Funzione

Una funzione f è una relazione tra gli insieme di A e B, che sono rispettivamente dominio e codominio, tale che la legge f verifica che:

> per ogni a appartenente all'insieme A, esiste una sola b appartenente all'insieme B tale che $b = f(a)$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b$$

L'immagine

La funzione immagine prende un sottoinsieme di A e ne restituisce il sottoinsieme corrispondente di B, quindi l'insieme delle parti di A fa riferimento all'insieme delle parti di B ($f : P(A) \rightarrow P(B)$) e viene definita in questa maniera:

$$f(E) := f(a) | a \in E$$

dove E è un qualsiasi sottinsieme di A, ed $f(E)$ è il sottinsieme di B che contiene tutte le immagini degl'elementi di E.

L'insieme immagine

Se prendiamo tutto l'insieme di A e lo mettiamo in E (invece che solo un sottoinsieme), l'immagine di A sotto la funzione f prende il nome di immagine di f:

$$imf := f(A)$$

questo forma il sottoinsieme di B formato da tutte le immagini degl'elementi A
quindi l'insieme immagine si trova all'interno del Coodominio

Controimmagine

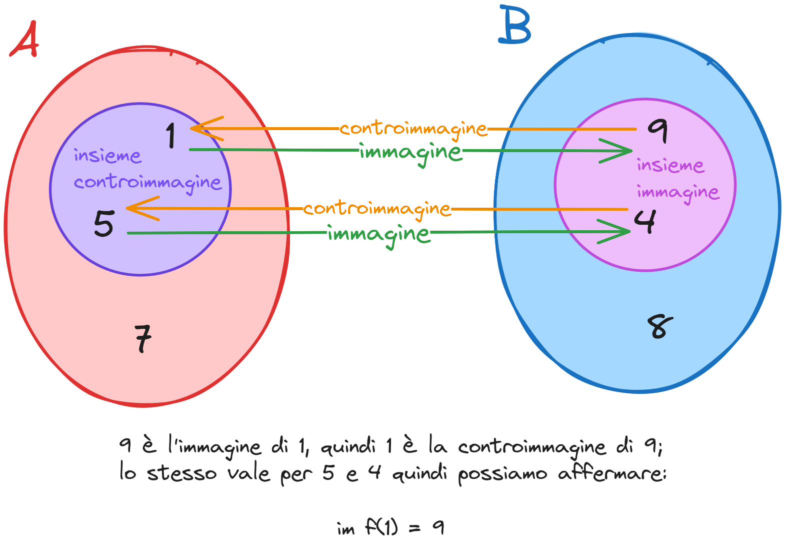
La funzione controimmagine, al contrario della funzione immagine va a restituire gli elementi dell'insieme A associati all'elemento dell'insieme B sul quale viene applicata la funzione immagine, quindi l'insieme delle parti di B fa riferimento all'insieme delle parti di A ($f : P(B) \rightarrow P(A)$), e si definisce:

$$f^{-1}(F) := a \in A | f(a \in F)$$

L'insieme controimmagine

quindi l'insieme delle controimmagini presenti nel dominio formano l'insieme controimmagine

spiegazione grafica:



Grafico

Il grafico di una funzione $G(f)$ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano tra il dominio ed il codominio AXB (ovvero tutte le coppie possibili tra A e B) e viene definito così:

> il $G(f)$ è uguale all'insieme di coppie a e b ristretto alle a appartenenti ad A, ed alle b appartenenti a B, dove $f(a) = b$

$$G(f) = (a, b)|a \in A, b \in B, f(a) = b$$

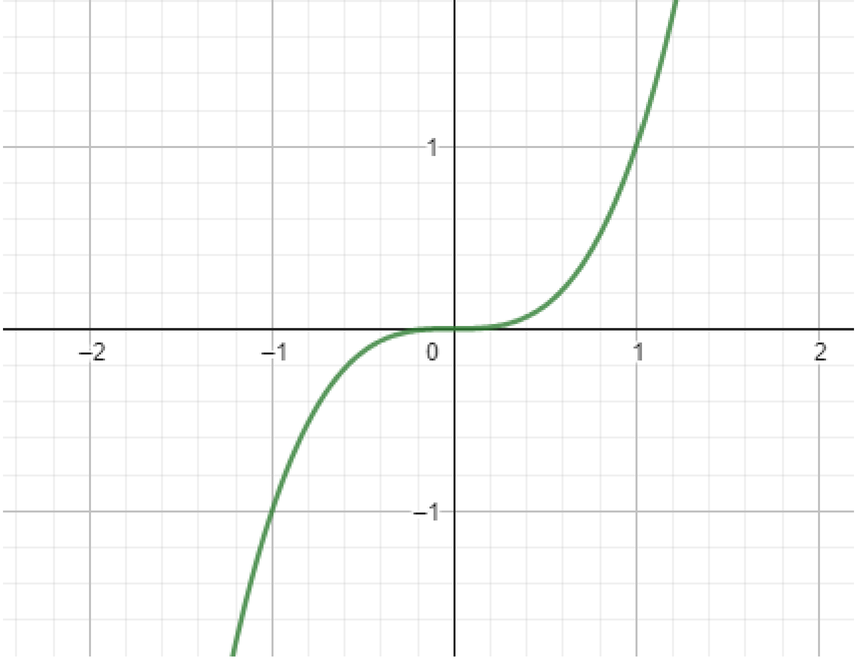
Iniettiva

Una funzione si dice iniettiva quando nessuna delle ordinate si incorcia con più di un punto della funzione.

