Funzione

Una funzione f è una relazione tra gli insieme di A e B, che sono rispettivamente dominio e codominio, tale che la legge f verifica che:

> per ogni a appartenente all'insieme A, esiste una sola b appartenente all'insieme B tale che $b = f(a)$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b$$

L'immagine

La funzione immagine prende un sottoinsieme di A e ne restituisce il sottoinsieme corrispondente di B, quindi l'insieme delle parti di A fa riferimento all'insieme delle parti di B ($f : P(A) \to P(B)$) e viene definita in questa maniera:

$$f(E) := f(a) | a \in E$$

dove E è un qualsiasi sottinsieme di A, ed $f(E)$ è il sottinsieme di B che contiene tutte le immagini degl'elementi di E.

L'insieme immagine

Se prendiamo tutto l'insieme di A e lo mettiamo in E (invece che solo un sottoinsieme), l'immagine di A sotto la funzione f prende il nome di immagine di f:

$$imf := f(A)$$

questo forma il sottoinsieme di B formato da tutte le immagini degl'elementi A
quindi l'insieme immagine si trova all'interno del Coodominio

Controimmagine

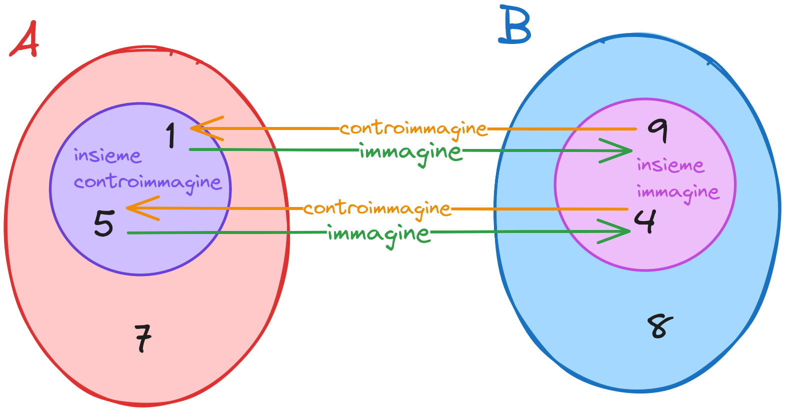
La funzione controimmagine, al contrario della funzione immagine va a restituire gli elementi dell'insieme A associati all'elemento dell'insieme B sul quale viene applicata la funzione immagine, quindi l'insieme delle parti di B fa riferimento all'insieme delle parti di A ($f : P(B) \to P(A)$), e si definisce:

$$f^{-1}(F) := a \in A | f(a \in F)$$

L'insieme controimmagine

quindi l'insieme delle controimmagini presenti nel dominio formano l'insieme controimmagine

spiegazione grafica:



9 è l'immagine di 1, quindi 1 è la controimmagine di 9;
lo stesso vale per 5 e 4 quindi possiamo affermare:

im f(1) = 9

Grafico

Il grafico di una funzione $G(f)$ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano tra il dominio ed il codominio AXB (ovvero tutte le coppie possibili tra A e B) e viene definito cosi:

> il $G(f)$ è uguale all'insieme di coppie a e b ristretto alle a appartenenti ad A, ed alle b appartenenti a B, dove $f(a) = b$

$$G(f) = (a, b) | a \in A, b \in B, f(a) = b$$

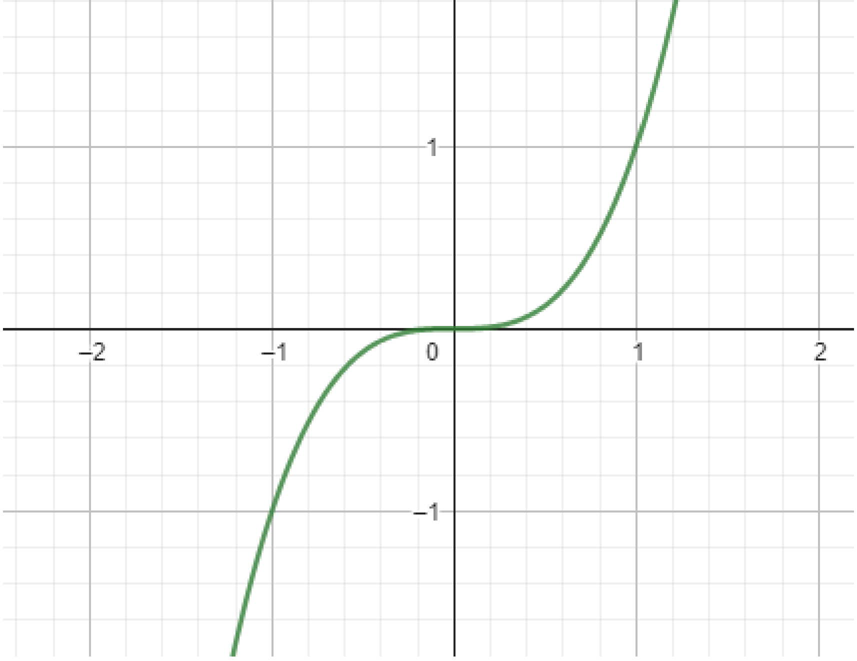
Iniettiva

Una funzione si dice iniettiva quando nessuna delle ordinate si incorcia con più di un punto della funzione.

