INVERTIBILITÀ

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

- Matrici quadrate — SEZIONE 3.4
- Matrici invertibili — SEZIONE 3.5
- Matrici elementari — SEZIONE 3.5.2
- Esistenza ed unicità dell'inversa — SEZIONI 3.5.1 - 3.5.3 - 3.5.4
- Algoritmo di Gauss-Jordan — SEZIONE 3.5.3
- Teorema di Cramer — SEZIONE 3.5.5

Matrici Quadrate (Definizioni 3.29 - 3.32)

$A \in Mat(n,n;\mathbb{K})$ si dice quadrata. Inoltre, se $a_{ij} = 0$ per:

- $i > j \Rightarrow A \in T_a(n;\mathbb{K})$ è triangolare alta;
- $i \geq j \Rightarrow A \in T_{sa}(n;\mathbb{K})$ è triangolare strettamente alta;
- $i < j \Rightarrow A \in T_b(n;\mathbb{K})$ è triangolare bassa;
- $i \leq j \Rightarrow A \in T_{sb}(n;\mathbb{K})$ è triangolare strettamente bassa;
- $i \neq j \Rightarrow A \in D(n;\mathbb{K})$ è diagonale.

Inoltre:

- se $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A \in S(n;\mathbb{K})$ è simmetrica;
- se $a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow A \in A(n;\mathbb{K})$ è antisimmetrica.

Notazione: $Mat(n,n;\mathbb{K}) = Mat(n;\mathbb{K})$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$}} \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \in \mathbb{T}_a(3;\mathbb{Q}) \,, \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$}} \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \in \mathbb{T}_{sa}(3;\mathbb{Q}) \subset \mathbb{T}_a(3;\mathbb{Q})$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$}} \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \in \overbrace{\mathbb{T}_a(3;\mathbb{Q}) \cap \mathbb{T}_b(3;\mathbb{Q})}^{=\mathbb{D}(3;\mathbb{Q})} \subset \mathbb{S}(3;\mathbb{Q})$$

$$S = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$}} \\ 2 & & \end{array} \in \mathbb{A}(2;\mathbb{Q}) \,, \qquad A = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$}} \\ 2 & & \end{array} \in \mathbb{S}(2;\mathbb{Q})$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{13} & m_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & (m_{12}+m_{13})/2 \\ (m_{12}+m_{13})/2 & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (m_{12}-m_{13})/2 \\ -(m_{12}-m_{13})/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Per ogni matrice M esiste un'unica decomposizione $M = S + A$.

$$(m,n) + (m,n) = (m,n) \,, \qquad t \cdot (m,n) = (m,n)$$

$$(m,p) * (p,n) = (m,n) \,, \qquad (n,n) * (n,n) = (n,n) \qquad \Longrightarrow$$

OSS: $Mat(n;\mathbb{K})$ è chiuso rispetto a $*$. (cioè $*$ è op. interna)

$$A \in Mat(n;\mathbb{K}) \Rightarrow \begin{cases} A^k = A * \dots * A \\ A^0 = I_n \\ P(A) = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot A^i = c_0 \cdot I_n + c_1 \cdot A + \dots + c_k \cdot A^k \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare $P(A) = \sum_{i=0}^{k} A^i$ e verificare che $(I-A)^2 = 0$.

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{k} A^i = \begin{bmatrix} k+1 & k(k+1)/2 \\ 0 & k+1 \end{bmatrix} = (k+1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & k/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$k=2$: $I + A + A^2 = 3 \cdot A \Rightarrow I - 2A + A^2 = 0 \Rightarrow (I-A)^2 = 0$

OSS.: $2A - A^2 = I \Rightarrow A(2I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = 2I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

PROPOSIZIONI 3.31, 3.34

- $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_{sa}$, $\mathcal{T}_b$, $\mathcal{T}_{sb}$, $\mathcal{D}$, $Mat(n;\mathbb{K})$ sono chiusi rispetto a $+, \cdot, *$.
- $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ sono chiusi rispetto a $+, \cdot$. $S_1 * S_2$ in generale non è simmetrico

OSS.: in $Mat(n;\mathbb{K})$ esiste l'elemento neutro di $*$:

$$A * I_n = I_n * A = A.$$

Di conseguenza possiamo parlare di inverso moltiplicativo di A.

$e * a = a * e = a \implies a^{-1} : a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$I_3 \neq I_2 \implies$ non esiste elemento neutro $\implies$ non esiste inverso

MATRICI INVERTIBILI (DEFINIZIONE 3.40)

$A, B, C \in Mat(n; \mathbb{K})$. Allora:

- B è inverso sinistro di A se $BA = I_n$;
- C è inverso destro di A se $AC = I_n$;
- A è invertibile se B, C esistono e vale $B = C$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = AC = I_2$.
- $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, esistono $\tilde{B}, \tilde{C}$ tale che $\tilde{B}\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{C} = I_2$?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{B} \text{ non esiste}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{C} \text{ non esiste}$$

Proprietà elementari (Proposizione 3.44)

i) $(A^{-1})^{-1} = A$; (involuzione) $\quad a \xrightarrow{(\ )^{-1}} \frac{1}{a} \xrightarrow{(\ )^{-1}} a$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\quad ab \xrightarrow{(\ )^{-1}} \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

DIM: i) $A(A^{-1}) = (A^{-1})A = I_n \implies$

A è l'inverso di A^{-1}.

ii) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n \implies$

$\implies B^{-1}A^{-1}$ è inverso di AB $\quad \boxtimes$

ESERCIZIO: siano $A_1, \dots, A_k$ invertibili $\implies (A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Caratterizzazione delle Matrici Invertibili (Teorema 3.42, Proposizione 3.60)

i) A è invertibile se vale una delle seguenti proprietà:

- $r(A) = n$;
- esiste l'inverso destro di A; se $AC = I_n \Rightarrow CA = I_n$
- esiste l'inverso sinistro di A. se $BA = I_n \Rightarrow AB = I_n$

ii) Se esiste, l'inverso è unico ed è indicato con A^{-1}.

