Méthode des différences finies pour l'EDP de transport 1D

Andrea Brugnoli

11 Avril 2022

UNIVERSITY OF TWENTE.

Aperçu

Équation du transport 1D

L'EDP la plus simple

L'évolution d'un champ scalaire $u(x,t)$ transporté par un fluide satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad x \in [0, L], \quad t \in (0, T].$$

Pour le flux $q(u,x,t)$ on considère une vitesse constante pour le fluide

$$q(u,x,t) = c\ u(x,t), \qquad c > 0.$$

Le problème est bien posé lorsque on spécifie

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x), && \text{Donnée initiale,} \\ u(0,t) &= f(t), && \text{Condition au bord.} \end{aligned}$$

Solution Analytique

Si f, g sont régulières, i.e. C^1, et $f(0) = g(0)$, $f'(0) = -cg'(0)$ alors
$u \in C^1([0, T] \times [0, L])$

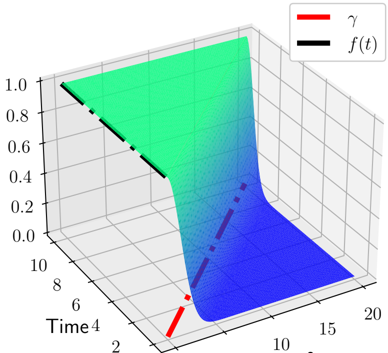
$$u(x, t) = \begin{cases} g(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.

Exemple :
$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10$

$$g(x) = \exp(-x^2/4),$$
$$f(t) = 1,$$

Solution $u(x, t)$



Solution Analytique

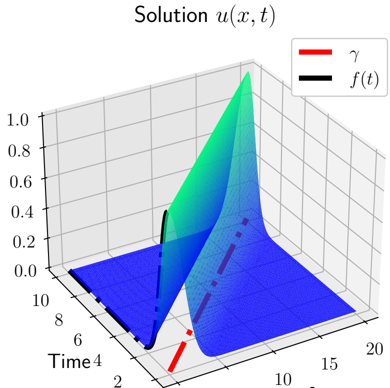
Si f, g sont régulières, i.e. C^1, et $f(0) = g(0)$, $f'(0) = -cg'(0)$ alors
$u \in C^1([0, T] \times [0, L])$

$$u(x,t) = \begin{cases} g(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.

Exemple :
$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10$

$$g(x) = \exp(-x^2/4),$$
$$f(t) = \exp(-t^2),$$



Solution Analytique

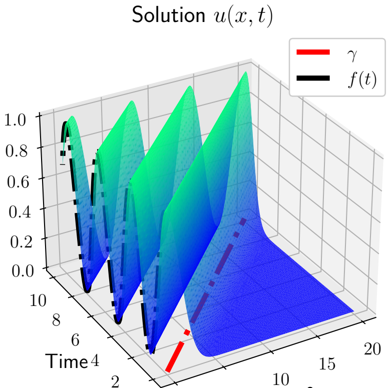
Si f, g sont régulières, i.e. C^1, et $f(0) = g(0)$, $f'(0) = -cg'(0)$ alors
$u \in C^1([0, T] \times [0, L])$

$$u(x,t) = \begin{cases} g(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.

Exemple :
$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10$

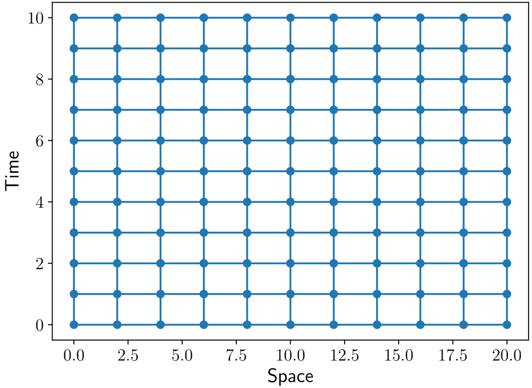
$$g(x) = \exp(-x^2/4),$$
$$f(t) = \cos^2(t),$$



Discrétisation du domaine : le maillage

On considère un maillage rectangulaire uniforme (t_j, x_m) :
cela signifie que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ sont constants.

La champs scalaire discret est noté par $u_{i,n} \approx u(x_i, t_n)$ et représente une approximation de la solution exact.



Approximation des dérivées

Premier essai : schema d'Euler explicite

On considère l'approximation au premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} + O(\Delta t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,n} - u_{i,n}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Bibliographie

Olver, Peter J. *Introduction to partial differential equations*. Springer, 2014.