Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitazioni:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione I - Vettori, unitá di misura, errori

A. Analisi dimensionale

Esercizio 1: *Grandezze fondamentali - S.I.*

(a) Nota la relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ determinare le dimensioni di una forza in termini delle grandezze fondamentali massa M, lunghezza L, tempo t.

(b) Nota la relazione $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ determinare le dimensioni della *costante di gravitazione universale* in termini delle grandezze fondamentali massa M, lunghezza L, tempo t.

$\left[(a). \quad [F] = [M][L][T^{-2}]. \qquad (b). \quad [G] = [L^3][T^{-2}][M^{-1}].\right]$

Esercizio 2: *Analisi dimensionale*

Determinare da quali parametri può dipendere il periodo di un pendolo elastico conoscendo la legge di Hooke $F = kx$ e sapendo che l'unità di misura della massa m è il kg:
$\left[[m] = [kg], [k] = [N\dot{m}^{-1}], T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right]$

Esercizio 3: *Analisi dimensionale*

La costante di Rydberg R si misura in m^{-1}; essa é data da una combinazione della carica dell'elettrone $e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$, della sua massa $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}kg$, della velocitá della luce nel vuoto $c = 3 \cdot 10^8\frac{m}{s}$, della costante di Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\frac{kg \cdot m^2}{s}$ e della costante dielettrica nel vuoto $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N \cdot m^2}$.
Determinare l'espressione di R tramite un'analisi dimensionale e calcolarne il valore.

$\left[R = \frac{m_e \cdot e^4}{8\epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} = 1,095 \cdot 10^7 m^{-1}.\right]$

B. Vettori

Esercizio 4: *Somma e Differenza*

Si considerino i due vettori $\vec{a} = (4,4)$ e $\vec{b} = (-3,5)$

(a) Calcolare i moduli dei vettori e gli angoli che formano con l'asse x.

(b) Rappresentare graficamente e calcolare il vettore somma $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$.

(c) Rappresentare graficamente e calcolare i vettori differenza $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$.

$\Big[(a).\quad |\vec{a}| = 4\sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{34}, \quad \alpha = \frac{pi}{4} = 90^o, \quad \beta = \frac{21\pi}{10} = 121^o.$
$(b).\quad |\vec{v}| = \sqrt{82}, \quad \theta_v = 83,66^o.$
$(c).\quad |\vec{u}| = \sqrt{50}, \quad \theta_u = 351,87^o, \quad |\vec{w}| = \sqrt{50}, \quad \theta_w = 171,87^o.\Big]$

Esercizio 5: *Componenti*

Ad un corpo puntiforme sono applicate 3 forze, di componenti cartesiane

$$\vec{F_1} = (-2,-3) \qquad \vec{F_2} = (4,2) \qquad \vec{F_3} = (3,-3)$$

(a) Rappresentare su un opportuno riferimento cartesiano i tre vettori $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ e la risultante totale delle forze $\vec{F_{tot}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$.

(b) Calcolare le componenti e l'intensità di F_{tot} e l'angolo che forma con l'asse x.

$\Big[(b).\quad |\vec{F_{totx}}| = 5, \quad |\vec{F_{toty}}| = -4, \quad |\vec{F_{tot}}| = \sqrt{41}, \quad \theta = 321,34^o.\Big]$

Esercizio 6: *Somma, Prodotto Scalare e Vettoriale*

Sono assegnati i vettori $\quad \vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}, \quad \vec{b} = 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}, \quad \vec{c} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$

(a) Determinare il vettore somma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

(b) Determinare il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(c) Determinare il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$.

$\Big[(a).\quad \vec{s} = 2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 5\hat{k}. \qquad (b).\quad v = \vec{a} \cdot \vec{b} = 8. \qquad (c).\quad \vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = -4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 12\hat{k}.\Big]$

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitazioni:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione II - Vettori, unitá di misura, errori

D. Funzioni

Esercizio 1: *Grafici*

Rappresentare il grafico:

(a) Forza - Allungamento di una molla di costante k che viene allungata di $15cm$ e torna alla posizione di equilibrio.

(b) della forza in funzione della distanza per un satellite sottoposto all'attrazione gravitazionale terrestre.

(c) Spazio-tempo di un'auto che accelera da 0 a $25\frac{m}{s}$ in $10s$ per poi fermarsi repentinamente e tornare al punto di partenza in ulteriori $40s$ con un moto uniformemente accelerato che parte da velocità nulla. La funzione é continua? Crescente o decrescente?

Esercizio 2: *Grafici*

Rappresentare il grafico:

(a) tempo-velocità per un corpo che cade, partendo da fermo in un fluido viscoso di densità trascurabile e coefficiente di attrito viscoso β.

(b) Cosa succede alla velocità se una volta raggiunta la velocità limite nel fluido il medesimo corpo di cui al punto precedente entra in una regione con un fluido che ha coefficiente di viscosità doppio rispetto al precedente (e densità sempre trascurabile)?

(c) Spazio-tempo di un'auto che accelera da 0 a $25\frac{m}{s}$ in $10s$ per poi iniziare a decelerare con decelerazione costante fino ad invertire il senso di marcia e a raggiungere la posizione di partenza in $40s$.

Dire se le funzioni nei tre punti precedenti sono continue? Crescenti o decrescenti?

Esercizio 3: *Derivate*

Determinare le derivate delle funzioni rappresentate nei grafici di cui all' esercizio 2 e dire se sono funzioni continue crescenti o decrescenti. Che significato hanno queste derivate?

$\Big[(a).\quad v(t) = \frac{mg}{\beta}\left[1 - \exp\left\{-\frac{\beta}{m}t\right\}\right], \quad a(t) = g \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{m}t\right\}$
$(b).\quad v(t) = \frac{mg}{2\beta}\left[1 + \exp\left\{-\frac{\beta}{m}t\right\}\right], \quad a(t) = -\frac{g}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{m}t\right\}$
$(c).\quad t_1 = 10s; \quad a_1 = 2,5\frac{m}{s^2}; \quad S_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2; \quad v_1(t) = a_1t;$
$a_2 = \frac{2250}{1600}\frac{m}{s^2} \approx 1,406\frac{m}{s^2}; \quad S_2(t) = S_1(t_1) + a_1t_1t - \frac{1}{2}a_2(t-t_1)^2; \quad v_2(t) = a_1t - a_2(t-t_1)\Big]$

Esercizio 4: *Derivate*

I grafici in Figura 6 rappresentano tre moti. Il moto rappresentato dalla retta A è un moto rettilineo uniforme mentre i moti rappresentati dalle curve B e C sono composti da archi di parabole e sono moti uniformemente accelerati. Scrivere le equazioni del moto e tracciare i grafici di velocitá e accelerazione nei tre casi.
Determinare per ciascun caso i valori di velocitá e dell'accelerazione agli istanti $t_1 = 4s$ e $t_2 = 12s$.
Determinare se la funzioni $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ ottenute sono crescenti, decrescenti o costanti.

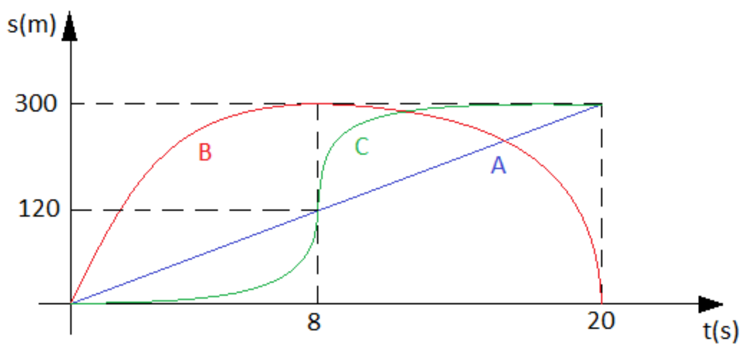


Figure 1: Funzioni posizione-tempo.

$\Big[(a).\quad S_A(t) = v_0t; \quad v_0 = 15\frac{m}{s}; \quad a(t) = 0\frac{m}{s^2};$
$v(4s) = v(12s) = 15\frac{m}{s}; \quad a(4s) = a(12s) = 0$

(b). $S_{B1} = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2$; $v_0 = 75 \frac{m}{s}$; $a_1 = \frac{75}{8} \frac{m}{s^2}$; $v(4s) = 37,5 \frac{m}{s}$; $a(4s) = -\frac{75}{8} \frac{m}{s^2}$
$S_{B2} = S_0 - \frac{1}{2} a_2 t^2$; $S_0 = 300m$; $a_2 = \frac{25}{6} \frac{m}{s^2}$; $v(12s) = -50 \frac{m}{s}$; $a(12s) = \frac{25}{6} \frac{m}{s^2}$
(c). $S_{C1} = -\frac{1}{2} a_1 t^2$; $a_1 = 3,75 \frac{m}{s^2}$; $v(4s) = 15 \frac{m}{s}$; $a(4s) = 3,75 \frac{m}{s^2}$
$S_{C2} = S_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a_2 t^2$; $S_0 = 120m$; $v_0 = 30 \frac{m}{s}$; $a_2 = 2,5 \frac{m}{s^2}$; $v(12s) = 20 \frac{m}{s}$; $a(12s) = -2,5 \frac{m}{s^2}$]

E. Errori di misura

Esercizio 5: *Errori relativi e percentuali*

Una semplice esperienza di fisica consiste nel misurare la lunghezza della parete di una stanza cubica, per poi calcolare il perimetro e l'area della superficie abitabile della stanza, dopodiché il volume.
La misura effettuata con una riga da $60cm$ dá come risultato $L = (6,000m \pm 0,010)m$; utilizzando un metro da muratore da $2m$ la lunghezza misurata é di $L = (6,000m \pm 0,003)m$.

Calcolare, nei due casi: gli errori relativi e percentuali sulle misure dirette e gli errori assoluti e relativi associati ai valori calcolati.

[(a). $\frac{\Delta L_R}{L_R} = 1,67 \cdot 10^{-3} = 0,167\%$, $\frac{\Delta L_M}{L_M} = 5 \cdot 10^{-4} = 0,05\%$.
(b). $\frac{\Delta A_R}{A_R} = 3,34 \cdot 10^{-3}$, $\frac{\Delta V_R}{V_R} = 5,01 \cdot 10^{-3}$, $A_R = (36,000 \pm 0,120)m^2$, $V_R = (216,000 \pm 1,082)m^3$.
(c). $\frac{\Delta A_M}{A_M} = 1 \cdot 10^{-3}$, $\frac{\Delta V_R}{V_R} = 1,5 \cdot 10^{-3}$, $A_R = (36,000 \pm 0,036)m^2$, $V_R = (216,000 \pm 0,324)m^3$.]

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione III - Moti in 1 e 2 dimensioni

A. Moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato

Esercizio 1. *Posizione, velocitá, accelerazione*

Il diagramma velocità-tempo del viaggio di un'automobile è rappresentato in Figura 1. Utilizzando i dati riportati sul grafico rispondere ai quesiti seguenti.

(a) Nella prima fase del moto, con la quale raggiunge la velocità $v = 72\frac{km}{h}$, quale accelerazione deve tenere l'automobile? Quanta strada percorre?

(b) Qual é la velocitá media nel tratto compreso tra $10s$ e $40s$? E in quello tra $40s$ e $60s$?

(c) Quanta strada percorre l'auto in totale? Con quale velocitá media?

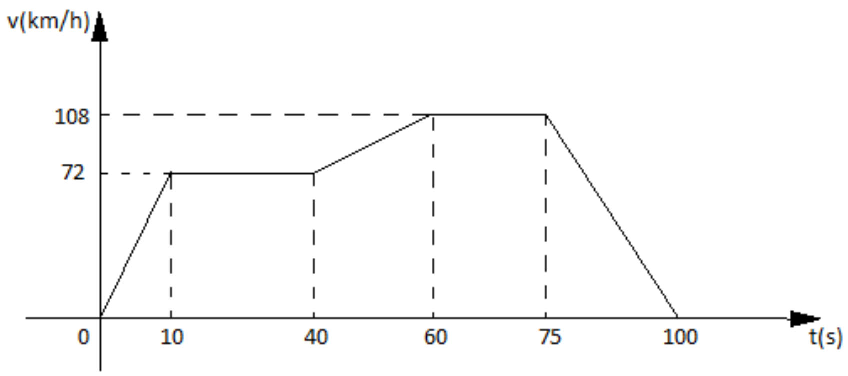


Figure 1: Diagramma velocità-tempo.

$\Big[(a).\quad a_1 = 2\frac{m}{s^2},\quad s_1 = 100m.\qquad (b).\quad v_{m,2} = 20\frac{m}{s},\quad v_{m,4} = 25\frac{m}{s}.\qquad (c).\quad s_{tot} = 2025m,\quad v_{m,tot} = 20,25\frac{m}{s}.\Big]$

Esercizio 2. *Moto di caduta libera*

Un sasso é lanciato verso l'alto da un ponte con velocità iniziale $v = 20\frac{m}{s}$ e affonda nel fiume sottostante dopo $t = 7s$. Quanto è alto il ponte rispetto al fiume? Qual'è l'altezza massima raggiunta dal sasso rispetto al ponte?

$\Big[(a):\quad h = 100,1m\qquad (b):\quad h_{max} = 20,4m\Big]$

Soluzione:
Il sasso è sottoposto alla sola forza di gravità (trascurando gli attriti) per cui trattasi di un moto uniformemente accelerato. le equazioni del moto quindi sono:

$$\begin{aligned} (1)\quad v(t) &= v_0 + at \\ (2)\quad S(t) &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

con $v_0 = 20m/s$ $g = -9,8m/s^2$.
Quanto è alto il ponte? L'altezza del ponte è data da $S_0 - S(7s)$. Ora dalla prima equazione otteniamo:

$$(3)\quad S(7s) - S_0 = 20\frac{m}{s}\cdot 7s - \frac{1}{2}\cdot 9,8\frac{m}{s^2}\cdot(7s)^2 = -100,1m$$

per cui

$$(4)\quad h = S_0 - S(7s) = 100,1m$$

Qual'è l'altezza massima raggiunta? L'altezza massima si calcola andando a vedere per quale tempo t_M si raggiunge l'altezza massima, che corrisponde a quel valore di tempo per cui la velocità si annulla.

$$(5)\quad 0 = v_0 - gt$$

per cui:

$$(6)\quad t_M = \frac{v_0}{g} \approx 2,04s$$

andando a sostituire nell'equazione del moto per lo spazio otteniamo:

$$(7)\quad S_M - S_0 = v_0 t_M - \frac{1}{2}gt_M^2 = \frac{v_0^2}{2g} \approx 20,4m$$

Esercizio 3.

