

Méthode des différences finies pour l'EDP de transport 1D

Andrea Brugnoli

11 Avril 2022

**UNIVERSITY
OF TWENTE.**

Aperçu

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

- Maillage et approximation des dérivées

- Stabilité : analyse de Von Neumann

- Applications

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Équation du transport 1D

L'EDP la plus simple

L'évolution d'un champ scalaire $u(x, t)$ transporté par un fluide satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T].$$

Pour le flux $q(u, x, t)$ on considère une vitesse constante pour le fluide

$$q(u, x, t) = c u(x, t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Le problème est bien posé lorsque on spécifie la donnée initiale

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Solution Analytique

Solution analytique régulière

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ alors $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T])$ et

$$u(x, t) = u_0(x - ct),$$

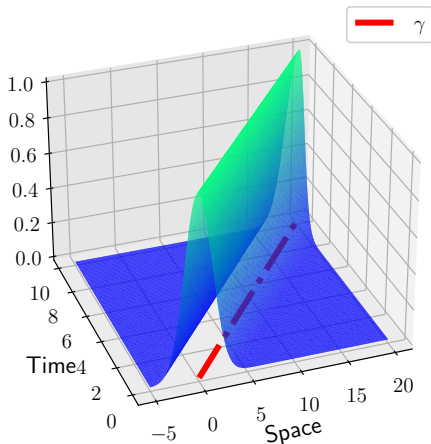
i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.

Les courbes γ sont appelées caractéristiques.

Conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \|u(x, t)\|_{L^2}^2 = 0 \implies \|u(x, t)\|_{L^2} = \text{Const.}$$

Solution $u(x, t)$, $c = 2$



Exemple : $u_0(x) = e^{-x^2/4}$, $c > 0$.

Solution Analytique

Solution analytique régulière

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ alors $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T])$ et

$$u(x, t) = u_0(x - ct),$$

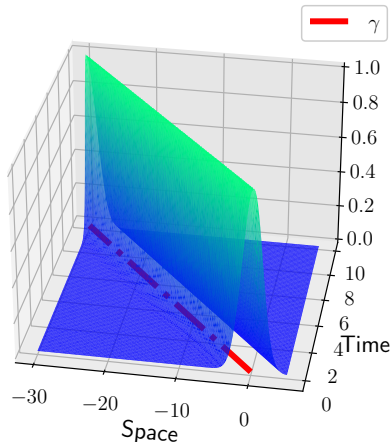
i.e. u constant sur γ telle que $\dot{\gamma} = (c, 1)$.

Les courbes γ sont appelées caractéristiques.

Conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \|u(x, t)\|_{L^2}^2 = 0 \implies \|u(x, t)\|_{L^2} = \text{Const.}$$

Solution $u(x, t)$, $c = -3$



Exemple : $u_0(x) = e^{-x^2/4}$, $c < 0$.

Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

- Maillage et approximation des dérivées

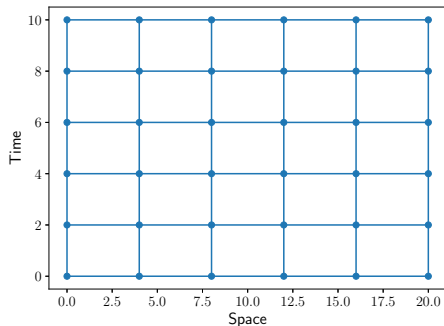
- Stabilité : analyse de Von Neumann

- Applications

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Discrétisation du domaine : le maillage

On considère un maillage rectangulaire uniforme (x_i, t_n) :
cela signifie que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ sont constants.



La solution discrète $u_{i,n}$ au nœud (x_i, t_n) est une approximation de la valeur exacte $u(x_i, t_n)$

$$u_{i,n} \approx u(x_i, t_n).$$

Exemple de maillage rectangulaire uniforme :
 $\Delta x = 4$, $\Delta t = 2$.

Approximation des dérivées : développement de Taylor

Différences finies : on remplace la dérivée par un quotient différentiel

Discrétisation en temps

Explicite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Implicite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n} - u_{i,n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Centrée

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

Discrétisation en espace

Aval

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1,n} - u_{i,n}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Amont

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i,n} - u_{i-1,n}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Centrée

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1,n} - u_{i-1,n}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Maillage et approximation des dérivées

Stabilité : analyse de Von Neumann

Applications

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Quoi choisir ? Analyse de Von Neumann

Intuition : Solution de l'EDP de transport pour $u_0(x) = e^{j\xi x}$ ($j = \sqrt{-1}$) :

$$u(x, t) = e^{j\xi(x-ct)} = e^{j\xi x} e^{-jct}, \quad \text{Onde plane.}$$

Justification (analyse de Fourier) : la transformé de Fourier de $u(x, \cdot)$ est

$$\widehat{u}(\xi, \cdot) = \mathcal{F}\{u\}(\xi, \cdot) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, \cdot) e^{-j\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La transformé de la dérivée est donnée par

$$\mathcal{F}\{\partial_x u\}(\xi, \cdot) = j\xi \widehat{u}(\xi, \cdot).$$

EDP du transport : $\partial_t \widehat{u}(\xi, t) = -cj\xi \widehat{u}(\xi, t)$ (Eq. algébrique in \mathbb{C}).

