Analisi 1

Andrea Caldato

Contents

1 Numeri

1.1 Insiemi

Un ***insieme*** è una collezione di oggetti distinti, chiamati ***elementi***, considerati come un'entità unica. Gli insiemi vengono spesso indicati con lettere maiuscole, mentre i loro elementi con lettere minuscole. Se un elemento a appartiene all'insieme A, si scrive $a \in A$. Se non appartiene, si scrive $a \notin A$.

1.2 Proprietà degli insiemi

Gli insiemi possono avere diverse proprietà:

- **Insieme vuoto**: È l'insieme che non contiene alcun elemento, indicato con $\emptyset$.
- **Inclusione**: Se tutti gli elementi di un insieme A appartengono a un insieme B, si dice che A è un sottoinsieme di B, e si scrive $A \subseteq B$.
- **Uguaglianza**: Due insiemi A e B sono uguali se contengono gli stessi elementi, ossia $A = B$.

1.3 Simboli degli insiemi principali

Ecco alcuni simboli comuni usati per rappresentare insiemi:

- $\mathbb{N}$: l'insieme dei numeri naturali.
- $\mathbb{Z}$: l'insieme dei numeri interi.
- $\mathbb{Q}$: l'insieme dei numeri razionali.
- $\mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali.
- $\mathbb{C}$: l'insieme dei numeri complessi.

1.4 Operazioni tra insiemi

Le principali operazioni tra insiemi sono:

- **Unione**: L'unione di due insiemi A e B, indicata con $A \cup B$, è l'insieme degli elementi che appartengono a A, B, o entrambi.
- **Intersezione**: L'intersezione di due insiemi A e B, indicata con $A \cap B$, è l'insieme degli elementi che appartengono sia a A che a B.

- **Differenza**: La differenza tra due insiemi A e B, indicata con $A \setminus B$, è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B.

- **Complemento**: Il complemento di un insieme A, indicato con A^c, è l'insieme di tutti gli elementi che non appartengono ad A.

1.5 Prodotto cartesiano

Il ***prodotto cartesiano*** di due insiemi A e B, indicato con $A \times B$, è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$. Formalmente:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Ad esempio, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y\}$, allora:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}.$$

1.6 Predicati e affermazioni

Un ***predicato*** è una frase contenente una o più variabili che diventa un'affermazione vera o falsa quando si assegnano valori a queste variabili. Ad esempio, il predicato $P(x)$ con $P(x) : x^2 \geq 0$ è vero per ogni numero reale x.

Un'***affermazione*** è una frase che può essere vera o falsa. Ad esempio, "2 è un numero pari" è un'affermazione vera.

1.7 Sommatorie

La ***sommatoria*** è una notazione compatta per indicare la somma di una sequenza di termini. Viene indicata con il simbolo $\sum$. Se a_i è una sequenza, la sommatoria da $i = m$ a n si scrive:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

1.8 Proprietà delle sommatorie

- **Somma di costanti**: $\sum_{i=1}^{n} c = nc$, dove c è una costante.

- **Distribuzione**: $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

- **Fattore costante**: $\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$, dove c è una costante.

1.9 Serie geometrica

Una ***serie geometrica*** è una somma della forma:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n,$$

dove a è il primo termine e r è la ragione della progressione geometrica. La somma della serie geometrica è data da:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{se } r \neq 1.$$

1.10 Binomio di Newton

Il ***binomio di Newton*** fornisce una formula per lo sviluppo della potenza di un binomio:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

dove $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale, calcolato come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.11 Disuguaglianza di Bernoulli

La ***disuguaglianza di Bernoulli*** afferma che per ogni numero reale $x \geq -1$ e per ogni $n \geq 0$ intero, vale la seguente disuguaglianza:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Questa disuguaglianza è utile in molte applicazioni dell'analisi matematica.

1.12 Principio di induzione

Il ***principio di induzione matematica*** è un metodo per dimostrare che una proprietà $P(n)$ è vera per tutti gli interi $n \geq n_0$. Il principio si basa su due passi:

1. **Base**: Si verifica che la proprietà $P(n_0)$ è vera.

2. **Passo induttivo**: Si dimostra che, se $P(k)$ è vera per un certo $k \geq n_0$, allora anche $P(k + 1)$ è vera.

