

# Hanojska kula

*Andrea Ćirić 2016/0202 OE*

22. maj 2018

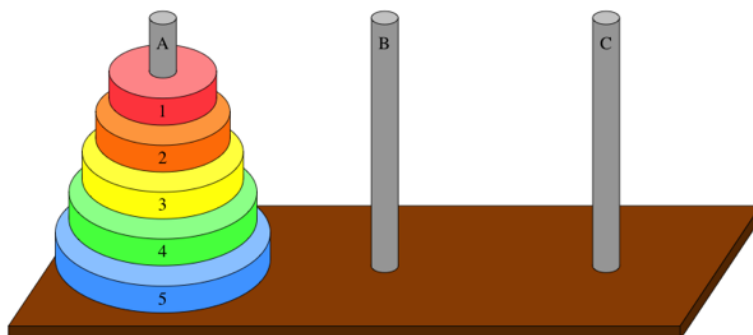
Mentori: doc. dr Ivana Jovović i prof. dr Branko Malešević



# 1 Uvod

Hanojska kula je matematička igra ili slagalica, mozgalica. Sastoji se od tri uspravna štapa i određenog broja diskova različitih veličina postavljenih na prvom štapu u rastućem redosledu tako da se najveći disk nalazi na dnu, a najmanji na vrhu. Cilj ove mozgalice je da se svi diskovi prebace na treći štap ako važe pravila:

1. Samo jedan disk može da se pomera istovremeno.
2. Mogu da se premeštaju samo diskovi koji se nalaze na vrhovima štapova u tom trenutku.
3. Ne sme se stavljati veći disk preko manjeg.



# 2 Poreklo

Zagonetku „Hanojska kula“ je izmislio francuski matematičar *Eduar Lukas* 1883. godine. Postoji priča o indijskom hramu u Kaši Vivanatu, koji sadrži veliku sobu sa tri poruke koje su istrošene kroz vreme i koje su okružene sa 64 zlatna diska. Sveštenici Bramani, radeći u skladu sa starim proročanstvom, pomeraju ove diskove po nepromenljivim pravilima Brahme od tad. Iz tog razloga ova zagonetka je poznata i pod imenima *Brahmina kula* i *Lukasova kula*. Prema legendi, svet će se srušiti kada bude bio završen poslednji potez?! Nije poznato da li je Lukas bio nadahnut ovom legendom ili ju je on izmislio.

Ako su sveštenici bili u stanju da pomeraju diskove u sekundi trebalo bi im  $2^{64} - 1$  sekundi što je oko 585 milijardi godina.

Postoje mnoge varijacije na ovu legendu. Na primer, u nekim kazivanjima hram je manastir, a sveštenici su monasi ili da je toranj nastao na početku sveta i da se vrši jedan potez dnevno.

# 3 Rešenje

Zagonetka se može igrati sa bilo kojim brojem diskova. Minimalan broj poteza potrebnih da se reši ovaj problem je  $2^n - 1$ .

### 3.1 Iterativno rešavanje

Neka su A, B i C štapovi na kojima stoje diskovi gde se na štapu A nalaze diskovi na početku, a na štap C ih je potrebno prebaciti. U zavisnosti od toga da li je broj diskova paran ili neparan, razlikuju se sledeća dva algoritma.