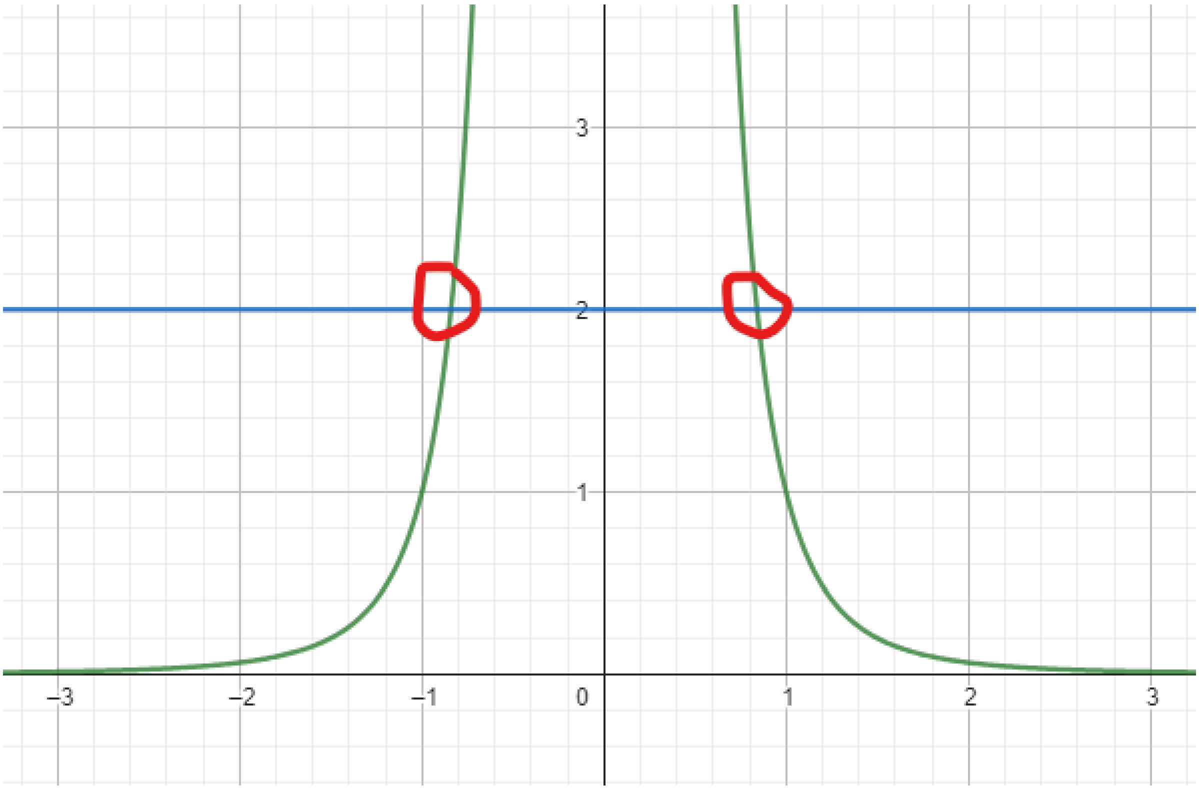
> Quindi $f : A \to B$ si dice iniettiva se per ogni $a1, a2$ appartenente all' insieme A, a_1 è diverso da a_2 come $f(a_1)$ è diverso da $f(a_2)$

$$\forall a_1, a_2 \in A, [a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)]$$

Iniettiva

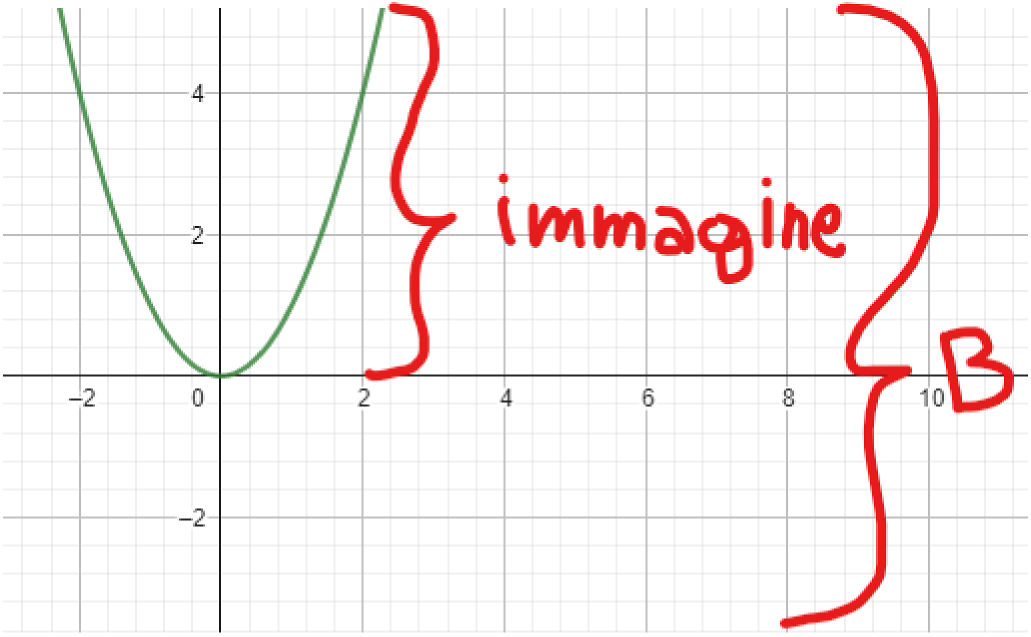


non iniettiva



Suriettiva

Una funzione si dice suriettiva quando l'immagine della funzione corrisponde al codominio B; quindi per ogni valore y del codominio vi è un valore x corrispondente della funzione.



> quindi $f: A \to B$ si dice suriettiva se per ogni b appartenente a B, esiste almeno un' a appartenente ad A tale che $f(a) = b$

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Biettiva / Biunivoca

Una funzione si dice biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva

> per ogni y presente nel codominio (uguale all'immagine della funzione), è presente una sola x corrispondente tale che f(x) = y

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$$

se la funzione è biunivoca possiamo ricavarne l'inversa $f^{-1}(b) = a$ rappresentando la funzione inversa:

$$f^{-1} : B \to A, f^{-1}(b) = a \implies f(a) = b$$

Funzioni composte

Un funzione composta sostanzialmente è la composizione, indicata dal simbolo $\circ$, per esempio avendo le due funzioni:

- $A \to f(a) \to B$ dove la funzione f, passa dall'insieme A all'insieme B
- $B \to g(b) \to C$ dove la funzione g, passa dall'insieme B all'insieme C
  possiamo creare una funzione composta $g \circ f$, che implicherà un passaggio dall'insieme A all'insieme C:

$$g \circ f : A \to G \implies (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Proprietà

- se sia f che g sono iniettive, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà iniettiva:

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2), g(a_1) \neq g(a_2) \implies (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$$

