

# Funzione

Una funzione  $f$  è una relazione tra gli insiemi di  $A$  e  $B$ , che sono rispettivamente dominio e codominio, tale che la legge  $f$  verifica che:

per ogni  $a$  appartenente all'insieme  $A$ , esiste una sola  $b$  appartenente all'insieme  $B$  tale che  $b = f(a)$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b$$

## L'immagine

La funzione immagine prende un sottoinsieme di  $A$  e ne restituisce il sottoinsieme corrispondente di  $B$ , quindi l'insieme delle parti di  $A$  fa riferimento all'insieme delle parti di  $B$  ( $f : P(A) \rightarrow P(B)$ ) e viene definita in questa maniera:

$$f(E) := \{f(a) | a \in E\}$$

dove  $E$  è un qualsiasi sottoinsieme di  $A$ , ed  $f(E)$  è il sottoinsieme di  $B$  che contiene tutte le immagini degli elementi di  $E$ .

## L'insieme immagine

Se prendiamo tutto l'insieme di  $A$  e lo mettiamo in  $E$  (invece che solo un sottoinsieme), l'immagine di  $A$  sotto la funzione  $f$  prende il nome di immagine di  $f$ :

$$im f := f(A)$$

questo forma il sottoinsieme di  $B$  formato da tutte le immagini degli elementi  $A$  quindi l'insieme immagine si trova all'interno del Codominio

## Controimmagine

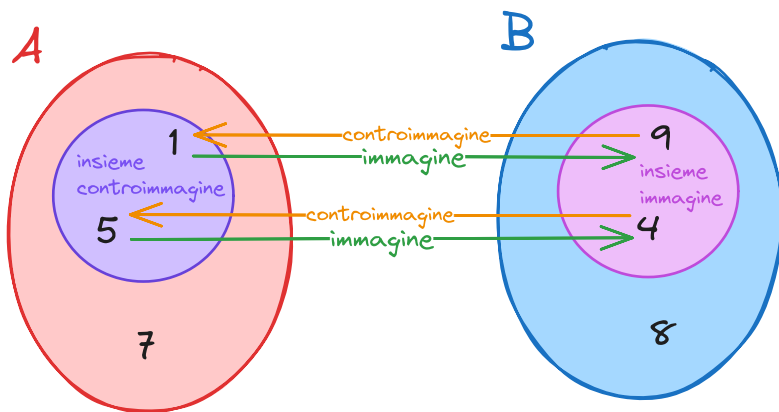
La funzione controimmagine, al contrario della funzione immagine va a restituire gli elementi dell'insieme  $A$  associati all'elemento dell'insieme  $B$  sul quale viene applicata la funzione immagine, quindi l'insieme delle parti di  $B$  fa riferimento all'insieme delle parti di  $A$  ( $f : P(B) \rightarrow P(A)$ ), e si definisce:

$$f^{-1}(F) := \{a \in A | f(a) \in F\}$$

## L'insieme controimmagine

quindi l'insieme delle controimmagini presenti nel dominio formano l'insieme controimmagine

spiegazione grafica:



9 è l'immagine di 1, quindi 1 è la controimmagine di 9;  
lo stesso vale per 5 e 4 quindi possiamo affermare:

$$\text{im } f(1) = 9$$

## Grafico

Il grafico di una funzione  $G(f)$  è il sottoinsieme del prodotto cartesiano tra il dominio ed il codominio  $A \times B$  (ovvero tutte le coppie possibili tra  $A$  e  $B$ ) e viene definito così:

il  $G(f)$  è uguale all'insieme di coppie  $a$  e  $b$  ristretto alle  $a$  appartenenti ad  $A$ , ed alle  $b$  appartenenti a  $B$ , dove  $f(a) = b$

$$G(f) = (a, b) | a \in A, b \in B, f(a) = b$$

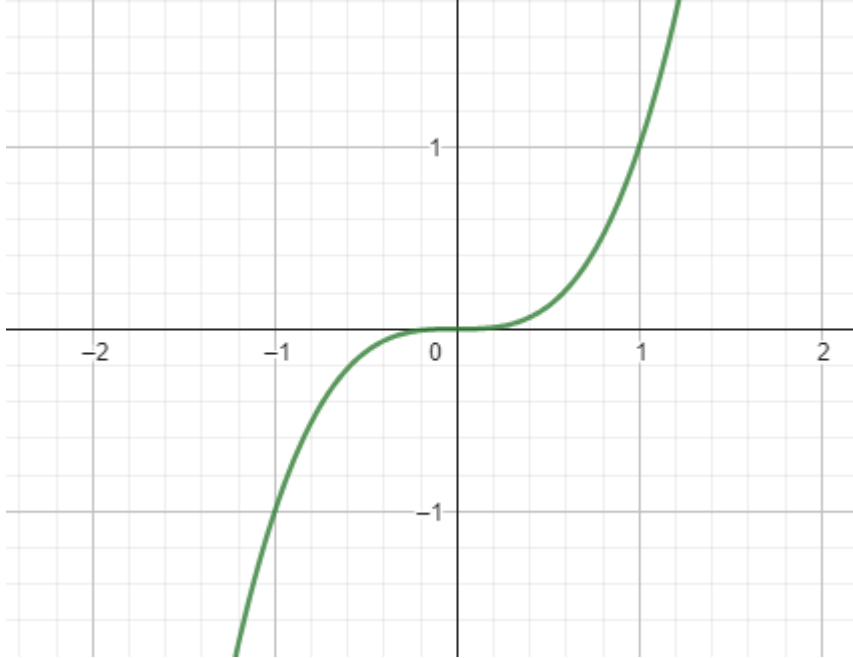
## Iniettiva

Una funzione si dice iniettiva quando nessuna delle ordinate si incrocia con più di un punto della funzione.

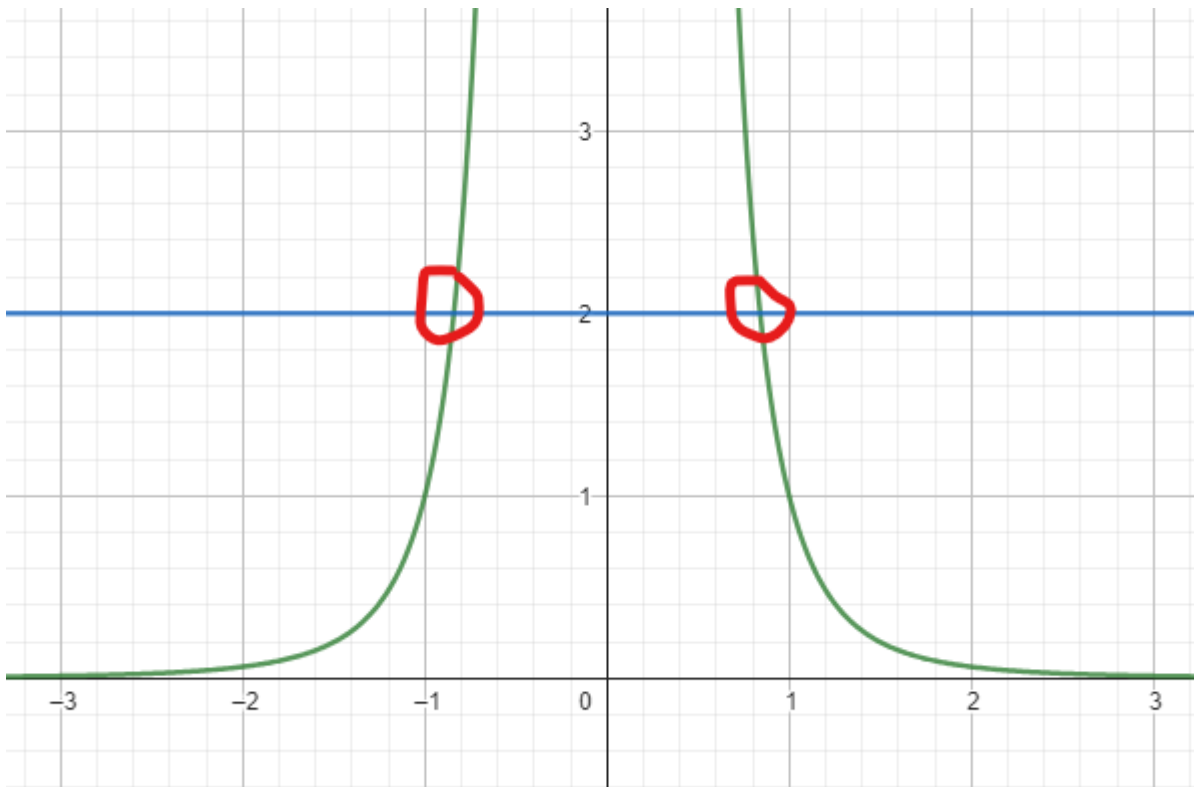
Quindi  $f : A \rightarrow B$  si dice iniettiva se per ogni  $a_1, a_2$  appartenente all'insieme  $A$ ,  $a_1$  è diverso da  $a_2$  come  $f(a_1)$  è diverso da  $f(a_2)$

$$\forall a_1, a_2 \in A, [a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$$