Un'auto lunga $4,0m$ si trova in tangenziale viaggiando alla velocitá costante di $90\frac{km}{h}$. Un motociclista (su una motocicletta lunga $2,0m$) si trova $144m$ dietro all'auto e vuole

effettuare un sorpasso.
Se viaggia ad una velocitá iniziale di $72\frac{km}{h}$ e impiega un tempo pari a $12s$ per compiere il sorpasso completo, quale accelerazione applica?

$\left[a = 2,917\frac{m}{s^2}.\right]$

Esercizio 4. *Velocitá media*

Un camionista percorre il tragitto di autostrada per consegnare un carico, tenendo una velocitá costante di $60\frac{km}{h}$. Al ritorno percorre la stessa strada, mantenendo peró una velocitá pari a $90\frac{km}{h}$.
Qual é la velocitá media sull'intero tragitto?

$\left[v_{m,tot} = 72,0\frac{km}{h}.\right]$

B. Moto rettilineo vario

Esercizio 5.

Un corpo si muove su una retta secondo la legge $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 - 8t + 2$. Determinare:

(a) Le espressioni della velocità $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$.

(b) in quali istanti di tempo il corpo si ferma.

(c) commenta l'andamento della velocità nel tempo?

$\left[(a).\quad v(t) = x'(t) = 2t^2 - 6t - 8, \quad a(t) = x''(t) = 4t - 6. \qquad (b).\quad t_1 = -1s \quad t_1 = 4s\right]$

Esercizio 6.

Un corpo si muove lungo una retta secondo l'espressione $x(t) = 3te^{-\frac{t}{4}}$. Determinare:

(a) L'istante di tempo t_1 in cui il corpo inverte il verso del moto.

(b) L'accelerazione e la posizione rispetto all'origine all'istante t_1.

(c) L'istante di tempo t_2 in cui la velocità è massima in modulo.

$\left[(a).\quad t_1 = 4s. \qquad (b).\quad a_1 = -\frac{3}{4e}, \quad x_1 = \frac{12}{e}. \qquad (c).\quad t_2 = 8s\right]$

C. Moto circolare uniforme

Esercizio 7.

Un Hard Disk con diametro di $9,5cm$ e un foro di raggio $r = 1,25cm$ ruota a $7200\frac{giri}{min}$. Calcolare periodo, velocitá angolare, velocitá tangenziale e accelerazione centripeta di un punto sul bordo interno e di un punto sul bordo esterno del CD.

$\Big[(a).\quad T_{in} = T_{ex} = 8,33 \cdot 10^{-3}s. \qquad (b).\quad \omega_{T,in} = \omega_{T,ex} = 754,0\frac{rad}{s}. \qquad (c).\quad v_{T,in} = 9,425\frac{m}{s},\quad v_{T,ex} = 35,81\frac{m}{s}. \qquad (d).\quad a_{c,in} = 7106\frac{m}{s^2},\quad a_{c,ex} = 27,00 \cdot 10^3\frac{m}{s^2}.\Big]$

Esercizio 8. *Moto orbitale*

Ciascuno di noi inconsapevolmente si muove di moto circolare uniforme per effetto della rotazione della Terra intorno al suo asse. In particolare alla latitudine di Parma percorriamo una circonferenza di raggio $r_1 = 4500km$ ogni 24 ore.

(a) Calcolare la nostra velocità angolare ω e la nostra velocità tangenziale v_T.

(b) Queste due grandezze cambiano all'equatore, dove il raggio è $r_2 = 6400km$? Se sí, quali valori assumono?

$\Big[(a).\quad \omega_1 = 7,27 \cdot 10^{-5}\frac{rad}{s},\quad v_1 = 727\frac{m}{s}. \qquad (b).\quad \omega_2 = 7,27 \cdot 10^{-5}\frac{rad}{s},\quad v_1 = 465\frac{m}{s}.\Big]$

D. Moto parabolico

Esercizio 9. *Velocitá iniziale orizzontale*

Un pilota di canadair vuole fare uno scherzo e sorvola la casa di un suo amico, che sta facendo il barbecue, col suo aereo mantenendo una velocità orizzontale $v = 55\frac{m}{s}$ e alla quota $h = 122,5m$ A che distanza il pilota deve sganciare il proprio contenuto di acqua per centrare il barbecue del suo amico?
A quale distanza, lungo l'orizzontale, deve trovarsi rispetto al villaggio al momento del lancio?

$\Big[h = 275m.\Big]$

Esercizio 10.

Un proiettile viene lanciato da un cannone dal suolo con una velocità iniziale di modulo $v = 100\frac{m}{s}$ e inclinazione $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Determinare la massima altezza h raggiunta dal proiettile, il tempo di volo e la gittata.

$\Big[h = 74,72m,\quad t_v = 7,81s,\quad x = 721.5m\Big]$

Esercizio 11.

Un proiettile viene lanciato dal suolo con velocità iniziale di modulo v e inclinazione θ rispetto all'asse x. Determinare:

(a) La massima altezza h raggiunta dal proiettile in funzione di θ e v.

(b) L'angolo θ_1 di inclinazione per il quale la gittata D risulta massima.

(c) Per quale angolo θ_2 di inclinazione la gittata $D(\theta_2)$ risulta pari all'altezza massima raggiunta $h(\theta_2)$.

$\left[(a). \quad h = \frac{v^2 \sin^2(\theta)}{2g}. \qquad (b). \quad \theta_1 = 45^o. \quad (c). \quad \theta_2 = 76^o\right]$

UNIVERSITÀ DI PARMA

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione IV - Forze e Leggi della Dinamica

A. Forza peso

Esercizio 1. *Accelerazione di gravitá*

In cantiere un muratore sull'impalcatura solleva con una fune un sacco di cemento da $50kg$. Quale forza deve esercitare per sollevarlo a velocitá costante? Qual é il valore della forza che esercita sulla fune appoggiandolo a terra con un'accelerazione di $0,70\frac{m}{s^2}$? E per sollevarlo con una accelerazione di $0,30\frac{m}{s^2}$?

$\Big[(a).\quad F_A = 490N. \qquad (b).\quad F_B = 455N. \qquad (b).\quad F_B = 505N.\Big]$

Soluzione:
Provate a risolverlo come semplice applicazione della seconda legge di Newton ($F = ma$).

Esercizio 2. *Carrucola*

Un corpo di massa $m_1 = 3,5kg$, posto su un tavolo, è collegato da una fune inestensibile e da una carrucola di massa trascurabile, ad un altro corpo di massa $m_2 = 1,5kg$ che viene lasciato cadere a fianco del tavolo (Figura 1).

Determinare con quale accelerazione si muove il sistema e la tensione della fune in assenza di attriti.
Quale dovrebbe essere il coefficiente di attrito tra il piano e il corpo m_1 affinché il sistema rimanga in equilibrio? Quale sarebbe la tensione in quel caso?

$\Big[(a).\quad a_A = 2,94\frac{m}{s^2}, \quad T_A = 10,30N. \qquad (b).\quad \mu = 0,43 \quad T_B = 14,72N.\Big]$

Soluzione:
Provate a risolverlo voi sulla falsa riga dell'esercizio 3.

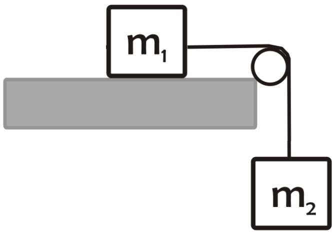


Figure 1: Carrucola.

Esercizio 3. *Macchina di Atwood* Una macchina di Atwood, come quella mostrata

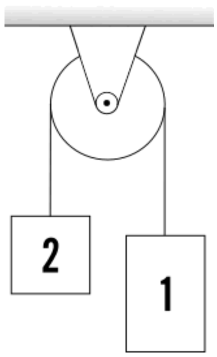


Figure 2: Macchina di Atwood

in figura a lato, è dotata di una carrucola assolutamente priva di attrito e di massa trascurabile. Sapendo che $m_1 = 7,5kg$ ed $m_2 = 2,5kg$ determinare:

a) l'accelerazione del sistema

b) la tensione del filo

c) la forza sostenuta dalla carrucola

$\left[(a).\quad a = 4,90\frac{m}{s^2}, \qquad (b).\quad T = 18,39N. \qquad (c).\quad F_C = 36,78N\right]$

Soluzione:

a) Per calcolare l'accelerazione del sistema possiamo risolvere il problema in modo "naif"stabilendo un verso di rotazione del sistema convenzionalmente positivo (ad esempio in senso antiorario). Secondo tale sistema la forza P_1 sarà considerata convenzionalmente come positiva e la forza P_2 convenzionalmente negativa. Detto questo considerando che:

   - la massa del complessiva del sistema è data dalla somma delle masse m_1 ed m_2

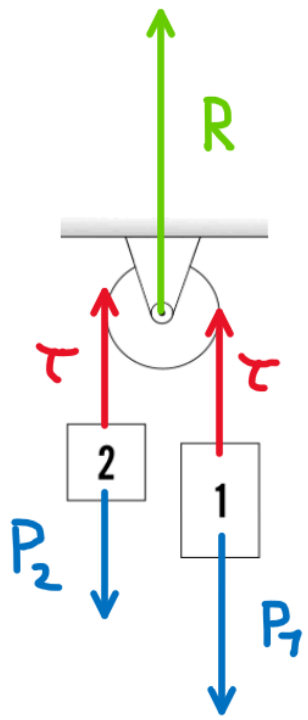


Figure 3: Macchina di Atwood con forze applicate.

- le forze applicate al sistema delle due masse sono date dalle due forze di gravità P_1 e P_2 (P_1 è presa col segno meno perché farebbe ruotare il sistema in verso orario)

Applicando la seconda equazione di Newton, in forma scalare $F = ma$, che afferma che la somma delle forze agenti sul sistema è pari alla massa totale del sistema per l'accelerazione del centro di massa del sistema, otteniamo:

$$(1) \qquad P_1 + P_2 = (-m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

da cui:

$$(2) \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

L'accelerazione sarà quindi positiva (sistema che ruota in verso antiorario) se $m_2 > m_1$ e sarà negativa nel caso opposto, cioè se $m_2 < m_1$ (sistema che ruota in senso orario).

b) Per ricavarci invece la tensione del filo, risolviamo il problema in modo completo. Definiamo quindi un sistema di riferimento unidimensionale con verso positivo verso l'alto. In tal modo l'accelerazione di gravità sarà negativa ed assumerà il valore $-g = -9,8 m/s^2$. Andiamo quindi a scrivere le equazioni del moto accoppiate (a sistema) per le due masse, ricordando che avendo la carrucola massa trascurabile le due tensioni τ sono identiche e che a causa dei vincoli $a_2 = -a_1$:

$$\begin{aligned} (3) \quad \tau - P_1 &= m_1 a_1 \\ (4) \quad \tau - P_2 &= m_2 a_2 = -m_2 a_1 \end{aligned}$$

o anche chiamando $a_1 = a$ e $a_2 = -a$

$$\begin{aligned} (5) \quad m_1 a &= \tau - P_1 \\ (6) \quad -m_2 a &= \tau - P_2 \end{aligned}$$

Adesso sottraendo tra di loro le due equazioni otteniamo:

$$(7) \quad m_1 a + m_2 a = -P_1 + P_2$$

tradotto

$$(8) \quad (m_1 + m_2)a = (-m_1 + m_2)g$$

da cui:

$$(9) \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

che avevamo già ottenuto. Per quanto riguarda τ sostituendo la formula che descrive a nella prima delle due equazioni del moto

$$(10) \quad m_1 a = \tau - P_1$$

otteniamo:

$$(11) \quad m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \tau - m_1 g$$

Da cui con semplici passaggi si ottiene:

$$(12) \quad \tau = 2 \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g = 2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} g$$

c) Volendo quindi calcolare la reazione vincolare R della carrucola dobbiamo considerare che essa è sottoposta alle due tensioni τ che la tirano verso il basso e alla reazione vincolare R che le controbilancia mantenendone fermo il centro di massa. Quindi:

$$(13) \quad R = 2\tau = 4 \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g$$

B. Forza d'attrito

Esercizio 4.

Al supermercato una signora spinge il carrello, di massa $m = 12kg$, sul pavimento orizzontale con una forza inclinata verso il basso di $\alpha = 20^o$. Se il coefficiente d'attrito tra le ruote del carrello e il pavimento é $\mu = 0,25$, qual é il valore minimo della forza da applicare affinché il carrello si muova?

$\left[F = 34,42N.\right]$

soluzione:

In figura sono rappresentate schematicamente le forze applicate al sistema, il quale sarà considerato per semplicità come se fosse privo di estensione (altrimenti dovremmo considerare anche l'equazione sui momenti). Ora noi sceglieremo come sistema di riferimento

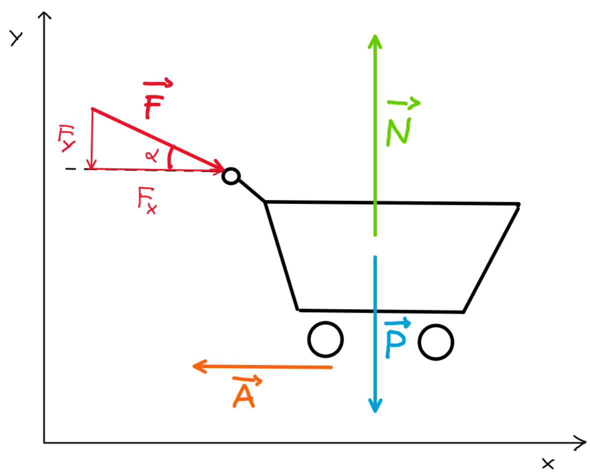


Figure 4: Carrello con forze applicate.

l'asse x parallelo al pavimento e l'asse y diretto verso l'alto parallelamente alla forza normale $\vec{N}$, come mostrato in figura. Per risolvere il problema basterà scrivere la seconda equazione di Newton in modo vettoriale $\sum \vec{F_i} = m\vec{a}$. Chiaramente la forza minima necessaria sarà quella che permette al corpo di muoversi con velocità costante e quindi con accelerazione nulla ($\vec{a} = \vec{0}$), per cui:

(14) $\vec{F} + \vec{P} + \vec{A} + \vec{N} = \vec{0}$

scomponendo le forze sull'asse x e sull'asse y e tenendo conto che la forza di attrito $\vec{A}$ è diretta parallelamente all'asse x in direzione opposta con modulo $A = \mu N$ (μ è il coefficiente di attrito), mentre per quanto riguarda i vettori $\vec{N}$ e $\vec{P}$ essi sono diretti lungo l'asse y, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha & F_y &= -F\sin\alpha \\ A_x &= -\mu N & A_y &= 0 \\ N_x &= 0 & N_y &= N \\ P_x &= 0 & P_y &= -mg \end{aligned}$$

Da cui otteniamo le due equazioni

$$F\cos\alpha - \mu N = 0 \tag{15}$$
$$N - F\sin\alpha - mg = 0 \tag{16}$$

da cui mettendole a sistema otteniamo:

$$F\cos\alpha = \mu(F\sin\alpha + mg) \tag{17}$$

e infine con semplici passaggi:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \tag{18}$$

