THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

Présentée et soutenue le *30 Octobre 2020* **par :**

ANDREA BRUGNOLI

A port-Hamiltonian formulation of flexible structures
Modelling and symplectic finite element discretization

JURY

Daniel ALAZARD	ISAE-Supaéro, Toulouse	Directeur
Valérie P. BUDINGER	ISAE-Supaéro, Toulouse	Co-directeur
Yann LE GORREC	Institut FEMTO-ST	Rapporteur
Alessandro MACCHELLI	Universitá di Bologna	Rapporteur
Thomas Hélie	Directeur de Recherches CNRS	Examinateur
Luc DUGARD	GIPSA-LAB, Grenoble	Président

École doctorale et spécialité :
EDSYS : Automatique
Unité de Recherche :
CSDV - Commande des Systèmes et Dynamique du Vol - ONERA - ISAE
Directeur de Thèse :
Daniel ALAZARD et *Valérie POMMIER-BUDINGER*
Rapporteurs :
Yann LE GORREC et *Alessandro MACCHELLI*

Abstract

This thesis aims at extending the port-Hamiltonian (pH) approach to continuum mechanics in higher geometrical dimensions (particularly in 2D). The pH formalism has a strong multiphysics character and represents a unified framework to model, analyze and control both finite- and infinite-dimensional systems. Despite the large literature on this topic, elasticity problems in higher geometrical dimensions have almost never been considered. This work establishes the connection between port-Hamiltonian distributed systems and elasticity problems. The originality resides in three major contributions. First, the novel pH formulation of plate models and coupled thermoelastic phenomena is presented. The use of tensor calculus is mandatory for continuum mechanical models and the inclusion of tensor variables is necessary to obtain an intrinsic, i.e. coordinate free, and equivalent pH description. Second, a finite element based discretization technique, capable of preserving the structure of the infinite-dimensional problem at a discrete level, is developed and validated. The discretization of elasticity problems in port-Hamiltonian form requires the use of non-standard finite elements. Nevertheless, the numerical implementation is performed thanks to well-established open-source libraries, providing external users with an easy to use tool for simulating flexible systems in pH form. Third, flexible multibody systems are recast in pH form by making use of a floating frame description valid under small deformations assumptions. This reformulation include all kinds of linear elastic models and exploits the intrinsic modularity of pH systems.

Résumé

Cette thèse vise à étendre l'approche port-hamiltonienne (pH) à la mécanique des milieux continus dans des dimensions géométriques plus élevées (en particulier on se focalise sur la dimension deux). Le formalisme pH, avec son fort caractère multiphysique, représente un cadre unifié pour modéliser, analyser et contrôler les systèmes de dimension finie et infinie. Malgré l'abondante littérature sur ce sujet, les problèmes d'élasticité en deux ou trois dimensions géométriques n'ont presque jamais été considérés. Dans ce travail de thèse la connexion entre problèmes d'élasticité et systèmes distribués port-Hamiltoniens est établie. L'originalité apportée réside dans trois contributions majeures. Tout d'abord, la nouvelle formulation pH des modèles de plaques et des phénomènes thermoélastiques couplés est présentée. L'utilisation du calcul tensoriel est obligatoire pour modéliser les milieux continus et l'introduction de variables tensorielles est nécessaire pour obtenir une description pH équivalente qui soit intrinsèque, c'est-à-dire indépendante des coordonnées choisies. Deuxièmement, une technique de discrétisation basée sur les éléments finis et capable de préserver la structure du problème de la dimension infinie au niveau discret est développée et validée. La discrétisation des problèmes d'élasticité écrits en forme port-Hamiltonienne nécessite l'utilisation d'éléments finis non standard. Néanmoins, l'implémentation numérique est réalisée grâce à des bibliothèques open source bien établies, fournissant aux utilisateurs externes un outil facile à utiliser pour simuler des systèmes flexibles sous forme pH. Troisièmement, une nouvelle formulation pH de la dynamique multicorps flexible est dérivée. Cette reformulation, valable sous de petites hypothèses de déformations, inclut toutes sortes de modèles élastiques linéaires et exploite la modularité intrinsèque des systèmes pH.

Aknowledgements

Remerciements

Ringraziamenti

Alla mia famiglia

Contents

List of Figures

List of Tables

List of Acronyms

ACS	*Attitude Control System*
APM	*Antenna Pointing Mechanism*
ARS	*Angular Rate Sensor*
AS	*Amplitude Spectrum*
CCS	*Controlled Component Synthesis*
CFSM	*Control Fast Steering Mirror*
CG	*Center of Gravity*
CMG	*Control Momentum Gyro*
CMS	*Component Modes Synthesis*
DFSM	*Disturbance Fast Steering Mirror*
DFT	*Discrete Fourier Transform*
DOF	*Degrees of Freedom*
EMC	*Electromagnetic compatibility*
ESA	*European Space Agency*
FEM	*Finite Element Method*
FE-TM	*Finite Element-Transfer Matrix*
FRF	*Frequency Response Function*
FSM	*Fast Steering Mirror*
HST	*Hubble Space Telescope*
IMU	*Inertial Measurement Unit*
JWST	*James Webb Space Telescope*
LFT	*Linear Fractional Transformation*
LPV	*Linear Parameter-Varying*
LQR	*Linear Quadratic Regulator*
LTI	*Linear Time-Invariant*

