Approccio matriciale alla teoria di portafoglio

Affrontare la teoria di portafoglio utilizzando l'algebra matriciale permette di semplificare sia la rappresentazione delle formule sia i calcoli. Inoltre, l'impostazione matriciale agevola la trasposizione del lavoro su alcuni supporti informatici, come il linguaggio di programmazione R, Matlab e il software Microsoft Excel, al fine di applicazioni nel concreto.
In questo capitolo si riassumeranno sinteticamente i concetti principali della teoria di portafoglio avvalendoci dell'approccio matriciale.

0.1 Cenni preliminari

Si considerino n strumenti finanziari, ciascuno con rendimento R_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$. I rendimenti possono essere raggruppati in una matrice $(n \times 1)$:[1]

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

Si supponga che valga il modello del rendimento atteso (CER model):[2]

$$R_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$$

I rendimenti R_i sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di probabilità normale. $\mathbf{R}$ è un vettore aleatorio con distribuzione di probabilità data dall'unione delle distribuzioni dei diversi R_i. Quindi, il vettore dei rendimenti $\mathbf{R}$ è distribuito come una normale

[1] Una matrice $n \times 1$ è un vettore

[2] Per una breve descrizione del modello si rimanda all'Appendice A

multivariata con media $E[\mathbf{R}]$ e matrice di varianza-covarianza $var(\mathbf{R})$

$$E[\mathbf{R}] = E\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ E[R_3] \\ \vdots \\ E[R_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

$$var(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} var(R_1) & cov(R_1,R_2) & cov(R_1,R_3) & \dots & cov(R_1,R_n) \\ cov(R_2,R_1) & var(R_2) & cov(R_2,R_3) & \dots & cov(R_2,R_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(R_n,R_1) & cov(R_n,R_2) & cov(R_n,R_3) & \dots & var(R_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}$$

$$sd(\mathbf{R}) = \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$$

Si può notare che la matrice $\mathbf{\Sigma}$ è simmetrica.[3] Vale dunque l'uguaglianza $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma^T}$, dove $\mathbf{\Sigma^T}$ indica la trasposta di $\mathbf{\Sigma}$.
Solitamente i rendimenti futuri vengono stimati con metodi statistici in base ai rendimenti storici, oppure possono essere ipotizzati da analisti specializzati. Proprio per questo R_1, R_2, R_3, ..., R_n non sono deterministici ma sono variabili aleatorie, in quanto il valore che assumeranno in futuro è incerto. Ne consegue che il loro valore futuro potrebbe essere diverso da quello ipotizzato. Una misura dell'incertezza insita nei rendimenti è rappresentata dalla varianza, che esprime quindi una misura del rischio di un investimento. Più elevato è il valore della varianza più rischioso si considera l'investimento nello strumento finanziario.

0.2 La composizione di un portafoglio

Un portafoglio è un insieme di beni di qualsiasi tipo, sia mobili che immobili. Costruire un portafoglio significa scegliere la tipologia di attività nelle quali investire e scegliere l'ammontare di ricchezza da investire in ogni attività.
Disponendo di una ricchezza W e volendo investirla in un portafoglio costituito da n strumenti finanziari, x_i rappresenterà la quota parte di capitale investita nel titolo i. $x_i > 0$ indica una posizione lunga sul titolo i, mentre

[3] Si ricorda che $cov(x,y) = cov(y,x)$

$x_i < 0$ una posizione corta. Rappresentando $\mathbf{x}$ come vettore:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x^T} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{x^T 1} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$$

Il rendimento di un portafoglio composto da n titoli è la combinazione lineare degli stessi

$$R_p = \mathbf{x^T R} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 + ... + x_n R_n$$

R_p può essere interpretato anche come media pesata dei rendimenti R_1, R_2, R_3, ..., R_n, considerando $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ come pesi.[4]Il rendimento di portafoglio R_p ha distribuzione di probabilità normale, $R_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$. Definiamo il valore atteso, la varianza e la deviazione standard di R_p come

$$\mu_p = E[\mathbf{x^T R}] = \mathbf{x^T} E[\mathbf{R}] = \mathbf{x^T} \boldsymbol{\mu} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 + ... + x_n\mu_n \tag{1}$$

$$\sigma_p^2 = var(\mathbf{x^T R}) = \mathbf{x^T \Sigma x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + \dots + x_n^2\sigma_n^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_1x_4\sigma_{14} + \dots + 2x_1x_n\sigma_{1n} + \dots \tag{2}$$

$$\sigma_p = (\mathbf{x^T \Sigma x})^{\frac{1}{2}}$$

[4]Per questa ragione, nel corso della trattazione, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ verranno chiamati pesi.

