



ESERCITAZIONI E TEORIA DI ELEMENTI FINITI  
PER IL CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN  
INGEGNERIA ENERGETICA

PROGETTAZIONE MECCANICA  
COL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

ANDREA CHIOCCA

DIP. DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE (DICI), UNIVERSITÀ DI PISA

EMAIL: [ANDREA.CHIOCCA@UNIP.I.IT](mailto:ANDREA.CHIOCCA@UNIP.I.IT)

UFFICIO: EDIFICIO B45, SALA DOTTORANDI AL PRIMO PIANO

Fondamenti del Metodo agli Elementi Finiti (EF) in ambito statico lineare:

- formulazioni continua e discreta dell'equazione di equilibrio
- determinazione delle matrici di rigidezza dell'elemento e della struttura
- funzioni di forma di un elemento
- applicazione di vincoli e carichi e determinazione della soluzione

Principali tipi di elemento per analisi strutturali:

- elementi monodimensionali strutturali (asta e trave)
- elementi piani per modellazione plane stress, plane strain e assialsimmetrica
- elementi guscio assialsimmetrico e guscio-piastra 3D
- elementi Solidi 3D di forma esaedrica e tetraedrica

Valutazione dell'errore e analisi di convergenza

## **Materiale didattico:**

- Introduzione al metodo degli elementi finiti 1, F. Cesari, Pitagora Editrice Bologna
- Finite Element Procedures, K.J. Bathe
- Madenci E., Guven I. “The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS”, Springer 2015
- A gentle introduction to the Finite Element Method, Francisco–Javier Sayas
- **Ansys APDL Help and related documentation**
- **Materiale didattico fornito dal docente**

**Modalità d'esame:** L'esame consiste in una prova orale durante la quale verrà richiesto allo studente di presentare, avvalendosi del supporto di una relazione scritta e/o di una presentazione, uno o più problemi studiati, i modelli proposti, le ipotesi assunte, le analisi effettuate, e di commentarne i risultati.

# INTRODUZIONE

---

*"The finite element method (FEM) is a popular method for numerically solving differential equations arising in engineering and mathematical modeling. Typical problem areas of interest include the traditional fields of structural analysis, heat transfer, fluid flow, mass transport, and electromagnetic potential.*

*The FEM is a general numerical method for solving partial differential equations in two or three space variables (i.e., some boundary value problems). To solve a problem, the FEM subdivides a large system into smaller, simpler parts that are called finite elements. This is achieved by a particular space discretization in the space dimensions, which is implemented by the construction of a mesh of the object: the numerical domain for the solution, which has a finite number of points. The finite element method formulation of a boundary value problem finally results in a system of algebraic equations. The method approximates the unknown function over the domain. The simple equations that model these finite elements are then assembled into a larger system of equations that models the entire problem. The FEM then approximates a solution by minimizing an associated error function via the calculus of variations."*

**Sorgente: Wikipedia**

Il metodo agli elementi finiti (MEF in italiano o FEM in inglese) è il metodo più utilizzato per risolvere numericamente problemi di ingegneria.

Le tipiche aree di interesse sono l'**analisi strutturale**, scambio termico, flusso dei fluidi, trasporto di massa e elettromagnetismo. Si tratta infatti di un particolare metodo numerico in grado di risolvere equazioni differenziali, sia essa alle derivate totali o parziali.

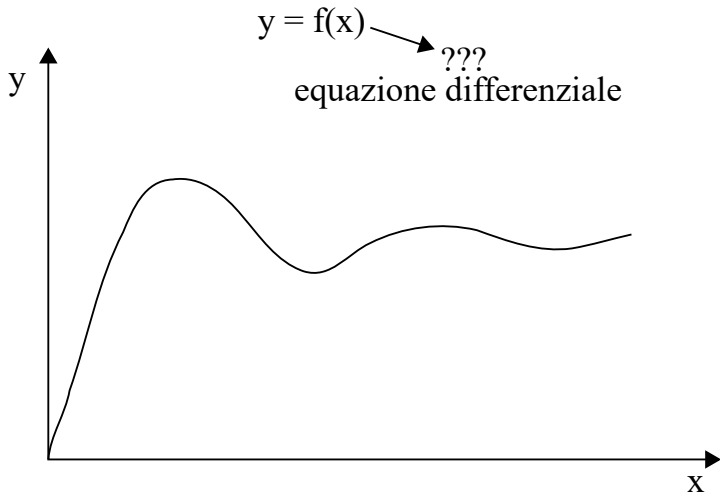
Per risolvere questo problema, si suddivide un grande sistema in parti più piccole. La caratteristica principale del metodo degli elementi finiti è la discretizzazione attraverso la creazione di una griglia (**mesh**) composta da primitive (**elementi**) di forma codificata (triangoli e quadrilateri per domini 2D, tetraedri e esaedri per domini 3D).

Software maggiormente utilizzati oggi sono:

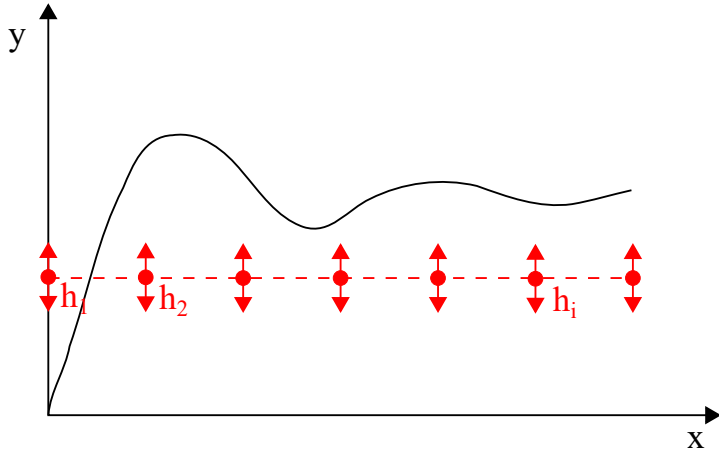
**ANSYS** e **ABAQUS** (entrambi con possibilità di utilizzare una licenza gratuita per studenti)

<https://www.ansys.com/it-it/academic/free-student-products>

Il FEM utilizza metodi variazionali per approssimare una soluzione minimizzando una funzione di errore associata.

