11 Avril 2022

Méthode des différences finies pour l'EDP de transport 1D

Andrea Brugnoli

Outline

Outline

1. Équation du transport 1D : le cas continu

2. Discrétisation par différence finies

L'EDP la plus simple

L'évolution d'un champ scalaire $u(x,t)$ transporté par un fluide satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad x \in [0,l], \quad t \in (0,T].$$

Pour le flux $q(u,x,t)$ on considère une vitesse constante pour le fluide

$$q(u,x,t) = c\, u(x,t), \qquad c > 0.$$

Le problème est bien posé lorsque on spécifie

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x), && \text{Donnée initiale,} \\ u(0,t) &= f(t), && \text{Condition au bord (compatible, i.e. } f(0) = g(0)\text{).} \end{aligned}$$

Solution Analytique

En utilisant un argument géométrique ou algébrique, on obtient la solution analytique :

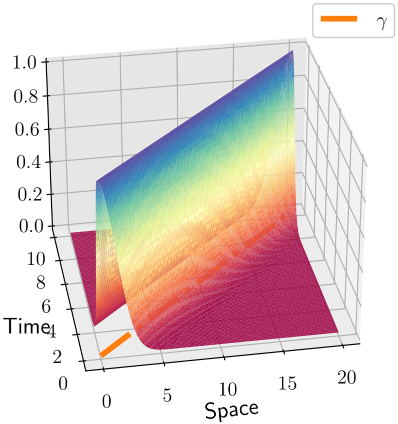
$$u(x,t) = g(x - ct), \qquad \text{i.e. } u \text{ constant sur } \gamma \text{ telle que } \dot{\gamma} = (c, 1).$$

Exemple :

$$c = 2, \quad l = 20, \quad T = 10.$$
$$g(x) = \exp(-x^2/4),$$
$$f(t) = \exp(-t^2/4),$$

donne $u(x,t) = \exp(-(x-2t)^2/4)$.

Solution $u(x,t)$



Outline

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

10 avenue Édouard Belin – BP 54032

31055 Toulouse Cedex 4 – France

Phone: +33 5 61 33 80 80

www.isae-supaero.fr