## Iniettiva

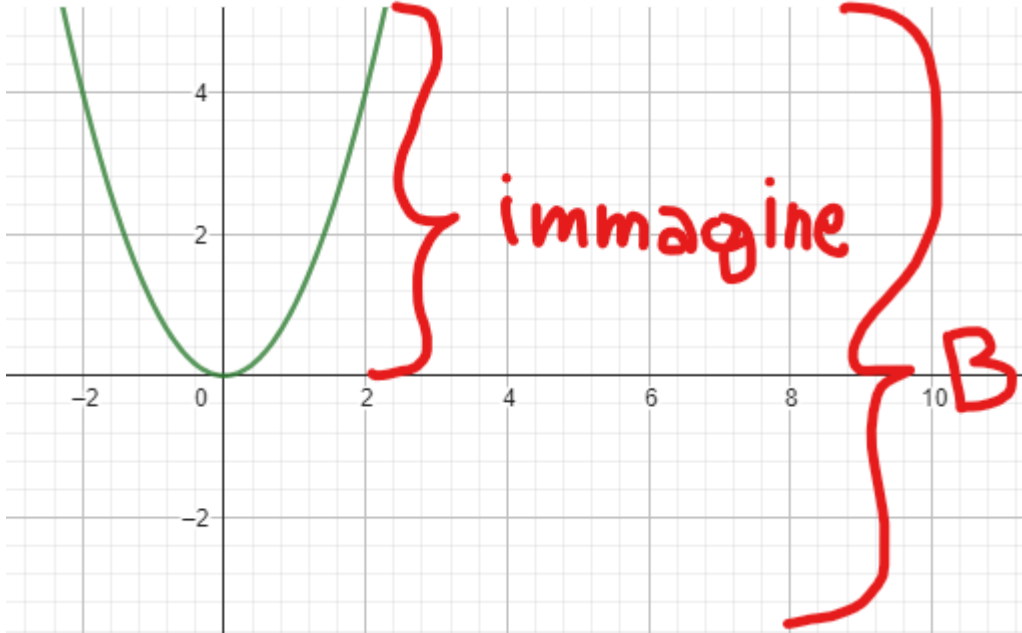


**non iniettiva**



## Suriettiva

Una funzione si dice suriettiva quando l'immagine della funzione corrisponde al codominio  $B$ ; quindi per ogni valore  $y$  del codominio vi è un valore  $x$  corrispondente della funzione.



quindi  $f : A \rightarrow B$  si dice suriettiva se per ogni  $b$  appartenente a  $B$ , esiste almeno un  $a$  appartenente ad  $A$  tale che  $f(a) = b$

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

## Biettiva / Biunivoca

Una funzione si dice biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva

per ogni  $y$  presente nel codominio (uguale all'immagine della funzione), è presente una sola  $x$  corrispondente tale che  $f(x) = y$

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$$

se la funzione è biunivoca possiamo ricavarne l'inversa  $f^{-1}(b) = a$  rappresentando la funzione inversa:

$$f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(b) = a \implies f(a) = b$$

## Funzioni composte

Una funzione composta sostanzialmente è la composizione, indicata dal simbolo  $\circ$ , per esempio avendo le due funzioni:

- $A \rightarrow f(a) \rightarrow B$  dove la funzione  $f$ , passa dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$
  - $B \rightarrow g(b) \rightarrow C$  dove la funzione  $g$ , passa dall'insieme  $B$  all'insieme  $C$
- possiamo creare una funzione composta  $g \circ f$ , che implicherà un passaggio dall'insieme  $A$  all'insieme  $C$ :

$$g \circ f : A \rightarrow C \implies (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

## Proprietà

- se sia  $f$  che  $g$  sono iniettive, allora anche la loro composizione  $g \circ f$  sarà iniettiva:

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2), g(a_1) \neq g(a_2) \implies (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$$

- se sia  $f$  che  $g$  sono suriettive, allora anche la loro composizione  $g \circ f$  sarà suriettiva:

$$\forall c \in C, \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$$

- se sia  $f$  che  $g$  sono biunivoche, allora anche la loro composizione  $g \circ f$  sarà biunivoca

## Composizione inversa

allo stesso modo della composizione  $g \circ f$  che ci fa passare dall'insieme  $A$  all'insieme  $C$ , esistono le composizioni inverse che ci fanno ritornare all'insieme di partenza:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

## Funzioni reali monotone

Una funzione monotona è una funzione con andamento, crescente o decrescente, che non cambia mai; in una funzione monotona crescente infatti non può esserci nemmeno un punto in cui la funzione decresca e viceversa, in sostanza le due leggi per una funzione monotona sono:

- crescente:  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$
- decrescente:  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$

bisogna anche fare una distinzione tra funzioni monotone strettamente cresc/decresc, e funzioni monotone debolmente cresc/ decresc:

- le funzioni strettamente monotone non hanno segmenti della funzione in cui la loro variazione può essere pari a 0, e quindi  $x_1$  sarà sempre o maggiore o minore di  $x_2$ ; la legge in particolare di queste è

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 < x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 > x_2$$

- le funzioni debolmente monotone invece hanno punti della funzione in cui rimangono invariate e quindi è possibile la condizione  $x_1 = x_2$ ; di conseguenza le leggi saranno:

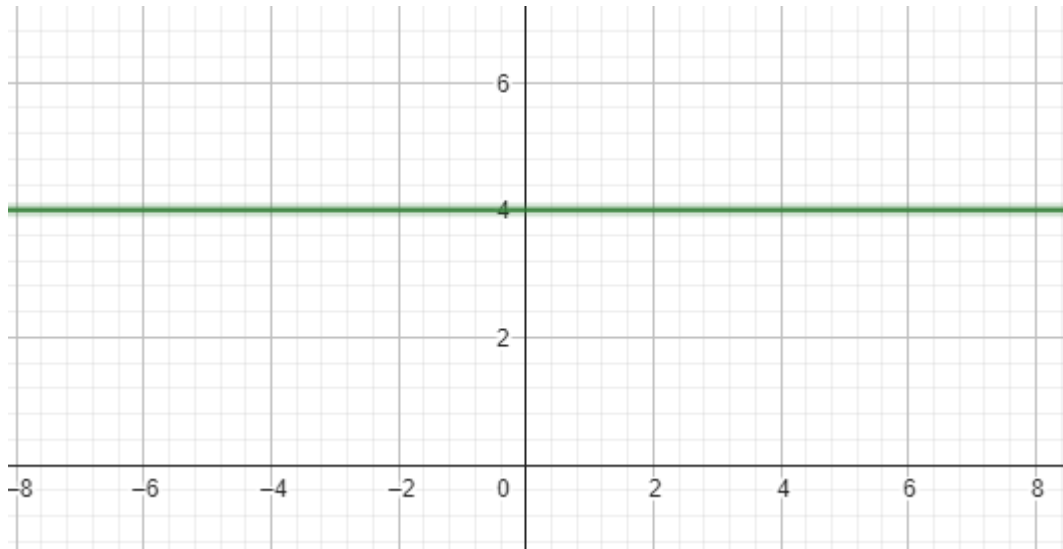
$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \leq x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1 \geq x_2$$

## caso particolare

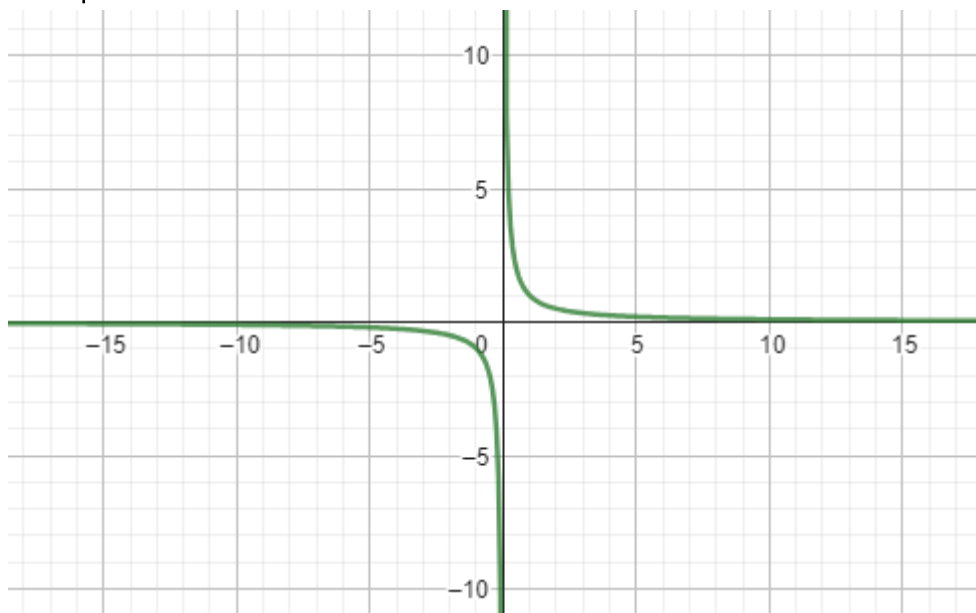
ovviamente una funzione come detto prima non può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente, ma al contrario può essere debolmente crescente e debolmente decrescente contemporaneamente; ciò accade quando una funzione non subisce alcuna variazione (costanti) rispettando

entrambe le leggi delle funzioni debolmente monotone, come per esempio:



## strettamente monotone & iniettività

una funzione strettamente monotona, quindi strettamente crescente o decrescente sarà sempre iniettiva; in quanto ne rispetta la legge; al contrario, non tutte le funzioni iniettive sono strettamente monotone, per esempio:



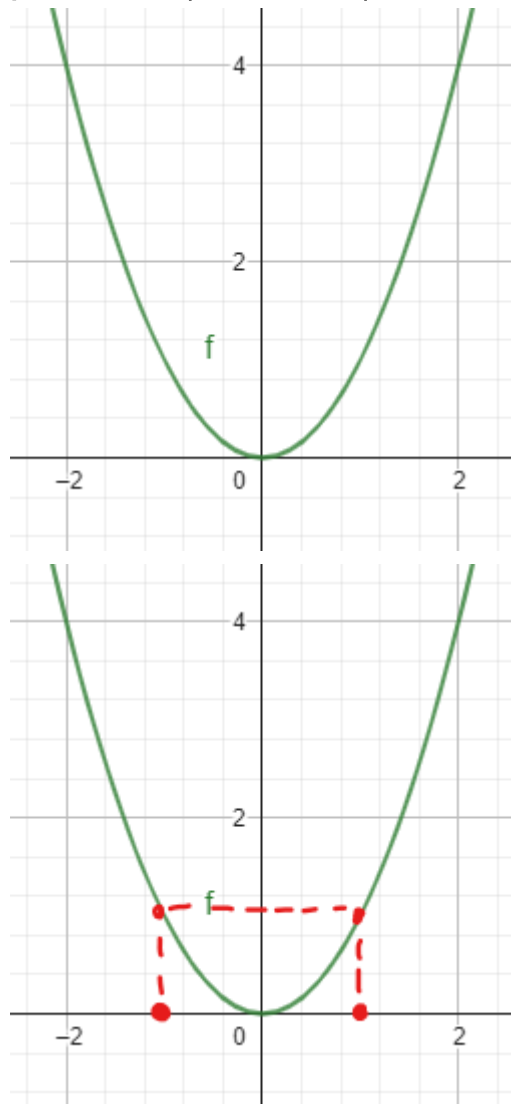
la funzione è iniettiva in quanto nessuna  $y$  incontra più di una  $x$  della funzione, ma allo stesso tempo non è strettamente monotona in quanto non mantiene un andamento crescente o decrescente, bensì si alterna.

---

## Funzioni simmetriche

le funzioni simmetriche sono coloro che si specchiano sul grafico e si dividono in due gruppi:

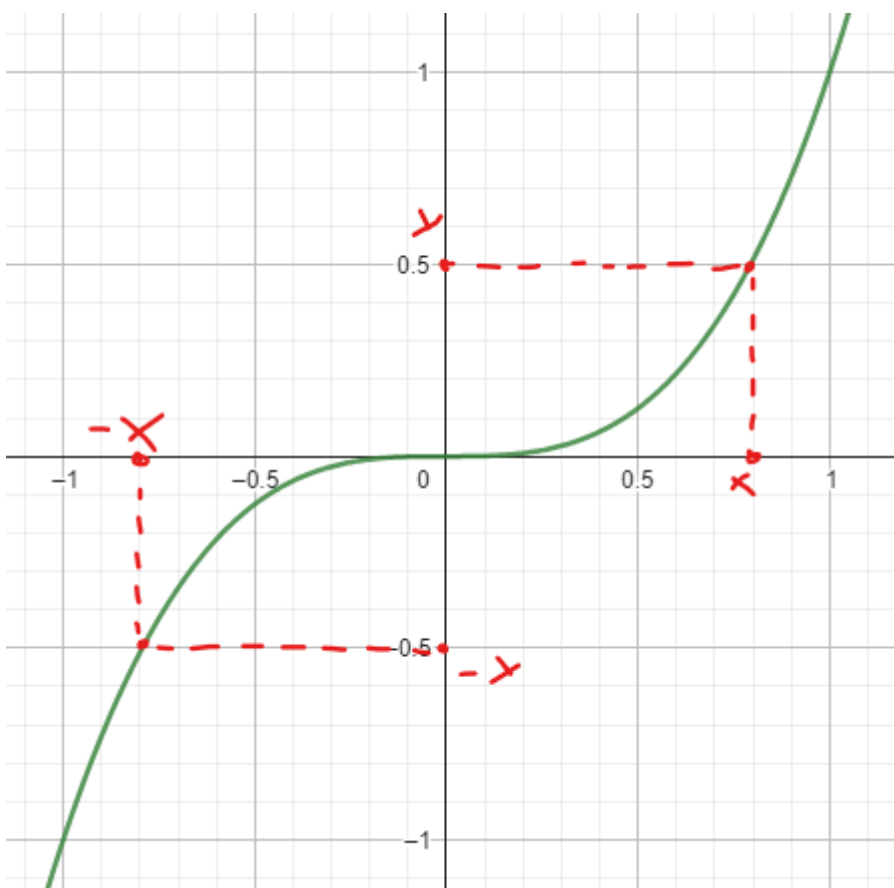
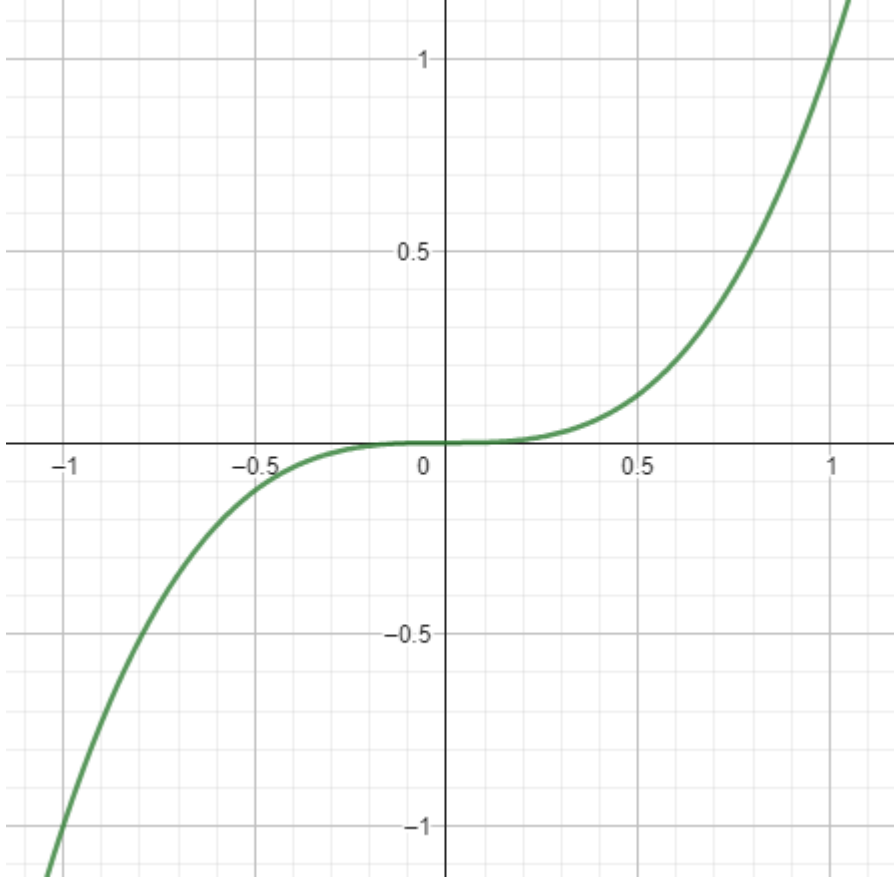
- **pari:** ovvero quelle che si specchiano sull'asse delle ordinate



nelle funzioni pari in particolare vediamo come sia ad  $x$  che al suo opposto corrisponde la stessa  $y$ , quindi possiamo ricavarne la legge:

$$\forall x \in A, f(x) = f(-x)$$

- **dispari:** ovvero quelle che si specchiano sull'origine



qua vediamo come ad  $x$  corrisponda una  $y$  che è esattamente l'opposto della  $y$  che corrisponde all'opposto di  $x$ , quindi possiamo ricavarne la legge:

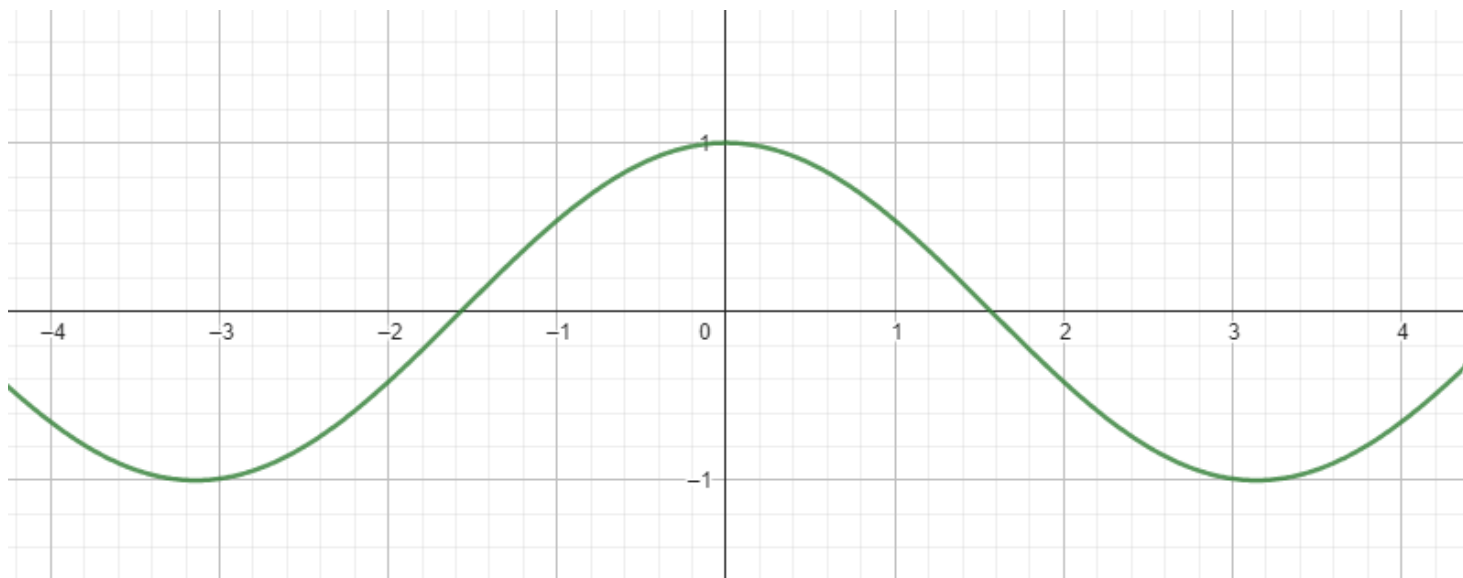
$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$$

## cos & sin

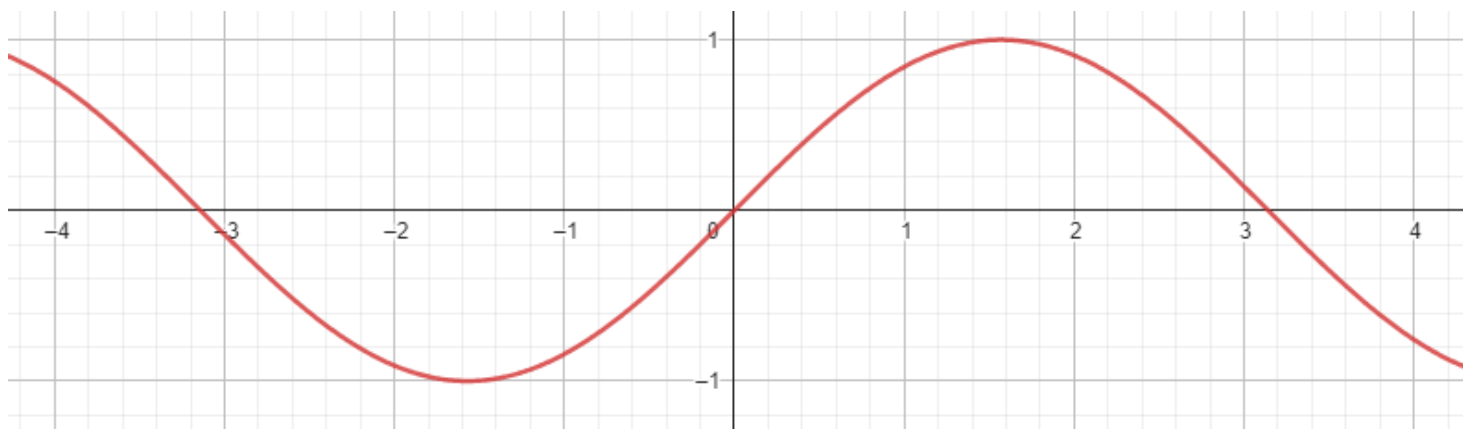
di conseguenza seguendo questi ultimi ragionamenti e leggi troveremo come i, coseno è pari, mentre il seno è dispari:



**cos(x)**



**sin(x)**

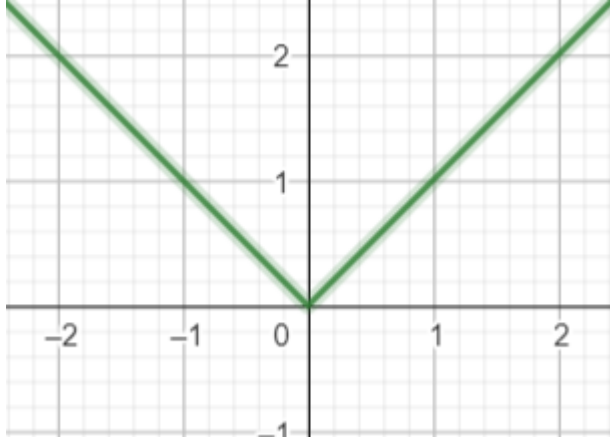


## Funzioni valore assoluto

La funzione valore assoluto  $f$  restituisce il valore massimo tra la  $a$  fornita alla funzione ed il suo opposto, quindi:  $f(a) = \max(a, -a) \rightarrow |a|$ ; di conseguenza avremo che la funzione si comporta nella seguente maniera:

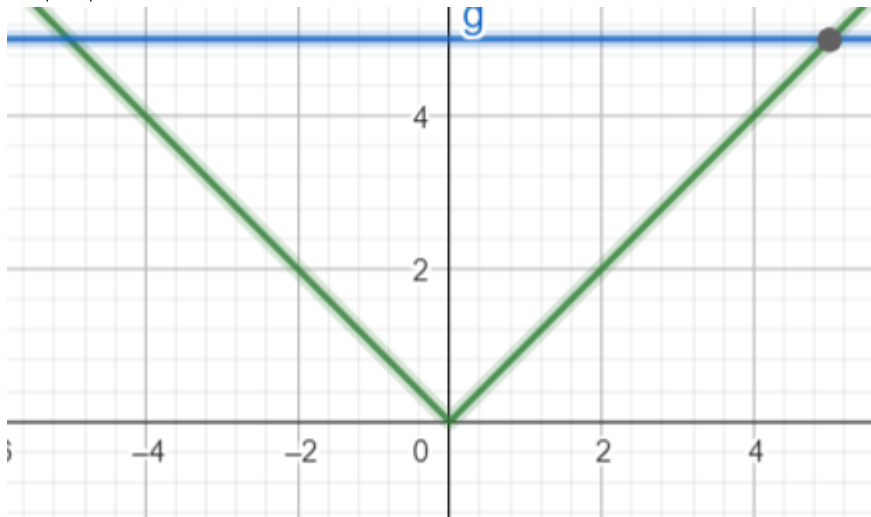
$$|a| = \begin{cases} a \rightarrow a \geq 0 \\ -a \rightarrow a \leq 0 \end{cases}$$

il grafico di tale funzione quindi sarà rappresentato solo nella parte positiva del grafico, dove la parte negativa verrà specchiata sull'asse delle ordinate, quindi prendendo in considerazione  $|x|$ :



## Proprietà

- $|a| = 0 \rightarrow a = 0$
- $-|a| \leq a \leq |a|$
- $|-a| = |a|$
- se  $|a| \leq b$  allora  $-b \leq a \leq b$ , con  $b$  che necessariamente deve essere  $b \geq 0$



## disuguaglianze triangolari

### prima

la prima disuguaglianza triangolare afferma che per ogni  $a, b$  appartenenti all'insieme  $\mathbb{R}$ , il valore assoluto di  $a + b$  è minore o uguale al valore assoluto di  $a$  più il valore assoluto di  $b$ :

dimostrazione:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases} \Rightarrow -( |a| + |b| ) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$|a| \leq b \implies -b \leq a \leq b$$

$$A = |a + b|, B = |a| + |b| \rightarrow |A| \leq B$$

$$A \leq B = |a + b| \leq |a| + |b|$$

## seconda

la seconda disuguaglianza triangolare di continuità afferma che il valore assoluto della differenza degli assoluti di  $a$  e  $b$ , per intenderci:  $||a| - |b||$ , è minore o uguale alla differenza assoluta tra i due

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

che andiamo a dimostrare utilizzando la prima disuguaglianza triangolare abbiamo:

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

qua andiamo ad utilizzare la prima disuguaglianza triangolare, e tenendo presente  $-B \leq A \leq B$  andiamo a verificare entrambi i simboli:

- prima verifichiamo  $A \leq B$  con:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

qua come possiamo vedere  $|a - b| = B$ ,  $|a| - |b| = A$ , di conseguenza  $A \leq B$

- poi verifichiamo  $-B \leq A$  prendendo l'opposto di  $|a - b|$  ovvero  $-B$  che è  $-|a - b|$

$$-|a - b| \leq |a| - |b|$$

così da ottenere appunto  $-B \leq A$

Infine otterremo così che  $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$ , ovvero, tenendo presente della nostra notazione:  $|a - b| = B$ ,  $|a| - |b| = A$ :

$$-B \leq A \leq B$$

e grazie a questa proprietà della funzione assoluta verifichiamo la seconda disuguaglianza triangolare di continuità.