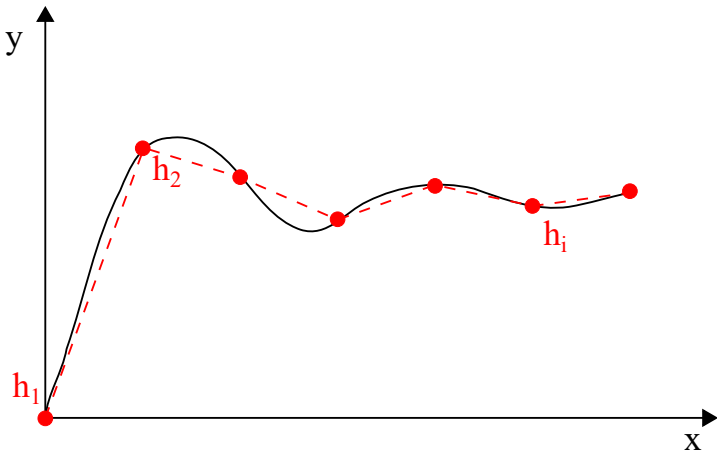


Si impongono equazioni di bilancio arrivando ad un sistema di equazioni (lineare) con incognite le altezze  $h_i$

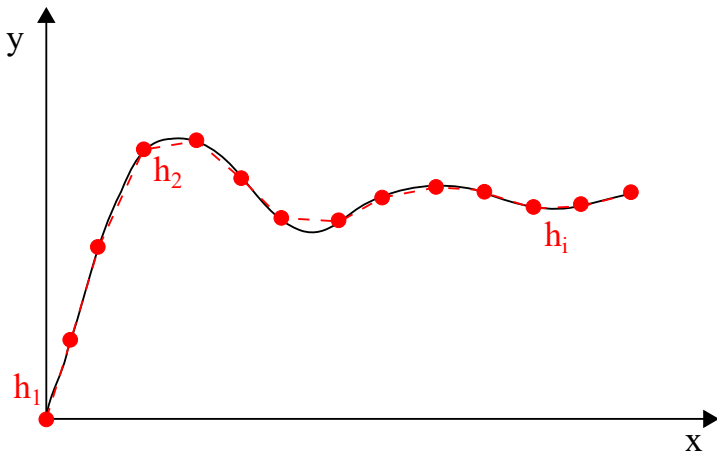


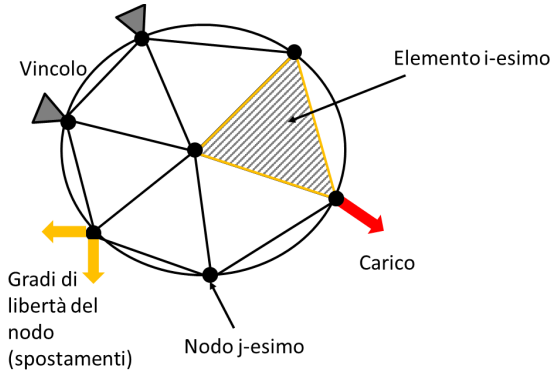


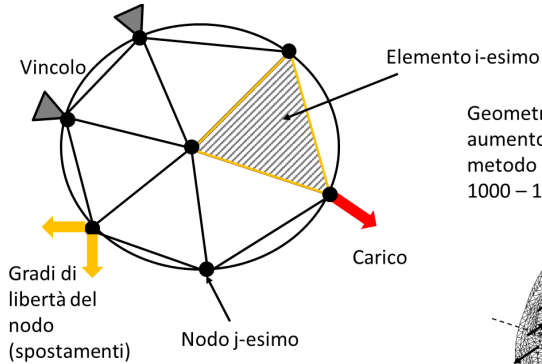
Si approssima la funzione con una certa discretizzazione



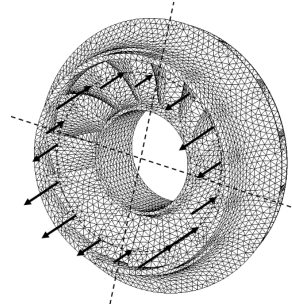
Migliorando la discretizzazione, migliora la rappresentazione della funzione

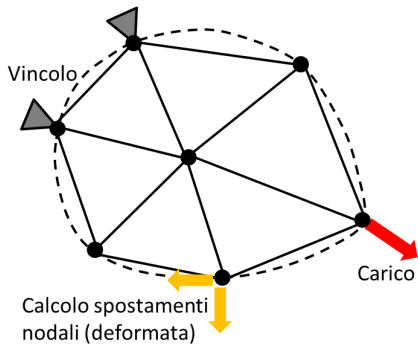
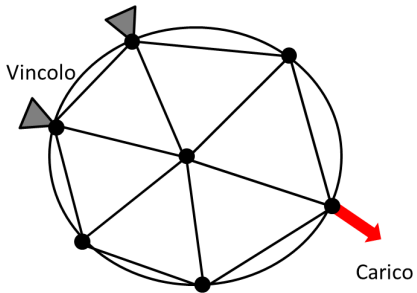






Geometrie di complessità crescente,  
aumento numero di elementi:  
metodo numerico, soluzione al calcolatore  
1000 – 1 000 000 elementi





