1 Operazioni tra insiemi

Consideriamo due insiemi A e B. Le principali operazioni tra insiemi sono:

- **Unione**: L'unione di due insiemi A e B, denotata da $A \cup B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a A o a B (o a entrambi). Formalmente,
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$
- **Intersezione**: L'intersezione di due insiemi A e B, denotata da $A \cap B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B. Formalmente,
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$
- **Differenza**: La differenza tra due insiemi A e B, denotata da $A \setminus B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a A ma non a B. Formalmente,
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$
- **Complemento**: Il complemento di un insieme A rispetto a un insieme universale U, denotato da $A \setminus U$ o $\bar{A}$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a U ma non a A. Formalmente,
$$A \setminus U = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

1.1 Relazioni

Una relazione R_i tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.
Ad esempio, siano $A = \{a_1, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2\}$. Allora:

$$R_i = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$$

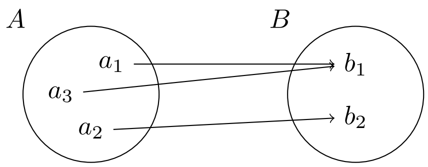
Una relazione può avere proprietà speciali, come:

- Riflessiva: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
- Simmetrica: Se $(a, b) \in R$ allora $(b, a) \in R$
- Transitiva: Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, allora $(a, c) \in R$

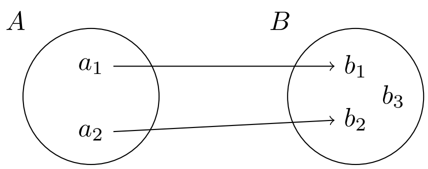
1.2 Funzioni

Una funzione $f : A \to B$ è una relazione che associa ad ogni elemento di A un unico elemento di B.
La funzione f è:

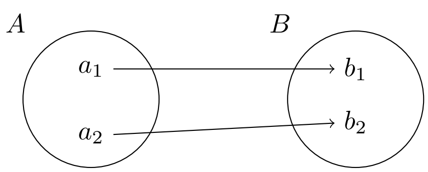
- **Suriettiva** se $Im(f) = B$.



- **Iniettiva** se $\mid f^{-1}(i) \mid = 1$, con $i \in B$, $\forall i \in Im(f)$.



- **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.



1.3 Relazioni di equivalenza

Una relazione R su un insieme A è una relazione di equivalenza se soddisfa le seguenti proprietà:

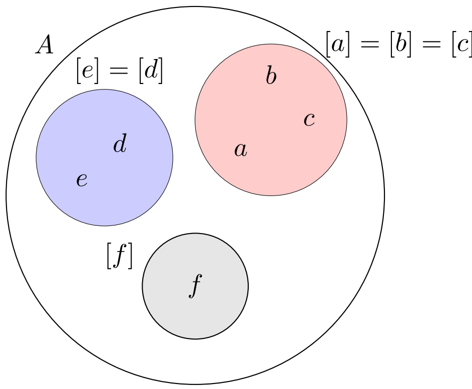
- Riflessiva: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
- Simmetrica: Se $(a, b) \in R$, allora $(b, a) \in R$
- Transitiva: Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, allora $(a, c) \in R$

La classe di equivalenza di un elemento $a \in A$ è definita come:

$$[a]_R = \{b \in A \mid a \sim_R b\}$$

1.4 Teorema (Unione disgiunta delle classi di equivalenza)

Ogni insieme è l'unione disgiunta delle sue classi di equivalenza:$[a] \cup [e] \cup [f] = A$.



1.5 Insieme Quoziente

Dato un insieme A e una relazione di equivalenza R, l'insieme quoziente è definito come:

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

dove $[a]$ è la classe di equivalenza di un elemento a, definita come:

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim_R b\}$$

Questo significa che gli elementi a e b sono equivalenti secondo la relazione R. L'insieme quoziente A/R è quindi l'insieme di tutte le classi di equivalenza generate dalla relazione R.

Consideriamo un insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e una relazione di equivalenza R che raggruppa gli elementi in base al resto della divisione per 2 (numeri pari e dispari). Le classi di equivalenza saranno:

$[1] = \{1, 3, 5\}$ (numeri dispari)

$[2] = \{2, 4, 6\}$ (numeri pari)

L'insieme quoziente sarà:

$$A/R = \{[1], [2]\}$$

1.6 Operazioni

Un **operazione** n-aria($*$) é una funzione del tipo:

$$A_1 \times ... \times A_n \to A_{n+1}$$

$$(a_1, ..., a_n) \to *(a_1, ..., a_n)$$

in particolare se:

$$A_1 \times ... \times A_n = A_{n+1} \to \textbf{operazione interna}$$

$$n = 2 \to \textbf{operazione binaria}$$

esempio:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(n_1, n_2) \to n_1 + n_2$$