Esercizio 5. *Piano inclinato*

Una cassa di $m = 10kg$ è posta su un piano inclinato di $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rispetto all'orizzontale e si muove verso l'alto a velocità costante, sotto l'azione di una forza esterna f parallela al terreno.

a) Qual é il valore di tale forza?

b) Se non vi fosse una forza esterna quanto dovrebbe valere il coefficiente d'attrito affinché la cassa resti ferma?

c) nel caso sia presente un coefficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,29$ quali sono i valori massimi e minimi della forza F che permettono di mantenere l'equilibrio?

$$\left[(a).\quad F = 56,64N \qquad (b)\quad \mu = 0,58 \qquad (c).\quad F_{min} = 29,13N \quad F_{max} = 122,34N\right]$$

Soluzione:
Nella figura sotto abbiamo il diagramma di corpo libero della cassa su piano inclinato Se l'oggetto si muove a velocità costante significa che l'accelerazione è nulla e quindi possiamo scrivere la condizione di equilibrio

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{A} + \vec{N} = \vec{0} \tag{19}$$

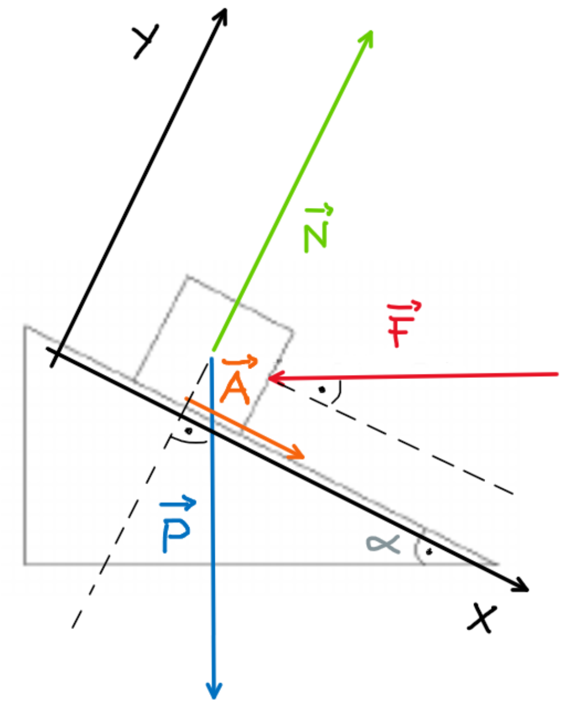


Figure 5: Massa su piano inclinato con forze applicate.

come nell'esercizio precedente. Scomponendo poi le forze sul sistema di assi cartesiani riportati in figura, e considerando che la forza di attrito dinamico è sempre diretta nel verso opposto a quello del moto, otteniamo per i vettori le seguenti componenti:

$$
\begin{aligned}
F_x &= -F\cos\alpha & F_y &= -F\sin\alpha \\
A_x &= \pm\mu_d N & A_y &= 0 \\
N_x &= 0 & N_y &= N \\
P_x &= +mg\cos\alpha & P_y &= -mg\sin\alpha
\end{aligned}
$$

dove il segno + vale per se la cassa sale il piano inclinato e il segno − nel caso opposto quando scende il piano inclinato. Otteniamo quindi le due equazioni:

$$
\begin{cases}
P\sin\alpha - F\cos\alpha \pm \mu_d N = 0 \\
N - P\cos\alpha - F\sin\alpha = 0
\end{cases}
$$

che a sistema producono l'equazione:

$$P\sin\alpha - F\cos\alpha \pm \mu_d(P\cos\alpha + F\sin\alpha) = 0 \tag{20}$$

per cui se il corpo sale

$$F\cos\alpha + \mu_d F\sin\alpha = P\sin\alpha - \mu_d P\cos\alpha \tag{21}$$

mentre se il corpo scende

(22) $F\cos\alpha - \mu_d F\sin\alpha = P\sin\alpha + \mu_d P\cos\alpha$

e risolvendo per F otteniamo rispettivamente, per la salita e per la discesa:

(23) $F = \dfrac{\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha}mg$

(24) $F = \dfrac{\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_d\sin\alpha}mg$

a) Nel primo punto non si parla di attrito e quindi possiamo considerare il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0$ e di conseguenza, considerando che la cassa sta salendo il piano inclinato, dall'equazione (21) otteniamo:

   (25) $F = P\tan\alpha$

b) In questo caso ci troviamo in una situazione di statica dove $\vec{F} = \vec{0}$. In assenza di $\vec{F}$ il vettore di attrito statico A è quindi diretto lungo la direzione negativa dell'asse x. Quindi il sistema di equazioni diventa:

$$\begin{cases} P\sin\alpha - A = 0 \\ N - P\cos\alpha = 0 \\ A \leq \mu_s N \end{cases}$$

   Considerando quindi il caso limite quando $A = \mu_s N$ otteniamo:

   (26) $P\sin\alpha = A = \mu_s N = \mu_s P\cos\alpha$

   e quindi:

   (27) $P\sin\alpha = \mu_s P\cos\alpha$

   da cui:

   (28) $\mu = \tan\alpha$

c) Per quanto riguarda questo punto, stiamo parlando di equilibrio e quindi il coefficiente di attrito in questo caso è quello statico. Le equazioni in questo caso sono:

$$\begin{cases} P\sin\alpha - F\cos\alpha \pm A \\ N - P\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \\ A \leq \mu_s N \end{cases}$$

e nel caso limite in cui $A = \mu_s N$ esse danno un risultato molto simile a quello espresso nelle equazioni (21) e (22), in cui basta sostituire μ_s al μ_d. Nel caso in cui la forza $\vec{F}$ è massima la forza $\vec{A}$ si trova parallela all'asse x, nel caso in cui la forza $\vec{F}$ è minima la forza $\vec{A}$ si trova antiparallela all'asse x, per cui le equazioni diventano:

$$(29) \quad F_{max}(\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha) = P\sin\alpha + \mu_s P\cos\alpha$$

mentre se il corpo scende

$$(30) \quad F_{min}(\cos\alpha + \mu_s \sin\alpha) = P\sin\alpha - \mu_s P\cos\alpha$$

e quindi

$$(31) \quad F_{max} = \frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha} mg$$

$$(32) \quad F_{min} = \frac{\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha} mg$$

a questo punto basta andare a sostituire i valori dei parametri per ottenere i risultati.

Esercizio 6. *Blocchi a contatto*

Un blocco di massa $m_1 = 5kg$ è appoggiato su un secondo blocco di massa $m_2 = 10kg$. Il coefficiente d'attrito statico tra i due blocchi é $\mu_S = 0,2$, quello dinamico é $\mu_D = 0,1$ mentre tra il piano e il blocco m_2 non vi é attrito.
Calcolare la massima forza orizzontale F_A che si può applicare a m_2 perché i due blocchi accelerino insieme su un piano liscio e la corrispondente accelerazione dei due corpi.
Calcolare le accelerazioni dei due blocchi se si applica una forza F_B di intensitá tripla rispetto a F_A. Quanto valgono le accelerazioni se F_B é applicata al corpo m_1?
$\Big[(a).\quad F_A = 29,4N, \quad a_A = 1,96\frac{m}{s^2}. \qquad (b).\quad a_{B,1} = 0,98\frac{m}{s^2}, \quad a_{B,2} = 8,33\frac{m}{s^2}. \qquad (c).\quad a_{C,1} = 16,66\frac{m}{s^2}, \quad a_{C,2} = 0,49\frac{m}{s^2}.\Big]$

Soluzione:
se avete capito l'esercizio 5 provate a fare questo da soli che è più facile col suggerimento che la forza d'attrito massima del blocco due col pavimento dipende non solo dalla forza peso P_1 ma anche da P_2.

C. Gravitazione

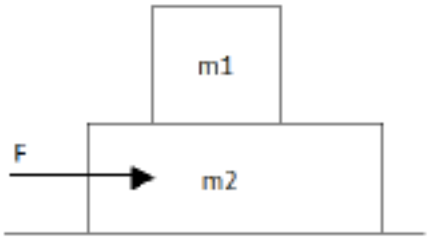


Figure 6:

Esercizio 7.

Determinare l'intensità dell'attrazione gravitazionale media fra la Terra e il Sole e fra la Terra e la Luna.
($m_T = 5,96 \cdot 10^{24} kg$, $m_S = 1,99 \cdot 10^{30} kg$, $m_L = 7,34 \cdot 10^{22} kg$, $d_{TS,m} = 1,5 \cdot 10^{11} m$, $d_{TL,m} = 3,8 \cdot 10^{8} m$)
$\Big[(a).\quad F_{TS,m} = 3,52 \cdot 10^{22}. \qquad (b).\quad F_{TL,m} = 2,02 \cdot 10^{20}.\Big]$

Soluzione:
Molto semplice provateci voi.

Esercizio 8. *Moto orbitale*

Un satellite orbita intorno alla Terra ($R_T = 6,37 \cdot 10^6 m$) ad una quota di $300 km$ sopra la superficie terrestre. Calcolare velocitá tangenziale e periodo del moto orbitale del satellite.
$\Big[v = 7720 \frac{m}{s}, \quad T = 5429 s = 1,5 h.\Big]$ **Soluzione:**
Eguagliando la forza di attrazione gravitazionale con la forza centripeta otteniamo

$$(33) \quad G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$

dove M è la massa terrestre ed m quella del satellite. Ora semplificando la massa m Posso riscrivere il tutto come

$$(34) \quad G\frac{M}{R^2} = G\frac{M}{R_T^2}\frac{R_T^2}{R^2} = g\frac{R_T^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

dove g è l'accelerazione di gravità al suolo da cui

$$(35) \quad v = \sqrt{g\left(\frac{R_T}{R}\right)^2 R} = \left(\frac{R_T}{R}\right)\sqrt{gR}$$

ora il rapporto $(R_T/R) = (6.37/6.67) \approx 0.955$ per cui posso facilmente calcolare v. Già che ci site provate a calcolarvi il periodo e per quale R otteniamo un satellite geostazionario.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione V - Conservazione dell'energia e della quantità di moto

A. Lavoro

Esercizio 1.

Un blocco di massa m è spinto verso l'alto lungo un piano inclinato di α rispetto all'orizzontale da una forza costante F parallela al piano inclinato. Tra il blocco e il piano vi è un coefficiente di attrito dinamico μ_D. Il blocco viene spostato complessivamente di un tratto d.
Calcolare il lavoro W_F svolto dalla forza applicata, W_G dalla forza di gravità e W_A dalla forza di attrito in questo spostamento.

$$\Big[W_F = Fd, \quad W_G = -mgd\sin\alpha, \quad W_A = -\mu_D mgd\cos\alpha.\Big]$$

Soluzione:
Provateci voi

Esercizio 2. *Potenza*

Un'auto di massa $1200kg$ parte da ferma e accelera costantemente da 0 a $90\frac{km}{h}$ in $10s$. Qual é lavoro compiuto dal motore? Che potenza sviluppa?
Se si tiene conto dell'attrito dinamico ($\mu_D = 0,5$) quanto vale il lavoro compiuto dal motore?

$$\Big[(a). \quad L_A = 3,75 \cdot 10^5 J, \quad P = 3,75 \cdot 10^4 W. \qquad (b). \quad L_B = 11,1 \cdot 10^5 J.\Big]$$

Soluzione:
Provateci voi

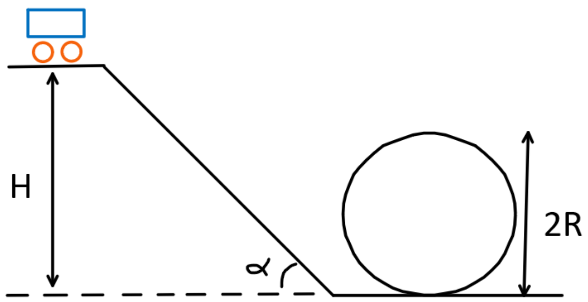
B. Conservazione dell'energia

Esercizio 3.

Un vagone del Katun di Mirabilandia parte da un'altezza $h = 35m$ e scende da un piano, lungo l, inclinato di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, dove é presente un coefficiente di attrito $\mu = 0,05$. Con quale velocitá arriva nel punto piú basso della discesa.
Il vagone continua a seguire il percorso senza attrito fino a compiere un giro della morte: qual é il massimo raggio di curvatura possibile per tale giro?

$\Big[(a).\quad v = 25,53\frac{m}{s}. \qquad (b).\quad R = 13,30m.\Big]$

Soluzione:
Per prima cosa osserviamo che $\tan\alpha > 0,05$, per cui il vagone scenderà da piano inclinato nonostante l'attrito. La forza di attrito dinamico può essere calcolata ricordando che



$F_{Ad} = \mu_d F_\perp$, dove $F_\perp = mg\cos\alpha$ e ricordando che la la forza di attrito è sempre diretta opposta al moto, per cui il lavoro della forza di attrito diventa:

$$(1) \qquad L_{Ad} = \mu_d F_{Ad} L\cos\pi = -\mu_d mg\cos\alpha L = -\mu_d mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = -\frac{\mu_d mgh}{\tan\alpha}$$

il lavoro della forza peso invece è $L_P = mgh$ per cui, per il teorema delle forze vive abbiamo:

$$(2) \qquad L_{tot} = L_P + L_{Ad} = K$$

cioè

$$(3) \qquad mgh\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi

$$(4) \qquad v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)}$$

Tornando all'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$ osserviamo che la forza centrifuga:

$$(5) \quad F_C = m\frac{v^2}{R} = \frac{2K}{R}$$

La condizione per cui il vagone riesca a fare il giro della morte è che la forza centrifuga F_C sia maggiore della forza di gravità $P = mg$ in formule:

$$(6) \quad F_C = \frac{2K}{R} > mg$$

Ora l'energia cinetica K_f nel punto più alto è data da:

$$(7) \quad K_f = E_i - mgh_f = mgh\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right) - 2mgR$$

la condizione quindi diventa:

$$(8) \quad \frac{2K_f}{R} > mg$$

cioè

$$(9) \quad 2\frac{mgh\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right) - 2mgR}{R} > mg$$

o se vogliamo:

$$(10) \quad 2h\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right) - 4R > R$$

da cui:

$$(11) \quad R < \frac{2}{5}h\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)$$

Esercizio 4. *Pendolo*

Un pendolo semplice di massa m e lunghezza L oscilla in un piano verticale con ampiezza delle oscillazioni pari a θ_0. Calcolare, in funzione dell'angolo θ:

(a) L'espressione dell'energia potenziale gravitazionale $U(\theta)$.