0.3 L'insieme delle opportunità d'investimento

È possibile rappresentare le equazioni (1.1) e (1.2), valente il vincolo $\mathbf{x^T}1 = 1$, in un piano cartesiano avente la deviazione standard di portafoglio σ_p sull'asse delle ascisse e il rendimento atteso di portafoglio μ_p sull'asse delle ordinate.[5]Le equazioni formano un insieme di punti, chiamato *investment opportunity set*, che rappresenta l'insieme di tutti i portafogli aventi rendimento atteso μ_p, varianza σ_p^2 e somma dei pesi uguale a 1, $\mathbf{x^T 1} = 1$.

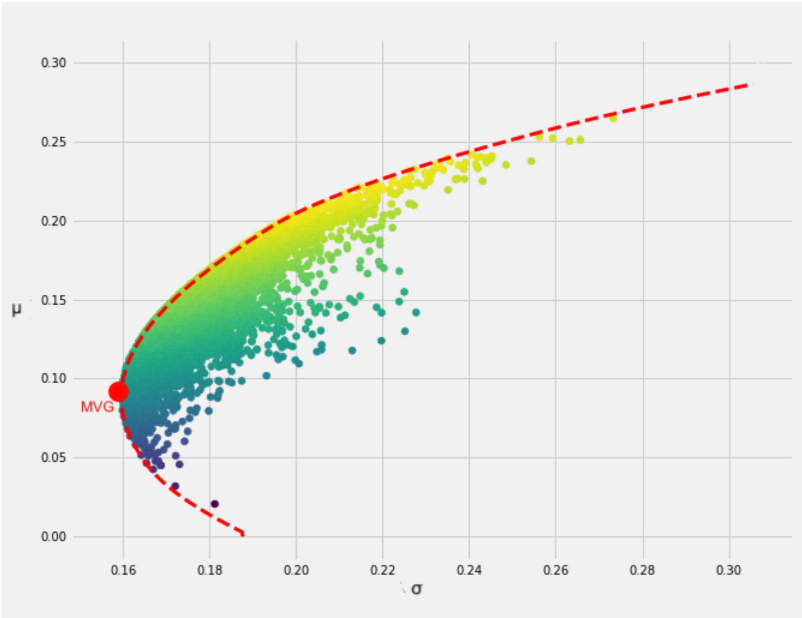

Figura 1: Investment opportunity set e frontiera efficiente. Fonte: Fàbio Neves, Plotting Markowitz Efficient Frontier with Python

Ogni punto dell'opportunity set rappresenta un portafoglio, il quale è univocamente determinato da un vettore di pesi $\mathbf{x^T} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
La forma dell'opportunity set varia a seconda del numero di titoli presenti in portafoglio: nel caso di due strumenti finanziari ha forma di un ramo di iperbole, mentre nel caso di tre o più strumenti finanziari la forma è complicata e dipende fortemente dalla covarianza σ_{ij}.
La *frontiera efficiente*, tratteggiata in rosso nella figura 1.1, è rappresentata dal guscio convesso dell'opportunity set, e precisamente è la parte a destra del punto MVG. Il punto MVG è il punto di minima varianza globale e rappresenta, all'interno dei portafogli efficienti, quello con volatilità più bassa. I punti della frontiera efficiente sono chiamati *portafogli efficienti* e rappresentano quei portafogli, tra tutti quelli possibili, aventi rendimento massimo

[5]Viene usata la deviazione standard anzichè la varianza perchè la prima ha la stessa unità di misura del rendimento.

dato un fissato livello di rischio. Ne consegue che i portafogli inefficienti sono tutti quei portafogli dell'opportunity set per i quali è possibile trovare uno o più portafogli aventi stessa varianza (o deviazione standard) ma rendimento atteso maggiore.