## Monodimensionali

- Asta (**Truss**): elemento rettilineo atto a trasmettere solo forze assiali
- Trave (**Beam**): elemento rettilineo atto a trasmettere tutte le sollecitazioni tipiche di una trave (forze assiali, di taglio, momenti flettenti e torcenti)
- Molla: elemento rettilineo dotato di rigidità assiale e/o torsionale usato per modellare vincoli elastici

## Bidimensionali

- Lastra (**Plane stress**): elemento piano dotato di rigidità membranale (equivalente bidimensionale dell'asta)
- Deformazione piana (**Plain strain**): elemento piano in cui lo spessore è prevalente rispetto alle altre dimensioni
- Piastra: elemento piano dotato di rigidità flessionale
- Guscio (**Shell**): combinazione dell'elemento lastra e piastra
- Assialsimmetrico: elemento utilizzato per modellare un settore di struttura a simmetria radiale

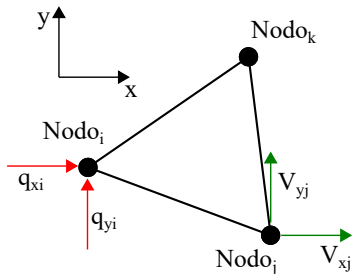
## Tridimensionali

- Elemento solido (**Brick**): elemento generico tridimensionale usato per modellare elementi strutturali (o di una specifica area di interesse) di tipo solido. Usato quando non vi è una dimensione trascurabile rispetto alle altre

N.B: nella maggior parte dei programmi FEM, gli elementi vengono suddivisi a seconda del campo di applicazione (strutturale, termico, etc.) e/o del numero di nodi che li definiscono (un elemento Brick può essere composto da 4 fino a 27 nodi). Normalmente caratteristiche come plane stress/ plain strain vengono definite come opzioni di elementi già esistenti e non come elementi a se stanti.

Nel FEM carichi e vincoli possono essere applicati solamente sui nodi, nel caso di applicazioni di carichi e/o vincoli superficiali il programma tradurrà i seguenti vincoli in nodali prima di risolvere il modello.

Esempio di elemento 2D a tre nodi (2 gdl x 3 nodi = 6 gdl totali dell'elemento):



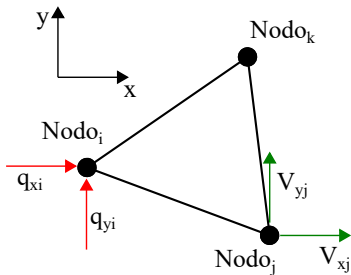
$$P^e = \begin{bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{xk} \\ q_{yk} \end{bmatrix} \quad U^e = \begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ V_{xj} \\ V_{yj} \\ V_{xk} \\ V_{yk} \end{bmatrix}$$

$$|P^e| = [K^e]|U^e|$$

$|P^e|$  = vettore dei carichi;  $|U^e|$  = vettore degli spostamenti;  
 $[K^e]$  = matrice di rigidezza



Il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, si "riduce" ad un sistema (lineare), in cui le incognite sono gli spostamenti nodali.



In realtà viene risolta questa equazione:

$$[K^e]|U^e| = |P^e|$$

dove  $|P^e|$  è noto poiché sono i carichi da me applicati,  $[K^e]$  è noto poiché definita a partire dalle proprietà del materiale definite dall'utente. Rimane come incognita gli spostamenti nodali  $|U^e|$ .

Dal FEM si ottengono come risultato gli spostamenti sui nodi.

Come calcolare tensioni, deformazioni e spostamenti su punti interni agli elementi?

Solo successivamente alla risoluzione del sistema

$$[K^e]U^e = P^e$$

tensioni e deformazioni vengono calcolate mediante le **funzioni di forma** (shape functions).

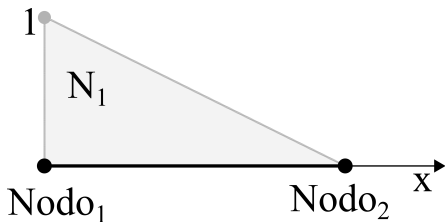
Specificatamente, su ciascun elemento della mesh, la soluzione del problema è assunta essere espressa dalla combinazione lineare delle funzioni di forma. Per rappresentare la soluzione esatta nodale, le funzioni di forma vengono assunte di valore unitario nei nodi.

Le funzioni di forma sono generalmente polinomiali, il cui grado dipende dal numero di nodi dell'elemento.

Esempio di caso elementare con elemento monodimensionale.

$V_x$  è la funzione di spostamento sul dominio dell'elemento.

$V_{xi}$  sono gli spostamenti nodali, in questo caso per  $i = 1, 2$ .

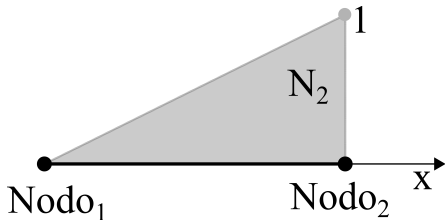


$$V_x = \sum N_i V_{xi}$$

Esempio di caso elementare con elemento monodimensionale.

$V_x$  è la funzione di spostamento sul dominio dell'elemento.

$V_{xi}$  sono gli spostamenti nodali, in questo caso per  $i = 1, 2$ .

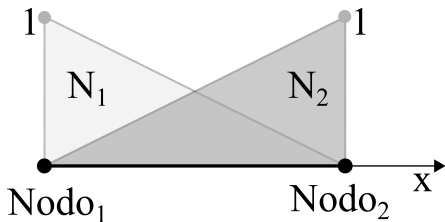


$$V_x = \sum N_i V_{xi}$$

Esempio di caso elementare con elemento monodimensionale.

$V_x$  è la funzione di spostamento sul dominio dell'elemento.

$V_{xi}$  sono gli spostamenti nodali, in questo caso per  $i = 1, 2$ .