1.7 Struttura algebrica

La **struttura algebrica** é una struttura composta da m insiemi $(A_1, ..., A_m)$ e da n operazioni $(*_1, ..., *_n)$.

$$(A_1, ..., A_m, *_1, ..., *_n)$$

1.8 Gruppo

Dati $a, b, c \in \mathbb{G}$ e $*$(funzione interna a G): $\mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, un gruppo é una struttura algebrica del tipo $(\mathbb{G}, *)$ che soddisfi tre proprietá per ogni $a, b, c \in \mathbb{G}$:

i. Esistenza elemento **neutro** $\underline{e}$ tale che: $e * a = a * e = a$.

ii. Esistenza **inverso** $\underline{a^{-1}}$ tale che: $a^{-1} * a = e$.

iii. **Associativitá**: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

iv. se vale anche la proprietá **commutativa**: $a * b = b * a$, allora il gruppo si dice: **Gruppo Abeliano**.

1.9 Campo

Sia $\mathbb{K}$ un insieme in cui siano definite le funizoni interne $*(+)$, $\circ(\cdot)$ allora la struttura $(\mathbb{K}, *, \circ)$ é un **campo** se:

i. $(\mathbb{K}, *)$ é un gruppo abeliano con elemento neutro e.

ii. definito $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{e\}$, *allora* $(\mathbb{K}^*, \circ)$ é un gruppo abeliano.

iii. vale la proprietà **distributiva**: $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$

1.10 Omomorfismi e isomorfismi

Date due strutture algebriche, si dice **omomorfismo** una funzione (f) che commuta con le operazioni, in particolare si ha:

i. **Omomorfismo di gruppi**:

$$(A, *_A),\ (B, *_B),\ f : A \to B,$$

$$f(a_1 *_A a_2) = f(a_1) *_A f(a_2)$$

ii. **Omomorfismo di campi**

$$(A, *_A, \circ_A),\ (B, *_B, \circ_B),\ f : A \to B :$$

$$f(a_1 *_A a_2) = f(a_1) *_B f(a_2)$$
$$f(a_1 \circ_A a_2) = f(a_1) \circ_B f(a_2)$$

iii. Una funzione é un **isomorfismo** se é invertibile, e se la sua funzione inversa (f^{-1}) é a sua volta un omomorfismo.

2 Matrici

Dati i due insiemi $M = \{1, 2, .., m\}$ e $N = \{1, 2, .., n\}$ e il campo $\mathbb{K}$ si definisce **matrice** una funzione del tipo:

$$A : M \times N \to \mathbb{K}$$

$$(i, j) \to a_{ij}$$

e si indica con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n; \mathbb{K})$$

M é detto **insieme delle righe**(m)
N é detto **insieme delle colonne**(n)

2.1 Esempi notevoli

i. **Matrice nulla**

$$a_{i,j} = 0,\ \forall (i, j) \in M \times N$$

$$O_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. **Matrice identitá**

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$I_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Operazioni

In $Mat(m, n; \mathbb{K})$ si definiscono le seguenti operazioni:

i. **Somma**

$$+ : Mat(m, n; \mathbb{K}) \times Mat(m, n; \mathbb{K}) \to Mat(m, n; \mathbb{K})$$

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \to [a_{ij} + b_{ij}]$$

ii. **Moltiplicazione per uno scalare**

$$\cdot : \mathbb{K} \times Mat(m, n; \mathbb{K}) \to Mat(m, n; \mathbb{K})$$

$$(t, [a_{ij}]) \to [t \cdot a_{ij}]$$

iii. **Prodotto riga per colonna**

$$* : Mat(m, p; \mathbb{K}) \times Mat(p, n; \mathbb{K}) \to Mat(m, n; \mathbb{K})$$

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \to [\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}]$$

iv. **Matrice trasposta**;

$$A \in Mat(m, n; \mathbb{K}) \implies A^T \in Mat(n, m; \mathbb{K})$$

$$(A^T_{ij}) = (A_{ji})$$

2.3 Proprietà fondamentali delle operazioni con le matrici

Le seguenti sono le proprietà fondamentali legate alle operazioni sulle matrici:

- **Somma di matrici**: La somma di due matrici A e B di dimensioni compatibili è commutativa e associativa:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- **Prodotto tra una matrice e uno scalare**: Sia A una matrice e λ uno scalare. Il prodotto di λ con A soddisfa le seguenti proprietà:

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

  dove λ e μ sono scalari e A, B sono matrici di dimensioni compatibili.

