diagonalizzazione

Esercizio 1. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tale che $P^{-1}AP = D$.

autovett
autovall
autospazi

Stabile se A è diagonaliz su $\mathbb{R}$ $\to$ se simmetrica allo diagon
senò calcola

nostro caso: ① trovare gli autovalori: $A - \lambda I \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1^{31} & 2^{32} & -\lambda^{33} \end{pmatrix}$ ora calcolare il polinomio caratteristico (il det):

$-3+5(1)-(1)^2-(1)^3=0$

$$-1(-1+\lambda) + 2 \cdot -1(2-2\lambda) + -\lambda(-2+\lambda+\lambda^2) = \frac{-3+5\lambda-\lambda^2-\lambda^3}{(\lambda-1)} \to -\lambda^2-2\lambda+3$$

riscomponi

$-(\lambda+3)(\lambda-1)$

$$P_\lambda = (\lambda-1)\cdot(-3-\lambda)\cdot(\lambda-1) = (\lambda-1)^2\cdot(-3-\lambda)$$

Polinomio car.

Poniamo $=0$ $\begin{cases} \lambda-1=0 \\ -\lambda-3=0 \end{cases}$

λ = autovalore

se abbiamo 3 autovalori diversi allora la mat è diagonalizzabile

$m_a(1) = 2$ $\qquad$ $m_a(-3) = 1$

molteplicità algebrica di 1; in quanto 1 appare 2 volte come soluzione $(\lambda-1)^{②}$

② ora dobbiamo controllare dim autospazi

$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1^{31} & 2^{32} & -\lambda^{33} \end{pmatrix}$ ora a λ sostituiamo gli autovalori

$\lambda = 1$

$$V_\lambda \to V_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to V_1 = \mathrm{Sol}\left(A - \overset{\lambda}{1} I \,\middle|\, 0\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

rg=1 quindi la dim dell'autospazio è 3-1=2
2 è anche la m_g di $\lambda=1$

molteplicità geometrica

che è = a m_a

$V_{-3} \to$ già so che è dim 1 quindi non serve calcolare

$m_{a_{Tot}} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ quindi diagonalizzabile

come determinare mat invertibile P e diagonale D:

$\to$ la m. D è formata autovalori posti su diagonale principale senza un ordine specifico

$\to$ per ogni autovalore corrispondono tanti autovet. quanto vale la loro m_g (nel nostro caso $m_g(1)=2$ e $m_g(-3)=1$)
↳ dovremo comporre la m. P mettendo gli autovet. nella colonna corrispondente all'autovalore presente in D

se $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_1 & v_{-3} \\ | & | & | \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_{-3} & v_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

ovviamente per $\lambda=1$ ci sono due autovet diversi in quanto dim autospazio = 2

calcoliamo autovettori
↳ autovettori generano autospazi
riprendendo la matrice

$V_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ abbiamo già che $x - 2y + z = 0$ (eq cartesiana) $\rightsquigarrow$ eq parametrica $t\cdot(\;) + s(\;)$

$V_{-3} = \rightsquigarrow$ $1(\;)$

$P = \left((t)(s)(1) \right)$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = D$$

Teorema spettrale

lo usiamo quando ci viene chiesto $Q^T A Q = D$
↳ lo applichiamo a m. simmetriche: essendo simm. sappiamo già che A è diagonalizzabile;

calcoliamo i soliti autovettori come solito e componiamo la solita D con gli autovalori; fin qua tutto uguale

per comporre Q dobbiamo prendere gli autovettori e dividerli per la loro norma prima di inserirli come colonne nella matrice

$\vec{v}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \|v_1\| = \sqrt{2} \to \frac{[1 \; -1 \; 0]}{\sqrt{2}}$

$\vec{v}_2 \dots$ " " "

$\vec{v}_3 \dots$ " " "

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\vec{v}_{21}}{\|v_2\|} & | \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\vec{v}_{22}}{\|v_2\|} & \frac{\vec{v}_3}{\|v_3\|} \\ 0 & \frac{\vec{v}_{23}}{\|v_2\|} & | \end{pmatrix}$$

qua ricaviamo Q: $QAQ^T = D$

in più dato che A è simmetrica Q è ortogonale; ciò vuol dire che $Q^T = Q^{-1}$
e quindi

$$Q^{-1}AQ = Q^T A Q = D$$

easy

Procedura

① matrice simmetrica? allora diagonalizzabile
no? trova autovalori; per λ dove $m_a(\lambda) > 1$ sostituisci nella $A = A - \lambda I$ e conta m_g
se $\dim \mathbb{R}^n = m_{g_{Tot}}$ allora diagonalizzabile