0.4 La ricerca del portafoglio di minima varianza

Tra tutti i portafogli presenti nell'opportunity set, il portafoglio avente varianza minima è chiamato portafoglio di minima varianza globale (MVG) ed è individuato dal vettore di pesi $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n)^T$ di dimensione $(n \times 1)$. Trovare il vettore $\mathbf{m}$ significa risolvere il problema di ottimizzazione

$$\begin{cases} min\sigma^2_{p,m} = m_1^2\sigma_1^2 + m_2^2\sigma_2^2 + m_3^2\sigma_3^2 + \ldots + m_n^2\sigma_n^2 + 2m_1m_2\sigma_{12} + \ldots + 2m_1m_n\sigma_{1n} + \ldots \\ m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = 1 \end{cases}$$

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange offre una possibilità di risoluzione del sistema. Aggiungendo una variabile ausiliaria λ, chiamata moltiplicatore di Lagrange, il problema di ottimizzazione in n variabili è trasformato in un problema in $n + 1$ variabili.
Per prima cosa si pone l'equazione del vincolo in forma omogenea

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n - 1 = 0 \tag{3}$$

Successivamente si costruisce la funzione lagrangiana aggiungendo alla varianza di portafoglio, σ_p^2, l'equazione (1.3) moltiplicata per il moltiplicatore di Lagrange λ.

$$\begin{aligned} L(m_1, m_2, m_3, ..., m_n, \lambda) = {} & m_1^2\sigma_1^2 + m_2^2\sigma_2^2 + m_3^2\sigma_3^2 + \ldots + m_n^2\sigma_n^2 + 2m_1m_2\sigma_{12} + \ldots \\ & + 2m_1m_n\sigma_{1n} + \ldots + \lambda(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n - 1) \end{aligned}$$

Occorre a questo punto trovare il minimo della funzione L rispetto a $\mathbf{m}$ e λ. Per L, la prima condizione per un punto di minimo è:[6]

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial m_1} = 2m_1\sigma_1^2 + 2m_2\sigma_{12} + 2m_3\sigma_{13} + \ldots + 2m_n\sigma_{1n} + \ldots + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial m_2} = 2m_2\sigma_2^2 + 2m_1\sigma_{12} + 2m_3\sigma_{23} + \ldots + 2m_n\sigma_{2n} + \ldots + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial m_3} = 2m_3\sigma_3^2 + 2m_1\sigma_{13} + 2m_2\sigma_{23} + \ldots + 2m_n\sigma_{3n} + \ldots + \lambda \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial m_n} = 2m_n\sigma_n^2 + 2m_1\sigma_{1n} + 2m_2\sigma_{2n} + \ldots + 2m_{n-1}\sigma_{n-1,n} + \ldots + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n - 1 \end{cases} \tag{4}$$

[6] Ricordiamo le condizioni per cui un punto x è di minimo per una funzione $f(x)$. Occorre che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- condizione di primo ordine: $\frac{d}{dx}f = 0$
- condizione di secondo ordine: $\frac{d^2}{dx}f > 0$. Se $f(x) > 0$ risulta verificata

Risolvendo il sistema è possibile trovare le $n+1$ variabili cercate.
Al fine di agevolare i calcoli, quanto detto finora può essere espresso in forma matriciale

$$\begin{cases} min\sigma^2_{p,m} = \mathbf{m^T}\Sigma\mathbf{m} \\ \mathbf{m^T 1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2m_1\sigma_1^2 & 2m_2\sigma_{12} & 2m_3\sigma_{13} & \dots & 2m_n\sigma_{1n} & \dots & 1 \\ 2m_2\sigma_2^2 & 2m_1\sigma_{12} & 2m_3\sigma_{23} & \dots & 2m_n\sigma_{2n} & \dots & 1 \\ 2m_3\sigma_3^2 & 2m_1\sigma_{13} & 2m_2\sigma_{23} & \dots & 2m_n\sigma_{3n} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2m_n\sigma_n^2 & 2m_1\sigma_{1n} & 2m_2\sigma_{2n} & \dots & 2m_{n-1}\sigma_{n-1,n} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_n \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

oppure, in forma abbreviata

$$\begin{pmatrix} 2\mathbf{\Sigma} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1^T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Il seguente sistema può essere riscritto nella forma

$$\mathbf{A}_m\mathbf{z}_m = \mathbf{b} \qquad \mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} 2\mathbf{\Sigma} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1^T} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{b}$$