Analyse de von Neumann

On considère alors l'évolution en temps discret du mode

$$u_{i,n} = \psi_n e^{j\xi i \Delta x}, \quad \psi_n \in \mathbb{C}.$$

Rappel : stabilité des systèmes dynamiques discrets

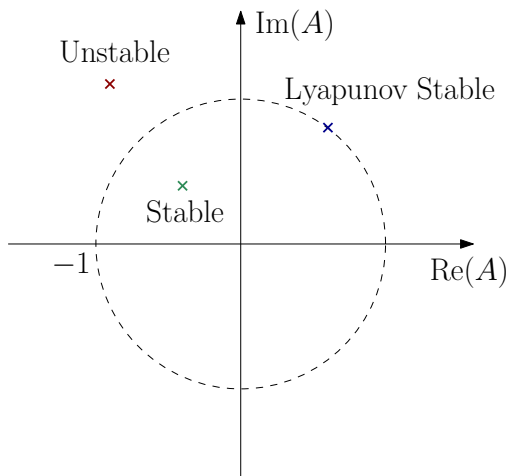
Stabilité en temps discret (cas complexe)

Le système discret temps invariant

$$\psi_{n+1} = A\psi_n, \quad \psi_n \in \mathbb{C}, A \in \mathbb{C},$$

$$\psi_0 = \bar{\psi},$$

est stable si $|A| < 1$ et stable au sens de Lyapunov si $|A| = 1$.



Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Maillage et approximation des dérivées

Stabilité : analyse de Von Neumann

Applications

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Les schémas que on va analyser

1. Explicite en temps, aval en espace.
2. Explicite en temps, amont en espace.
3. Explicite en temps, centré en espace.
4. Implicite en temps, amont en espace.

Cas 1 : Schéma explicite en temps et aval en espace

Schéma résultant : $u_{i,n+1} = u_{i,n} - \sigma(u_{i+1,n} - u_{i,n})$, $\sigma = c/c_{\text{num}}$.

$c_{\text{num}} = \Delta x / \Delta t$ est la **vitesse numérique**.

L'hypothèse du Von Neumann $u_{i,n} = \psi_n e^{j\xi i \Delta x}$ donne

$$\psi_{n+1} = A(\xi) \psi_n, \quad A(\xi) = 1 + \sigma(1 - e^{j\xi \Delta x}), \quad \text{Coefficient d'amplification.}$$

Le critère de stabilité est respecté si $\forall \xi$ on a

$$|A(\xi)|^2 = 1 + 2\sigma(\sigma + 1)(1 - \cos(\xi \Delta x)) \leq 1$$

Conditions de stabilité

Stable si $-1 \leq \sigma \leq 0$

$c < 0$, **Discretisation aval ne peut pas traiter vitesse positive,**
 $c_{\text{num}} > |c|$, Condition CFL (Courant, Friedrichs et Lewy 1928).

Si $\sigma = -1 \implies |A(\xi)| = 1$ (pas de viscosité numérique)

Si $-1 < \sigma \leq 0 \implies |A(\xi)| < 1$ (viscosité numérique)

Résultats simulation

Cas stable sans viscosité numérique.

Résultats simulation

Cas stable avec viscosité numérique.

Résultats simulation

Instable : CFL non respectée.

Résultats simulation

Cas instable ($c > 0$).

Cas 2 : Schéma explicite en temps et amont en espace

Schéma résultant : $u_{i,n+1} = u_{i,n} - \sigma(u_{i,n} - u_{i-1,n})$.

Dans ce cas le coefficient d'amplification est donné par

$$A(\xi) = 1 - \sigma(1 - e^{-j\xi\Delta x})$$

Le critère de stabilité est respecté si $\forall \xi$ on a

$$|A(\xi)|^2 = 1 - 2\sigma(1 - \sigma)(1 - \cos(\xi\Delta x)) \leq 1.$$

Conditions de stabilité

Stable si $0 \leq \sigma \leq 1$

$c > 0,$ **Discrétisation amont ne peut pas traiter vitesse negative,**
 $c_{\text{num}} > |c|,$ Condition CFL.

Cas 3 : Schéma explicite en temps et centré en espace

Schéma résultant : $u_{i,n+1} = u_{i,n} - \sigma/2(u_{i+1,n} - u_{i-1,n})$

Dans ce cas le coefficient d'amplification est donné par

$$A(\xi) = 1 - j\sigma \sin(\xi \Delta x).$$

On remarque que

$$|A(\xi)| > 1, \quad \forall \sigma \neq 0!$$

Ce schéma est toujours instable !