② trova $D \to$ fai I con autovalori

③ trova autovet associati a autovalori e scrivili in colonne in P

fatto

ruffini: può servire per scomporre

esempio: $-3 + 5\lambda - \lambda^2 - \lambda^3$ $\qquad$ troviamo λ: $-3 + 5\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ quindi $(\lambda - 1)$

ora dividiamo

$\frac{-3+5\lambda-\lambda^2-\lambda^3}{\lambda-1}$ ora possiamo applicare ruffini

riordiniamo i polinomi: $-\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3$ ed ora li scrivo nella tabella; torniamo al divisore $x-1$, riporto il numero in fondo alla tabella cambiando segno:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & & -1 & -2 & 3 \\ \hline & -2\,\lambda^2 & -2\,\lambda^1 & 3\,\lambda^0 & 0 \end{array}$$

$1 \cdot -1 = -1$ $\qquad$ $1 \cdot 3$ $\qquad$ resto

il primo coef lo riscrivo semplicemente qui

$$-1\cdot\lambda^2 + -2\cdot\lambda^1 + 3\cdot\lambda^0 + 0 = -\lambda^2 - 2\lambda + 3$$

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e in tal caso trovare una matrice invertibile P e un matrice diagonale D, tali che $P^{-1}AP = D$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ ora calcolo il det: $\cancel{1-\lambda} + \lambda + (-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 + 1)$

$2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda \rightarrow (\lambda)\underbrace{(2\lambda - \lambda^2 - 1)}_{(-\lambda+1)(\lambda-1)}$ $\Big\}$ $(\lambda)(-\lambda+1)(\lambda-1)$ $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$m_a(0) = 1$

$m_a(1) = 2$

controlliamo questo

speriamo sia $m_g = 2$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$ la riduciamo $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underbrace{\mathbb{R}^3 - rg(1) = 2}_{m_g(1)} + \overset{1}{m_g(0)} = 3$ è la m A diagonalizzabile ✓

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo autovettori di $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x + y - z = 0 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t + s \end{cases} \Rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

troviamo autovettore di $V_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ la riduciamo $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Bigg\} \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ✓$$

Esercizio 4. Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & h & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ricorda qualsiasi A invertibile se $\det A \neq 0$

1. Stabilire per quali valori di h la matrice A è invertibile.
2. Calcolare gli autovalori di A
3. Stabilire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile. Calcolare gli autospazi nel caso $h = 0$.

$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & h & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 0 + h(9-0) + 0 = 9h \neq 0 \rightarrow h \neq 0$ $\Big\}$ A invertibile per $\forall h \in \mathbb{R} : h \neq 0$ corretto

sbagliato da riguardare

autovalori di $A \rightarrow (h-\lambda)(9) = (9h - \lambda) \rightarrow \lambda = 9h$ $\quad$ A non è diagonalizzabile per nessun

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Esercizio 1. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare gli autovalori di A e una base per ciascun autospazio.
2. Determinare una matrice ortogonale U e una matrice diagonale D tale che $U^T AU = D$.

Chiedere ad elonz

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A - I\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \det = 2-\lambda\,(3 - 9\lambda + \lambda^2) + \lambda - 3 + 2\lambda$

$= 6 - 8\lambda + 2\lambda^2 - 3\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - 3 + 2\lambda$

$= 3 - 8\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$ $\quad$ da qui usiamo ruffini

$3 - 8(n) + 6(n) - n = 0 \quad n?$

$n = 1 \rightarrow 3 - 8 + 6 - 1 = 0$ ✓

dobbiamo dividere per $(\lambda - 1)$

$3 - 8\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$

$\Downarrow$

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda + 3$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & +6 & -8 & 3 \\ 1 & & -1 & 5 & -3 \\ \hline & -1 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

escono radici brutte

3 autovalori: -1, $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

$$-\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)(\lambda - 1)$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ già si vede che è diagonalizzabile perché simmetrica

Determinare una matrice ortogonale U e una matrice diagonale D, tali che $U^T A U = D$.

non mi interessa in quanto succede automaticamente

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{troviamo autovalori}} (3-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2) = 9-12\lambda+3\lambda^2-3\lambda+4\lambda^2-\lambda^3$$

$$= 9-15\lambda+7\lambda^2-\lambda^3$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & +7 & -15 & 9 \\ 1 & & -1 & 6 & -9 \\ \hline & -1 & 6 & -9 & 0 \end{array}$$

$(\lambda-1)$ $\quad m_a(1)=1$

$$-\lambda^2+6\lambda-9 = (-\lambda+3)(\lambda-3) \quad m_a(3)=2$$

$$= -\lambda^2+6\lambda-9$$

troviamo autovettori

$$V_3 \begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 1 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ dim autospazio $= \mathbb{R}^3 - rg\,1 = 2$

$m_g(3)=2$ ✓

$-x+z=0 \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=x \end{cases} \rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_1 \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ rg 2 → dim 1 → $\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ 2y=t-t \\ z=-t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases} \rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x+z=2y$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

trovare autovet norma → quindi:

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\|} = \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \qquad \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|} = \frac{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}{1} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$