Se entrambi i passi sono soddisfatti, si conclude che $P(n)$ è vera per tutti gli $n \geq n_0$.

1.13 Principio del minimo intero

Il *principio del minimo intero* afferma che ogni insieme non vuoto di numeri naturali ha un minimo. In altre parole, se $S \subseteq \mathbb{N}$ è un insieme non vuoto, allora esiste un elemento $m \in S$ tale che $m \leq s$ per ogni $s \in S$. Questo principio è fondamentale perché permette di individuare un "punto di partenza" per dimostrazioni che coinvolgono i numeri naturali.

In questo modo, il principio del minimo intero fornisce una base per dimostrare utilizzando il principio di induzione.

1.14 Numeri naturali $\mathbb{N}$

I *numeri naturali* sono l'insieme dei numeri interi non negativi e vengono indicati con $\mathbb{N}$. Formalmente, si può scrivere:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

I numeri naturali sono utilizzati per contare e ordinare.

Le operazioni fondamentali definite sui numeri naturali includono:

- **Somma**: Dati due numeri naturali a e b, la somma $a + b$ è un numero naturale. Ad esempio, $3 + 5 = 8$.
- **Moltiplicazione**: Dati due numeri naturali a e b, il prodotto $a \cdot b$ è un numero naturale. Ad esempio, $4 \cdot 6 = 24$.

1.15 L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$

L'insieme dei numeri interi, denotato con $\mathbb{Z}$, è definito come l'insieme di tutti i numeri interi positivi, negativi e lo zero. Formalmente, possiamo scrivere:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Per definire $\mathbb{Z}$ in termini di classi di equivalenza, consideriamo la relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita come segue:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a - b = c - d.$$

Questa relazione stabilisce che le coppie (a, b) e (c, d) sono equivalenti se la differenza tra il primo e il secondo elemento della prima coppia è uguale alla differenza tra il primo e il secondo elemento della seconda coppia.

Dalla relazione di equivalenza possiamo definire le classi di equivalenza. Ogni classe di equivalenza corrisponde a un numero intero e può essere rappresentata come:

$$[x] = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a - b = n \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}\}.$$

In questo modo, i numeri interi possono essere costruiti a partire dalle coppie di numeri naturali, evidenziando che ogni numero intero n può essere visto come la differenza tra due numeri naturali:

$$n = a - b \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad a \geq b.$$

Pertanto, possiamo esprimere $\mathbb{Z}$ come l'insieme delle classi di equivalenza associate alle differenze tra numeri naturali:

$$\mathbb{Z} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{N}\}.$$

L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alle seguenti operazioni:

i. **Somma algebrica**: Dati due numeri interi $x, y \in \mathbb{Z}$, la loro somma è definita come:
$$x + y \in \mathbb{Z}.$$

ii. **Moltiplicazione**: Dati due numeri interi $x, y \in \mathbb{Z}$, il loro prodotto è definito come:
$$x \cdot y \in \mathbb{Z}.$$

1.16 L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri razionali, denotato con $\mathbb{Q}$, è definito come l'insieme di tutti i quozienti di numeri interi, dove il denominatore è diverso da zero. Formalmente, possiamo scrivere:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

I numeri razionali possono essere considerati come classi di equivalenza formate da coppie di numeri interi (a, b), dove b è diverso da zero. Due coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono equivalenti se il quoziente è lo stesso, cioè:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1.$$

Questa relazione stabilisce che le coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) rappresentano lo stesso numero razionale.

La classe di equivalenza associata a un quoziente $\frac{a}{b}$ può essere espressa come:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \alpha \cdot b = a \cdot \beta,\ \beta \neq 0\right\}.$$

In questo modo, i numeri razionali possono essere costruiti a partire dalle coppie di numeri interi. Ogni numero razionale $\frac{a}{b}$ rappresenta la classe di equivalenza di tutte le coppie (ka, kb) per ogni intero $k \neq 0$.

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto alle seguenti operazioni:

i. **Somma algebrica**: Dati due numeri razionali $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, la loro somma è definita come:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

ii. **Moltiplicazione**: Dati due numeri razionali $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, il loro prodotto è definito come:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$