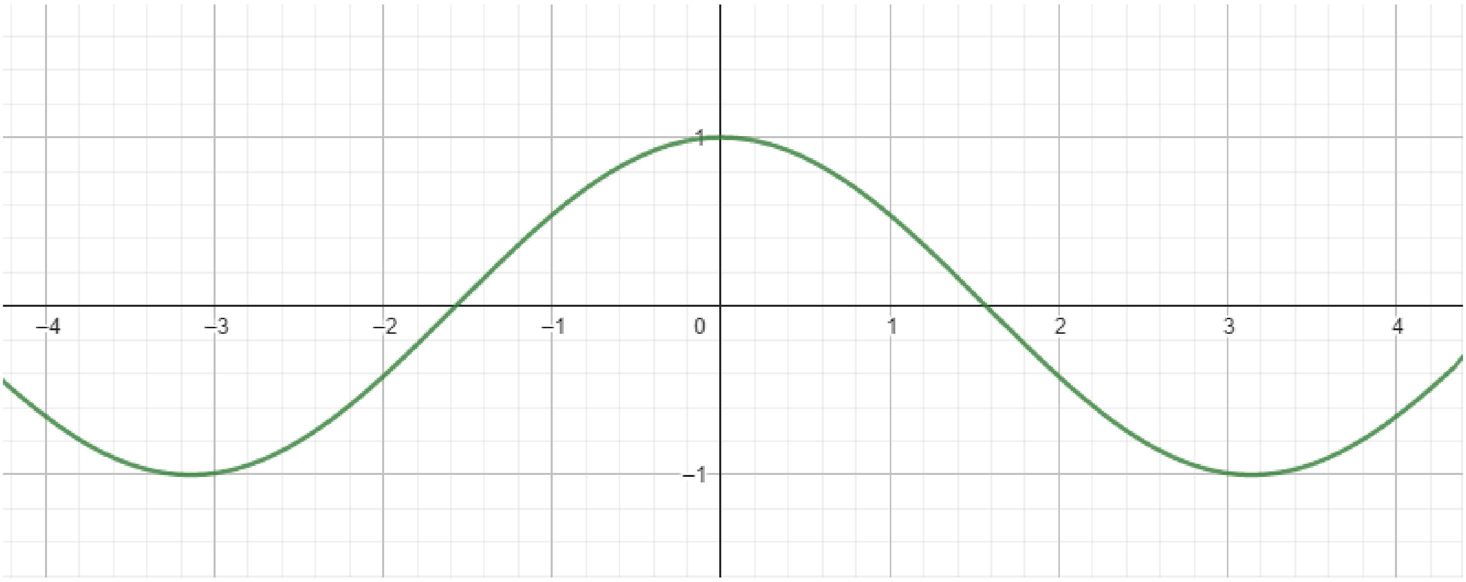
qua vediamo come ad x corrisponda una y che è esattamente l'opposto della y che corrisponde all'opposto di x, quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$$

cos & sin

di conseguenza seguendo questi ultimi ragionamenti e leggi troveremo come i, coseno è pari, mentre il seno è dispari:

cos(x)



sin(x)