

A port-Hamiltonian formulation of flexible structures: modeling and symplectic finite element discretization

Andrea Brugnoli

July 23, 2020

English version

This thesis aims at extending the port-Hamiltonian (pH) approach to continuum mechanics in higher geometrical dimensions (particularly in 2D). The pH formalism has a strong multiphysics character and represents a unified framework to model, analyze and control both finite- and infinite-dimensional systems. Despite the large literature on this topic, elasticity problems in higher geometrical dimensions have almost never been considered. This work establishes the connection between port-Hamiltonian distributed systems and elasticity problems. The originality resides in three major contributions. First, the novel pH formulation of plate models and coupled thermoelastic phenomena is presented. The use of tensor calculus is mandatory for continuum mechanical models and the inclusion of tensor variables is necessary to obtain an intrinsic, i.e. coordinate free, and equivalent pH description. Second, a finite element based discretization technique, capable of preserving the structure of the infinite-dimensional problem at a discrete level, is developed and validated. This methodology relies on an abstract integration by parts formula and can be applied to linear and non-linear hyperbolic and parabolic systems. Several finite elements for beams and plates structures are proposed and tested. The discretization of elasticity problems in port-Hamiltonian form requires the use of non-standard finite elements. Nevertheless, the numerical implementation is performed thanks to well-established open-source libraries, providing external users with an easy to use tool for simulating flexible systems in port-Hamiltonian form. Third, flexible multibody systems are recast in pH form by making use of a floating frame description valid under small deformations assumptions. This reformulation include all kinds of linear elastic models and exploits the intrinsic modularity of pH systems.

Version française

Cette thèse vise à étendre l'approche port-Hamiltonienne (pH) à la mécanique des milieux continus dans des dimensions géométriques plus élevées (en particulier on se focalise sur la dimension 2). Le formalisme pH, avec son fort caractère multi-physique, représente un cadre unifié pour modéliser, analyser et contrôler les systèmes de dimension finie et infinie. Malgré l'abondante littérature sur ce sujet, les problèmes d'élasticité en deux ou trois dimensions géométriques n'ont presque jamais été considérés. Dans ce travail de thèse la connexion entre problèmes d'élasticité et systèmes distribués port-Hamiltoniens est établie. L'originalité apportée réside dans trois contributions majeures. Tout d'abord, une nouvelle formulation pH des modèles de plaques et des phénomènes thermoélastiques couplés est présentée. L'utilisation du calcul tensoriel est obligatoire pour modéliser les milieux continus et l'introduction de variables tensorielles est nécessaire pour obtenir une description pH équivalente qui soit intrinsèque, c'est-à-dire indépendante des coordonnées choisies. Deuxièmement, une technique de discrétisation basée sur les éléments finis et capable de préserver la structure du problème de la dimension infinie

au niveau discret est développée et validée. Cette méthodologie repose sur une formule d'intégration par parties abstraite et peut être appliquée aux systèmes hyperboliques et paraboliques linéaires et non linéaires. Plusieurs éléments finis pour les structures minces (poutres et plaques) sont proposés et testés. La discrétisation des problèmes d'élasticité écrits en forme port-Hamiltonienne nécessite l'utilisation d'éléments finis non standards. Néanmoins, l'implémentation numérique est réalisée grâce à des bibliothèques open source bien établies, fournissant aux utilisateurs externes un outil facile à utiliser pour simuler des systèmes flexibles sous forme pH. Troisièmement, une nouvelle formulation pH de la dynamique multicorps flexible est dérivée. Cette reformulation, valable sous de petites hypothèses de déformations, inclut toutes sortes de modèles élastiques linéaires et exploite la modularité intrinsèque des systèmes pH.

References

- [1] A. Brugnoli, D. Alazard, V. Pommier-Budinger, and D. Matignon, *Interconnection of the Kirchhoff plate within the port-Hamiltonian framework*, Proceedings of the 59th IEEE Conference on Decision and Control, Dec 2019.
- [2] ———, *Partitioned finite element method for the Mindlin plate as a port-Hamiltonian system*, 3rd IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations CPDE 2019 (Oaxaca, MX), 2019, <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.08.016>, pp. 88 – 95.
- [3] ———, *Port-Hamiltonian formulation and symplectic discretization of plate models. Part I: Mindlin model for thick plates*, Applied Mathematical Modelling **75** (2019), 940 – 960, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.04.035>.
- [4] ———, *Port-Hamiltonian formulation and symplectic discretization of plate models. Part II: Kirchhoff model for thin plates*, Applied Mathematical Modelling **75** (2019), 961 – 981, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.04.036>.
- [5] ———, *Port-Hamiltonian flexible multibody dynamics*, arXiv preprint arXiv:2002.12816 (2020), Under Review.
- [6] ———, *Structure-preserving discretization of port-Hamiltonian plate models*, Accepted for the 24th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Aug 2021.
- [7] A. Brugnoli, F. L. Cardoso-Ribeiro, G. Haine, and P. Kotyzca, *Partitioned finite element method for power-preserving structured discretization with mixed boundary conditions*, Accepted for the 21st IFAC World congress, Jul 2020.
- [8] A. Brugnoli, G. Haine, A. Serhani, and X. Vasseur, *Numerical approximation of port-Hamiltonian systems for hyperbolic or parabolic PDEs with boundary control*, arXiv preprint arXiv:2007.08326 (2020), Under Review.
- [9] F. L. Cardoso-Ribeiro, A. Brugnoli, D. Matignon, and L. Lefèvre, *Port-Hamiltonian modeling, discretization and feedback control of a circular water tank*, Proceedings of the 59th IEEE Conference on Decision and Control, Dec 2019.