Méthode des différences finies pour l'EDP de transport 1D

Andrea Brugnoli

11 Avril 2022

UNIVERSITY OF TWENTE.

Aperçu

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Équation du transport 1D

L'EDP la plus simple

L'évolution d'un champ scalaire $u(x,t)$ transporté par un fluide satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,T].$$

Pour le flux $q(u,x,t)$ on considère une vitesse constante pour le fluide

$$q(u,x,t) = c\, u(x,t), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Le problème est bien posé lorsque on spécifie la donnée initiale

$$u(x,0) = u_0(x).$$

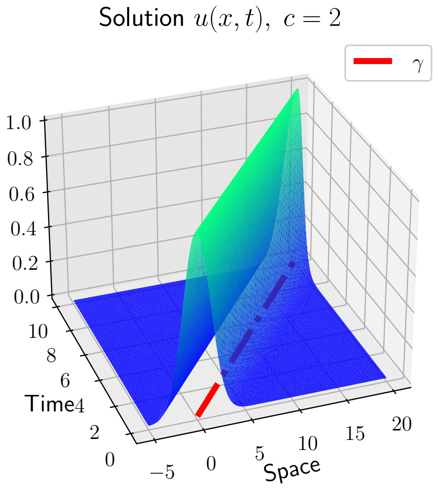
Solution Analytique

Solution analytique regulière

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ alors $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ et

$$u(x,t) = u_0(x - ct),$$

i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.
Les courbes γ sont appelées caractéristiques.



Exemple : $u_0(x) = e^{-x^2/4},\ c > 0.$

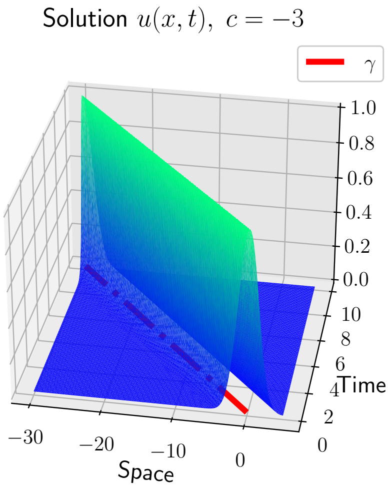
Solution Analytique

Solution analytique regulière

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ alors $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ et

$$u(x,t) = u_0(x - ct),$$

i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.
Les courbes γ sont appelées caractéristiques.



Exemple : $u_0(x) = e^{-x^2/4},\ c < 0.$

Outline

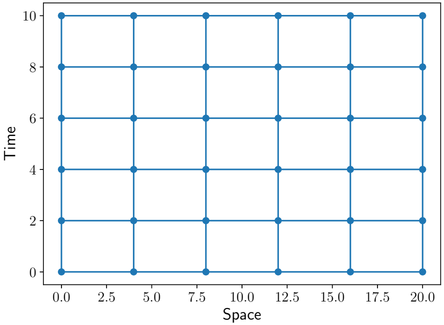
Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Discrétisation du domaine : le maillage

On considère un maillage rectangulaire uniforme (x_i, t_n) :
cela signifie que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ sont constants.



Exemple de maillage rectangulaire uniforme :
$\Delta x = 4, \quad \Delta t = 2.$

La solution discrète $u_{i,n}$ au nœud (x_i, t_n) est une approximation de la valeur exacte $u(x_i, t_n)$

$$u_{i,n} \approx u(x_i, t_n).$$

Approximation des dérivées : développement de Taylor

Différences finies : on remplace la dérivée par un quotient différentiel

Discrétisation en temps

Explicite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Implicite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n} - u_{i,n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Centrée

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

Discrétisation en espace

Aval

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1,n} - u_{i,n}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Amont

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n} - u_{i-1,n}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Centrée

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1,n} - u_{i-1,n}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Quoi choisir ? Analyse de Von Neumann

Intuition : Solution de l'EDP de transport pour $u_0(x) = e^{j\xi x}, (j = \sqrt{-1})$:

$$u(x,t) = e^{j\xi(x-ct)} = e^{j\xi x}e^{-jct}, \qquad \text{Onde plane.}$$

Justification (analyse de Fourier) : la transformé de Fourier de $u(x,\cdot)$ est

$$\widehat{u}(\xi,\cdot) = \mathcal{F}\{u\}(\xi,\cdot) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\cdot)e^{-j\xi x}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

La transformé de la dérivée est donnée par

$$\mathcal{F}\{\partial_x u\}(\xi,\cdot) = j\xi\widehat{u}(\xi,\cdot).$$

Pour l'EDP du transport : $\partial_t\widehat{u}(\xi,t) = -cj\xi\widehat{u}(\xi,t)$.

Analyse de von Neumann : un outils simple mais très efficace

On considère alors l'évolution en temps discret du mode

$$u_{i,n} = \psi_n e^{j\xi i\Delta x}, \quad \psi_n \in \mathbb{C}.$$

Les schémas que on va analyser

1. Explicite en temps, aval en espace.
2. Explicite en temps, amont en espace.
3. Explicite en temps, centré en espace.
4. Implicite en temps, amont en espace.

