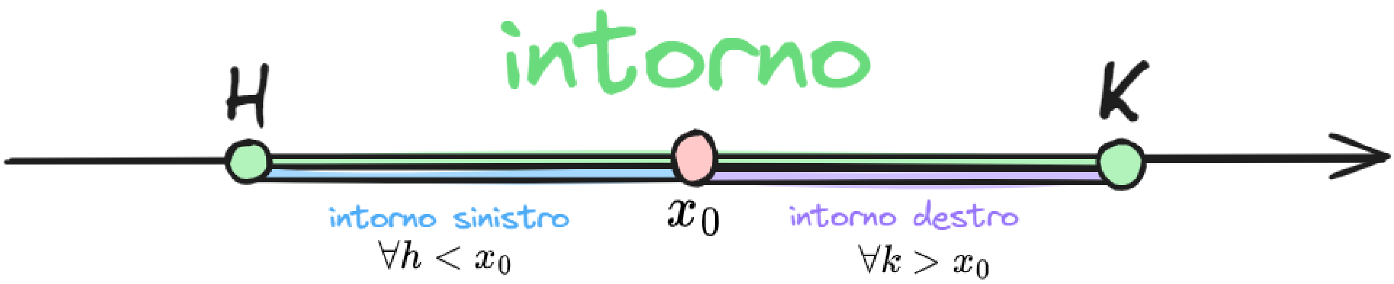
Successioni

Nozione di intorno

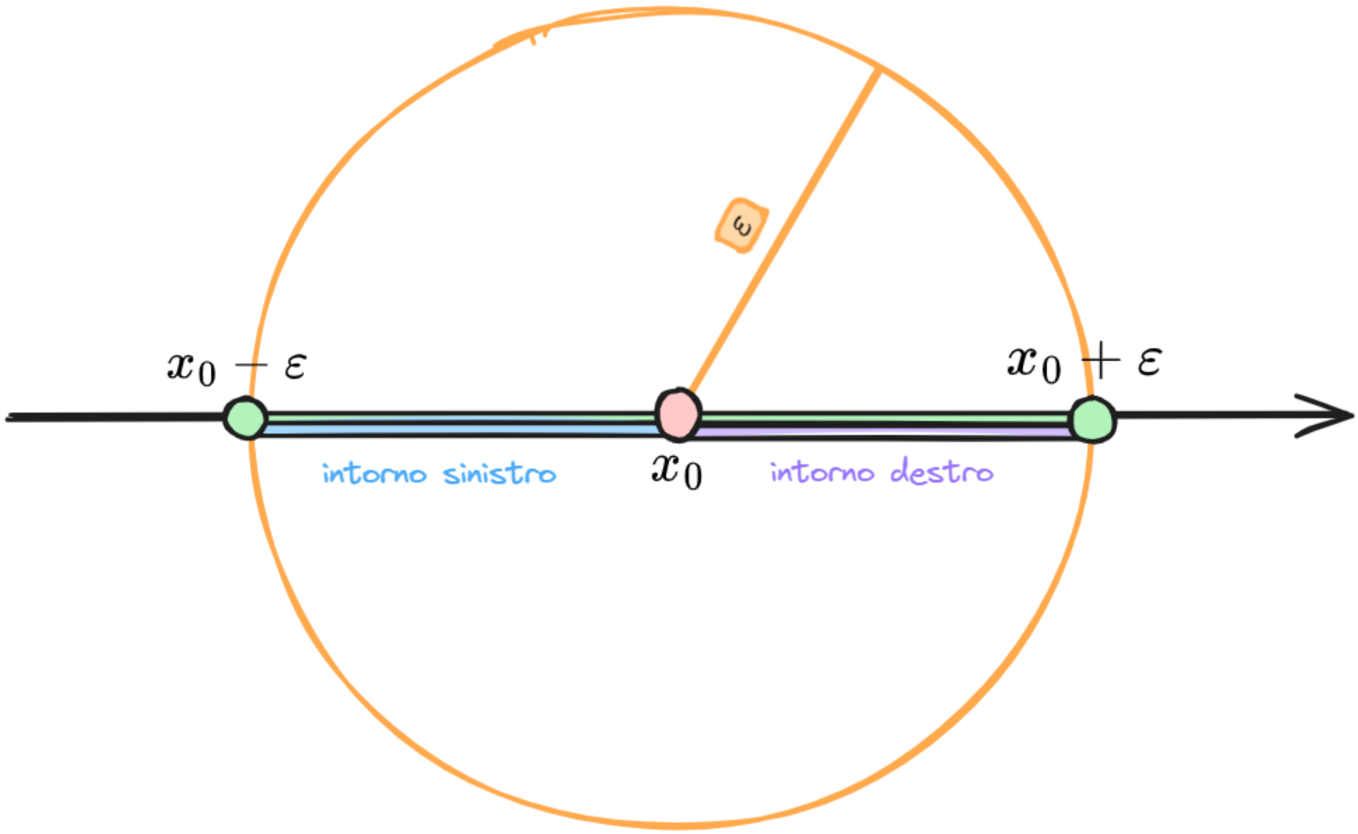
L'intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo $]H, K[$ che contiene x_0, tale che $H < x_0 < K$; l'insieme degl'intorni di x_0 viene denotata con il simbolo $\mathbb{I}_{x_0}$; il concetto di intorno va cosi a formalizzare l'idea di "vicino ad n".
Ora si possono anche definire le nozioni di intorno destro e sinistro:

- si dice intorno sinistro di x_0 qualunque numero $h \in \mathbb{R} : h < x_0$
- si dice intorno destro di x_0 qualunque numero $k \in \mathbb{R}\mathbf{k} > x_0$



Proprietà degl'intorni

- punti distinti hanno intorni distinti: $\forall x_0, x_1 \in \overline{R}, \exists V_0 \in I_0, V_1 \in I_1 : V_0 \cap V_1 = \varnothing$
- fissato x_0, se $V_0 \in I_0, V_1 \in I_0 \to V_0 \cap V_1 \in I_0$
- se $x_0 \in R, I_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ e $I_{x_0}, V\varepsilon > 0$ allora vuol dire che intorno ad x_0 ci sono intervalli di raggio ε



Successioni

Si dice successione una qualsiasi funzione f definita su una semiretta $S := \{n \in N \mid n \geq n_0\}, n_0 \in N$; se il suo codominio è un insieme A si parla di successione di elementi di A; per una successione $f : S \to A$ si usa la notazione $\{a_n\}_n$ dove $a_n \in A$ viene ricavata dalla funzione $n \to f(n) = a$

proprietà di monotonia

Una successione si può definire monotona se i valori presenti in essa seguono sempre la stessa direzione crescente o decrescente; quindi avendo la successione $\{a_n\}_n$ è crescente per ogni $n, m \in N : n < m \implies a_n \leq a_m$; di conseguenza una successione di numeri reali risulta:

- crescente se $\forall n, a_n \leq a_{n+1}$
- strettamente crescente se $\forall n, a_n < a_{n+1}$
- decrescente se $\forall n, a_n \geq <_{n+1}$
- strettamente decrescente se $\forall n, a_n > a_{n+1}$

Estremi di successioni

Riscrivendo la nozione di estremi di funzioni per le successioni, deduciamo che l'estremo superiore e inferiore di una successione $\{sup_n a_n \text{ e } inf_n a_n\}$ sono i due estremi dell'insieme $a_n \mid n \in S$, lo stesso vale per il $max_n a_n$ ed il $min_n a_n$; di conseguenza possiamo dividere le successioni in:

1. limitate
    - superiormente: $\exists M \in R : a_n \leq M$, ciò vuol dire che $\forall n, an \leq sup_n a_n$ e $\forall \xi > 0, \exists \overline{n} : a_{\overline{n}} > sup_n a_n - \xi$
    - inferiormente: $\exists M \in R : a_n \geq M$, ciò vuol dire che $\forall n, an \geq inf_n a_n$ e $\forall \xi > 0, \exists \overline{n} : a_{\overline{n}} < inf_n a_n - \xi$
    - sia superiormente che inferiormente: $\exists \tilde{M} \in R : \forall n, \mid a_{\overline{n}} \mid \leq \tilde{M}$

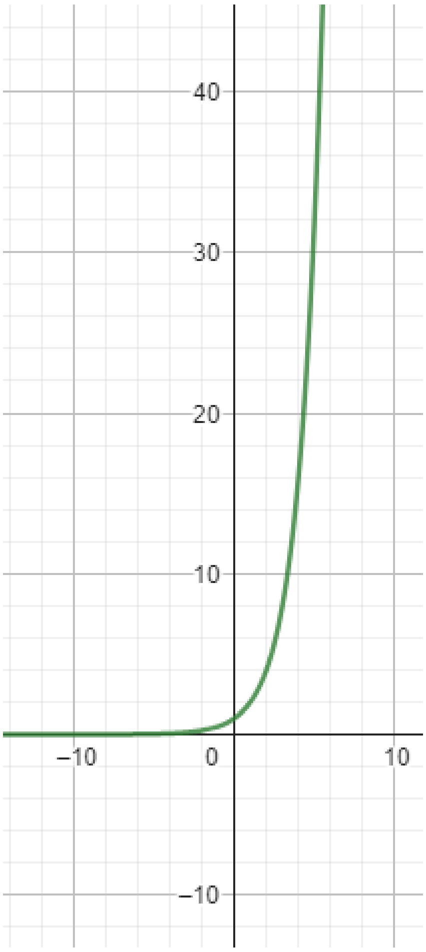
2. non limitata
    - superiormente: $\forall M \in R, \exists \overline{n} : a_{\overline{n}} > M$ da cui ricaviamo che $sup_n a_n = +\infty$
    - inferiormente: $\forall m \in R, \exists \overline{n} : a_{\overline{n}} < m$ da cui ricaviamo che $inf_n a_n = -\infty$

Limite di successioni

una successione ha limite $l \in \overline{R}$ per a_n che tende ad l, se risulta:

$$\forall V \in I_l, \exists \overline{n} \in N : \forall n \geq \overline{n}, a_n \in V$$

in altre parole: a partire da un certo punto $\overline{n}$, tutti i termini successivi della successione si trovano dentro un qualsiasi intorno del limite, cioè sono sempre più vicini al valore di limite man mano che la successione progredisce.
Per esempio avendo la successione $a_n = 2^n$ vediamo come man mano che la n cresce i valori della successione tendono(divergono) a $+\infty$:



ma esistono anche successioni senza limite, infatti se una successione ha un limite quest'ultimo deve essere unico; per esempio la successione $a_n = -1^n$ non ha limite, in quanto in base alla n, la successione tende a $+1$ e a -1

Convergenza e divergenza

una successione diverge quando tende all'infinito (sia positivamente che negativamente); mentre si dice che converge quando tende ad un limite l definito, seguendo le seguenti regole:

- una successione diverge a $+\infty$ se per ogni M reale esiste un $\overline{n}$ tale che $n \geq \overline{n}$ e che $a_n > M$:

$$\forall M \in R, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, a_n > M$$

- una successione diverge a $-\infty$ se per ogni N reale esiste un $\overline{n}$ tale che $n \geq \overline{n}$ e che $a_n < N$:

$$\forall N \in R, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, a_n < N$$

- una successione converge ad un limite l se per ogni H, K (estremi dell'intorno) reali tali che $H < l < K$ esista un $\overline{n}$ tale che per ogni $n \leq \overline{n}$ e che $H < a_n < K$:

$$\forall H, K \in R : H < l < K, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, H < a_n < K$$

