Traccia e Determinante

Prof.
Marco
Compagnoni

FUNZIONI DA

$Mat(n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$:

- Traccia
- Definizione di determinante
- Determinante ed operazioni, trasposta ed inversa
- Determinante ed operazioni elementari, riduzione a scala e rango
- Formula di Laplace, aggiunta ed inversa

TRACCIA (DEFINIZIONE 3.63)

$$A = [a_{ij}] \in Mat(n; \mathbb{K}) \Rightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 3.64)

i) $Tr(s \cdot A + t \cdot B) = s \cdot Tr(A) + t \cdot Tr(B)$ (linearità);

ii) $Tr(A^T) = Tr(A)$;

iii) $Tr(AB) = Tr(BA)$. $\neq Tr(A) \cdot Tr(B)$

$$Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) = (a+e) + (d+h) =$$

$$= (a+d) + (e+h) = Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + Tr\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

OSS: $Tr(A_1 \dots A_{k-1} A_k) = Tr(A_k A_1 \dots A_{k-1}) \neq Tr(A_1 \dots A_k A_{k-1})$

Sottomatrici (Definizione 3.65)

$A_{\widehat{i_1 \dots i_k}\,\widehat{j_1 \dots j_l}}$ = matrice ottenuta da A eliminando $R(i_1), \dots, R(i_k)$ e $C(j_1), \dots, C(j_k)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A_{\hat{0}\hat{0}}, \quad A_{\hat{1}\hat{1}} = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & 1 & 3 \\ \cancel{0} & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{\hat{1}\hat{2}} = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & \cancel{1} & 3 \\ 0 & \cancel{1} & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{\hat{1}\hat{3}} = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & 1 & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{4} \end{bmatrix},$$

$$A_{\widehat{13}\,\hat{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinante (Definizione 3.67)

$A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{K}) \Rightarrow \det(A) = |A| \in \mathbb{K}$ è definito iterativamente.

- $n = 1$: $\det([a_{11}]) = a_{11}$;
- $n > 1$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, C_{1j}$ dove $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{\hat{i}\hat{j}})$

  è detto complemento algebrico di a_{ij}.

$$n=2: \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot C_{11} + b \cdot C_{12} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{vmatrix} =$$

$$= ad - bc$$

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \end{array} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} =$$

$$= 0 \cdot \underbrace{(-1)^{1+1}}_{+} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \underbrace{(-1)^{1+3}}_{+} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - (4 - 0) + 2 \cdot (1 - 0) = -2$$

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$\det(I_n) = 1$$

Determinante ed Algebra delle Matrici (Sezione 3.8.1)

- $|A+B| \neq |A| + |B|$
- $|t \cdot A| = t^n \cdot |A| \qquad (A \in Mat(n; \mathbb{K}))$

Teorema di Binét (Teorema 3.83)

$|AB| = |A| \cdot |B|$, cioè il determinante è una funzione moltiplicativa.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2, \ |B| = -1.$

$|A+B| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -8 \neq |A| + |B|,$

$|t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 \cdot t & 3 \cdot t \\ 2 \cdot t & 4 \cdot t \end{vmatrix} = (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) t^2 = t^2 \cdot |A|,$

$|AB| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2 = |A| \cdot |B| = |BA|.$

COROLLARIO 3.94, PROPOSIZIONE 3.84

- Sia A invertibile $\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$;
- $|A^T| = |A|$. $\leftarrow$ permuto il ruolo di righe e colonne

DIM: $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1 = |A| \cdot |A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $\blacksquare$

Determinante e Rango (Teorema 3.69)

Sia $A \in Mat(n; \mathbb{K})$, allora $\det(A) \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.

Corollario 3.70

- $[A|B]$ ha unica soluzione se e solo se $\det(A) \neq 0$;
- A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Schema della Dimostrazione Teorema 3.69

È necessario enunciare due proprietà (senza dimostrazione):

i) comportamento del determinante a seguito di operazioni elementari;

ii) sviluppi di Laplace.

In questo modo si trova il legame tra $\det(A)$ e $\det(S)$, dove S è una riduzione a scala di A, e quindi con il rango di A.

Determinante ed Operazioni Elementari (Prop. 3.72, Cor. 3.77)

- $A \xrightarrow{R(i) \leftrightarrow R(j)} B \implies \det(B) = -\det(A)$;
- $A \xrightarrow{t \cdot R(i) \to R(i)} B \implies \det(B) = t \cdot \det(A)$;
- $A \xrightarrow{R(i) + t \cdot R(j) \to R(i)} B \implies \det(B) = \det(A)$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \xrightarrow{(i)} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc)$$

$$\xrightarrow{ii} \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = tad - tbc = t(ad - bc)$$

$$\xrightarrow{iii} \quad \begin{vmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{vmatrix} = (a+tc)d - (b+td)c =$$

$$= ad - bc + \cancel{t(cd - dc)}$$

SVILUPPI DI LAPLACE (PROPOSIZIONE 3.74, COROLLARIO 3.86)

Data $A \in Mat(n; \mathbb{K})$, valgono:

i) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{\hat{i}\hat{j}}$ per ogni $1 \leq i \leq n$; sviluppo per righe

ii) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{\hat{i}\hat{j}}$ per ogni $1 \leq j \leq n$. sviluppo per colonne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - (-2) + 4 \cdot (-1) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-2) = -2$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3.69 (PROPOSIZIONI 3.78, 3.79)

Sia S riduzione a scala di A, ottenuta attraverso:

- k permutazioni di righe;
- r moltiplicazioni di righe per gli scalari $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$$\Rightarrow \det(S) = (-1)^k \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_r \cdot \det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \frac{(-1)^k}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_r} \cdot \det(S).$$

La matrice S è a scala e quindi triangolare alta. Calcoliamo il determinante di una matrice di questo tipo applicando iterativamente lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna:

$$\det(S) = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix} = s_{11} \cdot \begin{vmatrix} s_{22} & \cdots & s_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = \prod_{i=1}^{n} s_{ii}.$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ sse $\det(S) \neq 0$ sse $s_{11}, \dots, s_{nn} \neq 0$ sse $r(A) = n$. $\square$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2 \cdot R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S$$

$$\Rightarrow K = 1 \quad r = 1 \quad t_1 = 1/2 \quad \Rightarrow \det(S) = -1/2 \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -2 \cdot 1 = -2$$

COROLLARIO 3.85

$\det(A) = 0$ se:

- una riga o una colonna di A è nulla; ← da Laplace
- due righe o due colonne di A sono proporzionali.