- se sia f che g sono suriettive, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà suriettiva:

$$\forall c \in C, \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$$

- se sia f che g sono biunivoche, allora anche la loro composizione $g \circ f$ sarà biunivoca

Composizione inversa

allo stesso modo della composizione $g \circ f$ che ci fa passare dall'insieme A all'insieme C, esistono le composizioni inverse che ci fanno ritornare all'insieme di partenza:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Funzioni reali monotone

Una funzione monotona è una funzione con andamento, crescente o decrescente, che non cambia mai; in una funzione monotona crescente infatti non può esserci nemmeno un punto in cui la funzione decresca e viceversa, in sostanza le due leggi per una funzione monotona sono:

- crescente: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$
- decrescente:$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$

bisogna anche fare una distinzione tra funzioni monotone strettamente cresc/decresc, e funzioni monotone debolmente cresc/ decresc:

- le funzioni strettamente monotone non hanno segmenti della funzione in cui la loro variazione può essere pari a 0, e quindi x_1 sarà sempre o maggiore o minore di x_2 ; la legge in particolare di queste è

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$$

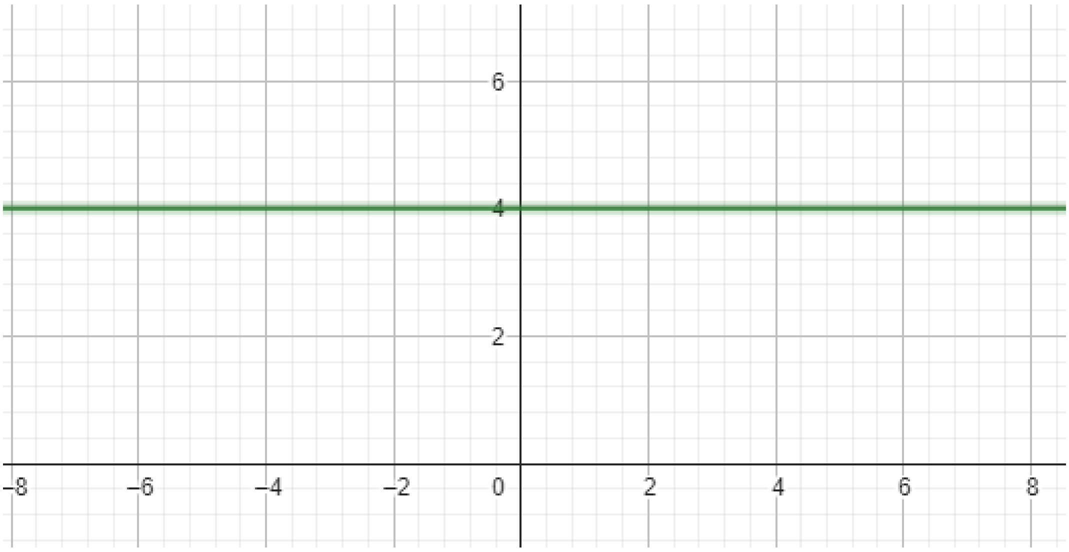
- le funzioni debolmente monotone invece hanno punti della funzione in cui rimangono invariate e quindi è possibile la condizione $x_1 = x_2$; di conseguenza le leggi saranno:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \leq x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \geq x_2$$

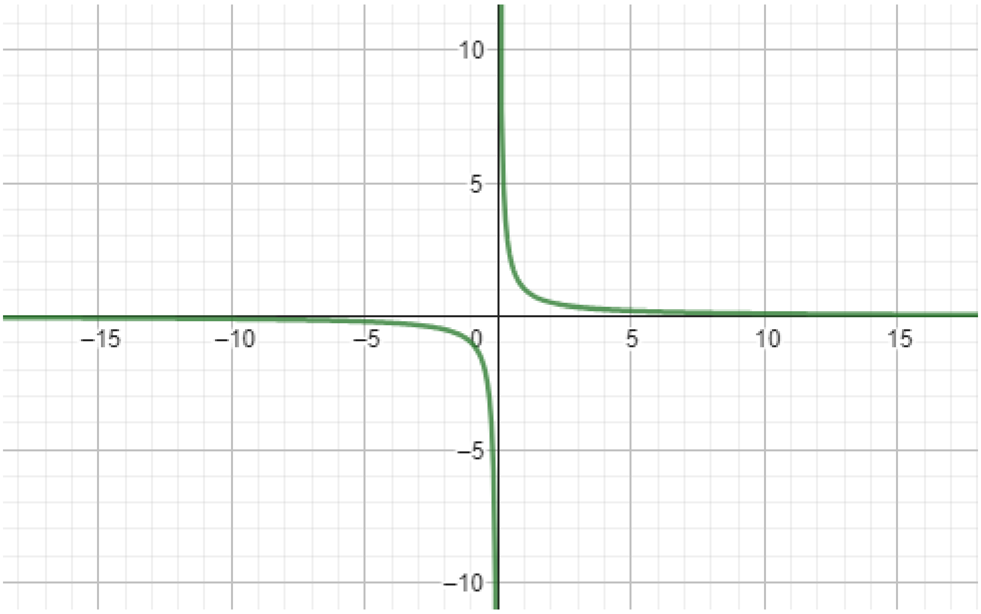
caso particolare

ovviamente una funzione come detto prima non può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente, ma al contrario può essere debolmente crescente e debolmente decrescente contemporaneamente; ciò accade quando una funzione non subisce alcuna variazione (costanti) rispettando entrambe le leggi delle funzioni debolmente monotone, come per esempio:



strettamente monotone & iniettivita

una funzione strettamente monotona, quindi strettamente crescente o decrescente sarà sempre iniettiva; in quanto ne rispetta la legge; al contrario, non tutte le funzioni iniettive sono strettamente monotone, per esempio:

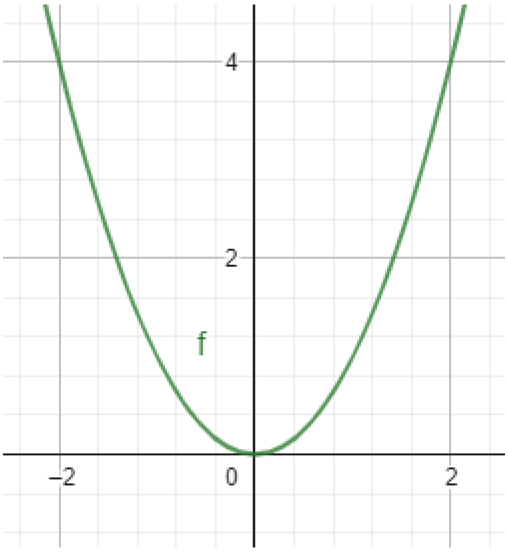


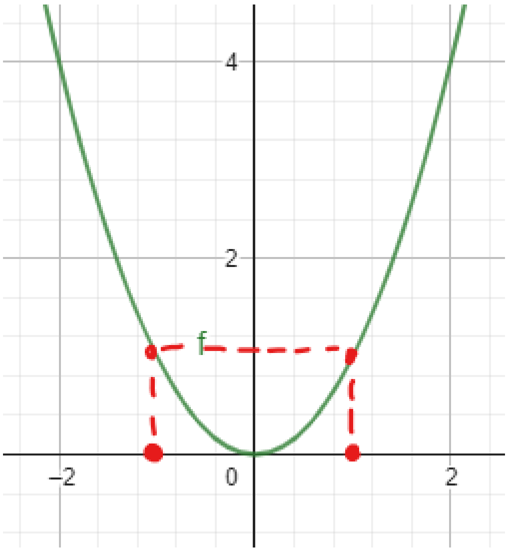
la funzione è iniettiva in quanto nessuna y incontra più di una x della funzione, ma allo stesso tempo non è strettamente monotona in quanto non mantiene un andamento crescente o decrescente, bensì si alterna.

Funzioni simmetriche

le funzioni simmetriche sono coloro che si specchiano sul grafico e si dividono in due gruppi:

- **pari**: ovvero quelle che si specchiano sull'asse delle ordinate

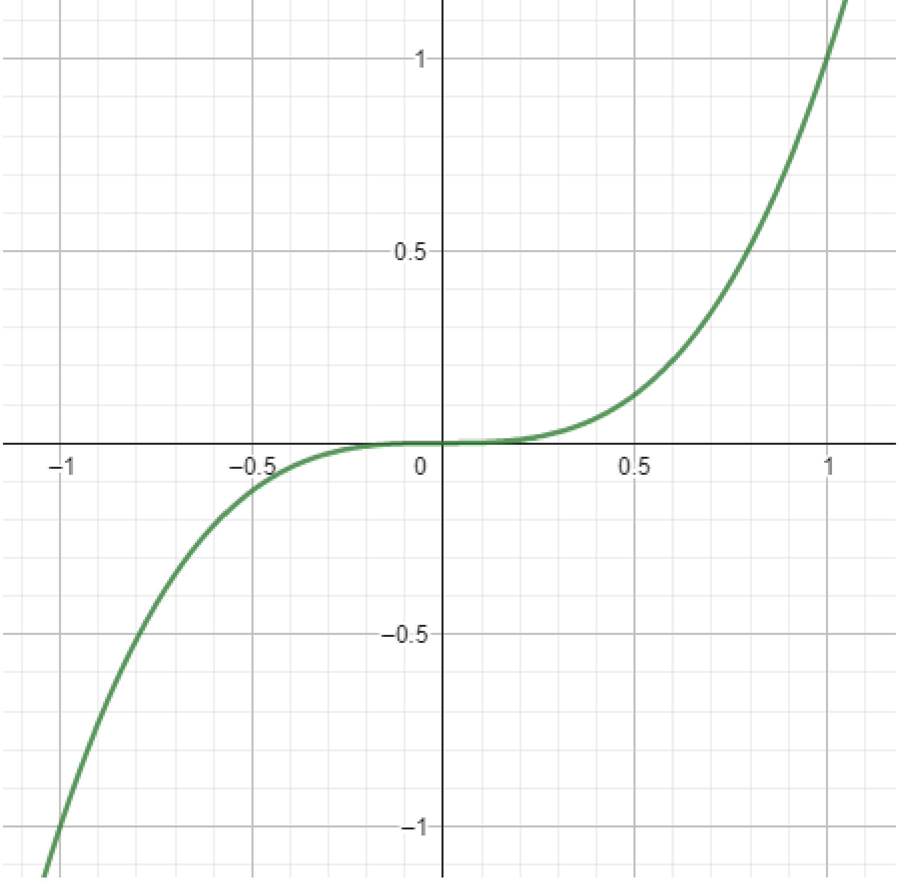


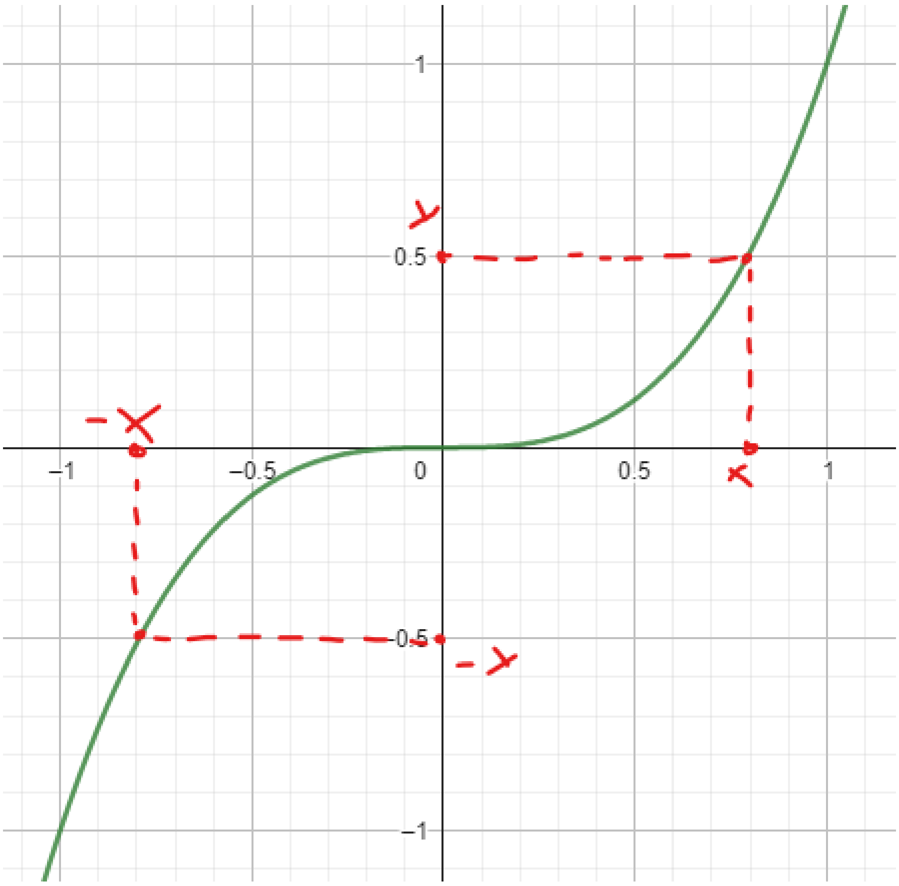


nelle funzioni pari in particolare vediamo come sia ad x che al suo opposto corrisponde la stessa y, quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(x) = f(-x)$$

- **dispari**: ovvero quelle che si specchiano sull'origine





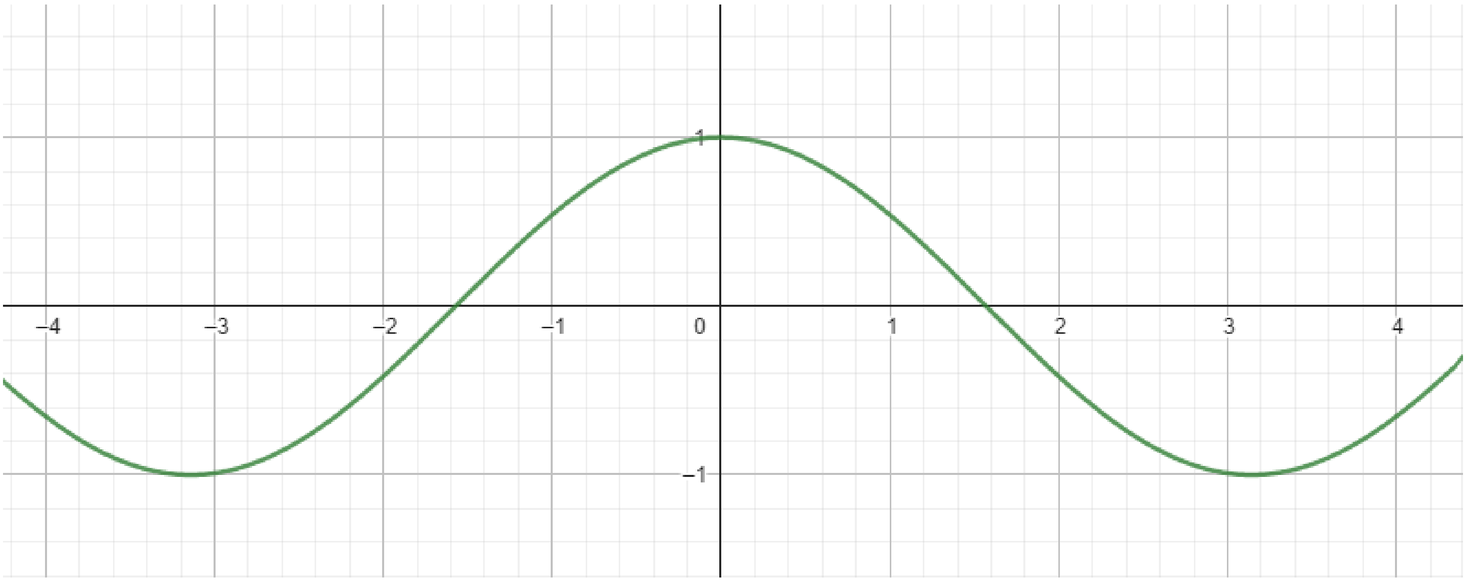
qua vediamo come ad x corrisponda una y che è esattamente l'opposto della y che corrisponde all'opposto di x, quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$$

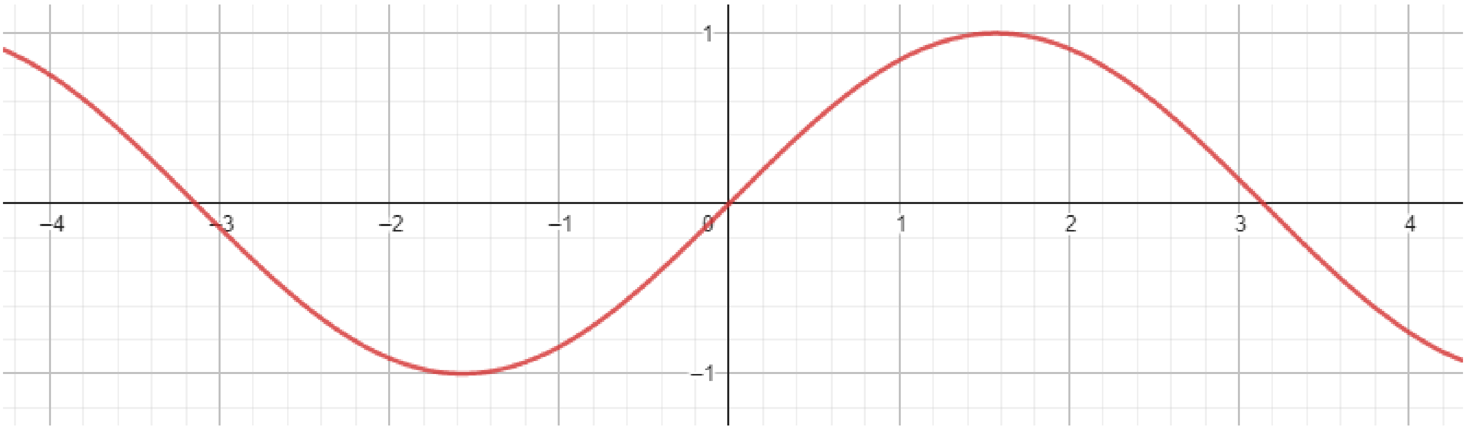
cos & sin

di conseguenza seguendo questi ultimi ragionamenti e leggi troveremo come i, coseno è pari, mentre il seno è dispari:

cos(x)



sin(x)