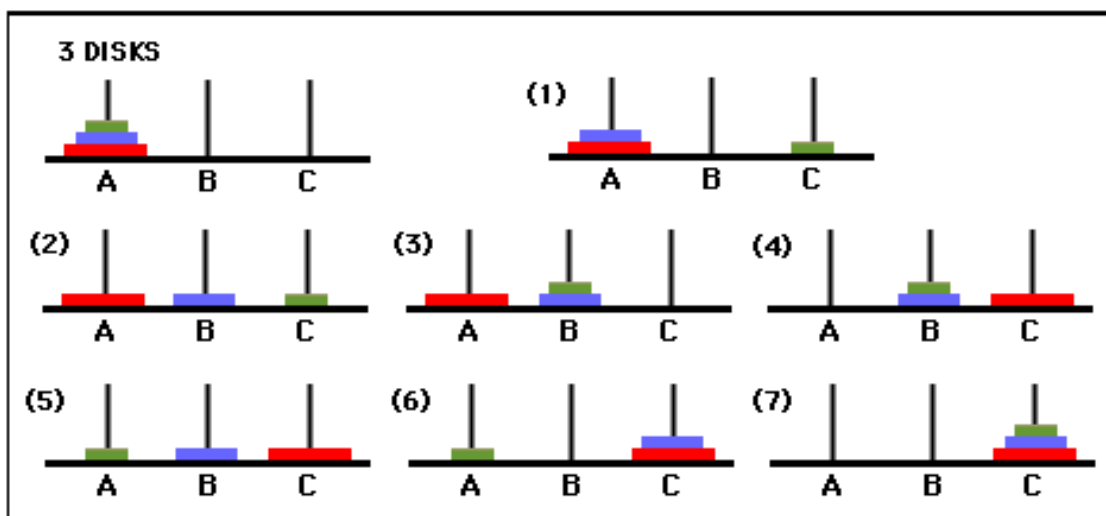
Za paran broj diskova:

- Napravi ispravan potez između rupa A i B
- Napravi ispravan potez između rupa A i C
- Napravi ispravan potez između rupa B i C

Za neparan broj diskova:

- Napravi ispravan potez između rupa A i C
- Napravi ispravan potez između rupa A i B
- Napravi ispravan potez između rupa C i B

Ova dva algoritma se ponavljaju dok se ne prebace svi diskovi. U svakom je napravljen ukupno  $2^n - 1$  potez gde je  $n$  broj diskova.



Slika 1: Prikaz rešenja za tri diska

Ispod se nalazi primer koda iz simulacije radene u Processingu, kucan u programskom jeziku Java.

```
void towerOfHanoiIt () {  
    if (i%3 == 1) {  
        swap(A, n%2 == 0 ? B : C);  
    } else if (i%3 == 2) {  
        swap(A, n%2 == 0 ? C : B);  
    } else {  
        swap(B, C);  
    }  
}
```

### 3.2 Rekurzivno rešavanje

Ključ za rešavanje ovog problema je da se uoči da se problem može rešiti razbijanjem na manje probleme i dalje razbijanjem tih problema na još sitnije probleme sve dok se ne stigne do rešenja.

Neka su štapovi obeleženi sa A, B i C kao u iterativnom primeru. Neka je  $n$  ukupan broj diskova.