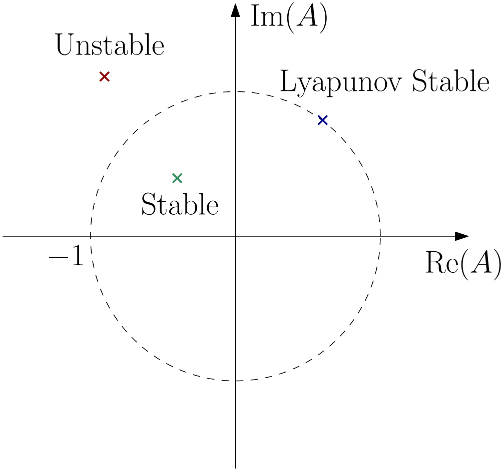
Rappel : stabilité des systèmes dynamiques discrets

Stabilité en temps discret (cas complexe)

Le système discret temps invariant

$$\psi_{n+1} = A\psi_n, \qquad \psi_n \in \mathbb{C}, A \in \mathbb{C},$$
$$\psi_0 = \overline{\psi},$$

est stable si $|A| < 1$ et stable au sens de Lyapunov si $|A| = 1$.



Cas 1 : Schéma explicite en temps et aval en espace

Schéma résultant : $u_{i,n+1} = u_{i,n} - \sigma(u_{i+1,n} - u_{i,n})$ où $\sigma = c/c_{\text{num}}$.
$c_{\text{num}} = \Delta x/\Delta t$ est la vitesse numérique

L'hypothèse du Von Neumann $u_{i,n} = \psi_n e^{j\xi i \Delta x}$ donne $\psi_{n+1} = A(\xi)\psi_n$ où

$$A(\xi) = 1 - \sigma(e^{j\xi\Delta x} - 1), \qquad \text{Coefficient d'amplification.}$$

Le schéma est stable lorsque

$$|A(\xi)|^2 = 1 + 2\sigma(\sigma+1)(1-\cos(\xi\Delta x)) \leq 1$$

Pour la stabilité on obtient $-1 \leq \sigma \leq 0$. Cela implique

$$c < 1, \qquad c_{\text{num}} > |c|.$$

Le vitesse numérique doit etre majeur de la vitesse physique : il s'agit de la condition CFL (Courant, Friedrichs et Lewy)

Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Domaine borné en espace

On considère le transport du champ $u(x,t)$ dans un domaine spatial borné

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad c > 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in (0, T].$$

Le problème est bien posé lorsque on spécifie

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), && \text{Donnée initiale,} \\ u(0,t) &= f(t), && \text{Condition au bord.} \end{aligned}$$

Solution analytique

Si $f,\ u_0 \in C^1$, et $f(0) = u_0(0),\ f^{'}(0) = -c{u_0}'(0)$ alors $u \in C^1([0,L] \times [0,T])$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.

Compatibilité de données

Interaction entre les données

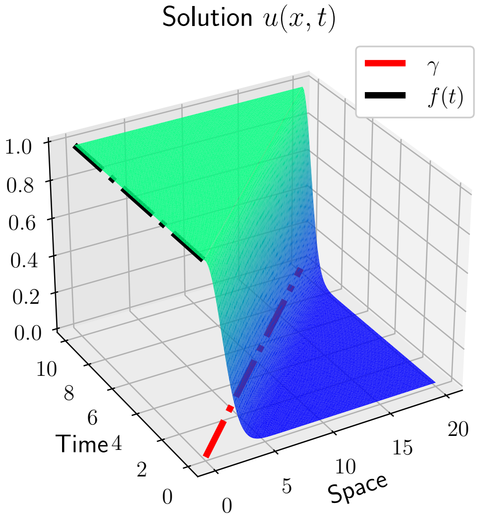
$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

f et u_0 interagissent seulement sur $x = ct$.

Exemples

$$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10.$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/4},$$
$$f(t) = 1,$$



Compatibilité de données

Interaction entre les données

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-ct), & x \geq ct \\ f(t-x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

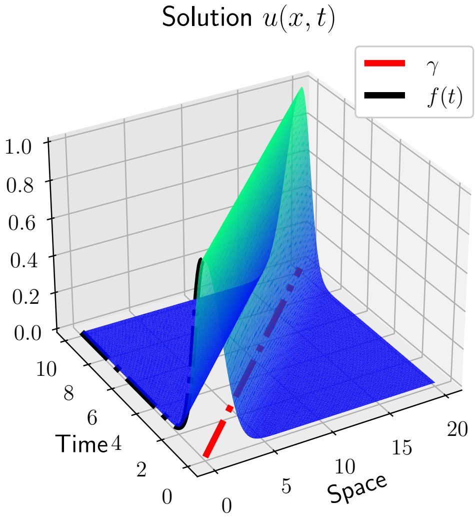
f et u_0 interagissent seulement sur $x = ct$.

Exemples

$$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10.$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/4},$$

$$f(t) = e^{-t^2},$$



Compatibilité de données

Interaction entre les données

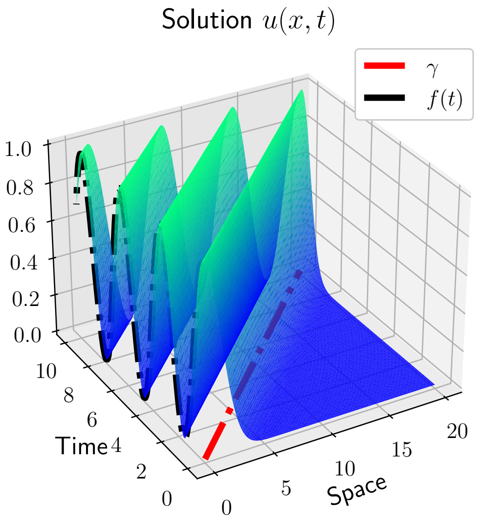
$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-ct), & x \geq ct \\ f(t-x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

f et u_0 interagissent seulement sur $x = ct$.

Exemples

$$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10.$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/4},$$
$$f(t) = \cos^2(t),$$



Bibliographie

- OLVER, Peter J. *Introduction to partial differential equations*. Springer, 2014.
- TREFETHEN, Lloyd N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*. 1996.