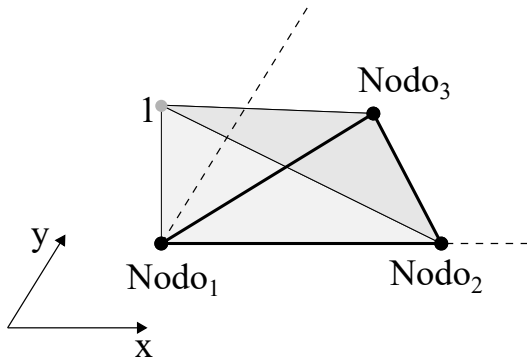


$$V_x = \sum N_i V_{xi}$$

Esempio di caso elementare con elemento piano 2D triangolare.

$V_x, V_y$  sono le funzioni di spostamento sul dominio dell'elemento.

$V_{xi}, V_{yi}$  sono gli spostamenti nodali, in questo caso  $i = 1, 2, 3$ .

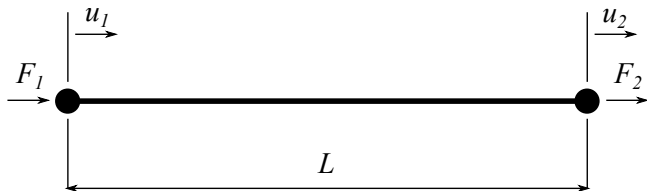


$$V_x = \sum N_i V_{xi}$$

$$V_y = \sum N_i V_{yi}$$

N.B: per chiarezza grafica, è stata riportata solamente la funzione di forma del nodo 1.

## ESEMPIO APPLICATIVO SU ASTA MONODIMENSIONALE



$E$  = modulo di Young del materiale

$A$  = area sezione dell'asta

$L$  = lunghezza asta

$u_i$  = spostamenti estremi asta

$F_i$  = forze esterne agenti sulle sezioni estreme della asta

Ipotizziamo che il problema sia monodimensionale, cioè che la asta possa risentire solo di forze e spostamenti nella direzione dell'asse dell'asta stessa.

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma = E\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$F = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) = F_2 = -F_1$$

Svolgendo i calcoli possiamo trasformare  $F_2 = -F_1 = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)$  in un'equazione matriciale

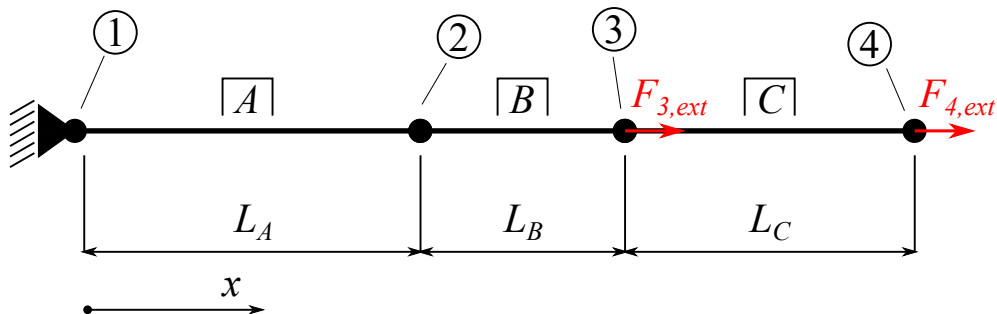
$$F_1 = \frac{AE}{L}u_1 - \frac{AE}{L}u_2 \text{ e } F_2 = \frac{AE}{L}u_2 - \frac{AE}{L}u_1$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$|P^e| = [K^e]|U^e|$$

$|P^e|$  = vettore dei carichi;  $|U^e|$  = vettore degli spostamenti;  $[K^e]$  = matrice di rigidezza

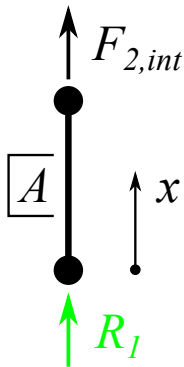




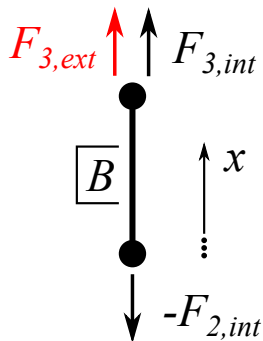
L'esempio mostra un componente formato da tre elementi monodimensionali  $A$ ,  $B$ ,  $C$  di lunghezza  $L_A$ ,  $L_B$ ,  $L_C$  collegati dai nodi ①, ②, ③, ④.

Sui nodi ③ e ④ sono applicate due forze esterne  $F_{3,ext}$  e  $F_{4,ext}$

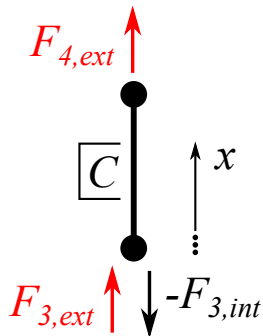
Per convenzione forze e spostamenti sono positivi lungo la direzione  $x$  positiva



$$\begin{bmatrix} R_1 \\ F_{2,int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_A E_A}{L_A} & -\frac{A_A E_A}{L_A} \\ -\frac{A_A E_A}{L_A} & \frac{A_A E_A}{L_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -F_{2,int} \\ F_{3,int} + F_{3,ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_B E_B}{L_B} & -\frac{A_B E_B}{L_B} \\ -\frac{A_B E_B}{L_B} & \frac{A_B E_B}{L_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} F_{3,ext} & -F_{3,int} \\ F_{4,ext} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_C E_C}{L_C} & -\frac{A_C E_C}{L_C} \\ -\frac{A_C E_C}{L_C} & \frac{A_C E_C}{L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \frac{A_A E_A}{L_A} u_1 - \frac{A_A E_A}{L_A} u_2$$