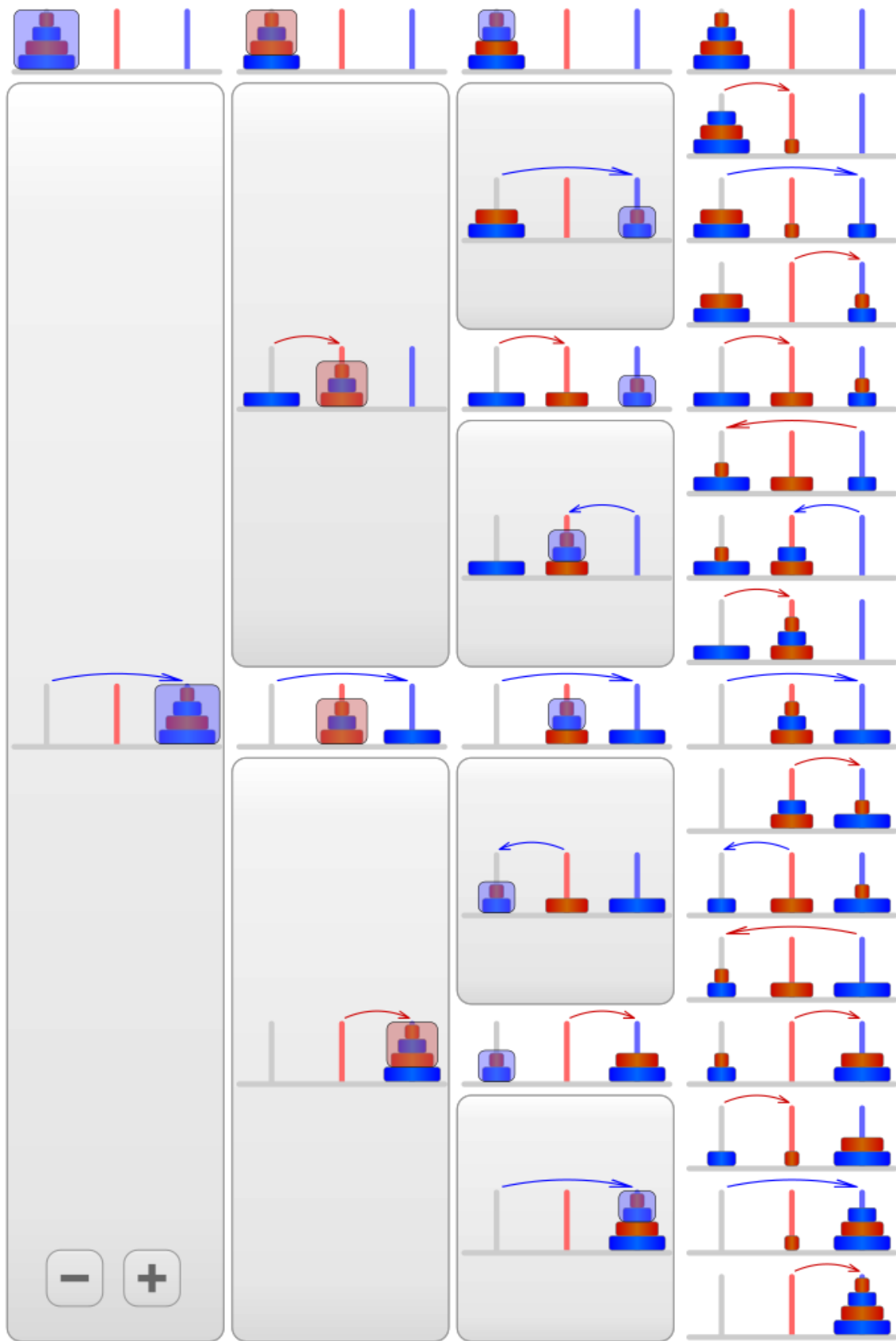
Rekurzivni algoritam za premeštanje  $n$  diskova sa A na C:

1. Premesti  $n - 1$  disk sa A na B
2. premesti  $n$  sa A na C
3. Premesti  $n - 1$  disk sa B na C

Ovo je rekurzivni algoritam što znači da se isti algoritam ponovo sprovodi i u koracima 1 i 3 samo za manji broj diskova.

Primer koda za rekurzivno rešavanje problema u jeziku Java:

```
void towerOfHanoi(int n, ArrayList<Integer> from, ArrayList<Integer> to)
{
    if (n == 1)
    {
        swap(from, to);
        return;
    }
    towerOfHanoi(n-1, from, to, to);
    swap(from, to);
    towerOfHanoi(n-1, to, from, from);
}
```



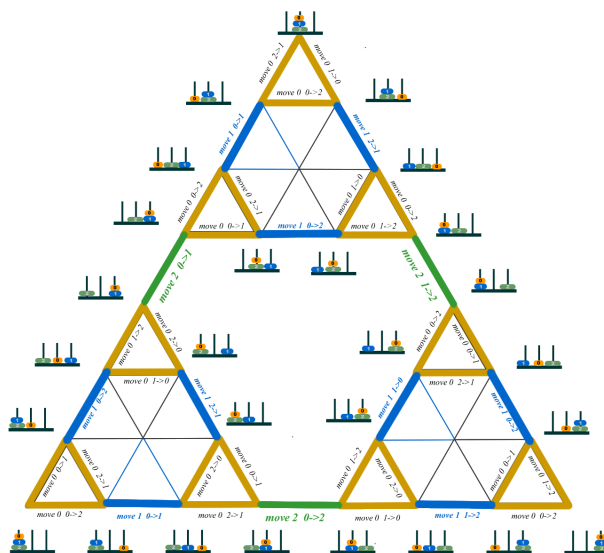
Slika 2: Prikaz rekurzivnog rešenja za četiri diska