## ricopiare esempi di esercizi

## Insiemi Numerici

una relazione sull'insieme  $\mathbb{X}$ , che è sottoinsieme dell'insieme  $\mathbb{R}$ , nel piano cartesiano formato da  $\mathbb{X} * \mathbb{X}$ , dove troviamo due punti  $x, y \in \mathbb{R}$ , questi due punti si dicono in relazione

## Relazioni di equivalenza

una relazione di equivalenza è tale se fra i due punti in relazione  $(x, y)$  vengono rispettate le 3 proprietà:

- **riflessiva**:  $x$  in relazione con  $x$ , che si scrive  $\forall x \in \mathbb{X} \quad x \simeq x$
- **simmetrica**:  $x$  in relazione con  $y$  e viceversa, si scrive  $\forall x, y \in \mathbb{X} \quad x \simeq y \implies y \simeq x$
- **transitiva**:  $x$  in relazione con  $y$ ,  $y$  in relazione con  $z$ , quindi  $x$  in relazione con  $z$ , si scrive:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{X} \quad x \simeq y, y \simeq z \implies x \simeq z$$

i punti  $(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$  sono in relazione tra loro se rispettano il criterio:  $x - x_0 = y - y_0$   
data questa nozione di equivalenza si dice classe di equivalenza:  $[x] = y \in \mathbb{X} : y \simeq x$

## Relazioni d'ordine

una relazione d'ordine tra due insiemi si denota con il simbolo  $\leq$  di precedenza, e si dice che un insieme X preceda nell'ordine un altro insieme se sono rispettate le proprietà:

- riflessiva
- transitiva
- **anti-simmetrica**: ovvero  $x \leq y, y \leq x \implies x = y$

## esempio

avendo  $\mathbb{U}, \mathbb{X} = P(\mathbb{U})$  dove X è l'insieme della parti di U, abbiamo che  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in P\mathbb{U}$ , da qui possiamo constatare che:

- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$  se ogni elemento di A è elemento anche di B
- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$  e  $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$  se  $\mathbb{A} = \mathbb{B}$
- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$  e  $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$  quindi  $\implies \mathbb{A} \leq \mathbb{C}$

## Relazione d'ordine totale

una relazione d'ordine si dice totale quando gli elementi sono confrontabili

## Insieme numeri reali

Partendo dalla dichiarazione:  $(\mathbb{X}, +, *, \leq)$  dove il + ed il \* vanno ad indicarci la presenza di 4 assiomi per simbolo, mentre il  $\leq$  va ad indicarci che la composizione interna dell'insieme è una relazione d'ordine totale. In totale gli assiomi dell'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{R}$  è composto da 11 assiomi.

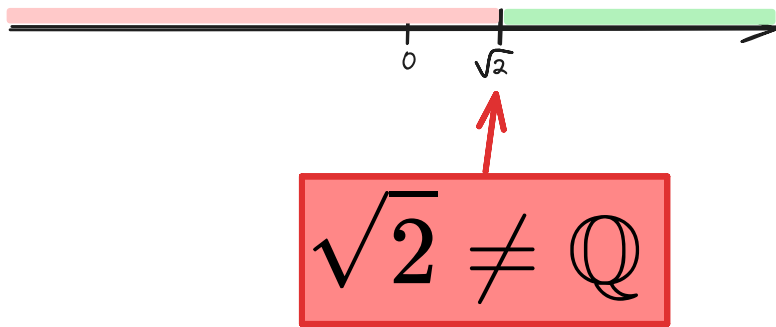
Assioma: Principio evidente per sé, e che perciò non ha bisogno di esser dimostrato, posto a fondamento di una teoria deduttiva

Per definire l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{N}$  bisogna definire un 12° assioma, detto Assioma di Dedekind, che dice che per ogni  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{R}$  tali che  $\forall a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}, a \leq b$  allora esiste un elemento  $c \in \mathbb{R}$  tale da separare i due insiemi, e quindi:  $\forall a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}, a \leq c \leq b$ , questo viene chiamato anche assioma dell'elemento separatore.

$\mathbb{X} = \mathbb{Q}$  insieme dei numeri razionali

$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \vee x^2 \leq 2\}$

$\mathbb{B} = \mathbb{Q}/\mathbb{A}$



$\sqrt{2}$  non è razionale quindi non è separatore, per tanto è nell'insieme A o in B, sistenendo:

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  e che esiste un  $c \in \mathbb{Q}^+ : c^2 < 2$  allora:

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ : \left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

ciò vuol dire che c è un razionale positivo, il quale il quadrato è minore di 2, ma aggiungendo a c un infinitesimo e ne facciamo il quadrato, avremo sempre un numero  $< 2$  ma più vicino, quindi non esiste un numero separatore razionale.

## Maggioranti

Un insieme A si dice limitato superiormente se ammette maggioranti M, quindi ogni a appartenente ad A, deve essere minore di ogni elemento dell'insieme dei maggioranti:

$$\forall a \in \mathbb{A}, a \leq M$$

l'insieme dei maggioranti di A si indica con il simbolo:  $\mathbb{M}_{\mathbb{A}}$ .

per esempio l'insieme  $\mathbb{N}$  non è limitato superiormente quindi non ammette maggioranti.

## L'esistenza del massimo

Oltre a ciò dobbiamo tenere in considerazione la possibile esistenza di un massimo dell'insieme A, mettendo caso che  $\mathbb{A} = (-\infty, 1]$ , ovvero l'insieme A comprende tutti i numeri da meno infinito ad 1 compreso, sappiamo perfettamente che il massimo di questo insieme sarà 1; ma mettendo il caso che  $\mathbb{A} = (-\infty, 1[$  allora il massimo dell'insieme A sarà un numero infinitamente vicino ad 1 ma pur sempre  $< 1$ , e per l'assioma del numero separatore sappiamo che esisterà sempre un numero più vicino di un altro ad 1 ma comunque  $< 1$ ; quindi in questo caso l'insieme A non ha massimo.

nota bene: il massimo dell'insieme:  $\max(\mathbb{A})$  è uguale al minimo dell'insieme dei maggioranti dell'insieme di A:  $\min(\mathbb{M}_{\mathbb{A}})$ ; quindi  $\max(\mathbb{A}) = \min(\mathbb{M}_{\mathbb{A}})$

## Minoranti

stessa roba dei maggioranti vale per i minoranti, ovviamente qua parliamo di limiti inferiori e si tratta di seguire la regola:

$$\forall a \in A, a \geq m$$

## l'esistenza del minimo

allo stesso modo, se abbiamo un insieme  $A = ]-1, +\infty)$  avremo che l'insieme A non ha un minimo in quanto per l'assioma di dedekind

nota bene: il minimo dell'insieme:  $\min(\mathbb{A})$  è uguale al massimo dell'insieme dei minoranti dell'insieme di A:  $\max(\mathbb{m}_{\mathbb{A}})$ ; quindi  $\min(\mathbb{A}) = \max(\mathbb{m}_{\mathbb{A}})$

## Insieme dei numeri immaginari e complessi

L'insieme dei numeri immaginari serve a dare soluzione a quelle operazioni che di fatto non hanno soluzione; l'intero insieme è basato sull'equazione  $x^2 + 1 = 0$  che vorrebbe a dire  $x = \sqrt{-1}$  che è impossibile negli insiemi  $\mathbb{R}$  ed  $\mathbb{N}$ , quindi si attribuisce ad una variabile immaginaria  $i$  il valore di  $\sqrt{-1}$ , di conseguenza

$$i^2 = -1$$

## Numeri complessi

Un numero complesso è un numero composto da un numero reale ed un numero immaginario, quindi si dice che l'insieme dei numeri complessi ( $\mathbb{C}$ ) è composto nella seguente maniera:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

quindi vi è un'inclusione stretta di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ ; il numero complesso viene indicato dalla variabile  $z$ , che è di conseguenza composta dalla parte reale e dalla parte immaginaria  $i$ .

## Operazioni

- la somma tra due  $z$  avviene sommando separatamente parti reali ed immaginarie:

$$(3 + 4i) + (5 - 7i) = (3 + 5) + (4 - 7)i = 8 - 3i$$

- la moltiplicazione tra due  $z$  avviene come un semplice prodotto di somme che già conosciamo, ricordando però che  $i^2 = -1$ , di conseguenza:

$$(3 + 4i) * (5 - 7i) = 15 - 21i + 20i - 28 * i^2 = 15 - 21i + 20i - (28 * -1) = 15 - i + 28 = 43 - i$$

- il **reciproco** di  $z$ , ovvero quello che si solito scriveremmo come  $\frac{1}{z}$  viene calcolato in questo caso attraverso la formula:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

per esempio il reciproco di  $z = 3 + 4i$  (ovvero quel numero che moltiplicato per  $z$  restituisce 1) lo calcoliamo così:

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3}{9 + 16} - \frac{4}{9 + 16}i = \frac{3 - 4i}{25}$$

e possiamo verificarlo semplicemente moltiplicandolo per  $z$ . (se restituisce 1 è verificato)

- coniugato di  $z$  è quel numero che conserva la parte reale di  $Z$  ma ha opposta parte immaginaria, se

$$z = 3 + 4i \rightarrow \bar{z} = 3 - 4i$$

- il modulo di  $Z$  si fa applicando la radice quadrata alle due parti di  $Z$  elevate entrambe alla seconda (valore assoluto), quindi:  $|z| = \sqrt{\text{Re}z^2 + \text{Im}z^2}$ , per esempio:

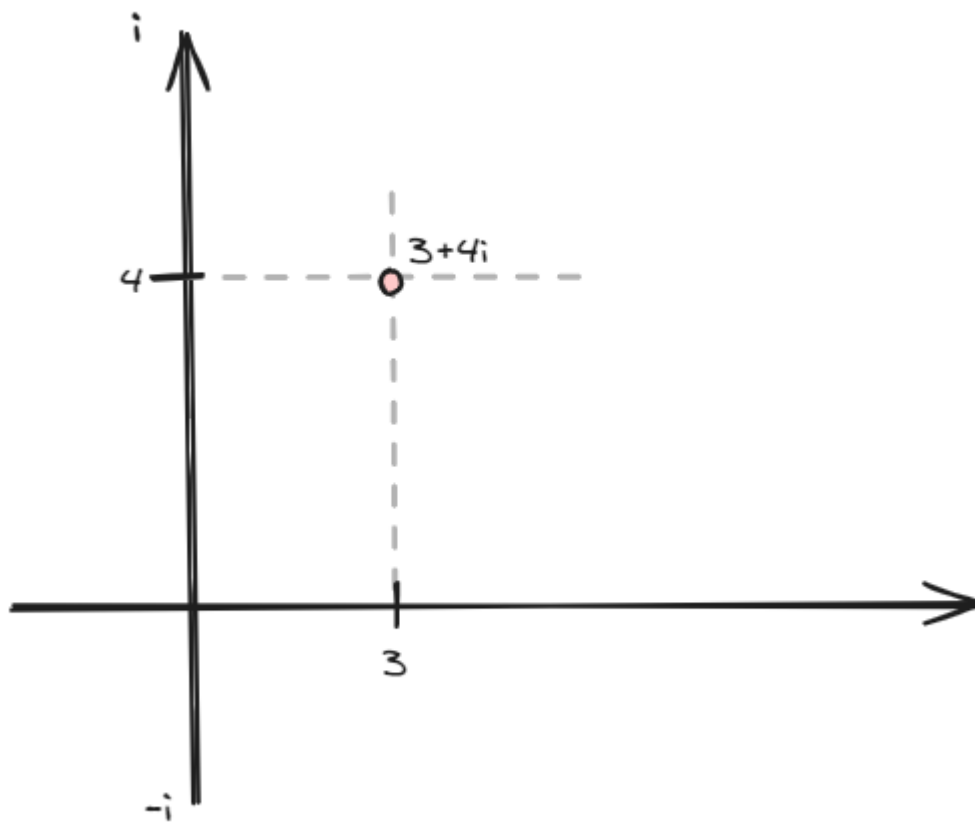
$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

## proprietà

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z * w} = \bar{z} * \bar{w}$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z = -\bar{z} \implies \text{Re}z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z * w| = |z| * |w|$
- $z * \bar{z} = |z|^2$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $\frac{w}{z} = w * \frac{1}{z} = w * \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{w * \bar{z}}{|z|^2}$
- $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$

## Piano di Gaus

il piano di gaus è un piano cartesiano dove la  $i$  viene rappresentata sulla delle ordinate ( $y$ ); quindi per esempio avendo  $z = 3 + 4i$  avremo:



se sei curioso [piano di gaus](#)

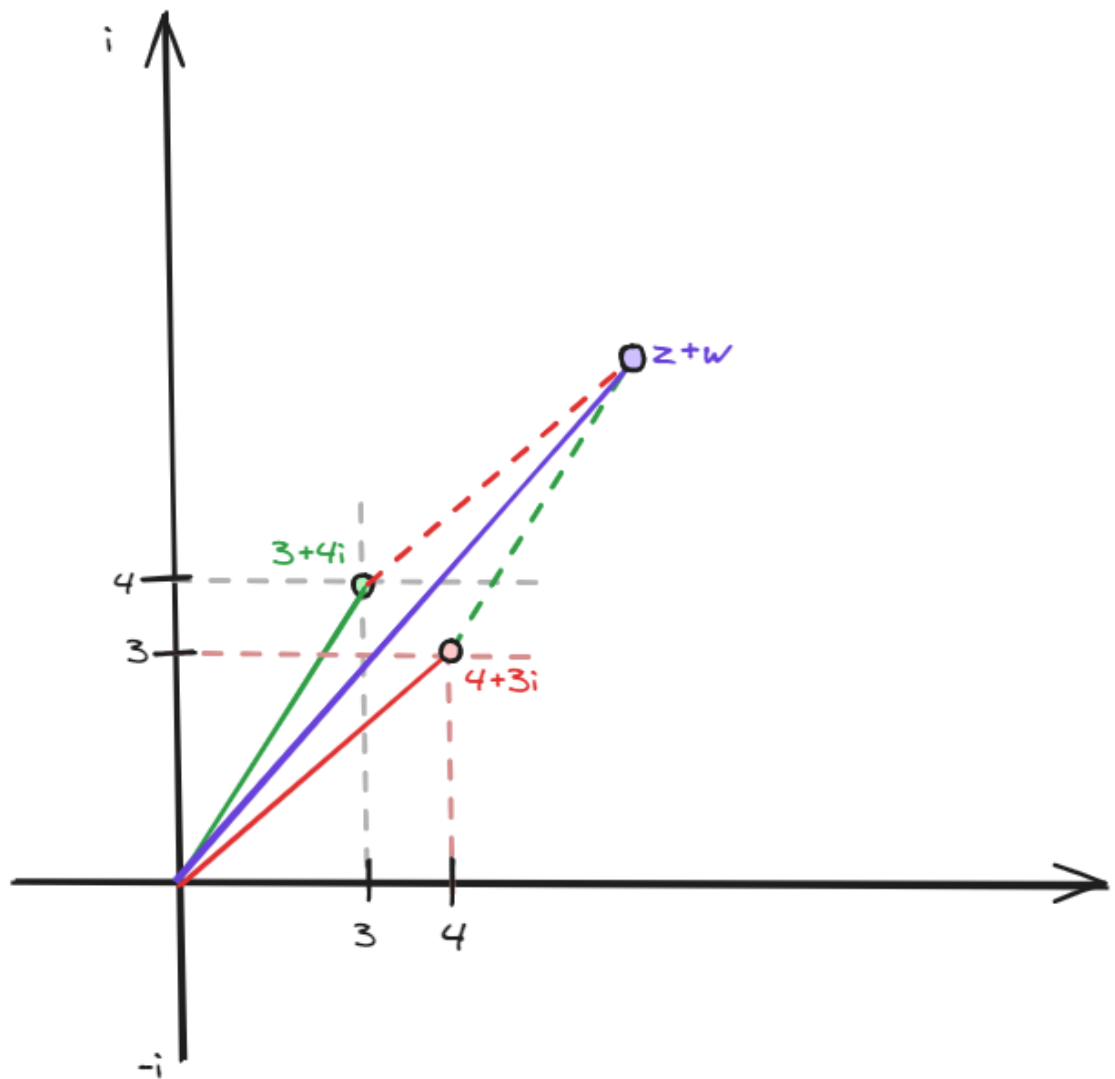
Sempre con il piano di gaus possiamo ottenere la somma geometrica di due numeri complessi  $z + w$ , completando il parallelogramma come formano i due segmenti complessi e facendone il modulo (il modulo



di un numero complesso restituisce la distanza tra quel punto e l'origine del piano):