(b) La velocità $v(\theta)$ della massa m.

$$\left[U(\theta) = mgL(1 - \cos\theta), \quad v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}\right]$$

Soluzione:

Applichiamo la legge della conservazione dell'energia, considerando che il pendolo parta da una posizione determinata dall'angolo di partenza θ_0 a cui corrisponde un'altezza y_0 rispetto al punto più basso. In tale punto il pendolo è fermo e possiede una energia totale

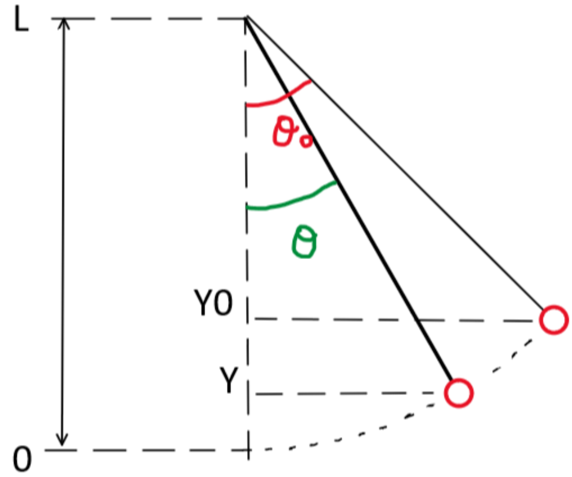
E_{tot} che coincide con l'energia potenziale mgy_0. Per trovare l'energia potenziale basta osservare che dato un angolo θ la y corrispondente è data da:

(12) $y = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$

e di conseguenza

(13) $mgy = mgL(1-\cos\theta)$

Applicando la conservazione dell'energia abbiamo che:



(14) $mgy + \frac{1}{2}mv^2 = E_{tot}$

e quindi considerando che $E_{tot} = mgy_0$ otteniamo

(15) $mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 = mgL(1-\cos\theta_0)$

da cui:

(16) $v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Esercizio 5. *Velocitá di fuga*

Determinare la velocità di fuga dalla Terra, ovvero la velocità iniziale che occorre imprimere ad un corpo perché sfugga all'attrazione gravitazionale terrestre.

$\left[v = 1,12 \cdot 10^4 \frac{m}{s}.\right]$

Soluzione:

É semplice, provateci voi!

C. Quantità di moto e urti

Esercizio 6. *Urto anelastico - Pendolo*

Un proiettile di massa m con velocità iniziale v_0 penetra in un sacco di sabbia di massa M appeso con una fune al soffitto e si arresta al suo interno. Determinare di quale altezza h si solleva il sistema composto da sacco e proiettile.

$\left[h = (\frac{m}{m+M})^2 \frac{v_0^2}{2g}\right]$

Soluzione:

Trattandosi di un urto possiamo applicare la conservazione della quantità di moto, e, nell'ipotesi in cui il proiettile rimanga all'interno del sacco, la velocità finale del proiettile coinciderà con quella del sacco, cosi che:

$$(17)\quad mv_0 = (M + m)v$$

da cui:

$$(18)\quad v = \frac{m}{M + m} v_0$$

Ora applicando la conservazione dell'energia

$$(19)\quad \frac{1}{2}(M + m)v^2 = (M + m)gh$$

da cui:

$$(20)\quad 2gh = v^2 = \left(\frac{m}{M + m}\right) v_0^2$$

e quindi

$$(21)\quad h = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 \frac{v_0^2}{g}$$

Esercizio 7. *Urto elastico*

Dimostrare che in un urto elastico tra due corpi di uguale massa $m_1 = m_2 = m$, che inizialmente viaggiano uno verso l'altro lungo una linea retta, le velocità dei due corpi si scambiano, cioè che $\overrightarrow{v_{1f}} = \overrightarrow{v_{2i}}$ e $\overrightarrow{v_{2f}} = \overrightarrow{v_{1i}}$.

Soluzione:
Basta mettere a sistema l'equazione della conservazione della quantità di moto con quella della conservazione dell'energia.

Esercizio 8.

Due carrelli di massa $m_1 = 15kg$ e $m_2 = 25kg$ si muovono orizzontalmente in linea retta, uno verso l'altro,alle velocità rispettive $\overrightarrow{v_1} = (10\frac{m}{s})\hat{i}$ e $\overrightarrow{v_2} = -(4\frac{m}{s})\hat{i}$. Si urtano in maniera perfettamente anelastica e rimanendo agganciati. Calcolare:

(a) La velocità finale del sistema dei due carrelli dopo l'urto.

(b) L'energia cinetica e la quantità di moto totali del sistema nel suo stato iniziale.

(c) L'energia dissipata nell'urto sottoforma di calore e deformazione.

$\Big[(a).\quad \overrightarrow{v_F} = (1,25\frac{m}{s})\hat{i}. \qquad (b).\quad K_0 = 950J, \quad \vec{p_0} = (50kg\frac{m}{s})\hat{i}. \qquad (c).\quad E_{diss} = 918,75J\Big]$

Soluzione:

1. Per risolvere il primo punto basta imporre la conservazione della quantità di moto:

   $$m_1|v_1| - m_2|v_2| = (m_1 + m_2)v \tag{22}$$

   da cui:

   $$v = \frac{m_1|v_1| - m_2|v_2|}{m_1 + m_2} \tag{23}$$

2. la quantità di moto l'abbiamo già calcolata nel primo punto, per quanto riguarda l'energia, invece, basta sommare i contributi per cui all'inizio abbiamo:

   $$E_i = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{24}$$

   mentre alla fine

   $$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1|v_1| - m_2|v_2|}{m_1 + m_2}\right)^2 \tag{25}$$

3. L'energia persa si ottiene facendo la differenza fra l'energia iniziale e quella finale:

   $$\Delta E = E_i - E_f \tag{26}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione VI - Cinematica rotazionale ed eqilibrio del corpo rigido

A. Equilibrio del corpo rigido

Esercizio 1. *Equilibrio corpo rigido:* Una mensola di massa $m = 2kg$ e di lunghezza $AB = l$ è vincolata ad una cerniera ed è sospesa mediante un cavo inclinato di un angolo $\theta = 30$ rispetto all'orizzontale. Nel punto $x = \frac{2}{3}AB$ viene appesa una massa $M = 3kg$:

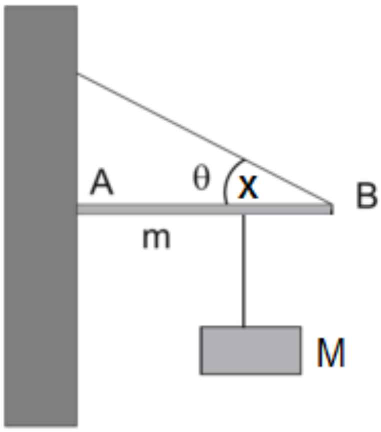


Figure 1: Mensola.

Determinare la tensione T della fune e la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dal perno
$\left[T = 58,8N, \quad R_x = 50,92N, \quad R_y = 19,6N\right]$

Soluzione:

Per risolvere il problema basta impostare le due equazioni cardinali della statica: la prima equazione che richiede che la somma di tutte le forze agenti sul sistema dia risultante nulla e la seconda equazione che impone che la somma dei momenti delle forze applicate al sistema sia nullo. A tal fine conviene scegliere "A"come polo rispetto al quale impostare

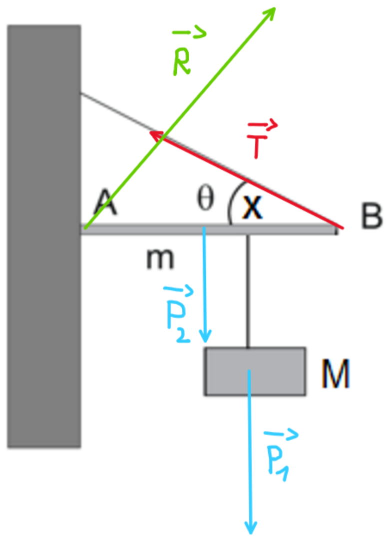


Figure 2: Diagramma delle forze applicate alla mensola.

la seconda equazione. Così con riferimento alla figura possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{T} + \vec{R} &= \vec{0} \\ M_T - M_1 - M_2 &= 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato che $M_R = 0$ in quanto la forza è applicata nel polo A. Il momento M_T della forza $\vec{T}$ è considerato positivo in quanto tende a far ruotare il sistema in verso antiorario diversamente dai momenti M_1 ed M_2 rispettivamente delle due forze peso $P_1 = Mg$ e $P_2 = mg$ che tendono a farlo ruotare in verso orario. Ora esplicitando la seconda equazione

$$lT \sin\theta - \frac{2}{3}lMg - \frac{1}{2}lmg = 0$$

da cui, semplificando L:

$$T = \frac{4M + 3m}{6\sin\theta} g \approx 58,80N$$

e quindi:

$$\begin{aligned} T_x &= -T\cos\theta = \frac{4M + 3m}{6\tan\theta} g = -50,92N \\ T_y &= T\sin\theta = \frac{4M + 3m}{6} g \approx 29,40N \end{aligned}$$

scomponendo ora la prima equazione otteniamo:

$$T_x + R_x = 0$$
$$T_y + R_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$$

che tradotte diventano:

$$-T\cos\theta + R_x = 0$$
$$T\sin\theta + R_y - Mg - mg = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} R_x &= T\cos\theta = 50,92N \\ R_y &= \frac{(M+m)g - T_y}{\sin\theta} \approx 19,60N \end{aligned}$$

Esercizio 2. *Equilibrio corpo rigido:*

Due muri distano tra loro $1,5m$. Il muro di sinistra é liscio, mentre tra la tavola inserita nello spazio centrale e il secondo muro vi é un coefficiente di attrito statico é $\mu_s = 0,98$. Qual é la massima lunghezza l che puó avere la tavola?

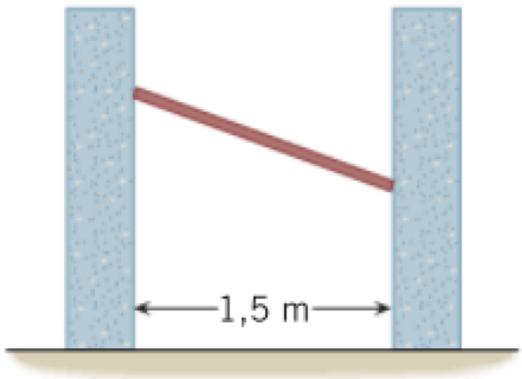


Figure 3: Tavola incastrata tra due muri.

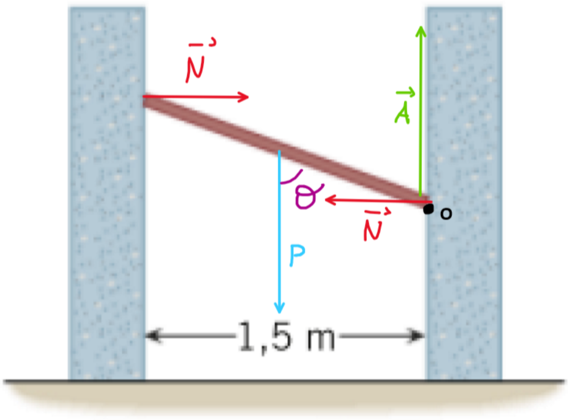
$\left[L = 1,67m\right]$

Soluzioni:

Come si può notare dalla figura sotto che abbiamo una forza peso $\vec{P}$ bilanciata da $\vec{A}$. Ora però, considerando che nel caso limite $A = \mu N$, considerando come polo il punto O in figura, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}lP\sin\theta - Nl\cos\theta = 0$$
$$P = \mu N$$

da cui



$$\frac{1}{2}l\mu N\sin\theta - Nl\cos\theta = 0$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\mu\sin\theta = \cos\theta$$

per cui:

$$\tan\theta = \frac{2}{\mu}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\mu}\right) \approx 63,9^o$$

e quindi:

$$l\sin\theta = 1,5m$$

da cui otteniamo $l = 1,67m$.

B. Momento d'inerzia

Esercizio 3.

Calcolare il momento di inerzia di una corona circolare di spessore h con massa m distribuita uniformemente per $r \in [r_1, r_2]$. Si analizzino i casi limite per $r_1 \to 0$ e $r_1 \to r_2$.

a) Esprimere il momento di inerzia anche in funzione della densità ρ del materiale.

b) Fissato $r_1 = r_2/2$ e supposto un piano inclinato con un angolo $\theta = 30$. quale sarà l'accelerazione subita dalla corona circolare che rotola senza strisciare sotto l'effetto della forza di gravità?

c) qual'è il coefficiente di attrito minimo che permette al corpo di rotolare senza strisciare?

$\Big[a).\quad I = \frac{\pi\rho h}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = m\frac{\left(r_2^2+r_1^2\right)}{2} \qquad b).\quad \frac{8}{13}g\sin\theta \approx 3,02m/s^2 \qquad c).\quad \mu = \frac{5}{13}\tan\theta \approx 0,22\Big]$

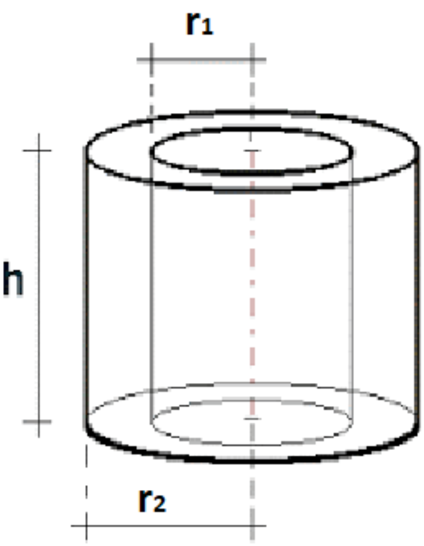
Soluzione:

a) Con riferimento alla figura sottostante, andiamo a calcolare il momento di inerzia I in funzione delle sue caratteristiche geometriche: La definizione di momento di inerzia per una distribuzione continua di materiale che occupa un volume V è data da:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho(r) dV$$

dove r è la distanza della massa dm dal polo rispetto di calcola I. Adattando tale definizione alla nostra geometria otteniamo:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \rho r^2 dV = \int_{r_1}^{r_2} \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi\rho h \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{\pi\rho h}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right)$$



Ora ricordando che $(r_2^4 - r_1^4) = (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$ e che il volume V del cilindro forato è dato da $\pi(r_2^2 - r_1^2)h$ otteniamo:

$$I = \frac{\pi\rho h}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{m(r_2^2 + r_1^2)}{2}$$