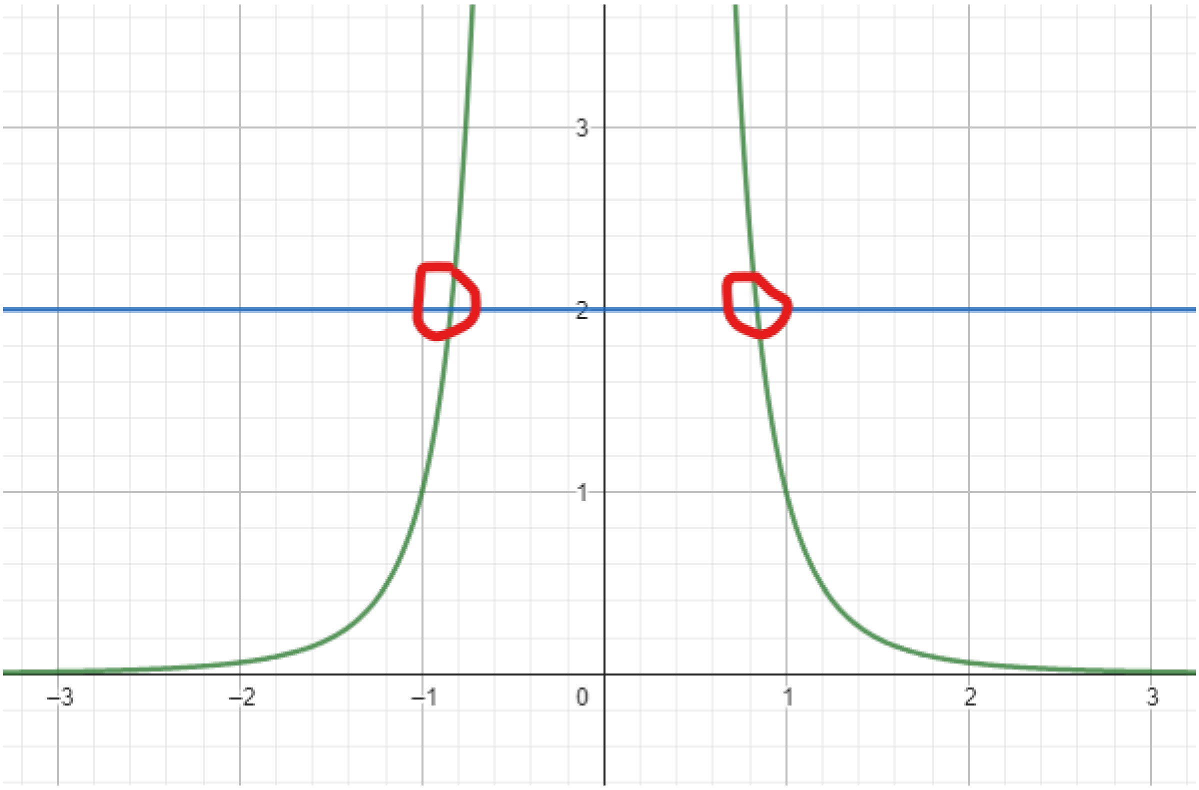
> Quindi $f : A \to B$ si dice iniettiva se per ogni $a1, a2$ appartenente all' insieme A, a_1 è diverso da a_2 come $f(a_1)$ è diverso da $f(a_2)$

$$\forall a_1, a_2 \in A, [a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)]$$