Cas 4 : Schéma implicite en temps et amont en espace

Schéma résultant : $(1 + \sigma)u_{i,n+1} - \sigma u_{i-1,n+1} = u_{i,n}$

Dans ce cas le coefficient d'amplification est donné par

$$A(\xi) = \frac{1}{1 + \sigma - \sigma e^{-j\xi\Delta x}}$$

Du fait que $|A(\xi)|^2 \leq 1 \iff |\frac{1}{A(\xi)}|^2 \geq 1$:

$$1 + \sigma - \sigma e^{-j\xi\Delta x} \geq 1, \quad \forall \sigma > 0.$$

Si $\sigma > 0$ (i.e. $c > 0$.) ce schéma est toujours stable ! Plus de CFL.

Récapitulatif

Cas	Stabilité
Explicite en temps, aval espace	Conditionnellement Stable : $c < 0$, $c_{\text{num}} > c $.
Explicite en temps, amont espace	Conditionnellement Stable : $c > 0$, $c_{\text{num}} > c $.
Explicite en temps, centré espace	Instable $\forall c_{\text{num}}$.
Implicite en temps, amont espace	Stable si $c > 0$ (no CFL).

Outline

Équation du transport 1D : le cas continu

Discrétisation par différence finies

Pour aller plus loin : domaine borné et conditions au bord

Domaine borné en espace

On considère le transport du champ $u(x, t)$ dans un domaine spatial borné

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in (0, T].$$

Le problème est bien posé lorsque on spécifie

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & \text{Donnée initiale,} \\ u(0, t) &= f(t), & \text{Condition au bord.} \end{aligned}$$

Solution analytique

Si $f, u_0 \in C^1$, et $f(0) = u_0(0)$, $f'(0) = -cu_0'(0)$ alors $u \in C^1([0, L] \times [0, T])$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases} \quad \text{i.e. } u \text{ constant sur } \gamma \text{ telle que } \dot{\gamma} = (c, 1).$$

Compatibilité de données

Interaction entre les données

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

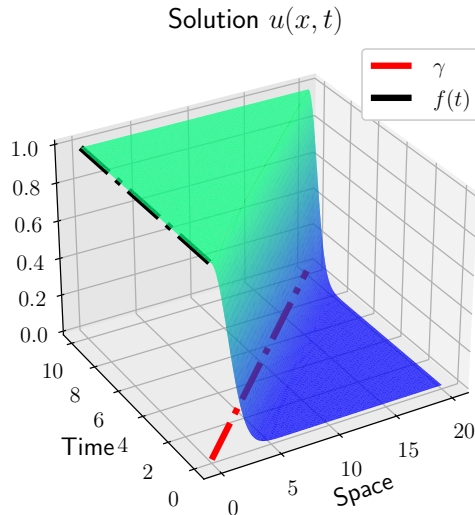
f et u_0 interagissent seulement sur $x = ct$.

Exemples

$$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10.$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/4},$$

$$f(t) = 1,$$



Compatibilité de données

Interaction entre les données

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

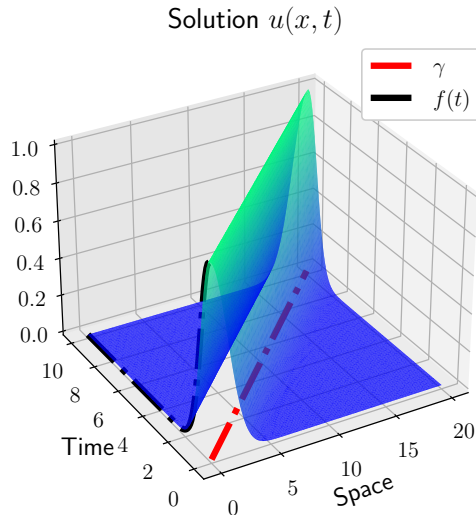
f et u_0 interagissent seulement sur $x = ct$.

Exemples

$$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10.$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/4},$$

$$f(t) = e^{-t^2},$$



Compatibilité de données

Interaction entre les données

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & x \geq ct \\ f(t - x/c), & x \leq ct, \end{cases}$$

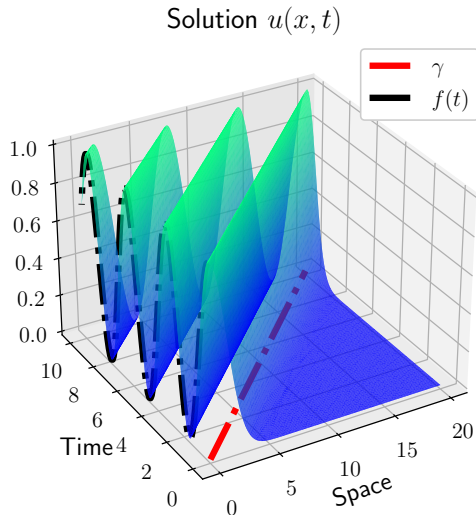
f et u_0 interagissent seulement sur $x = ct$.

Exemples



$$c = 2, \quad L = 20, \quad T = 10.$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/4},$$

$$f(t) = \cos^2(t),$$



Bibliographie

-  OLVER, Peter J. *Introduction to partial differential equations*. Springer, 2014.
-  TREFETHEN, Lloyd N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*. 1996.