I casi limite sopramenzionati $r_1 \to 0$ e $r_1 \to r_2 = r$. Ci portano così rispettivamente al momento di inezia di un cilindro pieno:

$$I_{cil} = \frac{mr^2}{2}$$

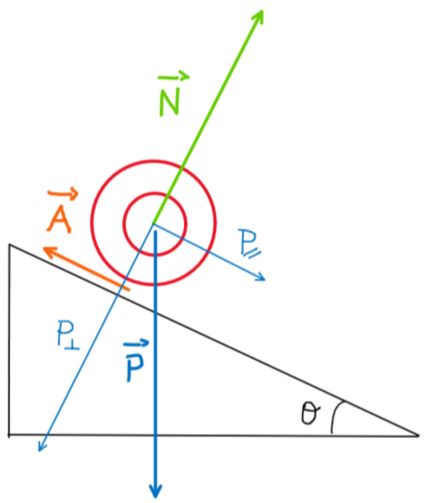
e al caso in cui la massa è tutta concentrata sulla circonferenza esterna del cilindro

$$I_{circ} = mr^2$$

b) Nel caso in cui invece $r_1 = r_2/2$ allora otteniamo:

$$I = \frac{5}{8}mr^2$$

avendo per motivi di semplicità della notazione chiamato $r_2 = r$. Volendo studiare ora la dinamica del sistema dobbiamo riferirci alla figura qui sotto: Ora siccome il



cilindro non sfonda il piano inclinato abbiamo che:

$$N = P_{\perp} = P\cos\theta$$

La prima equazione cardinale della dinamica proiettata lungo il piano inclinato quindi diventa:

$$P_{\parallel} - A = ma$$

mentre la seconda cardinale calcolata rispetto al al centro del cilindro diventa:

$$Ar = I\alpha$$

dove $\alpha = a/r$ ed è l'accelerazione angolare e tale condizione rispecchia una situazione di rotolamento senza strisciamento. Mettendo a sistema le tre equazioni

$$\begin{cases} P\sin\theta - A = ma \\ Ar = I\alpha \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{cases} \qquad \text{otteniamo:}$$

$$mg\sin\theta - \frac{I}{r^2}a = ma$$

da cui:

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}} = \frac{8}{13}g\sin\theta$$

c) dall'equazione precedente possiamo dedurre che la forza di attrito $\vec{A}$ deve avere intensità

$$A = \frac{5}{13}mg\sin\theta$$

e quindi se ne deduce che nel caso limite in cui $A = \mu N$

$$\mu = \frac{A}{N} = \frac{\frac{5}{13}mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \frac{5}{13}\tan\theta$$

C. Equazioni del moto rotazionale

Esercizio 4. *Velocitá angolare*

Un'asta omogenea di lunghezza l e massa m si trova inizialmente in quiete in posizione verticale ed è libera di ruotare intorno ad un perno posto alla sua estremità inferiore. L'asta cade, ruotando fino a trovarsi in posizione orizzontale. Calcolare:

(a) La velocità angolare ω_F nello stato finale.

(b) La velocità v_{CM} del centro di massa.

(c) La velocità v_P dell'estremità libera dell'asta.

$\left[\omega_F = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad v_{CM} = \frac{\sqrt{3gl}}{2}, \quad v_P = \sqrt{3gl}\right]$

Soluzione:

Imponendo la conservazione dell'energia e considerando che il momento di inerzia di una sbarra vincolata ad un estremo $I = \frac{1}{3}ml^2$, quando la sbarra si trova orizzontale possiamo scrivere:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

(essendo la sbarra omogenea abbiamo considerato che l'altezza del baricentro della sbarra sia $h = l/2$) e quindi:

$$g = \frac{1}{3} l \omega^2$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \qquad v_{CM} = \omega \frac{l}{2} \qquad v_P = \omega l$$

Esercizio 5.

Un pendolo conico é formato da un cilindretto uniforme massa $1,2kg$ e altezza pari a $l = 60cm$, sospeso dalla sua base superiore. Esso viene posto in rotazione attorno all'asse verticale con una velocitá $5,32\frac{rad}{s}$. Calcolare:

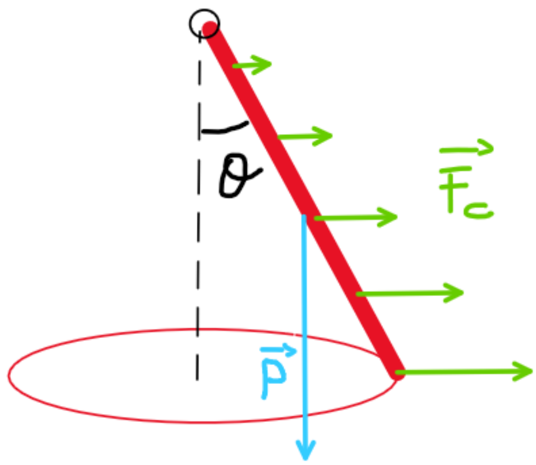
(a) L'angolo che forma con la verticale.

(b) la velocità angolare minima che permette a ciascun punto del pendolo di percorrere una traiettoria circolare

$\left[(a). \quad \theta = 30^o. \qquad (b). \quad \omega_{min} = 4,95\frac{rad}{s} \right]$

Soluzione:

L'angolo formato dall'asta che ruota è determinata dall'equilibrio fra il momento della



forza peso e quello della forza centrifuga. Con riferimento alla figura possiamo scrivere:

$$M_P = M_{F_C}$$

Ora il momento della forza peso si esprime in maniera semplice considerando la forza come applicata al centro di massa (essendo la sbarretta omogenea) per cui:

$$M_P = mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

Se la sbarra è omogenea possiamo definire una densità di massa pari a:

$$\lambda = \frac{m}{l}$$

E quindi la forza centrifuga totale che agisce su ogni elemento di massa $dm = \lambda dx$, dove x è òa coordinata che va da 0 ad l partendo dalla cerniera che vincola la sbarretta, può essere espressa dall'integrale:

$$F_C = \int_0^l \omega^2 x \sin\theta dm = \int_0^l \omega^2 x \sin\theta \lambda dx = \frac{\omega^2 ml \sin\theta}{2}$$

Prendendo come polo la cerniera invece il momento di F_C diventa:

$$M_{F_C} = \int_0^l \omega^2 x \sin\theta x \cos\theta dm = \int_0^l \omega^2 x^2 \sin\theta \cos\theta \lambda dx = \frac{\omega^2 ml^2}{3} \sin\theta\cos\theta$$

e quindi eguagliando i momenti:

$$\frac{\omega^2 ml^2}{3} \sin\theta\cos\theta = \frac{mgl}{2}\sin\theta$$

da cui:

$$\frac{\omega^2 l}{3}\cos\theta = \frac{g}{2}$$

e quindi:

$$\cos\theta = \frac{3}{2}\frac{g}{l\omega^2}$$

Sostituendo i valori nell'ultima equazione possiamo calcolare $\cos\theta$ e quindi l'angolo θ osserviamo invece che siccome $\cos\theta \leq 1$ deve valere la diseguaglianza:

$$\frac{g}{l\omega^2} \leq \frac{2}{3}$$

da cui:

$$\omega \geq \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

Che rappresenta la velocità angolare minima che permette di mantenere il regime di pendolo conico.

Esercizio 6. *Macchina di Atwood*

Una macchina di Atwood é costituita da due masse m_1 e m_2 e collegate tramite un filo ideale attorno a una carrucola assimilabile ad un disco di massa M e raggio R. Determinare:

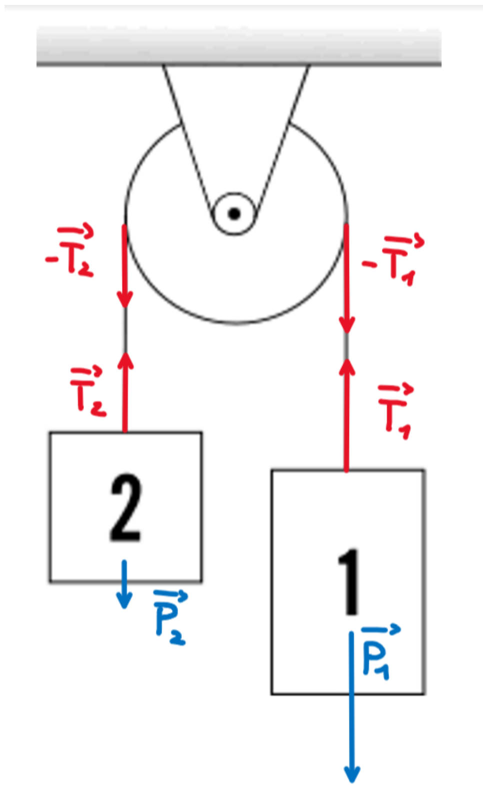
(a) l'accelerazione del sistema.

(b) la relazione tra la tensione del filo ai due lati della carrucola.

$\left[(a). \quad a = 2g\frac{m_1 - m_2}{2m_1 + 2m_2 + M}. \qquad (b). \quad T_1 = m_1(g-a), \quad T_2 = m_2(g+a).\right]$

Soluzione:

Come possiamo notare nella figura sottostante abbiamo 3 elementi che concorrono alla dinamica: la massa m_1, la massa m_2 e la carrucola di massa M. Le forze complessive



che agiscono sulla carrucola globalmente vengono annullate dalla reazione vincolare del perno di modo che la carrucola possa solo ruotare secondo l'equazione:

$$rT_2 - rT_1 = I\alpha$$

con α accelerazione angolare della carrucola ed $I = \frac{1}{2}Mr^2$ per una carrucola omogenea. Per quanto riguarda le masse m_1 ed m_2 invece:

$$T_1 - P_1 = m_1 a_1$$
$$T_2 - P_2 = m_2 a_2$$

e il seguente legame fra le accelerazioni

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= -a \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$

Otteniamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} rT_2 - rT_1 = \frac{1}{2}Mr^2\frac{a}{r} \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

Da queste tre equazioni otteniamo subito:

$$T_1 = m_1(g + a)$$

$$T_2 = m_2(g - a)$$

ed andando a sostituire nella prima:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione VII - Dinamica rotazionale e (Conservazione del) Momento angolare

A. Moto di rotolamento puro

Esercizio 1.

Una forza orizzontale costante di $10N$ é applicata a una ruota di massa $m = 10kg$ e raggio $r = 30cm$. La ruota rotola senza strisciare su un piano orizzontale, e l'accelerazione del suo centro di massa é $0,60\frac{m}{s^2}$.
Quali sono l'intensitá ed il verso della forza di attrito sulla ruota? Qual é il momento di inerzia della ruota intorno all'asse di rotazione passante per il suo centro? Che accelerazione e quale velocità angolari raggiungerebbe tale disco se un momento torcente $T = 10Nm$ agisse su di esso per 8 secondi facendolo ruotare (senza alcuna traslazione) lungo il proprio asse di inerzia principale?

[(a). $F_A = 4N$. (b). $I = 0,6kg \cdot m^2$.
(c). $\alpha = 16,7\frac{Rad}{s^2}$ (d). $\omega = 133,3\frac{Rad}{s}$]

Soluzione:

La situazione può essere rappresentata come mostrato in figura sotto: In cui le due forze che contribuiscono al moto sono la forza $\vec{F}$ e la forza di attrito $\vec{A}$. Siccome il problema è unidimensionale usando i moduli possiamo scrivere:

$$F - A = ma$$

da cui banalmente:

$$A = F - ma = 4,0N$$

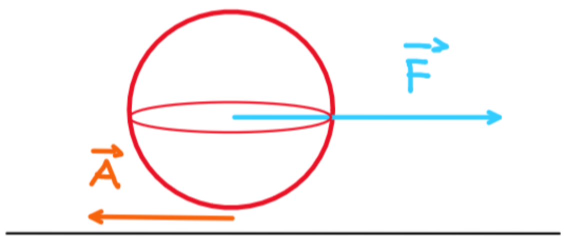


Figure 1: Sfera che rotola su piano orizzontale

Sfruttando invece la seconda cardinale, usando come polo il centro della sfera, otteniamo:

$$rA = I\alpha = I\frac{a}{r}$$

da cui

$$I = \frac{Ar^2}{a} = 0,6kg \cdot m^2$$

Venendo al secondo punto e applicando una momento torcente T, senza traslazione, abbiamo

$$T = I\alpha$$

da cui banalmente otteniamo:

$$\alpha = \frac{T}{I} = 13,33\frac{Rad}{s^2} \qquad \omega = \alpha\Delta t = 106,7\frac{Rad}{s}$$

Esercizio 2.

Una sfera omogenea rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Supponendo che la sfera si trovi inizialmente in quiete ad una altezza h:

(a) Determinare la velocità finale v_F del centro di massa.

(b) Scrivere le equazioni del moto e calcolare l'accelerazione del centro di massa a_{CM} e il modulo della forza di attrito F_A.

(c) Generalizzare i risultati al caso di un disco e di un cilindro omogenei.

$\Big[(a).\quad v_F = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \qquad (b).\quad a_{CM} = \frac{5}{7}g\sin(\theta), \quad F_A = \frac{2}{7}mg\sin(\theta)$

$(c).\quad v_F = \sqrt{\frac{2mgh}{(m+\frac{I}{R^2})}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, \quad a_{CM} = \frac{mg}{m+\frac{I}{R^2}} = \frac{2}{3}g\sin(\theta), \quad F_A = \frac{2Ig}{3R^2} = \frac{1}{3}mg\sin(\theta).\Big]$

Soluzione:

Analizziamo il caso generale di un corpo che rotola su piano inclinato, partendo dall'ultimo punto del problema. Esso è molto simile al problema 3 dell'esercitazione precedente (Esercitazione 6). In primo luogo siccome il corpo non sfonda il piano inclinato abbiamo

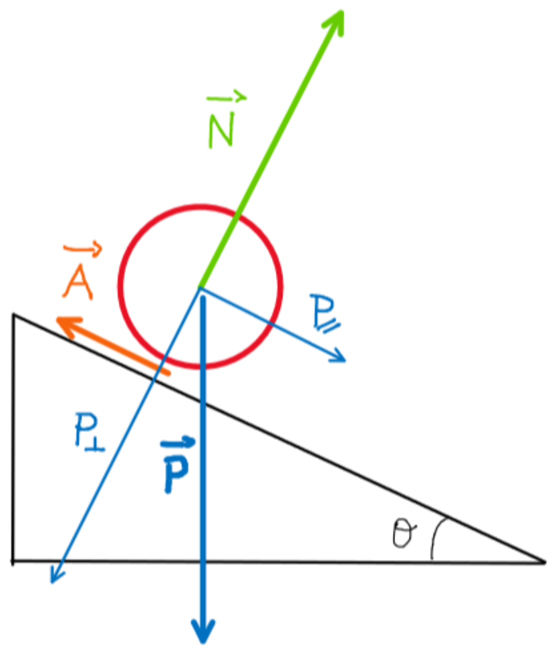


Figure 2: Oggetto che rotola su piano inclinato

che:

$$N = P_\perp = P\cos\theta$$

mentre la prima equazione cardinale della dinamica proiettata lungo il piano inclinato quindi diventa:

$$P_{\parallel} - A = ma$$

La seconda cardinale calcolata rispetto al al centro del cilindro diventa:

$$Ar = I\alpha$$

dove $\alpha = a/r$ ed è l'accelerazione angolare e tale condizione rispecchia una situazione di rotolamento senza strisciamento. Mettendo a sistema le tre equazioni

$$\begin{cases} P\sin\theta - A = ma \\ Ar = I\alpha \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{cases} \quad \text{otteniamo:}$$

$$mg\sin\theta - \frac{I}{r^2}a = ma$$

Ora possiamo notare che qualsiasi momento di inerzia I può essere scritto come:

$$I = kmr^2$$

dove il k dipende dalla distribuzione di massa del sistema per cui:

$$g\sin\theta = \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a = (1+k)\, a$$

e quindi:

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+k}$$

Per ricavare la forza di attrito invece sfruttiamo la prima equazione cardinale:

$$A = mg\sin\theta - ma = m\left(1 - \frac{1}{1+k}\right) g\sin\theta = \frac{k}{1+k} mg\sin\theta$$

Ora avendo risolto il problema nel caso generale avremo tutti i vasi particolari scegliendo l'opportuno valore di k che per una sfera omogenea vale $k_{s.o.} = \frac{2}{7}$, mentre per un disco omogeneo abbiamo: $k_{d.o.} = \frac{1}{2}$.
Volendo trovare la velocità finale del corpo possiamo ragionare in due modi:

- in modo cinematico, andando a calcolare il tempo t che impiega il corpo a rotolare fino in fondo al piano invertendo la relazione tra spazio e tempo che intercorre in un moto uniformemente accelerato per poi andare a ricavare la velocità finale dalla relazione che lega la velocità col tempo e l'accelerazione. In formule avremmo

$$\Delta S = \frac{1}{2}at^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2\Delta S}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\theta}}$$

$$v = at \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$$

  dove abbiamo sostituito ad a l'espressione ricavata precedentemente.