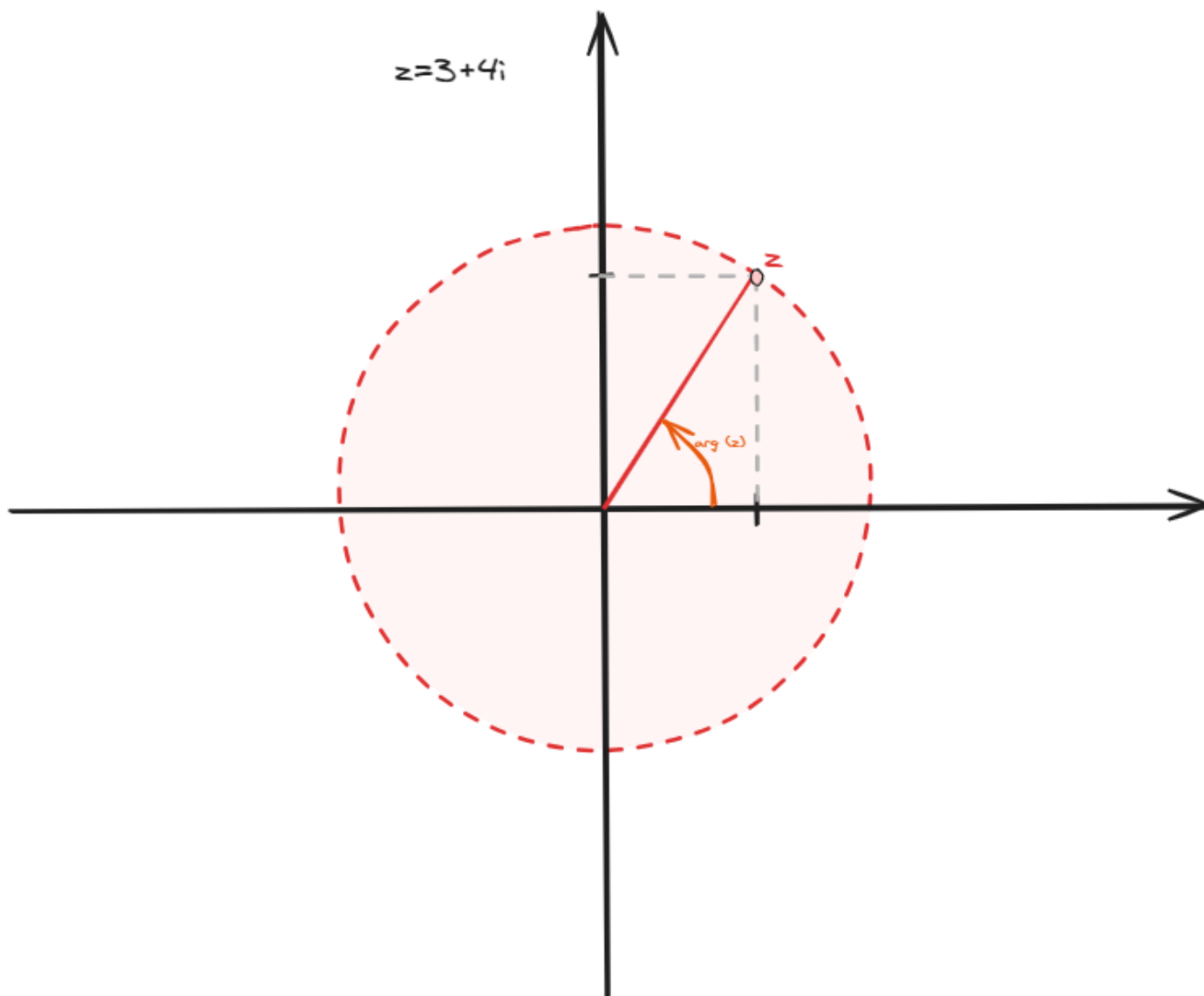
$$z = 3+4i$$

$$w = 4+3i$$



## Forma trigonometrica

Chiamiamo argomento di  $z$  ( $\arg(z)$ ) di un numero complesso  $z$  appartenente all'insieme dei numeri complessi (escluso lo 0), la misura in radianti dell'angolo formato tra la semiretta passante per 0 e  $z$  ed il semiasse positivo reale.



quindi se la condizione  $z \neq 0$  viene rispettata si può constatare che:

$$z = |z| (\cos(\arg(z)) + i * \sin(\arg(z)))$$

si chiama forma trigonometrica di un numero la scrittura di esso sotto la forma:

$$z = p(\cos o + i * \sin o)$$

dove  $p > 0$  e  $o \in \mathbb{R}$ ; in questo caso  $p$  è il modulo di  $z$  e  $o$  ne è l'argomento.

Per passare dalla forma algebrica alla trigonometrica, se abbiamo  $z$  diverso da 0, avremo che:

$$p = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e calcoleremo coseno e seno con la seguente formula:

$$\begin{cases} \cos o = \frac{\Re_z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin o = \frac{\Im_z}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

ovviamente l'argomento di  $z$  deve essere compreso tra 0 e  $2\pi$ .

NOTA BENE:

- $\bar{z} = \rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $z^n = \rho^n (\cos(n * \theta) + i \sin(n * \theta))$
- se  $w^n = z$  allora  $R^n = \rho \rightarrow R = \rho^{\frac{1}{n}}$
- $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ ,  $w = R(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$  allora:

$$z * w = (\rho * R)(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))$$

- allo stesso modo avendo  $\frac{z}{w}$  avremo:

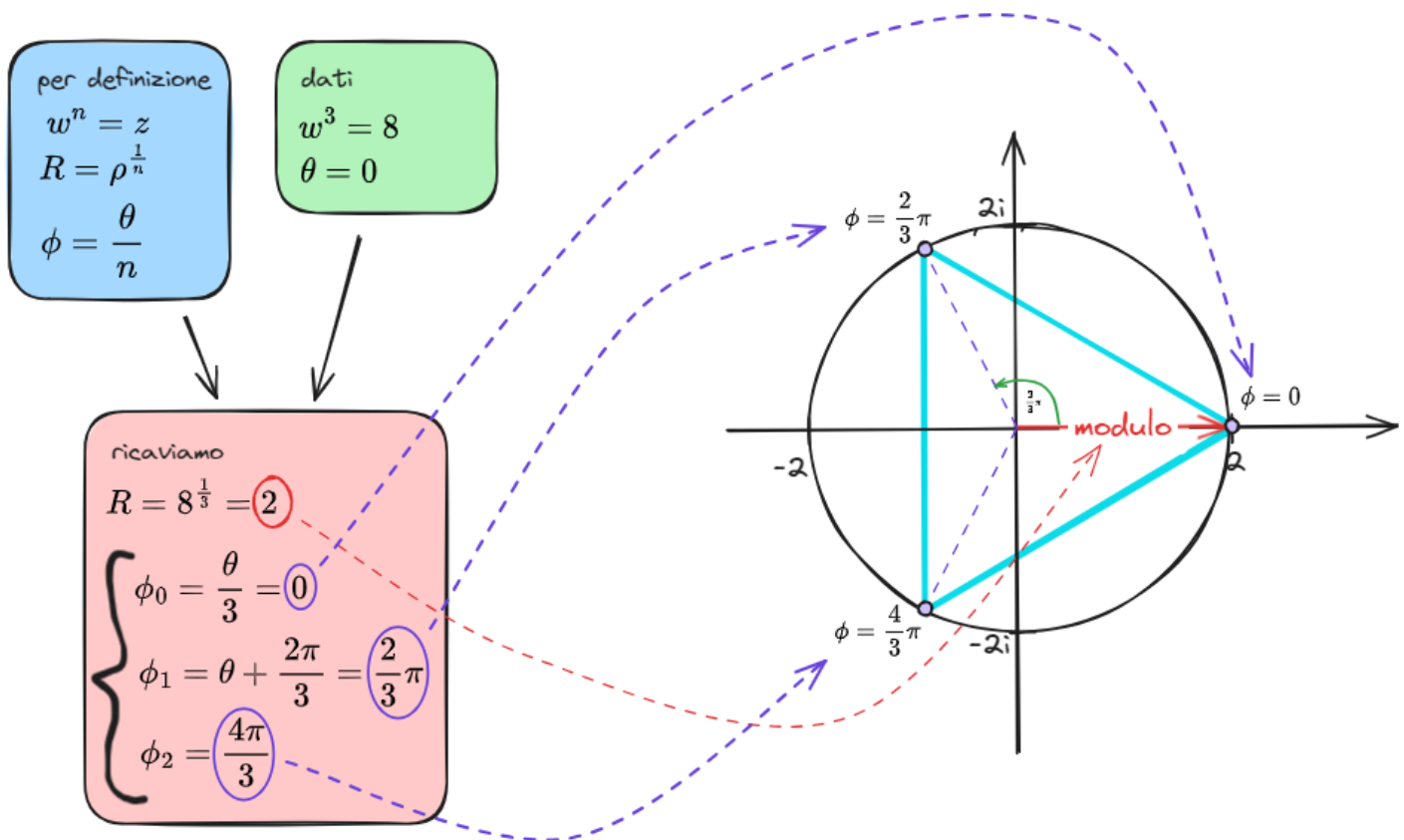
$$z * w = \frac{\rho}{R} (\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi))$$

Moltiplicare due numeri complessi, come  $w$  e  $z$ , comporta una rotazione e un cambiamento di dimensione sul piano complesso. Se  $w$  ha modulo 1, il prodotto  $wz$  risulta in una rotazione di  $z$  attorno all'origine di un angolo pari a  $\arg(w)$ . Ad esempio, moltiplicare  $z$  per  $i$  lo ruota di un quarto di giro in senso antiorario. Se  $w$  ha un modulo diverso da 1, oltre alla rotazione,  $z$  viene anche dilatato o compresso in base al modulo di  $w$ .

## Radici N-esime di un numero complesso

le radici n-esime di un numero complesso si ottengono "sparpagliando"  $n$  numeri complessi lungo una circonferenza, tutti con lo stesso modulo, ma con angoli differenti che si trovano aggiungendo multipli di  $2\pi/n$ .

esempio:



## Teorema fondamentale dell'algebra

Il **Teorema Fondamentale dell'Algebra** afferma che ogni polinomio di grado  $n$  con coefficienti complessi ha esattamente  $n$  soluzioni (dette radici) nei numeri complessi, tenendo conto delle loro molteplicità. Questo significa che se hai un polinomio del tipo  $P_n(z)$ , dove  $z$  è un numero complesso e il grado del polinomio è  $n$ , ci saranno  $n$  soluzioni complesse per l'equazione  $P_n(z) = 0$ .

Ora, se il polinomio ha **coefficienti reali** (anziché complessi), succede una cosa interessante. Se una radice del polinomio è un numero complesso non reale (cioè appartiene ai numeri complessi, ma non ai numeri reali), allora anche il **coniugato** di quel numero complesso sarà una radice del polinomio.

Questo accade perché i polinomi a coefficienti reali hanno una proprietà simmetrica rispetto ai numeri complessi: se una radice è complessa, anche il suo coniugato deve esserlo, con la stessa molteplicità.

## Principio del minimo intero

il principio del minimo intero esprime il buon ordinamento dei numeri naturali.

Applicando il teorema di esistenza dell'estremo superiore si dimostra che ogni insieme  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$  (ovvero  $A$  sottoinsieme di  $\mathbb{N}$ ) che è non vuoto ha un minimo.

## Principio di induzione

Il principio di induzione serve a dare senso alle definizioni ricorsive, ed è utile nella verifica di proprietà che dipendono da un numero naturale.