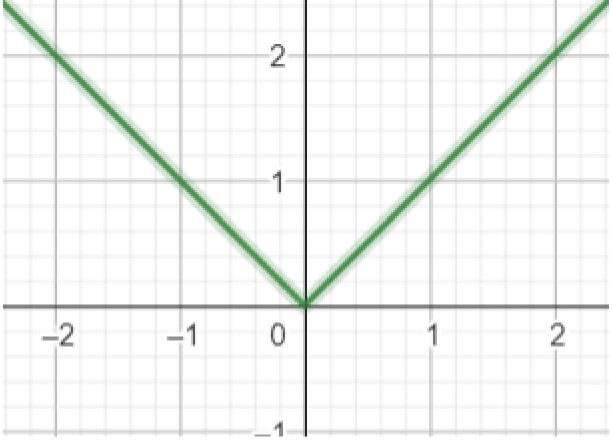


Funzioni valore assoluto

La funzione valore assoluto f restituisce il valore massimo tra la a fornita alla funzione ed il suo opposto, quindi: $f(a) = max(a, -a) \rightarrow \mid a \mid$; di conseguenza avremo che la funzione si comporta nella seguente maniera:

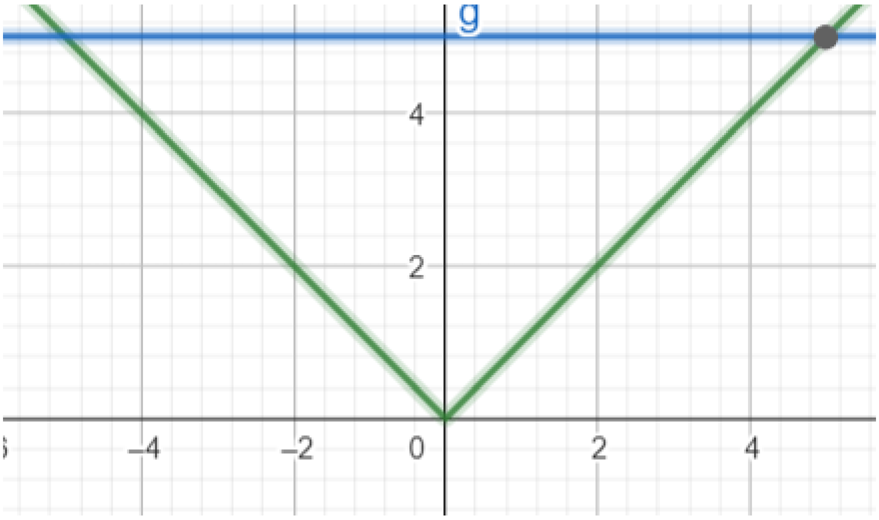
$$\mid a \mid = \begin{cases} a \rightarrow a \geq 0 \\ \\ -a \rightarrow a \leq 0 \end{cases}$$

il grafico di tale funzione quindi sarà rappresentato solo nella parte positiva del grafico, dove la parte negativa verrà specchiata sull'asse delle ordinate, quindi prendendo in considerazione $\mid x \mid$:



Propietà

- $\mid a \mid = 0 \rightarrow a = 0$
- $- \mid a \mid \leq a \leq \mid a \mid$
- $\mid -a \mid = \mid a \mid$
- se $\mid a \mid \leq b$ allora $-b \leq a \leq b$, con b che necessariamente de essere $b \geq 0$



disuguaglianze triangolari

prima

> la prima disuguaglianza triangolare afferma che per ogni a, b appartenenti all'insieme $\mathbb{R}$, il valore assoluto di $a + b$ è minore o uguale al valore assoluto di a più il valore assoluto di b:

dimostrazione:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$$

$$\begin{cases} - \mid a \mid \leq a \leq \mid a \mid \\ - \mid b \mid \leq b \leq \mid b \mid \end{cases} = -(\mid a \mid + \mid b \mid) \leq a + b \leq \mid a \mid + \mid b \mid$$

$$\mid a \mid \leq b \implies -b \leq a \leq b$$

$$A = \mid a + b \mid, B = \mid a \mid + \mid b \mid \rightarrow \mid A \mid \leq \mid B \mid$$

$$A \leq B = \mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$$

seconda

> la seconda disuguaglianza triangola **di continuità** afferma che il valore assoluto della differenza degl'assoluti di a e b, per intenderci: $\mid (\mid a \mid - \mid b \mid) \mid$, è minore o uguale alla differenza assoluta tra i due

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \mid\mid a \mid - \mid b \mid\mid \leq \mid a - b \mid$$

che andiamo a dimostrare utilizzando la prima disuguaglianza triangolare abbiamo:

$$\mid a \mid = \mid (a-b) + b \mid \leq \mid a - b \mid + \mid b \mid$$

qua andiamo ad utilizzare la prima disuguaglianza triangolare, e tenendo presente $-B \leq A \leq B$ andiamo a verificare entrambi i simboli:

- prima verifichiamo $A \leq B$ con:

  $$\mid a \mid - \mid b \mid \leq \mid a - b \mid$$

  qua come possiamo vedere $\mid a - b \mid = B, \mid a \mid - \mid b \mid = A$, di conseguenza $A \leq B$
- poi verifichiamo $-B \leq A$ prendendo l'opposto di $\mid a - b \mid$ ovvero $-B$ che è $- \mid a - b \mid$

  $$- \mid a - b \mid \leq \mid a \mid - \mid b \mid$$

  cosi da ottenere appunto $-B \leq A$

Infine otterremo cosi che $- \mid a - b \mid \leq \mid a \mid - \mid b \mid \leq \mid a - b \mid$, ovvero, tenendo presente della nostra notazione: $\mid a - b \mid = B, \mid a \mid - \mid b \mid = A$:

$$-B \leq A \leq B$$

e grazie a questa proprietà della funzione assoluta verifichiamo la seconda disuguaglianza triangolare di continuità.

ricopiare esempi di esercizi

Insiemi Numerici

una relazione sull' insieme $\mathbb{X}$, che è sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{R}$, nel piano cartesiano formato da $\mathbb{X} * \mathbb{X}$, dove troviamo due punti $x, y \in \mathbb{R}$, questi due punti si dicono in relazione