- sfruttando la conservazione dell'energia. essendo l'energia del sistema puramente potenziale (il corpo parte da fermo) e tenuto conto dell'energia cinetica traslazionale e rotazionale possiamo scrivere:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

  ora considerando che se il sistema ruota senza strisciare $v = \omega r$ allora, sfruttando i risultati precedenti possiamo scrivere:

$$mgh = \frac{1}{2}\left(mv^2 + kmr^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}m(1+k)v^2$$

  da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$$

B. Momento angolare

Esercizio 3.

Un piccolo oggetto di massa $25g$ si muove su un tavolo privo di attrito. Il corpo é tenuto su una traiettoria circolare tramite un filo che passa in un buco nel tavolino. Inizialmente il raggio della traiettoria é $0,3m$ e la velocitá angolare $1,75\frac{rad}{s}$. Tirando verso il basso, il tratto di filo viene accorciato fino a $0,15m$. Calcolare:

(a) La nuova velocitá angolare.

(b) La variazione di energia cinetica.

$\Big[(a). \quad \omega_2 = 7\frac{rad}{s}. \qquad (b). \quad \Delta E = 1,03 \cdot 10^{-2} J\Big]$

Soluzione:

É una forza centrale e come tale basta sfruttare la conservazione del momento angolare e tenere presente la relazione fra momento angolare e velocità.

Esercizio 4.

Calcolare il momento di inerzia di una corona circolare con massa m distribuita uniformemente per $R \in [R_1, R_2]$. Si analizzino i casi limite per $R_0 \to 0$ e $R_0 \to R_1$. Esprimere il momento di inerzia anche in funzione della densità ρ del materiale.

Soluzione:

Simile al primo punto dell'esercizio 3 lezione 6.

Esercizio 5.

Una satellite di forma cilindrica di massa $M = 2000kg$ e raggio $r = 10m$ (supposto di densità uniforme su tutto il volume) staziona in orbita ruotando attorno al proprio asse con velocitá angolare $\omega_A = 1\frac{rad}{s}$. Per effettuare una misura, si aprono due bracci telescopici (di massa trascurabile), di lunghezza $R = 40m$ ciascuno e con due strumenti di massa $m = 50kg$ fissati all'estremitá dei due bracci. Determinare:

(a) Il momento d'inerzia I_a del satellite prima e I_b dopo l'apertura del braccio telescopico.

(b) La velocitá angolare ω_B del satellite dopo l'apertura del braccio.

$\Big[(a). \quad I_a = 10^5 kg \cdot m^2, \quad I_b = 2,55 \cdot 10^5 kg \cdot m^2. \qquad (b). \quad \omega_B = 0,39\frac{rad}{s}.\Big]$

Soluzione:

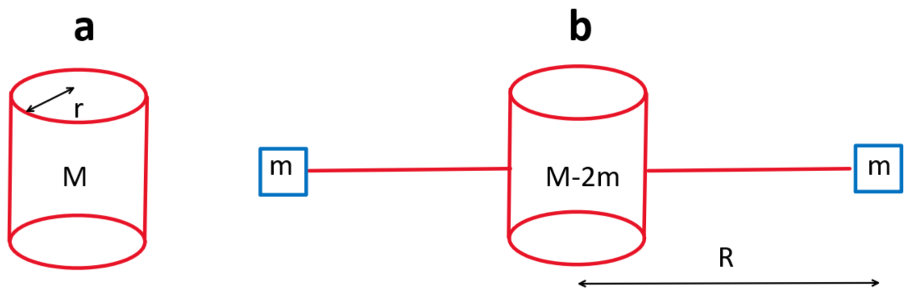


Figure 3: Satellite prima e dopo l'apertura

Il momento di inerzia I_a iniziale è quello di un cilindro uniforme:

$$I_a = \frac{1}{2}Mr^2$$

nella situazione finale avremo:

$$I_b = \frac{1}{2}(M-2m)r^2 + 2mR^2$$

conservando poi il momento angolare avremo la relazione

$$I_a\omega_a = I_b\omega_b$$

da cui

$$\omega_b = \frac{I_a}{I_b}\omega_a = \frac{\frac{1}{2}Mr^2\omega_a}{\frac{1}{2}(M-2m)r^2 + 2mR^2}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica,
Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione VIII - Forze apparenti e Moto armonico

A. Moto circolare e moto armonico

Esercizio 1.

Una sferetta di massa $m = 100g$ ruota con velocità angolare costante $\omega = 30rad/s$ lungo una circonferenza di raggio $R = 2m$ su di un piano orizzontale. Preso come origine delle coordinate il centro della circonferenza, determina

(a) Il modulo Velocitá radiale, dell'accelerazione centripeta e la tensione del filo

(b) Determina l'espressione della posizione $(x(t), y(t)$ della sfera supponendo che al tempo $t = 0$ la posizione sia $(2, 0)$.

(c) l'espressione matematica di $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$, e $a_y(t)$ i loro valori massimi

(d) l'equazione differenziale che lega la posizione istantanea all'accelerazione istantanea

$\Big[(a).\quad v = 60\frac{m}{s}, \quad a = 1800\frac{m}{s^2}, \quad T = 180N.$
$(b).\quad x(t) = 2m \cdot \cos(30t), \quad y(t) = 2m \cdot \sin(30t).$
$(c).\quad v_x(t) = -60\frac{m}{s} \cdot \sin(30t), \quad v_y(t) = 60\frac{m}{s} \cdot \cos(30t),$
$a_x(t) = -1800\frac{m}{s^2} \cdot \cos(30t), \quad a_y(t) = -1800\frac{m}{s} \cdot \sin(30t).$
$(d).\quad \vec{a} = -\omega^2\vec{r}\Big]$

Soluzione:
Semplice applicazione delle equazioni e formule relative a moto circolare uniforme e moto armonico.

Esercizio 2.

Un corpo si muove di armonico con un periodo di $0,26s$ e con un'ampiezza di oscillazione pari a $3,5cm$. Calcolare:

(a) Velocitá minima e massima del corpo durante il moto.

(b) Accelerazione minima e massima del corpo durante il moto.

(c) Se il sistema è costituita da una molla di costante elastica $k = 100N/m$ quanto è la massa del sistema?

$\Big[(a). \quad v_{min} = -0,85\frac{m}{s}, \quad v_{max} = 0,85\frac{m}{s}. \qquad (b). \quad a_{min} = -20,44\frac{m}{s^2}, \quad a_{max} = 20,44\frac{m}{s^2},$
$(c). \quad m = 0,171kg\Big]$

Soluzione:
Semplice applicazione delle equazioni e formule relative al moto armonico.

Esercizio 3. *Moto armonico e urto anelastico*

Un proiettile di massa m si muove con velocità iniziale v_0 e penetra in un blocco di legno di massa M collegato alla parete tramite una molla, di costante elastica k, arrestandosi al suo interno. Determinare la compressione massima della molla e dopo quanto tempo si verifica.
$\Big[x = \frac{mv_0}{\sqrt{(m+M)k}}, \quad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m+M}{k}}.\Big]$

Soluzione:
Simile all'esercizio 6 dell'esercitazione 5. Dalla conservazione della quantità di moto durante l'urto, che consideriamo impulsivo, possiamo ricavare la velocità finale v dopo l'urto, secondo l'equazione

$$mv_0 = (m + M)v$$

A questo punto, dopo l'urto, possiamo sfruttare la conservazione dell'energia per ricavare il valore della compressione massima:

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}v_0\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

da cui:

$$\frac{m^2v_0^2}{m + M} = kx^2$$

e quindi:

$$x = \frac{mv_0}{\sqrt{k(m+M)}}$$

Per quanto riguarda il tempo necessario ad ottenere la compressione massima, basta osservare che esso è un quanto del periodo necessario per una intera oscillazione e quindi:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

Esercizio 4.

Un pendolo di massa m e lunghezza $l = 2m$ oscilla a partire da un angolo massimo, rispetto alla verticale, $\theta_0 = 45$, determina:

a) L'equazione del moto del pendolo e il periodo di oscillazione, nell'approssimazione di piccole oscillazioni ($\theta_0 \leq 6^o$)

b) L'espressione dell'energia potenziale in funzione dell'angolo θ

c) L'espressione dell'energia cinetica in funzione di θ

d) L'espressione della tensione del filo in funzione dell'angolo θ

Soluzione:
Rivedere esercizio 4 dell'esercitazione 5 (almeno per quel che riguarda i punti b e c. Rivedere la teoria per il punto a. Provate voi il punto d.

Esercizio 5. *Gravitazione*

Un satellite di massa $m = 500kg$ orbita attorno alla terra su un orbita circolare di raggio R. chiamato $R_0 = 6370km$ il raggio medio della terra, determinare:

(a) quanto vale l'accelerazione centripeta del satellite in funzione della quota (presa a partire dalla superficie terrestre)

(b) Il legame fra velocità angolare, velocità tangenziale e raggio dell'orbita

(c) il legame fra periodo orbitale e raggio dell'orbita: per quale raggio il satellite sarà geostazionario?

(d) Che velocità ha un satellite che orbita a $500km$ dalla superficie terreste e quanto ci mette a fare un giro intorno la terra?

$\Big[(a).\quad a_c(r) = G\frac{M_T}{R^2} = g\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.\qquad (b).\quad \omega^2 = \frac{gR_0^2}{R^3},\quad v = wR.$
$(c).\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR_0^2}},\quad R_{gst} \approx 4,2\cdot 10^7 m.\qquad (d).\quad v = 7612\frac{m}{s},\quad T = 5671s = 1,575h.\Big]$

Soluzione:
Se riscriviamo la forza di Newton per il pianeta terra come:

$$G\frac{mM_T}{R^2} = m\cdot G\frac{M_T}{R_0^2}\cdot\frac{R_0^2}{R^2} = mg\frac{R_0^2}{R^2}$$

Possiamo fare a meno di conoscere la massa M_T della terra. A questo punto eguagliando tale forza con l'espressione della forza centripeta otteniamo $F_c = m\omega^2 R$

$$g\frac{R_0^2}{R^2} = \omega^2 R$$

Ora ricordando il legame fra velocità angolare e velocità tangenziale e periodo possiamo rispondere alle varie domande (ricordarsi che se un satellite è geostazionario il suo periodo di rotazione attorno alla terra è uguale a quello terreste intorno al proprio asse e vale un giorno).

B. Forze apparenti

Esercizio 6.

L'ascensore di un grande grattacielo raggiunge la velocitá di $6\frac{m}{s}$ in $2,5s$. Supponendo che in questo intervallo la sua accelerazione sia costante, quale peso segna una bilancia pesapersone su cui é appoggiato un signore che ha massa $80kg$? E se scendesse invece di salire?

$\Big[P_s = 976N,\quad P_d = 592N.\Big]$

Soluzione:
Provateci voi.

Esercizio 7. *Forza centrifuga*

Un'auto sta percorrendo un tratto rettilineo di strada a velocitá v. La strada curva tracciando un arco di circonferenza di raggio r. Se il coefficiente di attrito statico vale μ, qual é la velocitá massima con cui l'auto puó affrontare la curva senza slittare?

$\Big[v = \sqrt{\mu g r}.\Big]$

Soluzione:

La forza centripeta è rappresentata dalla forza di attrito il cui valore massimo è dato da $F_{PD} = \mu N$, per cui:

$$\mu mg = m\frac{v^2}{r}$$

da cui la soluzione.

Esercizio 8. *Forza di Coriolis*

Un insetto cammina in direzione radiale verso l'esterno con velocitá relativa $v = 1\frac{cm}{s}$ su un disco orizzontale scabro rotante alla velocitá angolare $\omega = 4,7\frac{rad}{s}$. Se il coefficiente di attrito statico vale $\mu_s = 0,08$, a quale distanza dal centro del disco l'insetto inizierá a slittare? A causa di quale forza apparente: Coriolis o Centrifuga?