A →

$$F_{2,int} = -\frac{A_A E_A}{L_A} u_1 + \frac{A_A E_A}{L_A} u_2$$

$$-F_{2,int} = \frac{A_B E_B}{L_B} u_2 - \frac{A_B E_B}{L_B} u_3$$

B →

$$F_{3,int} + F_{3,ext} = -\frac{A_B E_B}{L_B} u_2 + \frac{A_B E_B}{L_B} u_3$$

$$F_{3,ext} - F_{3,int} = \frac{A_C E_C}{L_C} u_3 - \frac{A_C E_C}{L_C} u_4$$

C →

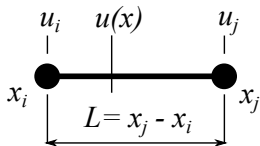
$$F_{4,ext} = -\frac{A_C E_C}{L_C} u_3 + \frac{A_C E_C}{L_C} u_4$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ F_{3,ext} \\ F_{4,ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_A E_A}{L_A} & -\frac{A_A E_A}{L_A} & 0 & 0 \\ -\frac{A_A E_A}{L_A} & \frac{A_A E_A}{L_A} + \frac{A_B E_B}{L_B} & -\frac{A_B E_B}{L_B} & 0 \\ 0 & -\frac{A_B E_B}{L_B} & \frac{A_B E_B}{L_B} + \frac{A_C E_C}{L_C} & -\frac{A_C E_C}{L_C} \\ 0 & 0 & -\frac{A_C E_C}{L_C} & \frac{A_C E_C}{L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$|P^e| = [K^e]|U^e|$$

$|P^e|$  = vettore dei carichi;  $|U^e|$  = vettore degli spostamenti;

$[K^e]$  = matrice di rigidezza



Come legare lo spostamento nodale ( $u_i$ ,  $u_j$ ) allo spostamento dei punti interni all'elemento ( $u(x)$ )?

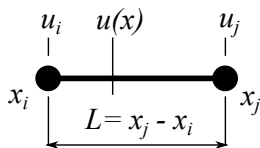
Mi serve una funzione ( $N(x)$ ) che leghi le due quantità

Posso definire (in prima approssimazione) un legame lineare tra  $u_i$ ,  $u_j$  e  $u(x)$ .

Utilizzo una legge di proporzionalità del tipo  $u(x) = Ax + B$  dove  $u(x_i) = u_i$  e  $u(x_j) = u_j$  ottenendo

$$u(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} & \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

$$u(x) = [N(x)][U]$$



Una volta definiti gli spostamenti su tutto il dominio dell'elemento possiamo calcolare le deformazioni.

Infatti le deformazioni sono definibili solamente nel momento in cui si ha una variazione di lunghezza dell'elemento

In generale una deformazione in un dominio monodimensionale (come quello preso ad esempio) è definibile come la derivata dello spostamento  $\varepsilon = \frac{du(x)}{dx}$

Nel nostro caso specifico

$$\varepsilon = \frac{d}{dx}[N(x)][U] = [B(x)][U]$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_j - x_i} & \frac{1}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \rightarrow \sigma = E\varepsilon$$

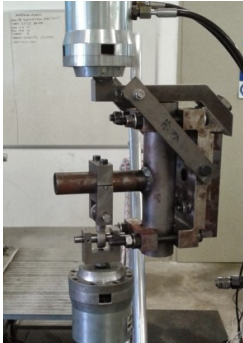


# DEFINIZIONE DEL MODELLO

---

L'utente ha la responsabilità della modellazione, ovvero di tutte le operazioni necessarie a passare dal problema reale al modello FE.

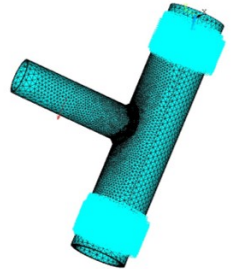
## 1) Prova reale



## 2) Modellazione

- Tipo di analisi (statica, dinamica, etc.)
- Analisi 2D/3D
- Tipo di elemento
- Come rappresentare carichi e vincoli
- Modelli costitutivi del materiale
- Modellare le interfacce
- Stimare errore
- ...

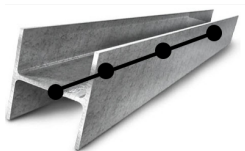
## 3) Modello FEM



Esempio di scelta degli elementi per una trave a doppio T.

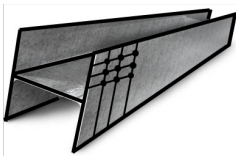


Caratteristiche di sollecitazione



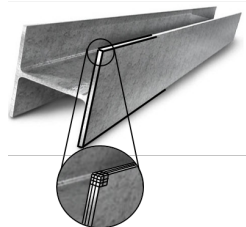
*Elementi trave* (beam): il nodo rappresenta una sezione della

Deflessione piattabanda



*Elementi guscio* (shell): il nodo rappresenta uno

Gradiente di tensione nello spessore



*Elementi solidi* (brick): il nodo rappresenta un punto solido

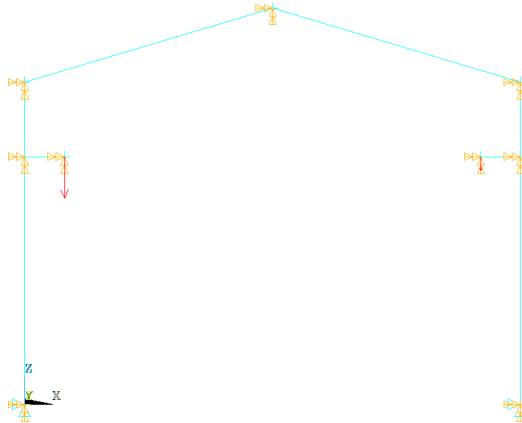
GEOMETRIA	2D	3D
Linee	Elemento Trave 2D	Elemento Trave 3D
Aree	Elemento solido piano (plane stress/ plane strain)	
Volumi	— — —	Elemento solido