Se abbiamo un insieme  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$  che verifica:

- $0 \in \mathbb{S}$
  - $\forall n \in \mathbb{S} \implies n + 1 \in \mathbb{S}$
- allora  $\mathbb{S} = \mathbb{N}$

esempio:

mettendo che volessimo definire il fattoriale (!), sappiamo che la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  è data da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = (n+1) * f(n) \text{ se } n \geq 0 \end{cases}$$

quindi come possiamo vedere verificando la funzione  $f(n_0)$  e la funzione di  $f(n)$ , possiamo verificare la funzione di  $f(n+1)$  semplicemente paragonandola alla funzione  $f(n)$  già verificata:

$$f(n) = 1 * 2 * 3 * 4 * \dots * n$$

$$f(n+1) \text{ non verificata, ma } f(n) * (n+1) \text{ è verificata}$$

$$\text{di conseguenza anche } f(n+1) \text{ viene verificata}$$

## Principio di induzione applicato ai predicati

Il principio di induzione applicato ai predicati viene utilizzato per dimostrare la verità di una proposizione  $P(n)$ , definita su numeri naturali, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Vediamo di spiegare come viene applicato.

Il principio di induzione dice che, se si hanno le seguenti due proprietà per un predicato  $P(n)$ :

1. **Base:**  $P(0)$  è vero (ossia la proposizione è vera per il caso base, solitamente  $n = 0$ ).
2. **Passo induttivo:** per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , se  $P(n)$  è vero, allora risulta vero anche  $P(n+1)$ .

Se queste due proprietà sono soddisfatte, possiamo concludere che  $P(n)$  è vero per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Questo procedimento funziona perché la base  $P(0)$  fornisce il punto di partenza, e il passo induttivo ci permette di estendere la verità del predicato a tutti i numeri naturali.

## Ricaviamo il principio di induzione dal principio del minimo intero

- **principio del minimo intero:** ogni sottoinsieme non vuoto dei numeri naturali ha un elemento minimo.
- Vogliamo dimostrare che una proposizione  $P(n)$  è vera per un valore iniziale  $n_0$ , e se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  la verità  $P(n)$  implica la verità  $P(n + 1)$ , allora  $P(n)$  è vera per tutti i numeri naturali.
- Supponiamo per assurdo che esista un valore  $n$  per cui  $P(n)$  non è vero, e prendiamo in considerazione l'insieme  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è falso}\}$ , di conseguenza sappiamo che  $S$  non è vuoto perché vi è almeno un elemento  $n$ .
- Utilizzando il principio del minimo intero su  $S$  (insieme non vuoto di  $\mathbb{N}$ ), sappiamo che esiste un numero minimo  $m \in S$  tale che  $P(m)$  è falso, ma per ogni  $k < m$ ,  $P(k)$  è vero.
- Sapendo che  $P(n_0)$ , dove  $n_0$  è il valore iniziale, è verificato, e quindi non può essere  $m = n_0$ , di conseguenza  $m > n_0$ .
- ora che sappiamo che  $P(m - 1)$  è vero, in quanto  $m$  è il valore minimo per cui  $P(m)$  risulta falso. Ma dall'ipotesi del principio di induzione, se  $P(m - 1)$  è verificato, allora anche  $P(m - 1 + 1) = P(m)$  dovrebbe esserlo; ciò va così a contraddire la scelta di  $m$  come elemento minimo di  $S$ .
- Quindi la nostra assunzione iniziale, ovvero che esiste un numero minimo  $m$  tale che  $P(m)$  sia falso, porta ad una contraddizione; portandoci così a concludere che  $S$  sia un insieme vuoto, e che quindi non esistono numeri naturali  $n$  per cui  $P(n)$  sia falso; di conseguenza  $P(n)$  è verificato per tutti i naturali. In conclusione riusciamo a derivare il principio di induzione dal principio del minimo intero per assurdo; ovvero che se una proprietà  $P$  fosse falsa per un qualunque numero naturale  $n$ , esisterebbe un numero naturale minimo per cui la proprietà è falsa, ma ciò porterebbe ad una contraddizione con l'ipotesi del passo induttivo. Di conseguenza la proprietà deve essere verificata per tutti i naturali.

---

## Calcolo combinatorio


### Fattoriale

Il fattoriale (!) è un'operazione ricorsiva di moltiplicatoria, viene definita in  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  attraverso appunto alla formula:

$$!n = \prod_{i=1}^n i \implies !n = 1 * 2 * \dots * n$$

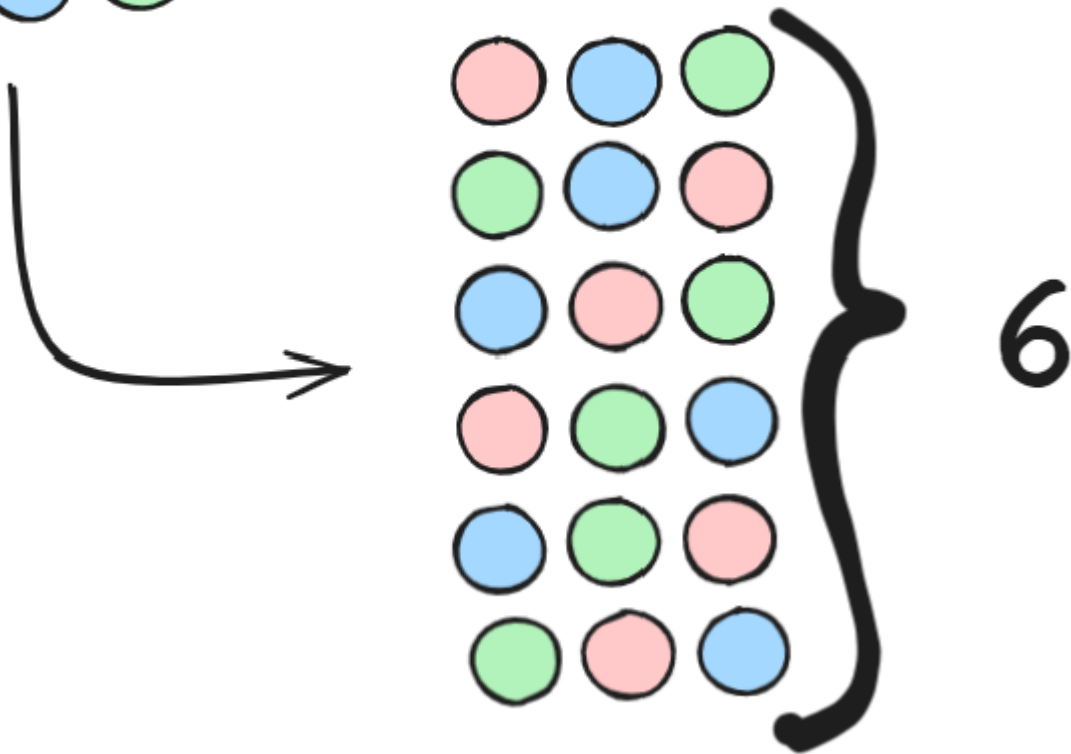
### Permutazione

Una permutazione di  $n$  oggetti  $P(n)$  è il numero di possibili combinazioni nelle quali possiamo sistemare questi  $n$  oggetti; e viene calcolato tramite il fattoriale.

$$n = 3$$


$$!n = 1 * 2 * \dots * n$$

$$!3 = 1 * 2 * 3$$



## Nozioni di disposizione

Presi due  $k, n \in \mathbb{N}$  dove  $1 \leq k \leq n$ , le disposizioni di  $n$  oggetti,  $k$  alla volta, e viene segnato in questo modo:  $D_{n,k}$ , o anche coefficiente binominale  $\binom{n}{k}$  ovvero tutte le varie possibili combinazioni di di  $k$  oggetti scelti tra  $n$  oggetti; tale valore viene calcolato con la formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

## Combinazioni

Volendo invece prendere le combinazioni di  $n$  oggetti presi  $k$  alla volta, ovvero il numero di modi diversi in cui posso scegliere  $k$  oggetti in un insieme di  $n$  oggetti, dobbiamo partire da  $D_{n,k}$  che è uguale al prodotto tra le combinazioni che cerchiamo e le permutazioni di  $k$  oggetti:

$$D_{n,k} = C_{n,k} * P_k$$

di conseguenza possiamo ricavare la formula inversa per le combinazioni di  $k$  in  $n$ :

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

## Binomio di newton

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+ \rightarrow (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$$

## Proprietà dei coefficienti binomiali

- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
- proprietà di tartaglia:  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

## Probabilità finita

ovvero le probabilità che un evento favore accada, in n possibilità di eventi possibili, tale valore è dato proprio dal rapporto di quest'ultimi:

$$P = \frac{\text{eventi favorevoli}}{\text{eventi possibili}} \rightarrow P \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

l'evento complementare è il risultato della sottrazione tra 1, ovvero "evento che accade con assoluta certezza" e la probabilità dell'evento favorevole, e ci va indicare le probabilità che l'evento favorevole non avvenga:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

## Indipendenza degli eventi

significa che la probabilità che avvenga un evento favorevole A, sapendo che si verifica un altro evento favorevole B, non cambia:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

quindi per eventi indipendenti tra loro, la probabilità dell'intersezione  $P(A \cap B)$  è il prodotto delle probabilità:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$