I primi n elementi di $\mathbf{z}$ corrispondono al vettore $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, \dots, m_n)^T$, i cui elementi sono i pesi del portafoglio di minima varianza avente rendimento atteso $\mu_{p,m} = \mathbf{m^T}\boldsymbol{\mu}$ e varianza $\sigma^2_{p,m} = \mathbf{m^T\Sigma m}$.
È possibile presentare la risoluzione del portafoglio di minima varianza anche in una forma alternativa.
La condizione di minima varianza può essere espressa come

$$\underset{(n\times1)}{\mathbf{0}} = \frac{\partial L(\mathbf{m}, \lambda)}{\partial \mathbf{m}} = 2 \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{m} + \lambda \cdot \mathbf{1} \tag{7}$$

$$0 = \frac{\partial L(\mathbf{m}, \lambda)}{\partial \lambda} = \mathbf{m^T 1} - 1 \tag{8}$$

Isolando $\mathbf{m}$ nell'equazione (1.7)

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2} \cdot \lambda \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} \tag{9}$$

Successivamente, moltiplicando entrambi i lati per $\mathbf{1^T}$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{1^T} = -\frac{1}{2} \cdot \lambda \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1^T}$$

dall'equazione (1.8):[7]

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{1^T} = 1$$

isolando quindi λ

$$\lambda = -2 \cdot \frac{1}{\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1^T}}$$

Sostituendo infine λ nell'equazione (1.9)

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2}(-2)\frac{1}{\mathbf{1^T} \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}}\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} = \frac{\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1^T} \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}}$$

0.5 La ricerca del portafoglio ottimo

Il concetto di portafoglio ottimo non è assoluto ma relativo e dipende alle preferenze dell'investitore. In altri termini, cercare il portafoglio efficiente non significa trovare il portafoglio migliore tra tutti quelli presenti nell'opportunity set, ma significa trovare un portafoglio, cioè un vettore $\mathbf{x^T} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, avente μ_p e σ_p in linea con le preferenze dell'investitore. Un investitore avverso al rischio sceglierà un portafoglio con un basso valore di σ_p^2. Al contrario, un investitore incline al rischio sceglierà un portafoglio con σ_p^2 più elevata, tanto più elevata quanto maggiore è la sua inclinazione al rischio.

Secondo Harry Markowitz, il padre della Teoria di Portafoglio e vincitore del Premio Nobel per l'economia nel 1990, l'investitore è interessato a quei portafogli che gli garantiscono il migliore tradeoff tra rischio e rendimento. È possibile modellare il comportamento di un investitore nei seguenti due modi:

- massimizzare il rendimento atteso μ_p dato un livello di rischio $\sigma_p^2 = k$

$$\begin{cases} max\mu_p = \mathbf{x^T}\boldsymbol{\mu} \\ \sigma_p^2 = \mathbf{x^T\Sigma x} = k \\ \mathbf{x^T 1} = 1 \end{cases} \tag{10}$$

- minimizzare il livello di rischio σ_p fissato il rendimento atteso $\mu_p = k$

$$\begin{cases} min\sigma_p^2 = \mathbf{x^T\Sigma x} \\ \mu_p = \mathbf{x^T}\boldsymbol{\mu} = k \\ \mathbf{x^T 1} = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Per risolvere il problema di ottimizzazione (1.11) è possibile utilizzare una Lagrangiana, così come mostrato nel paragrafo 1.4

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{x^T\Sigma x} + \lambda_1(\mathbf{x^T}\boldsymbol{\mu} - k) + \lambda_2(\mathbf{x^T 1} - 1)$$

[7] Si ricorda che $\mathbf{m^T} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1^T} \cdot \mathbf{m}$

Per trovare il minimo di σ_p^2 occorre che sia soddisfatta la prima condizione:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x} = 2\mathbf{\Sigma x} + \lambda_1 \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \mathbf{1} = 0 \\ \frac{\partial L(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \mathbf{x^T}\mu - k = 0 \\ \frac{\partial L(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \mathbf{x^T 1} - 1 \end{cases} \tag{12}$$