## SCELTA DEGLI ELEMENTI

GEOMETRIA	2D	3D
Linee	Elemento Trave 2D	Elemento Trave 3D
Aree	Elemento solido piano (plane stress/ plane strain)	Elemento guscio
Volumi	— — —	Elemento solido

Struttura modellata sul piano Z-X costituita solamente da elementi trave 2D (Beam)

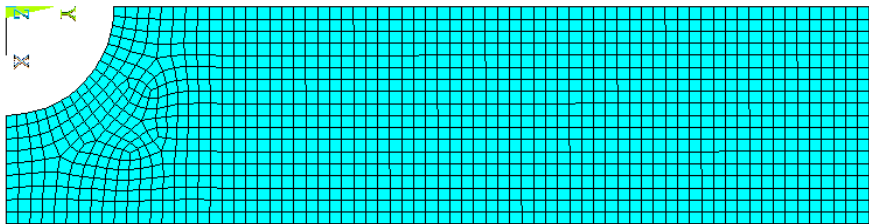




## SCELTA DEGLI ELEMENTI

GEOMETRIA	2D	3D
Linee	Elemento Trave 2D	Elemento Trave 3D
Aree	Elemento solido piano (plane stress/ plane strain)	Elemento guscio
Volumi	— — —	Elemento solido

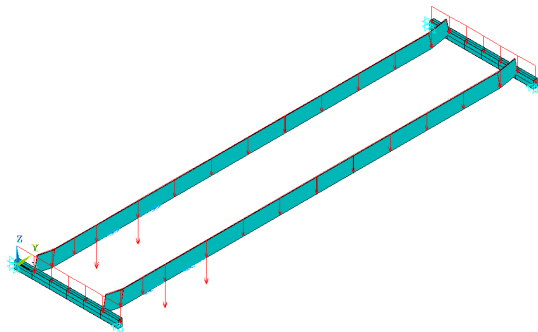
Struttura modellata sul piano Y-X costituita solamente da elementi piani (Plane)





GEOMETRIA	2D	3D
Linee	Elemento Trave 2D	Elemento Trave 3D
Aree	Elemento solido piano (plane stress/ plane strain)	
Volumi	— — —	Elemento solido

Struttura modellata in tutte e tre le direzioni spaziali costituita solamente da elementi trave 3D (Beam)

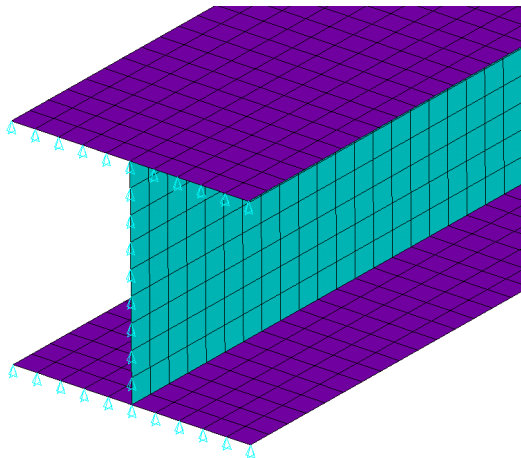




## SCELTA DEGLI ELEMENTI

GEOMETRIA	2D	3D
Linee	Elemento Trave 2D	Elemento Trave 3D
Aree	Elemento solido piano (plane stress/ plane strain)	Elemento guscio
Volumi	— — —	Elemento solido

Struttura modellata in tutte e tre le direzioni spaziali costituita solamente da elementi guscio (Shell)

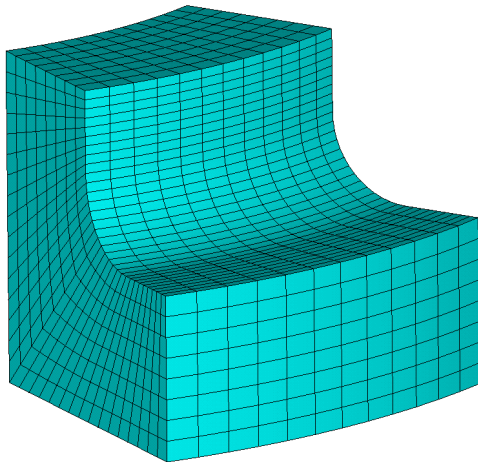




## SCELTA DEGLI ELEMENTI

GEOMETRIA	2D	3D
Linee	Elemento Trave 2D	Elemento Trave 3D
Aree	Elemento solido piano (plane stress/ plane strain)	
Volumi	---	Elemento solido

Struttura modellata in tutte e tre le direzioni spaziali costituita solamente da elementi solidi (Brick)



# STIMA DELL'ERRORE

---

Si possono avere due fonti di errore principali:

1. Approssimazioni semplificative introdotte nel modello
2. Approssimazione numerica derivante dal calcolo (discretizzazione)

Le soluzioni sono:

1. Porre attenzione in fase di pianificazione
2. Può essere limitato infittendo la mesh (analisi di convergenza)

In generale se  $h$  è la dimensione caratteristica della mesh e  $p$  il grado del polinomio delle funzioni di forma:

$$e_u \cong O(h^{p+1})$$

$$e_\sigma \cong O(h^p)$$

dove  $e_u$  e  $e_\sigma$  sono rispettivamente l'errore sugli spostamenti e l'errore sulle tensioni.