Teorema di Cramer (Corollario 3.61)

$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

A invertibile $\Rightarrow [A|B]$ ha unica soluzione $X = A^{-1}B$.

Dim: A invertibile $\Rightarrow r(A) = n \overset{R.C.}{\Rightarrow} \exists!$ soluzione.

Verifichiamo che sia X: $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$. $\blacksquare$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = X$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X' = A^{-1}B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OSS.: se $A \in Mat(m, n; \mathbb{K}) \Rightarrow [A|B] \in Mat(m, n+1; \mathbb{K})$

$\Rightarrow r(A) \leq r(A|B) \leq \min(m, n+1)$

Per un sistema lineare con n equazioni ed n incognite vale che $m = n$

$\Rightarrow r(A) \leq r(A|B) \leq \min(n, n+1) = n$

$\Rightarrow$ Se $r(A) = n \Rightarrow r(A|B) = n \Rightarrow \exists!$ soluzione

Dimostrazione della Condizione Necessaria e dell'Unicità

Dato $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, se la matrice $X = \left[\begin{array}{c|c|c} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{array}\right]$ è la sua inversa allora

$$AX = \left[\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11}x_{11} + \dots + a_{1n}x_{n1} \\ \vdots \\ a_{n1}x_{11} + \dots + a_{nn}x_{n1} \end{matrix}}_{AX_{C(1)}} & \dots & \underbrace{\begin{matrix} a_{11}x_{1n} + \dots + a_{1n}x_{nn} \\ \vdots \\ a_{n1}x_{1n} + \dots + a_{nn}x_{nn} \end{matrix}}_{AX_{C(n)}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{E_1} & \dots & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}_{E_n} \end{array}\right].$$

Per trovare X dobbiamo risolvere i sistemi lineari $[A|E_1], \dots, [A|E_n]$.

- Se $r(A) = n$: esiste un'unica soluzione $X_{C(i)}$ per ogni $[A|E_i]$

  $\Rightarrow$ esiste un'unica X tale che $AX = I_n$.

- Se $r(A) < n$: trasformando la matrice A con operazioni del terzo tipo, almeno una riga $A_{R(i)}$ può diventare nulla. Ovvero, esiste

$$A_{R(i)} + t_1 \cdot A_{R(1)} + \dots + t_{i-1} \cdot A_{R(i-1)} + t_{i+1} \cdot A_{R(i+1)} + \dots + t_n \cdot A_{R(n)} = O_{1n}.$$

Consideriamo allora il sistema $[A \mid E_i] = \left[\begin{array}{c|c} A_{R(1)} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{A_{R(i)}} & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots \\ A_{R(m)} & 0 \end{array}\right]$.

Applicando le stesse operazioni alla riga $[A \mid E_i]_{R(i)}$ otteniamo:

$$[A_{R(i)} \mid 1] + t_1 \cdot [A_{R(1)} \mid 0] + \ldots + t_{i-1} \cdot [A_{R(i-1)} \mid 0] +$$
$$+ t_{i+1} \cdot [A_{R(i+1)} \mid 0] + \ldots + t_m \cdot [A_{R(m)} \mid 0] = [0_{1m} \mid 1]$$

$$\Rightarrow \quad [A \mid E_i] = \left[\begin{array}{c|c} A_{R(1)} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{A_{R(i)}} & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots \\ A_{R(m)} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{R(1)} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{0_{1m}} & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots \\ A_{R(m)} & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $[A \mid E_i]$ non è risolubile ed X non esiste. $\boxtimes$

OSS.: per completare la dimostrazione, serve verificare che se $r(A) = m$ allora la soluzione X soddisfa anche $XA = I_m$.

OSSERVAZIONE 1

Sia $[A|B]$ con $r(A)=n$. Allora si può ridurre $[A|B] \to [I_n|\tilde{B}]$ e la soluzione del sistema è $X=\tilde{B}$.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-1/2 R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 2

I sistemi $\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right], \dots, \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right]$ hanno la stessa A $\Rightarrow$ possiamo evitare di ripetere n volte la riduzione di A, riducendo una sola volta $\left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] = [A|I_n]$.

ALGORITMO DI GAUSS - JORDAN

L'inverso A^{-1} di A si ricava dalla riduzione $[A \vdots I_n] \to [I_n \vdots A^{-1}]$.

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{-1 \cdot R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Verifica: $A A^{-1} = A^{-1} A = I_2$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OSS.: A simmetrica $\Rightarrow$ A^{-1} simmetrica

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 - R_2 \to R_2]{R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}]$$

• $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Applichiamo l'algoritmo senza preoccuparci delle condizioni su a, b, c, d:

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - c/a\, R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -c/a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{a}{ad-bc} R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - b R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \xrightarrow{1/a\, R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] = [I_2 \mid A^{-1}] \implies$$

Se $ad-bc \neq 0$, allora $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Chi è $ad-bc$?