- **Prodotto riga-colonna (prodotto di matrici)**:

  Le seguenti proprietà sono valide per il prodotto di matrici:

  Associatività:
$$A(BC) = (AB)C$$

  Distributivitá:
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

  Elemento neutro:
$$A \cdot I_m = I_n \cdot A = A$$

  Omogeneitá : Per uno scalare λ, vale:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

- **Matrice trasposta**: Sia A una matrice di dimensioni $m \times n$. La trasposta di A, indicata con A^T, è una matrice di dimensioni $n \times m$, tale che:

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$$

  Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

2.4 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss permette di trasformare una matrice in una forma più semplice, detta *matrice a scala*, attraverso operazioni elementari sulle righe. Di seguito sono riportate le definizioni di pivot, matrice a scala e rango, con esempi.

- **Pivot**: Sia la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
Il pivot della prima riga è $a_{1,1} = 1$, il pivot della seconda riga è $a_{2,2} = 4$, e il pivot della terza riga è $a_{3,3} = 6$. Questi elementi sono i primi non nulli in ciascuna riga. I pivot vengono usati per eliminare gli elementi sotto di loro, come già fatto in questo esempio.

- **Matrice a scala**: Una matrice è in *forma a scala* se soddisfa le seguenti condizioni:

  1. Le righe nulle sono in fondo.
  2. I pivot sono allineati a destra rispetto alla riga precedente.
  3. Gli elementi sotto ogni pivot sono nulli.

  Ad esempio, la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è in forma a scala perché: - Gli elementi sotto i pivot (1, 5, 8) sono tutti nulli. - I pivot di ogni riga sono allineati a destra rispetto alla riga precedente. - La riga nulla è posizionata alla fine.

- **Rango di una matrice**: Il *rango* di una matrice è il numero di pivot o righe linearmente indipendenti. Per la matrice A nell'esempio precedente, i pivot sono 1, 4 e 6, quindi $\text{rank}(A) = 3$. Per la matrice
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
abbiamo un solo pivot, 1, e dunque $\text{rank}(C) = 1$.

2.5 Operazioni elementari sulle righe

Durante il metodo di eliminazione di Gauss, si possono eseguire tre tipi di *operazioni elementari* sulle righe di una matrice per trasformarla in forma a scala. Queste operazioni non alterano le soluzioni del sistema associato alla matrice. Le operazioni sono:

- **Scambio di due righe**: Si può scambiare la posizione di due righe, indicato come $R_i \leftrightarrow R_j$. Ad esempio, scambiando la prima riga con la seconda nella matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$
otteniamo:
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo**: Una riga può essere moltiplicata per uno scalare $\lambda \neq 0$, indicato come $R_i \to \lambda R_i$. Ad esempio, moltiplicando la prima riga di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
per 2, otteniamo:
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- **Sostituzione di una riga con la somma di quella riga e un multiplo di un'altra riga**: Si può sommare a una riga un multiplo di un'altra riga, indicato come $R_i \to R_i + \lambda R_j$. Ad esempio, aggiungendo la prima riga moltiplicata per 2 alla seconda riga di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$
otteniamo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.6 Teorema del metodo di eliminazione di Gauss

Teorema (Eliminazione di Gauss): Sia A una matrice di dimensioni $m \times n$ con coefficienti reali o complessi. Esiste una sequenza finita di operazioni elementari sulle righe che trasforma A in una matrice A' in forma a scala. In particolare:

- La matrice A' ha lo stesso rango di A.
- I pivot nella matrice A' indicano il numero massimo di righe linearmente indipendenti di A.

3 Metodo di risoluzione di Gauss per sistemi lineari

3.1 Definizione di sistema lineare

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è un insieme di equazioni della forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Dove:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le incognite del sistema,
- a_{ij} sono i coefficienti del sistema, per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sono i termini noti.

Possiamo esprimere il sistema in forma matriciale come:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dove A è la matrice dei coefficienti, $\mathbf{x}$ è il vettore delle incognite e $\mathbf{b}$ è il vettore dei termini noti.

3.2 Algoritmo di Gauss

L'algoritmo di Gauss, o eliminazione gaussiana, è un metodo per risolvere un sistema lineare tramite trasformazioni elementari sulle righe della matrice aumentata $[A|\mathbf{b}]$ del sistema. L'obiettivo è ridurre la matrice a una forma a scala, da cui sia possibile ottenere le soluzioni con il metodo della sostituzione all'indietro.