MHD *Magneto-hydrodynamic*

NINOP *N-Input N-Output Port*

PMA *Proof-Mass Actuator*

PSD *Power Spectral Density*

PZT *Lead Zirconate Titanate piezoelectric actuator*

RW *Reaction Wheel*

RWA *Reaction Wheel Assembly*

SADM *Solar Array Drive Mechanism*

SGS *Strain Gauge Sensor*

STR *Star Tracker*

TITOP *Two-Input Two-Output Port*

Part I

Introduction and state of the art

CHAPTER 1

Introduction

Je n'ai cherché de rien prouver, mais de bien peindre et d'éclairer bien ma peinture

André Gide
Préface de L'Immoraliste

Contents

1.1 Motivation and context

1.2 Overview of chapters

1.3 Contributions

Chapter 2

Literature review

Whereof one cannot speak, thereof one must be silent.

Ludwig Wittgenstein
Tractatus Logico-Philosophicus

2.1 Port-Hamiltonian distributed systems

2.2 Structure-preserving discretization

2.3 Mixed finite element for elasticity

2.4 Multibody dynamics

Part II

Port-Hamiltonian elasticity and thermoelasticity

Chapter 3

Elasticity in port-Hamiltonian form

I try not to break the rules but merely to test their elasticity.

Bill Veeck

Contents

Continuum mechanics is the mathematical description of how materials behave kinematically under external excitations. In this framework, the microscopic structure of a material body is neglected and a macroscopic viewpoint, that describes the body as a continuum, is adopted. An elastic material is able to resist distorting excitations and return to its original size and shape when these are removed. In this chapter, the general linear elastodynamics problem is recalled. A suitable port-Hamiltonian realization is then derived using a velocity-stress formulation.

3.1 Deformation, strain and stress

In this section, the main concepts behind a deformable continuum are briefly recalled following [Lee12]. For a detailed discussion on this topic, the reader may consult [Abe12, LPKL12].

The bounded region of $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ occupied by a solid is called configuration. The reference configuration Ω is the domain that a bodies occupies at the initial state. To describe how the body deforms in time the deformation map $\boldsymbol{\Phi} : \Omega \times [0, T_f] \to \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ is introduced. This map is differentiable and orientation preserving and the image of Ω under $\boldsymbol{\Phi}(\cdot, t)$ $\forall t \in [0, T_f]$ is called the deformed configuration Ω_t. The gradient of the deformation map is called the deformation gradient $\boldsymbol{F} := \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}$. A rigid deformation maps a point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \to \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$, where $\boldsymbol{A}(t)$ is an orthogonal matrix and $\boldsymbol{b}(t)$ a $\mathbb{R}^n$ vector. A differentiable deformation map $\boldsymbol{\Phi}$ is a rigid deformation iff $\boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} = 0$, where $\boldsymbol{I}$ is the identity in $\mathbb{R}^{n \times n}$ (for the proof see [Cia88], page 44). For this reason, a suitable measure of the deformation is the Green-St.Venant strain tensor $\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})$.

A quantity of interest is the displacement $\boldsymbol{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ with respect to the reference configuration. It is defined as $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{x}$. The gradient of the displacement verifies $\operatorname{grad} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}$. The strain tensor can now be written in terms of the displacement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{grad} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{I})^\top (\operatorname{grad} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{I}) - \boldsymbol{I}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad} \boldsymbol{u} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})^\top + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})^\top (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})\right]
\end{aligned}$$

The linear and angular momentum in a subdomain $\omega \subset \Omega$ are then computed as

$$\int_\omega \rho\, \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\omega, \qquad \int_\omega \rho\, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\omega$$