- una successione può essere equivalente se

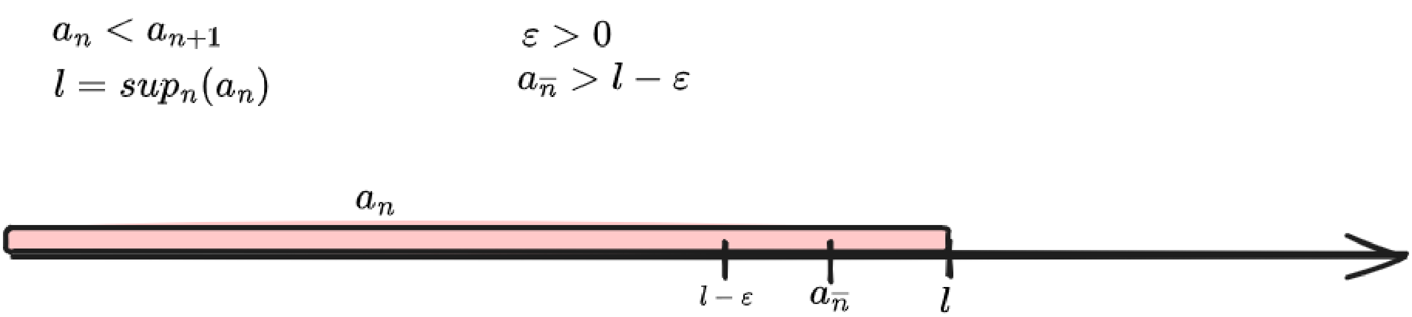
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, \mid a_n - l \mid < \varepsilon$$

  la quale si dimostra notando che per ogni $\varepsilon > 0$ allora $\mid a_n - l \mid < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$ e quindi scegliendo l'intorno di raggio ε di l per ogni $\varepsilon > 0$ avremo l'equivalenza di successione

Teorema sul limite delle successioni monotone

enunciato: ogni successione monotona ha un limite $l \in \overline{R}$, se a_n è crescente il suo limite è uguale al suo estremo superiore $sup_n(a_n)$ mentre se la successione è decrescente, il suo limite sarà uguale al suo estremo inferiore $inf_n(a_n)$

dimostrazione: concentrandoci sul caso di una successione a_n crescente (caso analogo sarà per le decrescenti), possiamo notare che se il limite l della successione è uguale al massimo della successione stessa $l = sup_n(a_n)$ allora di conseguenza avremo che $a_n \leq l$ e ciò vale per ogni n; ora teniamo in considerazione di avere una $\varepsilon > 0$ e che esista un $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > l - \varepsilon$



Quindi, essendo la successione crescente, avremo che per ogni $n \geq \overline{n}$ e quindi $a_n \geq a_{\overline{n}}$; in definitiva avremo che per ogni $n > \overline{n}$:

$$l - \varepsilon < a_{\overline{n}} \leq a_n < l < l + \varepsilon$$

e dunque $\mid a_n - l \mid < \varepsilon$ da qui torniamo alla dimostrazione della convergenza/equivalenza di successione citata sopra.

> una successione converge ad un limite l se per ogni H, K (estremi dell'intorno) reali tali che $H < l < K$ esista un $\overline{n}$ tale che per ogni $n \leq \overline{n}$ e che $H < a_n < K$:
>
> $$\forall H, K \in R : H < l < K, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, H < a_n < K$$
>
> una successione può essere equivalente se
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, \mid a_n - l \mid < \varepsilon$$
>
> la quale si dimostra notando che per ogni $\varepsilon > 0$ allora $\mid a_n - l \mid < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$ e quindi scegliendo l'intorno di raggio ε di l per ogni $\varepsilon > 0$ avremo l'equivalenza di successione

---