I passi dell'algoritmo sono i seguenti:

1. Scrivere la matrice aumentata $[A|\mathbf{b}]$.
2. Utilizzare le operazioni elementari di riga per ridurre la matrice a forma triangolare superiore o a scala. Le operazioni elementari consentite sono:
   - Scambio di due righe,

- Moltiplicazione di una riga per una costante diversa da zero,
- Aggiunta di un multiplo di una riga a un'altra riga.

3. Una volta ottenuta la matrice ridotta a scala, si applica la sostituzione all'indietro per ottenere le soluzioni del sistema.

3.3 Rango della matrice e soluzioni del sistema

Il numero di soluzioni di un sistema lineare dipende dalla relazione tra il rango della matrice dei coefficienti A e il rango della matrice aumentata $[A|\mathbf{b}]$. In particolare:

- **Soluzione unica**: Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = n$, dove n è il numero di incognite, il sistema ha una soluzione unica.

  Esempio:

  $$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 5z = 19 \\ 3x + 2y + 4z = 17 \end{cases}$$

  La matrice aumentata è:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 19 \\ 3 & 2 & 4 & 17 \end{array}\right)$$

  Riducendo a forma a scala:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  Qui $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = 3$, quindi il sistema ha una soluzione unica.

- **Infinite soluzioni**: Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}) < n$, il sistema ha infinite soluzioni.

  Esempio:

  $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

  La matrice aumentata è:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

  Riducendo a forma a scala:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Qui $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = 1 < 3$, quindi il sistema ha infinite soluzioni, che possono essere espresse in forma parametrica.

- **Nessuna soluzione**: Se $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(A|\mathbf{b})$, il sistema è incompatibile e non ha soluzioni.

  Esempio:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$
  La matrice aumentata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
  Riducendo a forma a scala:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
  Qui $\mathrm{r}(A) = 1$ mentre $\mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = 2$, quindi il sistema è incompatibile e non ha soluzioni.

3.4 Teorema di Rouché-Capelli

Il teorema di Rouché-Capelli fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni di un sistema lineare. Esso afferma che un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è compatibile (ha almeno una soluzione) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice aumentata $[A|\mathbf{b}]$, cioè:
$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}).$$

3.5 Sistemi lineari omogenei

Un sistema lineare è detto *omogeneo* se tutti i termini noti sono nulli, cioè $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. In forma matriciale, un sistema omogeneo è dato da:
$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Tali sistemi sono sempre compatibili, in quanto la soluzione banale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è sempre una soluzione. Tuttavia, un sistema omogeneo può avere anche soluzioni non banali (diverse da zero). La natura delle soluzioni dipende dal rango della matrice dei coefficienti A:

- Se $\mathrm{r}(A) = n$, l'unica soluzione è quella banale.
- Se $\mathrm{r}(A) < n$, il sistema ha infinite soluzioni.

3.6 Nucleo di una matrice

Il *nucleo* (o *spazio nullo*) di una matrice A, indicato con $\ker(A)$, è l'insieme di tutti i vettori $\mathbf{x}$ tali che $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. In altre parole:

$$\ker(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Nel contesto di un sistema lineare omogeneo, il nucleo della matrice A rappresenta l'insieme delle soluzioni del sistema.

3.7 Struttura delle soluzioni

Le soluzioni di un sistema lineare possono essere espresse come somma della soluzione particolare (se esiste) e della combinazione lineare delle soluzioni del sistema omogeneo associato. In particolare:

- Se il sistema ha una soluzione unica, questa è anche l'unica soluzione del sistema omogeneo associato.
- Se il sistema ha infinite soluzioni, esse possono essere espresse come $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, dove $\mathbf{x}_p$ è una soluzione particolare del sistema e $\mathbf{x}_h$ è una soluzione del sistema omogeneo associato.

3.8 Soluzione particolare e interpretazione geometrica

Consideriamo un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Quando risolviamo questo sistema, le soluzioni possono essere suddivise in due parti:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

dove:

- $\mathbf{x}_p$ è una *soluzione particolare*, una soluzione specifica del sistema non omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{x}_h$ è la *soluzione generale del sistema omogeneo associato*, cioè la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Quando consideriamo un sistema di due equazioni lineari in tre incognite, ciascuna equazione rappresenta un piano nello spazio tridimensionale. Le possibili intersezioni tra due piani danno luogo ai seguenti casi:

1. *Intersezione in una retta*: Se i due piani non sono paralleli, essi si intersecano lungo una retta. In questo caso, il sistema ha infinite soluzioni.
2. *Intersezione in un punto*: Se i due piani sono incidenti in un solo punto (non paralleli e non coincidenti), il sistema ha una soluzione unica.
3. *Nessuna intersezione*: Se i due piani sono paralleli e distinti, il sistema è incompatibile e non ha soluzioni.