### 3.3 Binarno rešavanje

Problem Hanojske kule može se rešiti i korišćenjem binarnih cifara na sledeći način. Za  $n$  diskova potreban nam je binarni broj od  $n$  cifara. Bit najmanje težine predstavlja najmanji disk i tako redom do bita najveće težine koji predstavlja najveći disk. Pri svakom inkrementiranju binarne predstave za jedan određena 0 se pretvara u 1 što označava pomeranje diska kojem je dodeljena ta težinska cifra koja se promenila u tom potezu.

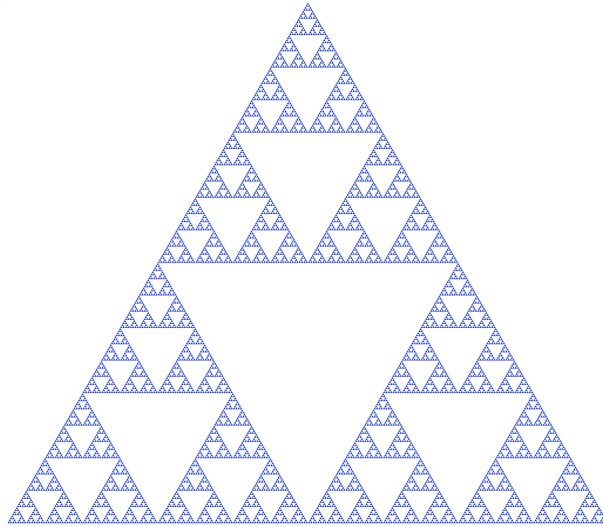
## 4 Grafički prikaz

Rešavanje problema može biti prikazano i preko grafova gde čvorovi predstavljaju stanja u kojima se diskovi nalaze u određenom trenutku, a linije poteze. Dva čvora su susedna ako je samo jedan potez izvršen između njih. Za slučaj sa dva diska formira se sledeći graf:



Čvorovi na temenima najvećeg trougla predstavljaju stanja gde se svi diskovi nalaze na jednom štapu.

Graf za  $n + 1$  diskova se dobija uzimanjem tri primerka grafa za  $n$  diskova. Svaki od njih predstavlja položaje i poteze manjih diskova za jednu određenu poziciju novog najvećeg diska. Spajanje ta tri grafa na odgovarajućim uglovima predstavlja graf za  $n + 1$  broj diskova. Dodavanjem broja diskova uočava se pravilnost tj. fraktal, trougao Sjerpinjskog.



Slika 3: Trougao Sjerpinjskog

## 5 Primena

Hanojska kula se često koristi u psihološkim istraživanjima za rešavanje problema. Takođe postoji varijanta ovog problema pod nazivom *Kula Londona* za neuropsihološku dijagnostiku i lečenje izvršnih funkcija. Koristi se kao test za procenu deficita frontalnog režnja koji između ostalog služi za procenu posledica određenog postupka.

Popularna je pri učenju rekursivnih algoritama u programiranju.

Naučnici su 2010. godine objavili rezultate eksperimenta gde Argentinski mrav uspešno mogao da reši verziju sa tri diska Hanojske kulekroz nelinearnu dinamiku ili signala feromona.

## Literatura

Sniedovich, Moshe (2010). *Dynamic Programming: Foundations and Principles*. ISBN 978-0-8247-4099-3.

Petković, Miodrag (2009). *Famous Puzzles of Great Mathematicians*. AMS Bookstore. str. 197. ISBN 978-0-8218-4814-2.

Spitznagel, Edward L. (1971). *Selected topics in mathematics*. Holt, Rinehart and Winston. str. 137. ISBN 978-0-03-084693-9.

Hofstadter, Douglas R. (1985). *Metamagical Themes : Questing for the Essence of Mind and Pattern*. New York: Basic Books. ISBN 978-0-465-04540-2