Relazioni di equivalenza

una relazione di equivalenza è tale se fra i due punti in relazione (x, y) vengono rispettate le 3 propietà:

- **riflessiva**: x in relazione con x, che si scrive $\forall x \in \mathbb{X} x \simeq x$
- **simmetrica**: x in relazione con y e viceversa, si scrive $\forall x, y \in \mathbb{X} x \simeq y \implies y \simeq x$
- **transitiva**: x in relazione con y, y in relazione con z, quindi x in relazione con z, si scrive: $\forall x, y, z \in \mathbb{X} x \simeq y, y \simeq z \implies x \simeq z$

i punti (x, y) e (x_0, y_0) sono in relazione tra loro se rispettano il criterio: $x - x_0 = y - y_0$
data questa nozione di equivalenza si dice classe di equivalenza: $[x] = y \in \mathbb{X} : y \simeq x$

Relazioni d'ordine

una relazione d'ordine tra due insieme si denota con il simbolo $\leq$ di precedenza, e si dice che un insieme X preceda nell'ordine un altro insieme se sono rispettate le propietà:

- riflessiva
- transitiva
- anti-simmetrica: ovvero $x \leq y, y \leq x \implies x = y$

esempio

avendo $\mathbb{U}, \mathbb{X} = P(\mathbb{U})$ dove X è l'insieme della parti di U, abbiamo che $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in P\mathbb{U}$, da qui possiamo constatare che:

- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ se ogni elemento di A è elemento anche di B
- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$ se $\mathbb{A} = \mathbb{B}$
- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$ quindi $\implies \mathbb{A} \leq \mathbb{C}$

Relazione d'ordine totale

una relazione d'ordine si dice totale quando gli elementi sono confrontabili

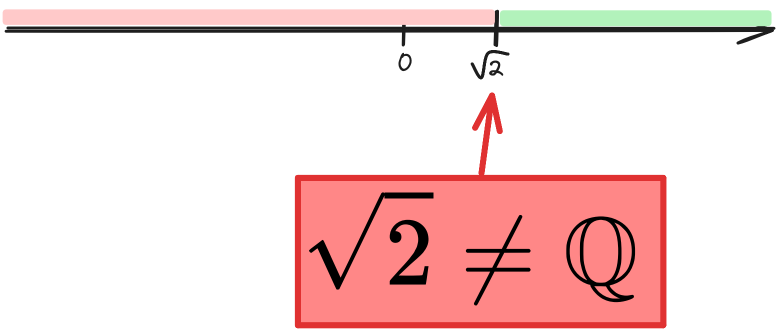
Insieme numeri reali

Partendo dalla dichiarazione: $(\mathbb{X}, +, *, \leq)$ dove il + ed il $*$ vanno ad indicarci la presenza di 4 assiomi per simbolo, mentre il $\leq$ va ad indicarci che la composizione interna dell'insieme è una relazione d'ordine totale. In totale gli assiomi dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{R}$ è composto da 11 assiomi.

> Assioma: Principio evidente per sé, e che perciò non ha bisogno di esser dimostrato, posto a fondamento di una teoria deduttiva

Per definire l'insieme dei numeri reali $\mathbb{N}$ bisogna definire un 12° assioma, detto Assioma di Dedekind, che dice che per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A, b \in B, a \leq b$ allora esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale da separare i due insiemi, e quindi: $\forall a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}, a \leq c \leq b$, questo viene chiamato anche assioma dell'elemento separatore.

$\mathbb{X} = \mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali
$\mathbb{A} = x \in \mathbb{Q} : x <= 0ox^2 <= 2$
$\mathbb{B} = \mathbb{Q}/\mathbb{A}$



$\sqrt{2}$ non è razionale quindi non è seperatore, per tanto è nell'insieme A o in B, sistenendo:
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e che esiste un $c \in \mathbb{Q}^+ : c^2 < 2$ allora:

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ : \left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

ciò vuol dire che c è un razionale positivo, il quale il quadrato è minore di 2, ma aggiungendo a c un infinitesimo e ne facciamo il quadrato, avremo sempre un numero <2 ma più vicino, quindi non esiste un numero separatore razionale.

Maggioranti

Un insieme A si dice limitato superiormente se ammette maggioranti M, quindi ogni a appartenente ad A, deve essere minore di ogni elemento dell'insieme dei maggioranti:

$$\forall a \in \mathbb{A}, a \leq M$$

l'insieme dei maggioranti di A si indica con il simbolo: $\mathbb{M}_{\mathbb{A}}$.
per esempio l'insieme $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente quindi non ammette maggioranti.

L'esistenza del massimo

Oltre a ciò dobbiamo tenere inconsiderazione la possibile esistenza di un massimo dell'insieme A, mettendo caso che $\mathbb{A} = (-\infty, 1]$, ovvero l'insieme A comprende tutti i numeri da meno infinito ad 1 compreso, sappiamo perfettamente che il massimo di questo insieme sarà 1; ma mettendo il caso che $\mathbb{A} = (-\infty, 1[$ allora il massimo dell'insieme A sarà un numero infinitamente vicino ad 1 ma pur sempre <1, e per l'assioma del numero separatore sappiamo che esisterà sempre un numero più vicino di un altro ad 1 ma comunque <1; quindi in questo caso l'insieme A non ha massimo.