Il sistema (1.12) consiste in n+2 equazioni in n+2 incognite $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2)$. Rappresentando il sistema in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 2\mathbf{\Sigma} & \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu^T} & 0 & 0 \\ \mathbf{1^T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{\Sigma} & \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu^T} & 0 & 0 \\ \mathbf{1^T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Az} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A^{-1}b}$$

Le prime n soluzioni del vettore $\mathbf{z}$, cioè $\mathbf{x^T} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, rappresentano i pesi del portafoglio avente rendimento $\mu_p = k$ e varianza minima tra tutte quelle possibili.
Alternativamente, la prima equazione del sistema (1.12) può essere riscritta come

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\lambda_1 \mathbf{\Sigma^{-1}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\lambda_2 \mathbf{\Sigma^{-1} 1} = -\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma^{-1}M}\boldsymbol{\lambda} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Moltiplicando entrambi i termine di questa equazione per $\boldsymbol{\mu^T}$

$$\boldsymbol{\mu^T}\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\lambda_1 \boldsymbol{\mu^T}\mathbf{\Sigma^{-1}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\lambda_2 \boldsymbol{\mu^T}\mathbf{\Sigma^{-1} 1}$$

ma ricordando la seconda equazione del sistema (1.11)

$$\boldsymbol{\mu^T}\mathbf{x} = \mathbf{x^T}\boldsymbol{\mu} = k$$

$$\boldsymbol{\mu^T}\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\lambda_1 \boldsymbol{\mu^T}\mathbf{\Sigma^{-1}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\lambda_2 \boldsymbol{\mu^T}\mathbf{\Sigma^{-1} 1} = k \tag{14}$$

Moltiplicando l'equazione (1.13) per $\mathbf{1^T}$ e ricordando la terza equazione del sistema (1.11)

$$\mathbf{x^T 1} = \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\lambda_1 \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{\Sigma^{-1}}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\lambda_2 \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{\Sigma^{-1} 1} = 1 \tag{15}$$

Riscrivendo le equazioni (1.14) e (1.15) in forma matriciale

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\\ \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\\ \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\end{pmatrix} = \mathbf{M}^\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{B} \qquad \begin{pmatrix}k\\ 1\end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$$

Ne consegue che

$$\lambda = -2\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}\cdot -2\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} \tag{16}$$

0.6 Il Teorema della separazione di Tobin e i portafogli contenenti strumenti finanziari non rischiosi

In presenza di attività prive di rischio,[8] secondo la teoria del portafoglio di Markowitz, l'investitore deve scegliere se investire in un portafoglio composto da attività rischiose o da attività prive di rischio. In *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, James Tobin enuncia il cosiddetto *teorema della separazione*. Secondo il teorema appena menzionato l'investitore ha la possibilità di investire in un portafoglio composto da attività rischiose e da attività non rischiose. Il rendimento atteso e la varianza di un tale portafoglio sarà

$$\mu_{p*} = r_f + x_t(\mu_{p,t} - r_f)$$

$$\sigma_{p*} = x_t\sigma_{p,t}$$

x_t rappresenta la quantità di ricchezza W investita nel portafoglio rischioso e $(1 - x_t)$ la quantità investita nell'attività priva di rischio.[9] r_f indica il rendimento dell'asset privo di rischio. $\mu_{p,t} = \mathbf{t}^\mathbf{T}\boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_{p,t} = (\mathbf{t}^\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t})^{1/2}$ sono il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio tangente.
Il portafoglio tangente è caratterizzato da una n-upla di pesi $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$, come fare per trovare $\mathbf{t}$?

$$\begin{cases} max\ \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{t}^\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} - r_f}{(\mathbf{t}^\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t})^{\frac{1}{2}}} \\ \mathbf{t}^\mathbf{T}\mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

[8]Un esempio di strumenti finanziarii privi di rischio potrebbero essere le obbligazioni emesse dagli Stati, c.d. titoli di Stato. Tuttavia anch'esse sono rischiose; infatti, lo Stato potrebbe consolidare il suo debito a scadenza e non onorare gli obblighi derivanti dal titolo emesso.