*In generale  $e_u$  tende a zero più velocemente di  $e_\sigma$  e a parità di gdl un modello 2D converge prima di un modello 3D.*

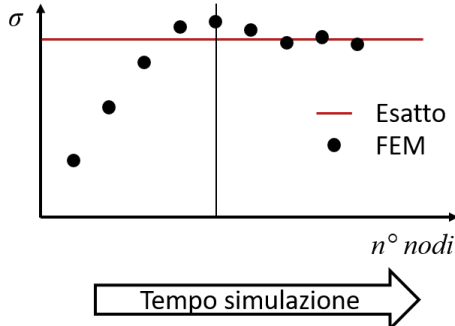


Costruito il modello, l'entità dell'errore varia in base a:

- Dimensione caratteristica della mesh ( $h$ )
- Grado del polinomio usato nelle funzioni di forma ( $p$ )

**Convergenza di tipo  $p$ :** aumento il grado del polinomio (lascio costante  $h$ ) [Solo analisi lineari statiche]

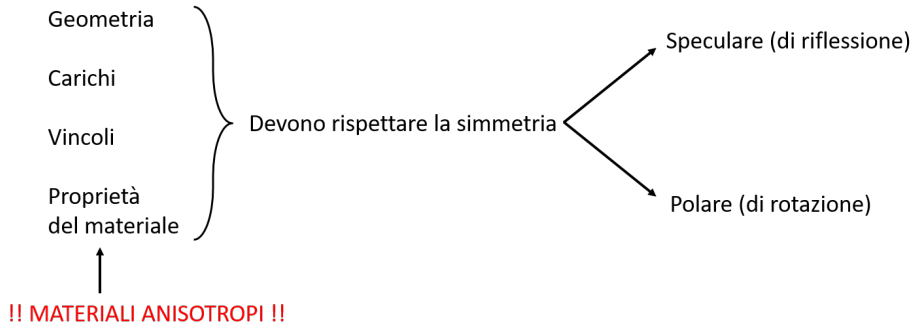
**Convergenza di tipo  $h$ :** aumento il numero di elementi (in maniera differenziata nel modello)

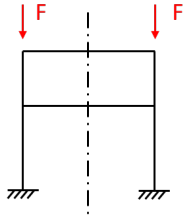


# IMPIEGO DI SIMMETRIE

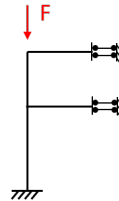
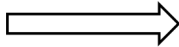
---

Riduzione dimensione del modello (in termini di gdl): utilizzo delle simmetrie

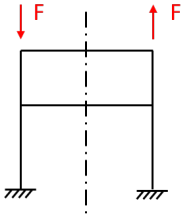




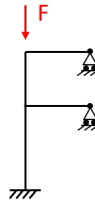
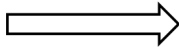
Carichi e vincoli  
simmetrici, tutti gli stati  
sono simmetrici



Vincoli aggiuntivi:  
spostamenti orizzontali e  
rotazioni nel piano nulli  
per la congruenza



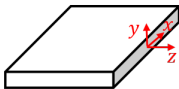
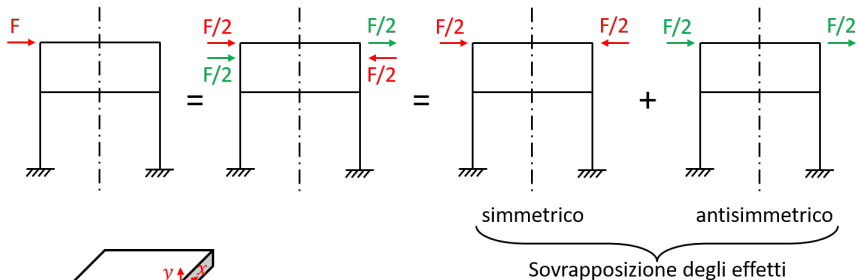
Carichi antisimmetrici,  
tutti gli stati sono  
antisimmetrici



Vincoli aggiuntivi:  
spostamenti verticali nulli  
per la congruenza

Vincoli complementari al  
caso precedente

Carico non simmetrico



$z \perp$  piano simm.

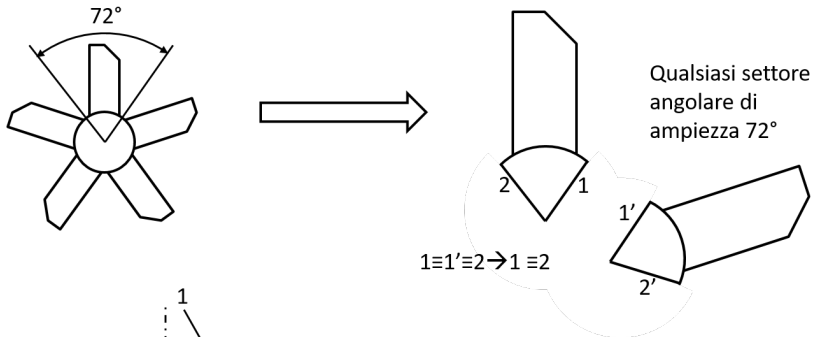
Condizioni di vincolo

carichi simmetrici:

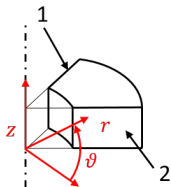
$$\begin{cases} U_z = 0 \\ Rot_x = 0 \\ Rot_y = 0 \end{cases}$$

carichi antisimmetrici:

$$\begin{cases} U_y = 0 \\ U_x = 0 \\ Rot_z = 0 \end{cases}$$



Stessa maglia sulle  
superfici 1 e 2



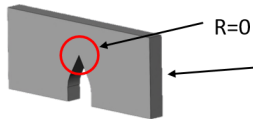
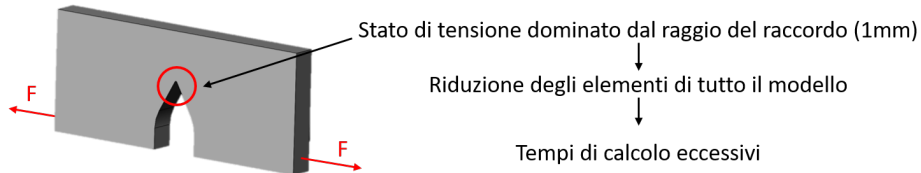
Condizioni di vincolo  
(coordinate polari)

$$\begin{cases} U_{r1} = U_{r2} & Rot_{r1} = Rot_{r2} \\ U_{\theta1} = U_{\theta2} & Rot_{\theta1} = Rot_{\theta2} \\ U_{z1} = U_{z2} & Rot_{z1} = Rot_{z2} \end{cases}$$