Iniettiva

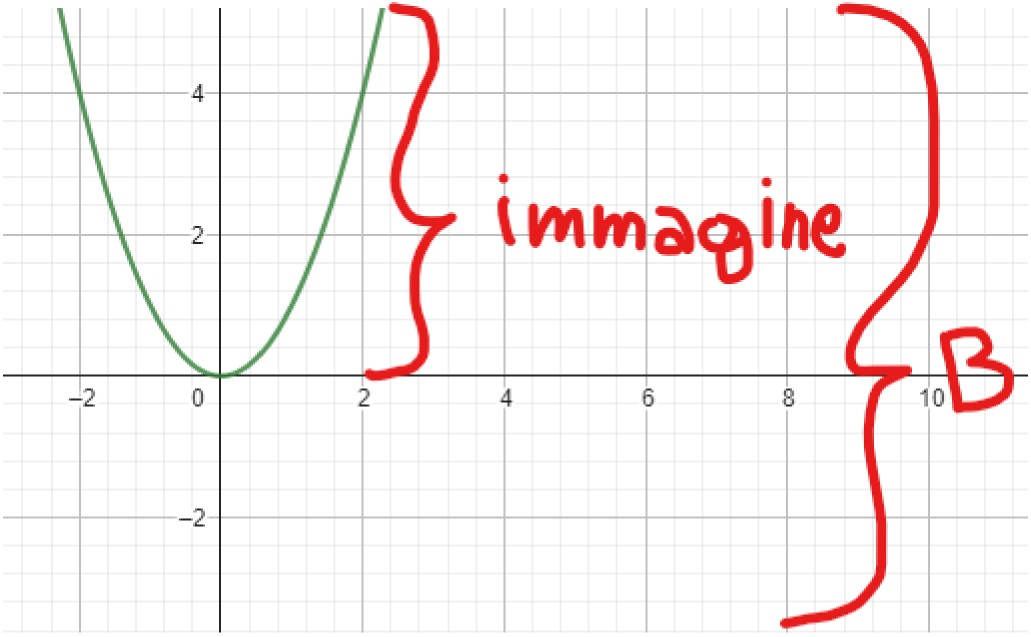


non iniettiva



Suriettiva

Una funzione si dice suriettiva quando l'immagine della funzione corrisponde al codominio B; quindi per ogni valore y del codominio vi è un valore x corrispondente della funzione.



> quindi $f : A \to B$ si dice suriettiva se per ogni b appartenente a B, esiste almeno un' a appartenente ad A tale che $f(a) = b$

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Biettiva / Biunivoca

Una funzione si dice biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva

> per ogni y presente nel codominio (uguale all'immagine della funzione), è presente una sola x corrispondente tale che f(x) = y

$$\forall b \in B, \exists ! a \in A : f(a) = b$$

se la funzione è biunivoca possiamo ricavarne l'inversa $f^{-1}(b) = a$ rappresentando la funzione inversa:

$$f^{-1} : B \to A, f^{-1}(b) = a \implies f(a) = b$$

Funzioni composte

Un funzione composta sostanzialmente è la composizione, indicata dal simbolo $\circ$, per esempio avendo le due funzioni:

- $A \to f(a) \to B$ dove la funzione f, passa dall'insieme A all'insieme B
- $B \to g(b) \to C$ dove la funzione g, passa dall'insieme B all'insieme C
  possiamo creare una funzione composta $g \circ f$, che implicherà un passaggio dall'insieme A all'insieme C:

$$g \circ f : A \to G \implies (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Proprietà

- se sia f che g sono iniettive, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà iniettiva:

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2), g(a_1) \neq g(a_2) \implies (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$$

- se sia f che g sono suriettive, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà suriettiva:

$$\forall c \in C, \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$$

- se sia f che g sono biunivoche, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà biunivoca

Composizione inversa

allo stesso modo della composizione $g \circ f$ che ci fa passare dall'insieme A all'insieme C, esistono le composizioni inverse che ci fanno ritornare all'insieme di partenza:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Funzioni reali monotone

Una funzione monotona è una funzione con andamento, crescente o decrescente, che non cambia mai; in una funzione monotona crescente infatti non può esserci nemmeno un punto in cui la funzione decresca e viceversa, in sostanza le due leggi per una funzione monotona sono:

- crescente: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$
- decrescente:$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$

bisogna anche fare una distinzione tra funzioni monotone strettamente cresc/decresc, e funzioni monotone debolmente cresc/ decresc:

- le funzioni strettamente monotone non hanno segmenti della funzione in cui la loro variazione può essere pari a 0, e quindi x_1 sarà sempre o maggiore o minore di x_2; la legge in particolare di queste è