$\left[R = 0,035m\right]$

Soluzione:

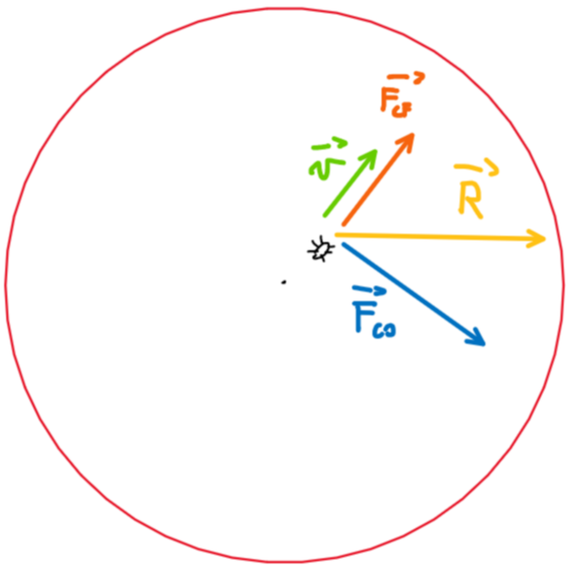


Figure 1: Sfera che rotola su piano orizzontale

L'insetto muovendosi in direzione radiale è soggetto a due forze, cosiddette apparenti:

- la forza centrifuga

$$\vec{F_{CF}} = m\omega^2\vec{r}$$

- la forza di Coriolis:

$$\vec{F_{CO}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Le due forze inoltre sono perpendicolari fra di loro così che il modulo della forza risultante può essere ricavato dal Teorema di Pitagora e deve essere uguale al modulo della forza di attrito così che possiamo scrivere:

$$R^2 = (m\omega^2 r)^2 + (2m\omega v)^2 = F_A^2 \leq (\mu m g)^2$$

Volendo sapere a che distanza dal centro l'insetto si staccherà basta esplicitare r nella disequazione:

$$(\omega^2 r)^2 \leq (\mu g)^2 - (2\omega v)^2$$

da cui:

$$r \leq \sqrt{\frac{\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2}{\omega^4}} \approx \frac{\mu g}{\omega^2}$$

in quanto, a conti fatti la forza di Coriolis risulta essere molto più piccola di qulla necessaria a vincere l'attrito.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione IX - Onde e suono

A. Onde stazionarie

Esercizio 1. *Parametri di base delle onde*

Un pianoforte emette una nota di LA, ad una frequenza di $440Hz$. Sapendo che la velocitá delle onde sonore é pari a $343\frac{m}{s}$, determinare la lunghezza d'onda, il vettore d'onda e il periodo dell'onda emessa.

$\Big[(a).\quad \lambda = 0,780m, \quad k = 8,06m^{-1}, \quad T = 2,27 \cdot 10^{-3}s.\Big]$

Soluzione:
Basta applicare pedissequamente le definizioni.

Esercizio 2. *Onde su una corda*

Una corda di lunghezza $0,409m$ ha una massa di $10g$. Quale tensione l'accordatore deve applicare alla corda affinché produca la nota di LA precedentemente introdotta?

Calcolare lunghezze d'onda e frequenze della seconda e della terza armonica.
$\Big[(a).\quad T = 3167N. \qquad (b).\quad \lambda_2 = L = 0,409m, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}L = 0,273m, \quad f_2 = 880Hz, \quad f_3 = 1320Hz.\Big]$

Soluzione:
Basta applicare la relazione fra la velocità v dell'onda, la tensione T del filo e la sua densità lineare d_l:

$$v = \sqrt{\frac{T}{d_l}}$$

B. Funzione d'onda

Esercizio 3. *Onda piana trasversale*

Un'onda piana trasversale é descritta dalla funzione

$A(\vec{x}, t) = 15 \sin(5\pi x - 100\pi t)\hat{n}$

Dopo aver individuato la direzione di propagazione dell'onda, calcolarne lunghezza d'onda, frequenza, periodo, velocitá ed ampiezza.

$\Big[\lambda = 0,4m, \quad f = 50Hz, \quad T = 0,02s, \quad v = 20\frac{m}{s}, \quad A = 15m.\Big]$

Soluzione:
Basta Confrontare l'equazione nel testo con la definizione generale di onda periodica sinusoidale piana

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \phi)\hat{n} = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \pm \frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\hat{n}$$

dove $\vec{k}$ è il vettor d'onda che ne descrive la direzione di propagazione (assunta come la direzione x), ω la pulsazione, ϕ la fase, A_0 l'ampiezza, $\hat{n}$, il versore che descrive la direzione di oscillazione perpendicolare al vettor d'onda $\vec{k}$ e che con quest'ultimo stabilisce il piano di oscillazione dell'onda, λ la lunghezza d'onda e T il periodo.

Esercizio 4.

Un'onda piana trasversale che oscilla sul piano xy viaggia nella direzione positiva dell'asse y ed é caratterizzata da una velocitá di $100\frac{m}{s}$ e da una frequenza pari a $500Hz$. Determinare:

(a) Periodo e lunghezza d'onda.

(b) Funzione d'onda, ipotizzando che abbia ampiezza $A = 25cm$ e oscilli nel piano xy.

$\Big[(a). \quad T = 2 \cdot 10^{-3}s, \quad \lambda = 0,2m. \qquad (b). \quad A(\vec{y}, t) = 0,25 \sin(10\pi y - 1000\pi t)\hat{\imath}.\Big]$

Soluzione:
Confrontando la generica espressione dell'onda piana

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \phi)\hat{n} = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \pm \frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\hat{n}$$

con i dati che ci fornisce il problema abbiamo che se la direzione di propagazione è quella y e l'onda oscilla nel pian xy allora:

$$\begin{aligned}\vec{k} &= (0, k_y, 0)\\ \hat{n} &= \hat{i}\end{aligned}$$

Inoltre $A_0 = 0,25m$.
Considerando che la relazione esistente fra frequenza f, lunghezza d'onda λ e velocità

$$v = \lambda f$$

e fra frequenza e pulsazione ω e periodo T

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

otteniamo $\lambda = 0,2m$, $\omega = 1000\pi\frac{rad}{s}$, $T = 0,002s$ e ϕ che senza altre indicazioni la scegliamo uguale a zero, per cui:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 0,25m \sin\left(10\pi\frac{1}{m}y \pm 1000\pi\frac{rad}{s}t\right)\hat{i}$$

C. Effetto Doppler

Esercizio 5. *Treni in movimento*

Due treni viaggiano in parallelo sui binari: il primo tiene una velocitá di $v_1 = 126\frac{km}{h}$ mentre il secondo, che lo segue, si muove di moto rettilineo uniforme con $v_2 = 180\frac{km}{h}$.
Il primo emette un fischio alla frequenza di $1500Hz$ per segnalare il suo passaggio: con quale frequenza viene percepito il suono dal macchinista del secondo treno?

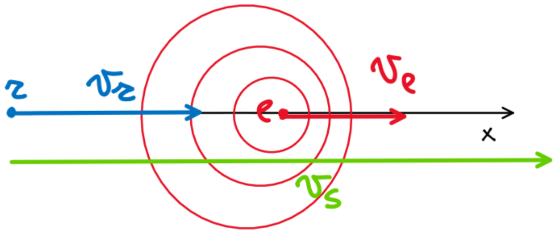
Quale sarebbe la frequenza percepita se i due treni viaggiassero uno verso l'altro?
$\left[(a).\quad f' = 1560Hz.\qquad (b).\quad f'' = 1914Hz.\right]$

Soluzione:
Chiamando con v_s la velocità del suono, v_e la velocità dell'emettitore (sorgente) e v_r la velocità di chi riceve (ascolta) il suono, allora abbiamo due casi:

- Sorgente ferma e ascoltatore in movimento In questo caso la relazione che lega la frequenza emessa f_0 con quella ricevuta f è data dalla relazione:

  $$f = f_0\frac{v_s \mp v_r}{v_s}$$

  dove il segno meno e il segno più corrispondono rispettivamente al caso di ascoltatore che si allontana e ascoltatore che si avvicina alla sorgente.



- Sorgente in movimento e ascoltatore fermo In questo caso la relazione che lega la frequenza emessa f_0 con quella ricevuta f è data dalla relazione:

$$f = f_0 \frac{v_s}{v_s \pm v_e}$$

dove il segno meno e il segno più corrispondono rispettivamente al caso di sorgente che si avvicina e ascoltatore che si allontana alla sorgente.

Nel caso generale quindi avremo:

$$f = f_0 \frac{v_s \mp v_r}{v_s \pm v_e}$$

Per ottenere le soluzioni basta scrivere le velocità dei due treni nel sistema internazionale e applicare l'ultima formula.

Esercizio 6. *Sorgente o ricevente?*

Una nave che si muove ad una velocitá di $10\frac{m}{s}$ emette il caratteristico suono, a $340Hz$, per segnalare il suo arrivo al porto. Se le strutture del porto fungono da superfici riflettente, con quale frequenza la stessa onda sonora viene percepita da un passeggero che si trova sul ponte?

$\left[f' = 360Hz\right]$

Suggerimento:
Occorre considerare che la nave è una sorgente in movimento e quindi l'onda che arriva nel porto è soggetta ad effetto doppler da sorgente in movimento e quindi arriva con frequenza modificata. Le strutture del porto poi, riflettendo l'onda, si comportano come ulteriori sorgenti ferme che riemettono l'onda ricevuta dalla nave in avvicinamento e quindi la frequenza udita dalla nave è ulteriormente soggetta ad effetto doppler da sorgente ferma e corpo in avvicinamento.

D. Battimenti

Esercizio 7.

Si hanno due violoncelli identici: il primo, in una corda di lunghezza $L_1 = 1,25m$, produce una frequenza fondamentale $f_1 = 130,9Hz$. La medesima corda del secondo viene pizzicata cosí da ridurre la lunghezza della parte vibrante: qual é questa lunghezza L_2 se si percepisce una frequenza di battimenti pari a $4,33Hz$?

$\left[(a). \quad L' = 1,17m.\right]$

Soluzione: Quando abbiamo due onde di frequenza f_1 ed f_2 che si sommano sappiamo che la frequenza dei battimenti è data da:

$$f_b = \frac{f_2 - f_1}{2}$$

da cui:

$$f_2 = f_1 + 2f_b$$

La velocità di propagazione di un'onda su di una corda tesa è data dalla ben nota relazione:

$$v = \sqrt{\frac{T}{d_l}}$$

dove la T è la tensione del filo e d_l è la densità lineare del filo. Tenendo conto che:

$$v = \lambda f$$

e che trattandosi di armonica fondamentale $\lambda = 2L$ otteniamo

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{d_l}}$$

Ora quindi mettendo insieme la prima e l'ultima equazione otteniamo:

$$2f_b = \left(\frac{1}{2L_2} - \frac{1}{2L_1}\right)\sqrt{\frac{T}{d_l}}$$

che risolvendo rispetto ad L_2 mi da la soluzione.

$$L_2 = \frac{L_1}{1 + 4L_1 f_b\sqrt{\frac{d_l}{T}}} = L_1\left(1 + 2L_1 f_b\sqrt{\frac{d_l}{T}}\right)^{-1}$$

e ricordandoci che:

$$f_1 = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{d_l}}$$

allora

$$L_2 = \frac{L_1}{1 + 2\frac{f_b}{f_1}} = L_1 \left(1 + 2\frac{f_b}{f_1}\right)^{-1}$$

Esercizio 8.

Due corde identiche, fissate agli estremi e alle quali é applicata la stessa tensione, vengono fatte vibrare contemporaneamente alla frequenza fondamentale di $610Hz$. Se la tensione di una delle due corde viene aumentata del 4%, qual é la frequenza di battimenti percepita?

$\left[(a). \quad f_B = 6.0Hz.\right]$

Soluzione:

L'impostazione del problema è del tutto similare a quella del problema precedente, con l'unica differenza che ora viene variata la tensione T, per cui:

$$2f_b = \frac{1}{2L}\left(\sqrt{\frac{T_2}{d_l}} - \sqrt{\frac{T_1}{d_l}}\right)$$

e quindi

$$f_b = \frac{1}{4L}\left(\frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{d_l}}\right)$$

Alternativamente, sapendo che

$$f_b = \frac{f_2 - f_1}{2}$$

e avendo ottenuto nel problema precedente che

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{d_l}}$$

dall'ultima equazione posso scrivere

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}}$$

e quindi

$$f_b = \frac{f_2 - f_1}{2} = f_1 \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}} - 1\right)}{2}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica,
Informatica e delle Telecomunicazioni
Fisica Generale I
prof. Sandro Wimberger

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Zanichelli Massimiliano
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione X - Fluidi

A. Fluidostatica

Esercizio 1. *Legge di Stevin*

La profonditá di una piscina olimpionica varia da $2m$ nel punto dove il livello dell'acqua é piú bassa fino a $3m$, dove é piú profonda. Calcolare le pressioni sul fondo della vasca nei due casi e la differenza di pressione tra i valori calcolati.
$\left[(a). \quad P_1 = 1,209 \cdot 10^5 Pa, \quad P_1 = 1,307 \cdot 10^5 Pa. \qquad (b).\Delta P = 9800 Pa\right]$

Soluzione:

Basta la semplice applicazione della legge di Stevino:

$$\Delta P = \rho g h$$

dove $\Delta P = P - P_0$ con $P_0 = 101325 Pa$ (pressione atmosferica media al livello del mare), ρ densità del fluido e h altezza della colonna.

Esercizio 2. *Principio di Archimede*

Se si appende un blocco di materiale ad un dinamometro questo misura $F_1 = 60N$. Immergendo completamente il blocco in acqua il dinamometro misura $F_2 = 40N$. Calcolare la densità del materiale.
$\left[\rho = 3000 \frac{kg}{m^3}.\right]$

Soluzione:

La forza sperimentata dal dinamometro quando il corpo è fuori dall'acqua è data da:

$$F_1 = mg = \rho_m V g$$

dove ρ_m è la densità del materiale. La forza di Archimede invece è data da

$$F_1 - F_2 = F_A = mg = \rho_f V_{imm} g$$

dove ρ_f è la densità del fluido e V_{im} è il volume immerso che nel nostro caso coincide con V. Ora quindi, conoscendo la densità dell'acqua, possiamo ricavare il volume del corpo secondo la relazione

$$V = V_{im} = \frac{F_1 - F_2}{\rho_f g}$$

da cui

$$\rho_m = \frac{F_1}{Vg} = \frac{F_1}{F_1 - F_2}\rho_f$$

Esercizio 3.

Un cilindro omogeneo di densità $\rho = 0.8\frac{g}{cm^3}$, raggio $R = 4cm$ e altezza $h = 15cm$ è mantenuto in posizione verticale ed è immerso in acqua, nel quale galleggia. Determinare l'altezza h' della parte immersa.

$\left[h' = 12cm\right]$

Soluzione:

Basta eguagliare forza peso $P = mg$ e forza di Archimede $F_A = \rho_f V_{im} g =$:

$$\rho_f V_{im} g = mg = \rho_m V tot g$$

e ricordarsi che $V tot = S \cdot h$ mentre $V im = S \cdot h'$ da cui:

$$\frac{\rho_m}{\rho_f} = \frac{V_{im}}{V_{tot}} = \frac{h'}{h}$$

B. Fluidodinamica

Esercizio 4.

Un rubinetto di sezione $A_1 = 4cm^2$ emette acqua (verso il basso con un getto uniforme) ad una velocitá $v_1 = 1\frac{m}{s}$. Calcolare la velocitá e la sezione del getto d'acqua $20cm$ piú in basso.