# SOTTOSTRUTTURE

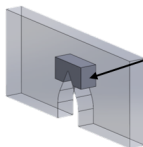
---

Dettagli geometrici influenzano localmente il risultato



1) Modello grossolano senza dettaglio geometrico: la soluzione dopo 4 – 5 R è comunque valida

2) Sottomodello ridotto con il dettaglio geometrico e mesh molto fitta



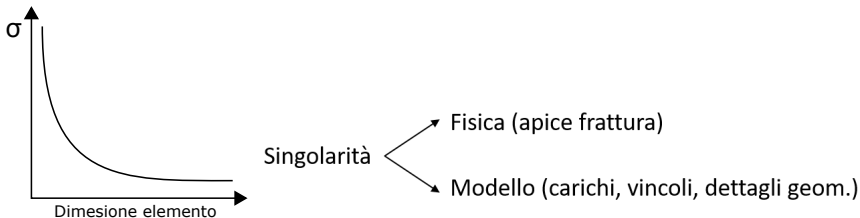
3) Applico come condizioni di carico del sottomodello gli spostamenti delle superfici a comune calcolati al punto 1



# SINGULARITÁ

---

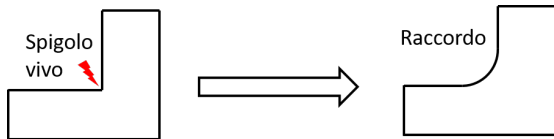
Punti del modello in cui le tensioni raggiungono valori molto alti (rispetto ai valori circostanti)



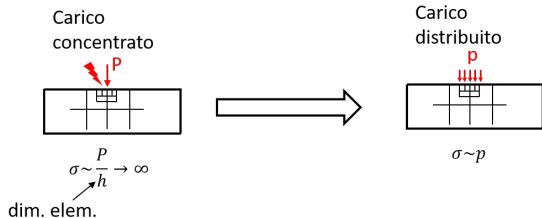
Se la singolarità è causata dal modello e non dalla fisica del problema, non si trova un valore affidabile di tensione nella singolarità.

**Il modello può comunque essere valido per studiare il resto della struttura.**

Dettagli geometrici:



Applicazione del carico:



Anche per i vincoli vale la stessa cosa, è come applicare la reazione vincolare

## **ALTRI TIPI DI ANALISI**

---

$$\{U\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \longrightarrow \text{Analisi lineari statiche}$$

Analisi dinamiche:

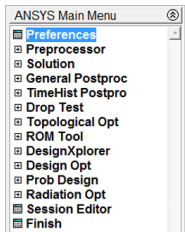
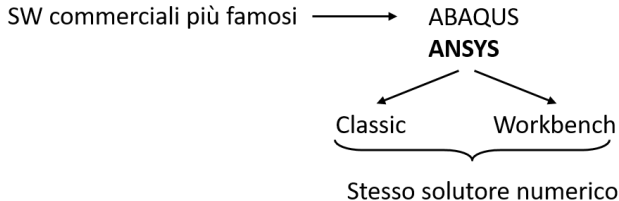
- Modale  $\longrightarrow [M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = 0$
  - Risposta armonica  $\longrightarrow$  Risposta a regime
  - Transitorio  $\longrightarrow$  Transitorio dinamico
- $[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\}$

Analisi non lineari:

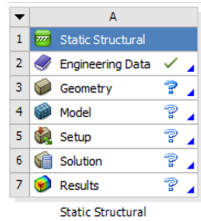
- Contatti  $\longrightarrow$  Elementi gap, calcolo iterativo per verificare apertura/chiusura dei contatti
- Non linearità geometriche  $\longrightarrow$  Grandi deformazioni/spostamenti, variazione della matrice di rigidezza nel tempo
- Plasticità  $\longrightarrow$  Comportamento non lineare del materiale

# SOFTWARE

---



Solitamente si lavora con righe di codice,  
possibilità di utilizzo di interfaccia utente  
(maggiormente usata nel post-processing)



Ambiente interattivo «user-friendly»,  
possibilità di eseguire i vari step tramite  
interfaccia grafica

### ANSYS Classic-APDL:

<https://sites.ualberta.ca/~wmoussa/AnsysTutorial/>

[http://mae.uta.edu/~lawrence/ansys/ansys\\_examples.htm](http://mae.uta.edu/~lawrence/ansys/ansys_examples.htm)

<https://www.youtube.com/watch?v=POjpLbwYdKo> (Come imparare il codice APDL utilizzando le macro tramite l'interfaccia grafica)

### ANSYS Workbench:

<https://www.ozeninc.com/default.aspx?ii84/> (Un po' datato ma con spunti utili per imparare)

<https://www.youtube.com/channel/UCro8LB2wkCMiCpE15d6jX1A> (Video Tutorial)

<https://www.youtube.com/channel/UCCmK2-v3mgXmLOBxKYliN1g> (Video Tutorial)

### Materiale UNIPi:

<http://www.dimnp.unipi.it/leonardo-bertini/>

<http://people.unipi.it/static/ciro.santus/>