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$$

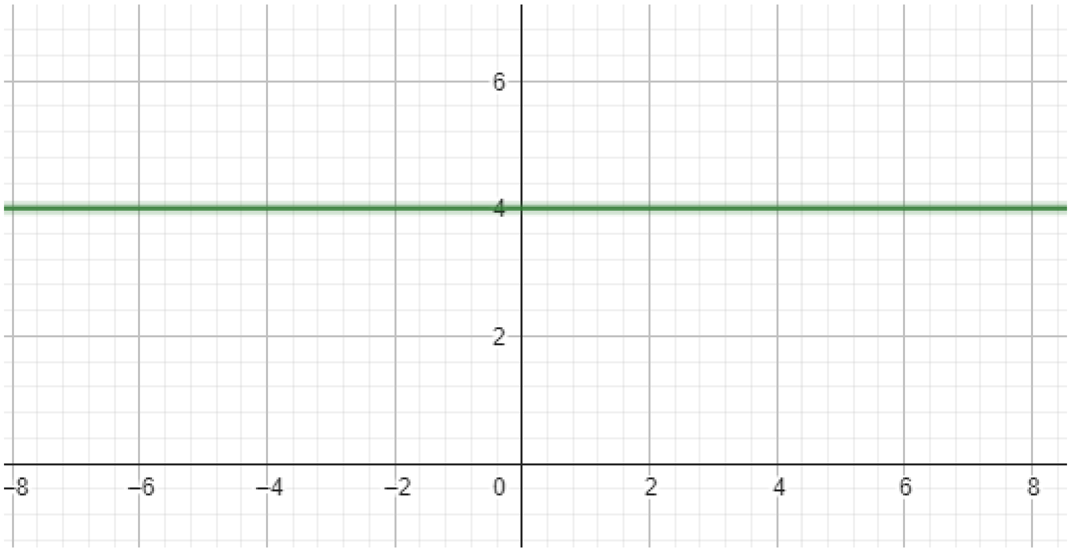
- le funzioni debolmente monotone invece hanno punti della funzione in cui rimangono invariate e quindi è possibile la condizione $x_1 = x_2$; di conseguenza le leggi saranno:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \leq x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \geq x_2$$

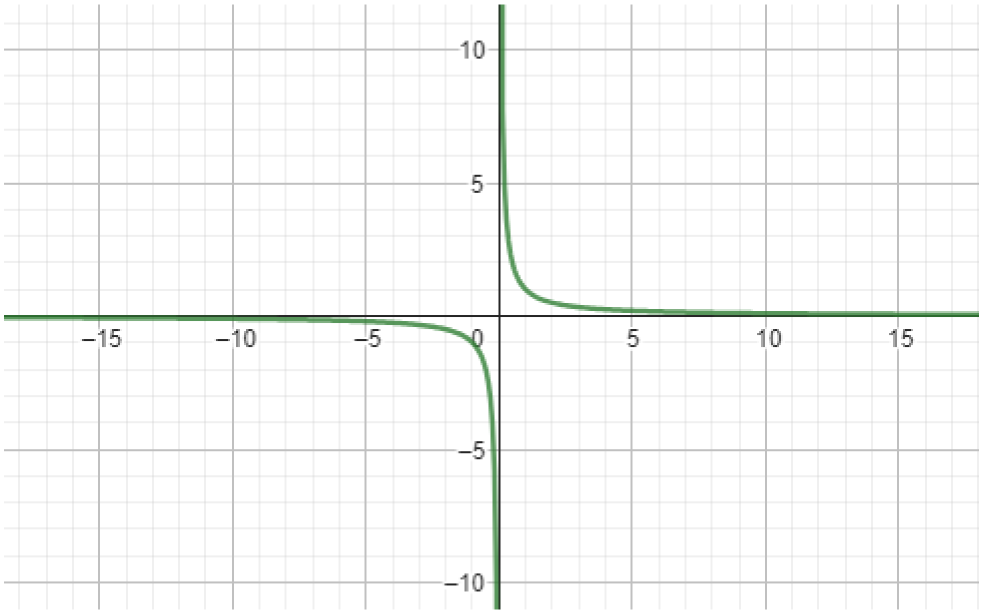
caso particolare

ovviamente una funzione come detto prima non può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente, ma al contrario può essere debolmente crescente e debolmente decrescente contemporaneamente; ciò accade quando una funzione non subisce alcuna variazione (costanti) rispettando entrambe le leggi delle funzioni debolmente monotone, come per esempio:



strettamente monotone & iniettivita

una funzione strettamente monotona, quindi strettamente crescente o decrescente sarà sempre iniettiva; in quanto ne rispetta la legge; al contrario, non tutte le funzioni iniettive sono strettamente monotone, per esempio:

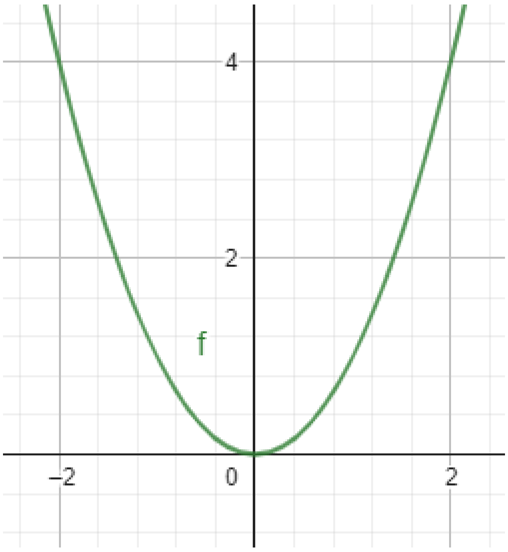


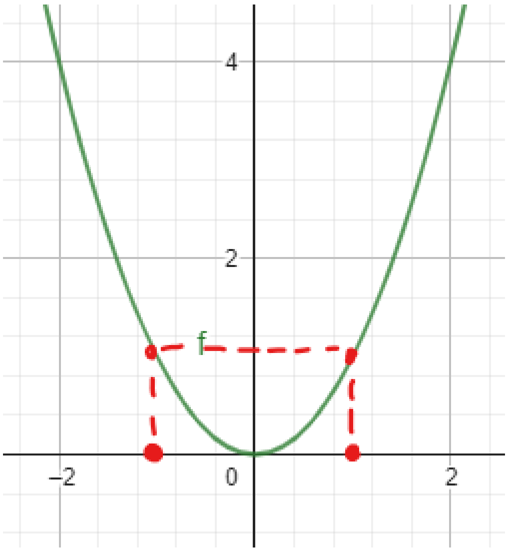
la funzione è iniettiva in quanto nessuna y incontra più di una x della funzione, ma allo stesso tempo non è strettamente monotona in quanto non mantiene un andamento crescente o decrescente, bensì si alterna.

Funzioni simmetriche

le funzioni simmetriche sono coloro che si specchiano sul grafico e si dividono in due gruppi:

- **pari**: ovvero quelle che si specchiano sull'asse delle ordinate

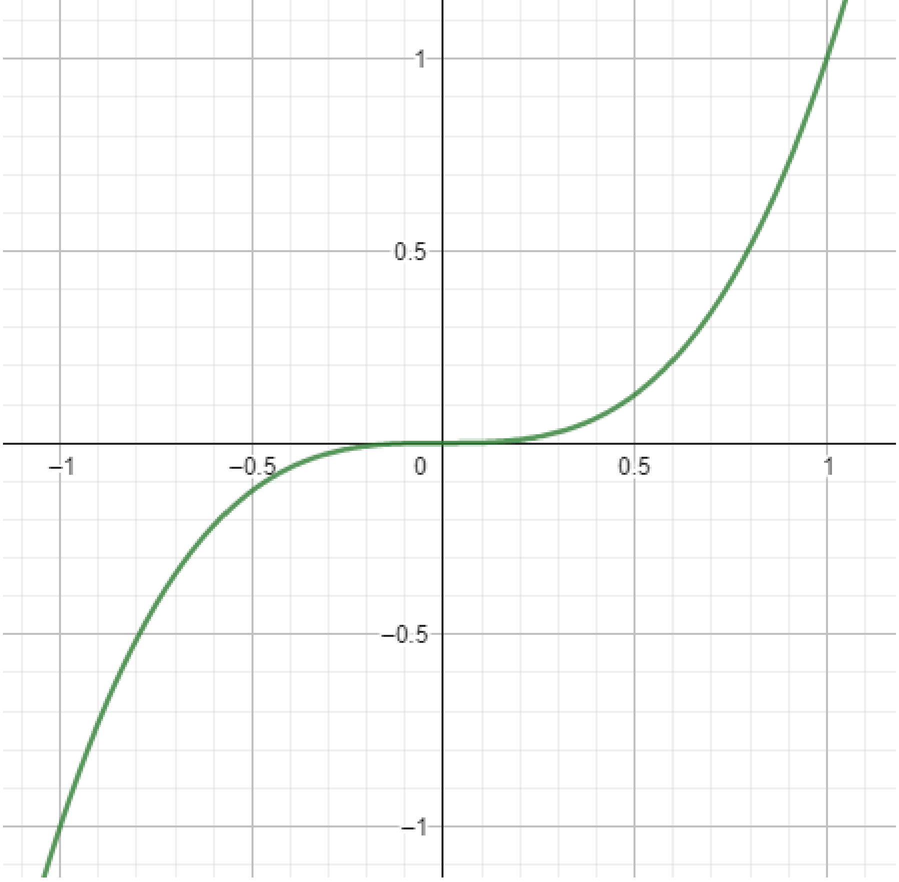


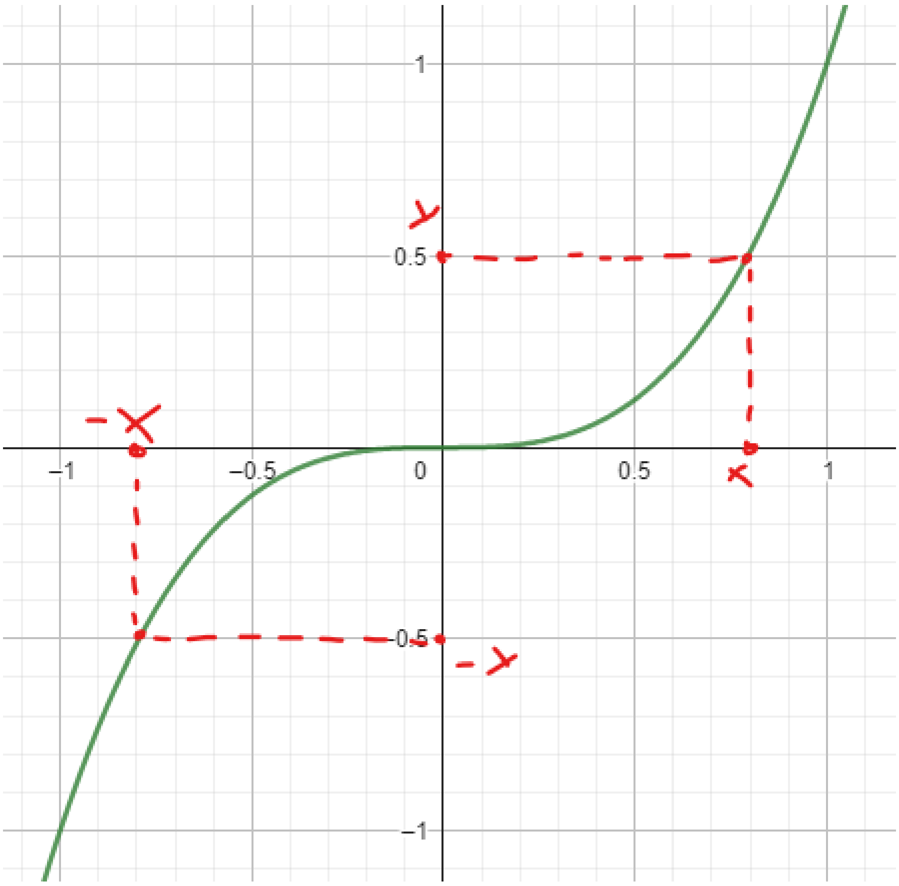


nelle funzioni pari in particolare vediamo come sia ad x che al suo opposto corrisponde la stessa y, quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(x) = f(-x)$$

- **dispari**: ovvero quelle che si specchiano sull'origine





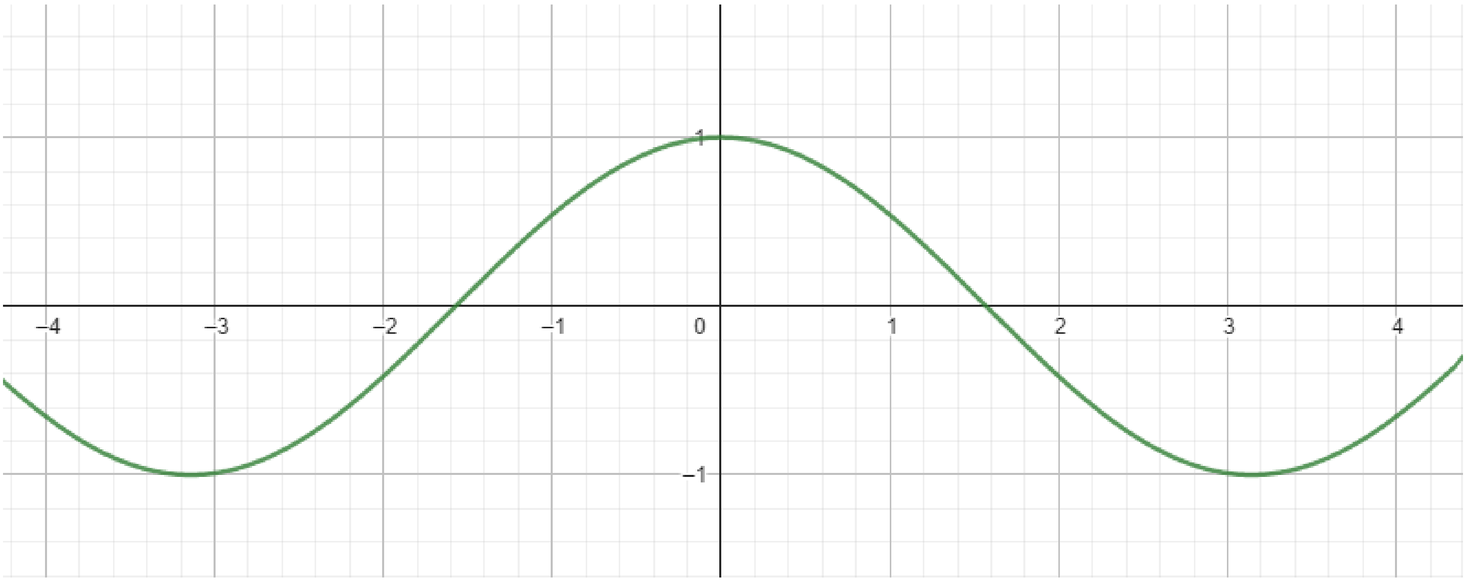
qua vediamo come ad x corrisponda una y che è esattamente l'opposto della y che corrisponde all'opposto di x, quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$$