$\left[v_2 = 2,22\frac{m}{s}, \quad A_2 = 1,8cm^2.\right]$

Soluzione:

Per la conservazione del flusso Φ si deve avere

$$\Phi_1 = A_1 v_1 = \Phi_2 = A_2 v_2$$

Per cui

$$A_2 = \frac{v_1}{V_2} A_1$$

Utilizzando quindi l'equazione di Bernoulli (conservazione dell'energia) a pressione costante $P_1 = P_2$ abbiamo:

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

da cui, dopo semplici passaggi

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2) + v_1^2}$$

e quindi

$$A_2 = \frac{v_1}{\sqrt{2g(h_1 - h_2) + v_1^2}} A_1$$

Esercizio 5. *Legge di Torricelli*

Un liquido é contenuto in un recipiente in cui viene praticato un piccolo foro sulla parete laterale, ad una profonditá h dalla superficie. Ricavare l'equazione per la velocitá di fuoriuscita del liquido dal foro.
Ripetere le operazione senza trascurare la velocitá del liquido sulla sua superficie libera, assumendo che questa abbia un'area A_1 e il foro un'area A_2.

$\left[(a). \quad v = \sqrt{2gh}. \qquad (b). \quad v = A_1\sqrt{\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}}.\right]$

Soluzione:

L'equazione di Bernoulli dice che

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$$

da cui, essendo $P_1 = P_2$, dopo semplici passaggi

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) + v_1^2$$

e quindi imponendo la conservazione del flusso $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

e andando a sostituire si ottiene

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{A_1^2 - A_2^2}}$$

che nel caso limite in cui $A_2 << A_1$ diventa

$$v_2 = \sqrt{2g\Delta h}$$

Esercizio 6. *Teorema di Beroulli*

Una fontana è in grado di lanciare un getto d'acqua fino all'altezza massima $h = 200m$. Qual é la portata, se il diametro della base della colonna d'acqua é pari a $20cm$?
Qual é il diametro d_2 della colonna d'acqua a metá dell'altezza massima ?
$\left[Q = 1,97 \frac{m^3}{s}, \quad d_2 = 23,8cm\right]$

Traccia:

Si risolve sulla falsariga del problema 4. Una volta ottenuta la velocità v_1 di uscita dell'acqua dalla fontana si ricava, imponendo la conservazione dell'energia, la velocità v_2 all'altezza di $100m$ e si impone la conservazione dl flusso $\Phi_1 = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \Phi_2$, per ottenere la sezione del tubo di flusso.

UNIVERSITÀ DI PARMA

Titolare del corso:
Wimberger Sandro
Esercitatore:
Massimiliano Zanichelli
Esercizi di:
Cardi Riccardo

Ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni - Fisica I - Esercitazioni

Esercitazione XI - Calore e temperatura

A. Calore

Esercizio 1. *Calore specifico e capacitá termica*

Determinare la capacitá termica e il volume di un laghetto di montagna sapendo che in una giornata assorbendo un calore totale $Q = 15GJ$ la sua temperatura aumenta di 3^oC (calore specifico dell'acqua $c_{H_2O} = 4186\frac{J}{kg \cdot K}$).

$\left[C = 5 \cdot 10^9 \frac{J}{K}, \quad m = 1,19 \cdot 10^6 kg\right]$

Suggerimento:
Basta applicare la relazione fondamentale della calorimetria

$$Q = mC_s \Delta T$$

dove m è la massa e C_s il calore specifico e ricordarsi la definizione di capacità termica C:

$$C = mC_s$$

Esercizio 2. *Equilibrio termico*

Un blocchetto di ferro di $1,5kg$ viene scaldato fino alla temperatura di $T_1 = 600K$ e poi immerso in un contenitore termicamente isolato con $4L$ d'acqua a $T_2 = 20^oC$. Sapendo che il calore specifico del ferro vale $C_f = 444\frac{J}{kg \cdot K}$, qual é la temperatura di equilibrio T_e raggiunta dal sistema?

Quanto calore viene ceduto dal blocchetto all'acqua?

$\left[T_e = 305K, \quad Q = 2 \cdot 10^5 J.\right]$

Soluzione:

Basta imporre la conservazione del calore scambiato, per cui:

$$m_f C_f (T_1 - T_e) = m_a C_a (T_e - T_2)$$

Il primo termine rappresenta il modulo del calore ceduto che coincide col calore assorbito dall'acqua. Semplici passaggi portano al risultato:

$$T_e = \frac{m_f C_f T_1 + m_a C_a T_2}{m_f C_f + m_a C_a}$$

dove $C_a = 4186 J/(kg \cdot K$.

Esercizio 3. *Transizioni di fase*

Una massa di ghiaccio pari a $2kg$ alla temperatura di $-10^o C$ viene messa in un bicchiere dove viene scaldata fino a sciogliersi e raggiungere una temperatura di $120^o C$. Quanto calore assorbe il ghiaccio durante la trasformazione?

$(c_{ghiaccio} = 2220 \frac{J}{kg \cdot K}, \quad c_{vapore\ acqueo} = 1940 \frac{J}{kg \cdot K},$
$L_{H_2O,\ fusione} = 3,33 \cdot 10^5 \frac{J}{K}, \quad L_{H_2O,\ evaporazione} = 2,27 \cdot 10^6 \frac{J}{K})$

$\left[Q = 6,165 \cdot 10^6 J.\right]$

Soluzione:

Abbiamo 5 fasi:

- La prima fase in cui la temperatura passa da $T_1 = -10^o C$ a $T_2 = 0^o C$ e quindi:

  $$Q_1 = m C_g (T_2 - T_1) = 44,4 kJ$$

  dove C_g è il calore specifico del ghiaccio.

- La seconda fase in cui si scioglie il ghiaccio

  $$Q_2 = m \lambda_f = 666 kJ$$

  dove λ_f è il calore latente di fusione del ghiaccio.

- La terza fase in cui l'acqua, già liquida, passa da $T_2 = 0^o C$ a $T_3 = 100^o C$

  $$Q_3 = m C_a (T_3 - T_2) = 837,2 kJ$$

  dove C_a è il calore specifico dell'acqua.

- La quarta fase in cui l'acqua passa da fase liquida a quella vapore

  $$Q_4 = m\lambda_e = 4,54MJ$$

  dove λ_e è il calore latente di ebollizione.

- la quinta fase in cui il vapore passa da $T_3 = 100^oC$ a

  $$T_4 = 120^oC$$

  $$Q_5 = mC_v(T_4 - T_3) = 77,6KJ$$

  dove C_v è il calore specifico del vapore.

Il calore totale è chiaramente la somma dei 5 contributi

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 6,165MJ \tag{1}$$

Esercizio 4. *Transizioni di fase*

Una massa di ferro $m_f = 0,5kg$ alla temperatura iniziale di $T_f = 80^oC$ viene posta all'interno di un contenitore perfettamente coibentato e di capacità termica trascurabile. All'interno di tale recipiente è posta una massa $m_g = 20g$ di ghiaccio alla temperatura di $T_g = -15^oC$. Si calcoli la temperatura di equilibrio del sistema e si determini la percentuale di ghiaccio che si scioglie al raggiungimento dell'equilibrio termico, si ripeta il calcolo considerando che la massa di ferro sia paria a $100g$.
$(c_{ghiaccio} = 2220\frac{J}{kg\cdot K}, \quad c_{Fe} = 444\frac{J}{kg\cdot K}, L_{H_2O,\ fusione} = 3,33\cdot 10^5\frac{J}{K}, \quad c_{acqua} = 4186\frac{J}{kg\cdot K})$
$\left[(a.) \quad T_{eq} = 34,15^oC, \quad 100\% \qquad (b.) \quad T_{eq} = 0^oC, \qquad 43,4\%\right]$

Soluzione:
Per prima cosa vediamo qual'è il calore necessario Q_1per portare il ghiaccio dalla temperatura $T_g = -15^oC$ alla temperatura $T_0 = 0^oC$ e l'ulteriore quantità di calore Q_2 necessaria per sciogliere tutto il ghiaccio

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_gC_g(T_1 - T_g) &= 666J \\ Q_2 &= m_g\lambda_f &= 6660J \end{aligned}$$

la cui somma diventa $Q_{12} = 7326J$.
Ora il calore disponibile Q_3 nel blocco di ferro, fino al raggiungimento dello della temperatura $T_0 = 0^oC$, oltre la quale il materiale non potrebbe più ceder calore al ghiaccio è dato da

$$Q_3 = m_fC_f(T_f - T_0) = 17760J$$

Ora una volta sciolto il ghiaccio rimane ancora disponibile la quantità di calore Q_4 data da

$$Q_4 = Q_3 - Q_{12} = 10434J$$

Questo calore si distribuisce tra ferro e acqua fino al raggiungimento dell'equilibrio termico

$$Q_4 = m_f C_f T_e + m_a C_a T_e$$

da cui:

$$T_e = \frac{Q4}{m_f C_f + m_a C_a} = 34,13^o C$$

Se invece la massa di ferro fosse solo $100g$ il calore disponibile sarebbe solo $Q_3' = 3552J$. Tolta da Q_3' la quantità Q_1 necessaria a portare il ghiaccio a temperatura $T_0 = 0^o C$ ne rimarrebbero solo

$$Q_2' = Q_3' - Q_1 = 2886J$$

necessari a fra sciogliete una frazione del ghiaccio totali pari a

$$\eta = \frac{Q_2'}{Q_2} = \frac{2886J}{6660J} = 43,3\%$$

che corrispondono a $8,67g$ di ghiaccio circa.

B. Gas perfetti e trasformazioni termodinamiche

Esercizio 5. *Trasformazioni termodinamiche*

La seconda legge di *Gay-Lussac* afferma che in una trasformazione isocóra la pressione ha un andamento secondo l'equazione $P = P_0(1 + \alpha t)$, dove P_0 é la pressione a $0^o C$ e $\alpha = \frac{1}{273,15} {}^o C^{-1}$ e t é la temperatura in $^o C$.
Una mole di gas é sottoposta ad una pressione di $1atm$ a $0^o C$; qual é la pressione a $293,15K$ e a $-15^o C$?

A quale temperatura la pressione scende fino a $0Pa$?

$\Big[(a).\quad P_1 = 1,18 \cdot 10^5 Pa, \quad P_2 = 0,95 \cdot 10^5 Pa. \qquad (b).\quad t = -273,15^o C = 0K\Big]$

Soluzione:
É una semplice applicazione della formula sopra indicata, basta trasformare i gradi K in gradi $^o C$

Esercizio 6. *Legge dei gas perfetti*

Un gas perfetto subisce la serie di tre trasformazioni in Fig.1: nel punto A le 3 moli di gas si trovano ad una temperatura di $300K$. Quanto valgono temperatura, pressione e volume in ognuno dei tre punti A, B e C?

(N.B.:la trasformazione dallo stato B allo stato C e isoterma)

$\Big[(a).\quad T_A = 300K,\quad P_A = 45kPa,\quad V_A = 0,166m^3.\qquad (b).\quad T_B = 900K,\quad P_B = 135kPa,\quad V_B = 0,166m^3.\qquad (c).\quad T_C = 900K,\quad P_C = 45kPa,\quad V_C = 0,498m^3.\Big]$

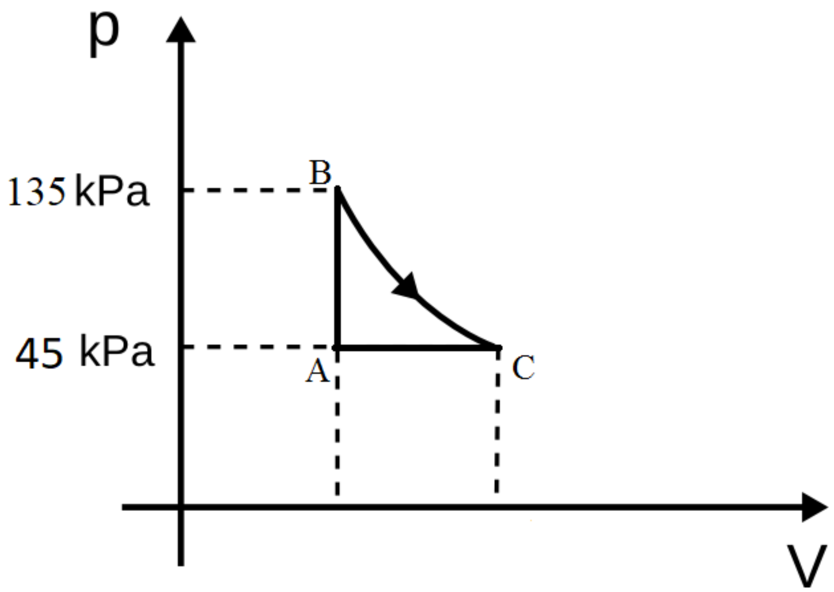


Figure 1: Fig.1 Trasformazioni termodinamiche

Soluzione:

Del punto A conosciamo pressione, temperatura e numero di moli (che non varia nel tempo), quindi per trovare il volume V_a basta applicare la legge dei gas perfetti

$$V = \frac{nRT}{P} = 0,1662m^3$$

Siccome il punto B è collegato al punto A attraverso una isocora possiamo utilizzare la relazione:

$$\frac{T_a}{P_a} = \frac{T_b}{P_b}$$

per cui $V_b = V_a$ e

$$T_b = \frac{P_b}{P_a}T_a = 900K$$

A questo punto per passiamo da B a C con una isoterma il che ci dice che la temperatura $T_c = T_a = 900K$

Siccome per tornare da C ad A abbiamo una trasformazione isobara allora

$$\frac{V_a}{T_a} = \frac{V_b}{T_b}$$

$$V_c = \frac{T_c}{T_a} V_a = 0,4996 m^3$$

e abbiamo chiuso il ciclo

C. Teoria cinetica dei gas

Esercizio 7.

Si hanno 4 moli di ossigeno monoatomico ($M = 16\frac{g}{mol}$). Sapendo che il volume molare é pari a $22,5L$ a 0^oC, qual é il volume occupato dal gas alla temperatura di $300K$ se la pressione non cambia

Determinare l'energia interna e la velocitá media delle molecole nello stato descritto.

$\left[(a). \quad V = 0,098m^3, \quad P = 1,01 \cdot 10^5 Pa. \qquad (b). \quad U_{int} = 1,5 \cdot 10^4 J, \quad v = 684\frac{m}{s}.\right]$

Soluzione:

il primo punto è la semplice applicazione della prima legge di Gay-Lussac

$$\frac{V_a}{T_a} = \frac{V_b}{T_b}$$

Per risolvere il secondo punto invece occorre sfruttare il teorema dell'equipartizione dell'energia che dice che ad ogni grado di libertà di una molecola è associata una energia media di $\frac{1}{2}K_B T$. Siccome per l'ossigeno monoatomico (che non esiste) i gradi di libertà sono 3 otteniamo che in media per ogni molecola di massa m:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}K_B T$$

Semplificando e considerando un numero di Avogadro N_a di molecole, otteniamo che per una mole:

$$K = N_a m < v^2 >= M < v^2 >= 3NaK_B T = 3RT$$

dove M è la massa molare e quindi otteniamo per la velocità media

$$v_m = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$