3.2 The linear elastodynamics problem

3.3 Port-Hamiltonian formulation

Chapter 4

Port-Hamiltonian plate (and shell?) theory

4.1 Mindlin-Reissner model

4.1.1 Lagrangian formulation

4.1.2 Port-Hamiltonian formulation

4.2 Kirchhoff-Love model

4.2.1 Lagrangian formulation

4.2.2 Port-Hamiltonian formulation

4.3 Laminated anisotropic plates

4.3.1 Thin plate assumption

4.3.2 Thick plate assumption

4.4 The membrane shell problem ?

Chapter 5

Thermoelasticity in port-Hamiltonian form

5.1 Linear coupled thermoelasticity

5.2 Thermoelastic Euler-Bernoulli beam

5.3 Thermoelastic Kirchhoff plate

Part III

Finite element structure preserving discretization

Chapter 6

Partitioned finite element method

6.1 General procedure

6.1.1 Non-linear case

6.1.2 Linear case

6.1.3 Examples

6.2 Connection with mixed finite elements

6.3 Inhomogeneous boundary conditions

6.3.1 Solution using Lagrange multipliers

6.3.2 Virtual domain decomposition

Chapter 7

Convergence numerical study

7.1 Plate problems using known mixed finite elements

7.2 Non-standard discretization of flexible structures

Chapter 8

Numerical applications

8.1 Boundary stabilization

8.2 Thermoelastic wave propagation

8.3 Mixed boundary conditions

8.3.1 Trajectory tracking of a thin beam

8.3.2 Vibroacoustic under mixed boundary conditions

8.4 Modal analysis of plates

Part IV

Port-Hamiltonian flexible multibody dynamics

Chapter 9

Modular multibody systems in port-Hamiltonian form

9.1 Reminder of the rigid case

9.2 Flexible floating body

9.3 Modular construction of multibody systems

Chapter 10

Validation

10.1 Beam systems

10.1.1 Modal analysis of a flexible mechanism

10.1.2 Non-linear crank slider

10.1.3 Hinged beam

10.2 Plate systems

10.2.1 Boundary interconnection with a rigid element

10.2.2 Actuated plate

Conclusion

Conclusions and future directions

Appendix A

Mathematical tools

Appendix B

Finite elements gallery

Appendix C

Implementation using FEniCS and Firedrake

Bibliography

[Abe12] R. Abeyaratne. *Lecture Notes on the Mechanics of Elastic Solids. Volume II: Continuum Mechanics.* Cambridge, MA and Singapore, 1st edition, 2012.

[Cia88] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity.* Studies in mathematics and its applications. North-Holland, 1988.

[Lee12] Jeonghun Lee. *Mixed methods with weak symmetry for time dependent problems of elasticity and viscoelasticity.* PhD thesis, University of Minnesota, 2012.

[LPKL12] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, A. M. Kosevich, and E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity.* Butterworth Heinemann, third edition, Dec 2012.

Résumé — Malgré l'abondante littérature sur le formalisme pH, les problèmes d'élasticité en deux ou trois dimensions géométriques n'ont presque jamais été considérés. Cette thèse vise à étendre l'approche port-Hamiltonienne (pH) à la mécanique des milieux continus. L'originalité apportée réside dans trois contributions majeures. Tout d'abord, la nouvelle formulation pH des modèles de plaques et des phénomènes thermoélastiques couplés est présentée. L'utilisation du calcul tensoriel est obligatoire pour modéliser les milieux continus et l'introduction de variables tensorielles est nécessaire pour obtenir une description pH équivalente qui soit intrinsèque, c'est-à-dire indépendante des coordonnées choisies. Deuxièmement, une technique de discrétisation basée sur les éléments finis et capable de préserver la structure du problème de la dimension infinie au niveau discret est développée et validée. La discrétisation des problèmes d'élasticité nécessite l'utilisation d'éléments finis non standard. Néanmoins, l'implémentation numérique est réalisée grâce à des bibliothèques open source bien établies, fournissant aux utilisateurs externes un outil facile à utiliser pour simuler des systèmes flexibles sous forme pH. Troisièmement, une nouvelle formulation pH de la dynamique multicorps flexible est dérivée. Cette reformulation, valable sous de petites hypothèses de déformations, inclut toutes sortes de modèles élastiques linéaires et exploite la modularité intrinsèque des systèmes pH.

Mots clés : Systèmes port-Hamiltonien, méchanique des solides, discretisation symplectique, méthode des éléments finis, dynamique multicorps

---

Abstract — Despite the large literature on pH formalism, elasticity problems in higher geometrical dimensions have almost never been considered. This work establishes the connection between port-Hamiltonian distributed systems and elasticity problems. The originality resides in three major contributions. First, the novel pH formulation of plate models and coupled thermoelastic phenomena is presented. The use of tensor calculus is mandatory for continuum mechanical models and the inclusion of tensor variables is necessary to obtain an intrinsic, i.e. coordinate free, and equivalent pH description. Second, a finite element based discretization technique, capable of preserving the structure of the infinite-dimensional problem at a discrete level, is developed and validated. The discretization of elasticity problems requires the use of non-standard finite elements. Nevertheless, the numerical implementation is performed thanks to well-established open-source libraries, providing external users with an easy to use tool for simulating flexible systems in pH form. Third, flexible multibody systems are recast in pH form by making use of a floating frame description valid under small deformations assumptions. This reformulation include all kinds of linear elastic models and exploits the intrinsic modularity of pH systems.

Keywords: Port-Hamiltonian systems, continuum mechanics, structure preserving discretization, finite element method, multibody dynamics.