> nota bene: il massimo dell' insieme:$max(\mathbb{A})$ è uguale al minimo dell'insieme dei maggioranti dell'insieme di A: $min(\mathbb{M}_{\mathbb{A}})$; quindi $max(\mathbb{A}) = min(\mathbb{M}_{\mathbb{A}})$

Minoranti

stessa roba dei maggioranti vale per i minoranti, ovviamente qua parliamo di limiti inferiori e si tratta di seguire la regola:

$$\forall a \in A, a \geq m$$

l'esistenza del minimo

allo stesso modo , se abbiamo un insieme $A =] -1, +\infty)$ avremo che l'insieme A non ha un minimo in quanto per l'assioma di dedekin

> nota bene: il minimo dell' insieme:$min(\mathbb{A})$ è uguale al massimo dell'insieme dei minoranti dell'insieme di A: $max(\mathbb{m}_{\mathbb{A}})$; quindi $min(\mathbb{A}) = max(\mathbb{m}_{\mathbb{A}})$

Insieme dei numeri immaginari e complessi

L'insieme dei numeri immaginari serve a dare soluzione a quelle operazioni che di fatto non hanno soluzione; l'intero insieme è basato sull' equazione $x^2 + 1 = 0$ che vorrebbe a dire $x = \sqrt{-1}$ che è impossibile negl'insiemi $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{N}$,quindi si attribuisce ad una variabile immaginaria i il valore di $\sqrt{-1}$, di conseguenza

$$i^2 = -1$$

Numeri complessi

Un numero complesso è un numero composto da un numero reale ed un numero immaginario, quindi si dice che l'insieme dei numeri complessi (C) è composto nella seguente maniera:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

quindi vi è un inclusione stretta di R in C; il numero complesso viene indicato dalla variabile z, che è di conseguenza composta dalla parte reale e dalla parte immaginaria i.

Operazioni

- la somma tra due z avviene sommando separatamente parti reali ed immaginarie:

$$(3 + 4i) + (5 - 7i) = (3 + 5) + (4 - 7)i = 8 - 3i$$

- la moltiplicazione tra due z avviene come una semplice prodotto di somme che già conosciamo, ricordando però che $i^2 = -1$, di conseguenza:

$$(3 + 4i) * (5 - 7i) = 15 - 21i + 20i - 28 * i^2 = 15 - 21i + 20i - (28 * -1) = 15 - i + 28 = 43 - i$$

- **il reciproco** di z, ovvero quello che si solito scriveremmo come $\frac{1}{z}$ viene calcolato in questo caso attraverso la formula:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

  per esempio il reciproco di z = 3+4i (ovvero quel numero che moltiplicato per z restituisce 1) lo calcoliamo cosi:

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3}{9 + 16} - \frac{4}{9 + 16}i = \frac{3 - 4i}{25}$$

  e possiamo verificarlo semplicemente moltiplicandolo per z. (se restituisce 1 è verificato)

- coniugato di z è quel numero che conserva la parte reale di Z ma ha opposta parte immaginaria, se

$$z = 3 + 4i \to \overline{z} = 3 - 4i$$

- il modulo di Z si fa applicando la radice quadrata alle due parti di Z elevate entrambe alla seconda (valore assoluto), quindi: $\mid z \mid = \sqrt{Rez^2 + Imx^2}$, per esempio:

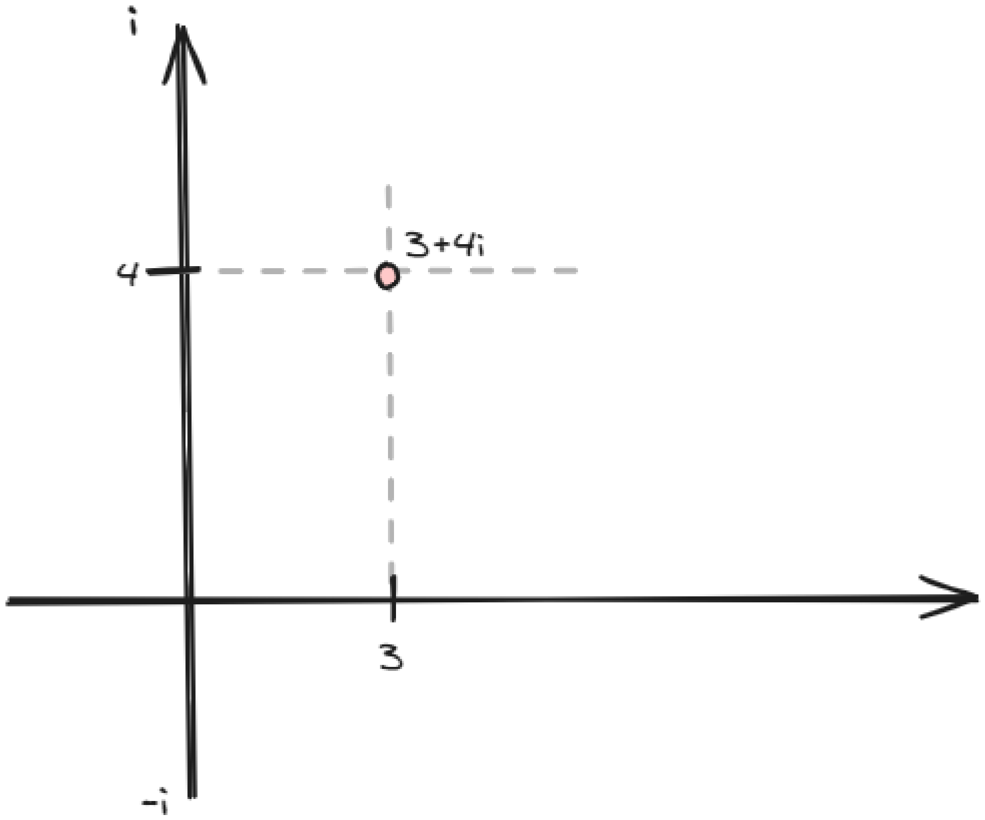
$$|_3 + 4i \mid = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

propietà

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z * w} = \overline{z} * \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z = -\overline{z} \implies \mathbb{R}\mathrm{e} z = 0$
- $\mid z \mid = \mid \overline{z} \mid$
- $\mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid$
- $\mid z * w \mid = \mid z \mid * \mid w \mid$
- $z * \overline{z} = \mid z \mid^2$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $\frac{w}{z} = w * \frac{1}{z} = w * \frac{\overline{z}}{|x|^2} = \frac{w * \overline{z}}{|z|^2}$
- $\mid z + w \mid^2 \leq (\mid z \mid + \mid w \mid)^2$

Piano di Gaus

il piano di gaus è un piano cartesiano dove la i viene rappresentata sulla delle ordinate (y); quindi per esempio avendo $z = 3 + 4i$ avremo:



se sei curioso [piano di gaus]

Sempre con il piano di gaus possiamo ottenere la somma geometrica di due numeri complessi $z + w$, completando il parallelogramma come formano i due segmenti complessi e facendone il modulo (il modulo di un numero complesso restituisce la distanza tra quel punto e l'origine del piano):