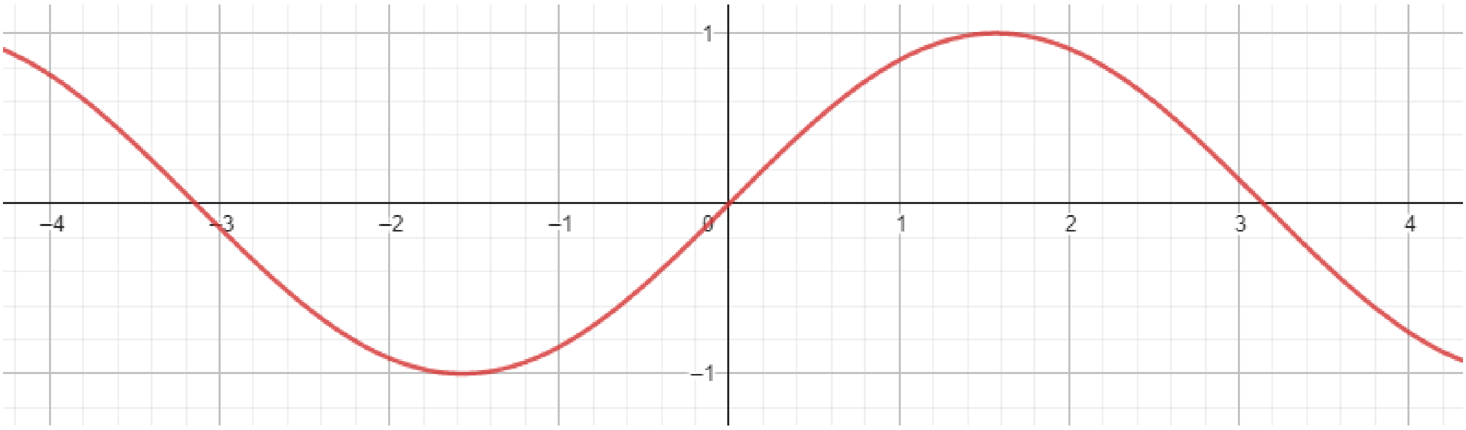
cos & sin

di conseguenza seguendo questi ultimi ragionamenti e leggi troveremo come i, coseno è pari, mentre il seno è dispari:

cos(x)



sin(x)

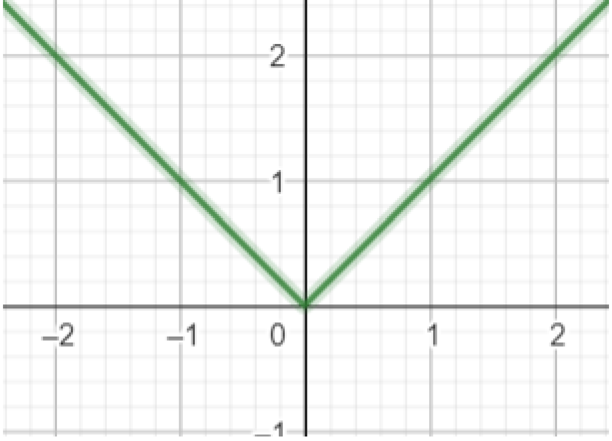


Funzioni valore assoluto

La funzione valore assoluto f restituisce il valore massimo tra la a fornita alla funzione ed il suo opposto, quindi: $f(a) = max(a, -a) \rightarrow \mid a \mid$; di conseguenza avremo che la funzione si comporta nella seguente maniera:

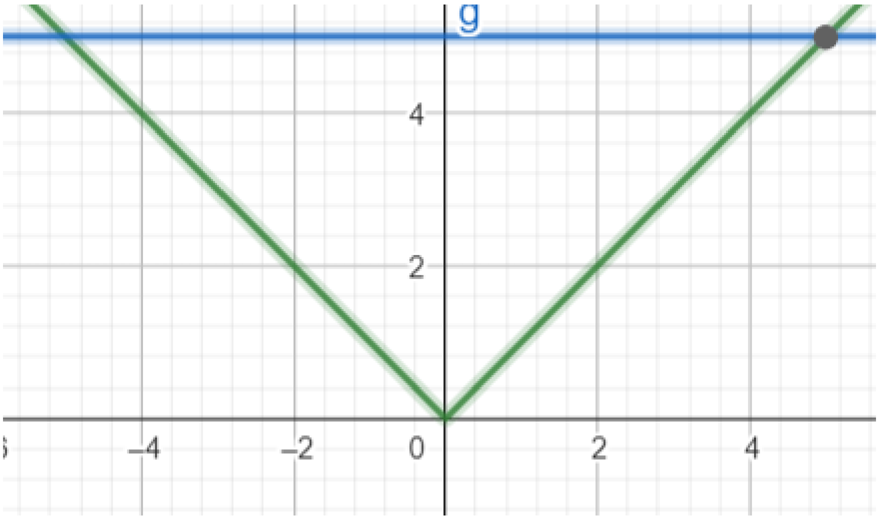
$$\mid a \mid = \begin{cases} a \rightarrow a \geq 0 \\ \\ -a \rightarrow a \leq 0 \end{cases}$$

il grafico di tale funzione quindi sarà rappresentato solo nella parte positiva del grafico, dove la parte negativa verrà specchiata sull'asse delle ordinate, quindi prendendo in considerazione $\mid x \mid$:



Propietà

- $\mid a \mid = 0 \rightarrow a = 0$
- $- \mid a \mid \leq a \leq \mid a \mid$
- $\mid -a \mid = \mid a \mid$
- se $\mid a \mid \leq b$ allora $-b \leq a \leq b$, con b che necessariamente de essere $b \geq 0$



disuguaglianze triangolari

prima

> la prima disuguaglianza triangolare afferma che per ogni a, b appartenenti all'insieme $\mathbb{R}$, il valore assoluto di $a + b$ è minore o uguale al valore assoluto di a più il valore assoluto di b:

dimostrazione:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$$

$$\begin{cases} - \mid a \mid \leq a \leq \mid a \mid \\ - \mid b \mid \leq b \leq \mid b \mid \end{cases} = -(\mid a \mid + \mid b \mid) \leq a + b \leq \mid a \mid + \mid b \mid$$

$$\mid a \mid \leq b \implies -b \leq a \leq b$$

$$A = \mid a + b \mid, B = \mid a \mid + \mid b \mid \rightarrow \mid A \mid \leq \mid B \mid$$

$$A \leq B = \mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$$

seconda

> la seconda disuguaglianza triangola **di continuità** afferma che il valore assoluto della differenza degl'assoluti di a e b, per intenderci: $\mid (\mid a \mid - \mid b \mid) \mid$, è minore o uguale alla differenza assoluta tra i due

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \mid\mid a \mid - \mid b \mid\mid \leq \mid a - b \mid$$

che andiamo a dimostrare utilizzando la prima disuguaglianza triangolare abbiamo:

$$\mid a \mid = \mid (a - b) + b \mid \leq \mid a - b \mid + \mid b \mid$$

qua andiamo ad utilizzare la prima disuguaglianza triangolare, e tenendo presente $-B \leq A \leq B$ andiamo a verificare entrambi i simboli:

- prima verifichiamo $A \leq B$ con:

  $$\mid a \mid - \mid b \mid \leq \mid a - b \mid$$

  qua come possiamo vedere $\mid a - b \mid = B, \mid a \mid - \mid b \mid = A$, di conseguenza $A \leq B$
- poi verifichiamo $-B \leq A$ prendendo l'opposto di $\mid a - b \mid$ ovvero $-B$ che è $- \mid a - b \mid$

  $$- \mid a - b \mid \leq \mid a \mid - \mid b \mid$$

  cosi da ottenere appunto $-B \leq A$

Infine otterremo cosi che $- \mid a - b \mid \leq \mid a \mid - \mid b \mid \leq \mid a - b \mid$, ovvero, tenendo presente della nostra notazione: $\mid a - b \mid = B, \mid a \mid - \mid b \mid = A$:

$$-B \leq A \leq B$$

e grazie a questa proprietà della funzione assoluta verifichiamo la seconda disuguaglianza triangolare di continuità.

ricopiare esempi di esercizi