[9]Invece di investire in una sola attività priva di rischio, l'investitore può acquistare un portafoglio di attività prive di rischio.

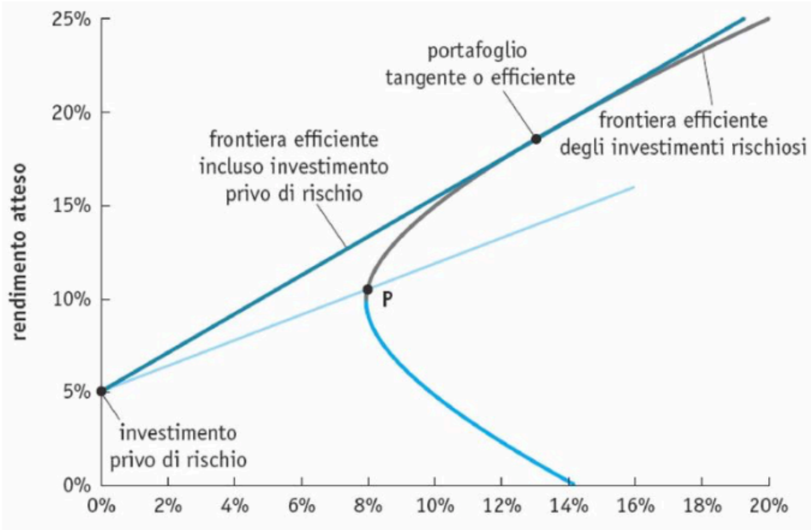

Figura 2: Frontiera efficiente in presenza di un titolo privo di rischio. Fonte: Berk, DeMarzo, Finanza Aziendale 1

La regione dei portafogli ammissibili è composta dalla semiretta avente origine nell'intercetta r_f e passante per il punto di tangenza con la frontiera efficiente. A seconda della combinazione di x_t e $(1 - x_t)$ si potrà costruire un portafoglio con diverse caratteristiche di rischio e rendimento. Un investitore meno propenso al rischio sceglierà un portafoglio vicino al punto $(0, r_f)$. Al contrario, un investitore più propenso al rischio sceglierà un portafoglio vicino al punto $(\sigma_{p,t}; \mu_{p,t})$. Nel caso un investitore possa tollerare un rischio elevato, può valutare la possibilità di prendere a prestito una somma di denaro al tasso privo di rischio r_f ed investirla interamente, in aggiunta alla ricchezza che dispone, nel portafoglio rischioso. L'insieme dei portafogli così caratterizzati sono costituiti dai punti sulla retta tangente a destra del portafoglio tangente, cioè del punto $(\sigma_{p,t}; \mu_{p,t})$.

Costruzione e analisi di portafoglio con il linguaggio R

L'obbiettivo di questo capitolo è costruire un portafoglio utilizzando il linguaggio R, al fine di dimostrare l'utilità dell'approccio matriciale per la trasposizione delle formule e dei calcoli su questo supporto informatico.
Per semplicità, consideriamo quattro titoli: freni Brembo Spa (BRBI), Fiat Chrysler Automobiles NV (FCHA), ENI Spa (ENI) e Leonardo SpA (LDOF). L'orizzonte temporale di riferimento è dal 6 gennaio 2005 al 6 gennaio 2020. I prezzi dei titoli sono elencati nell'Appendice B. Da essi, utilizzando R, si ricavano i valori μ_i, σ_i, $\mathbf{\Sigma}$.[10]

```
> #Caricamento file con dati da analizzare
> dati_portafoglio <- read.csv('Dati.csv', header=TRUE, sep=';')

> #Calcolo rendimenti logaritmici
> log_dati=log(dati_portafoglio)
> log_dati1=log_dati[-1,]
> log_dati2=log_dati[-180,]
> logdiff=log_dati1 - log_dati2

> #Calcolo vettore contenente i rendimenti medi dei titoli
> rendimento_titoli=colMeans(logdiff)
> rendimento_titoli
        BRBI         FCHC          ENI         LDOF
-0.003332516 -0.011543455  0.001865848  0.001244712

> #Calcolo matrice di covarianza
> matrice_covarianza=cov(logdiff)
> matrice_covarianza
            BRBI        FCHC         ENI        LDOF
BRBI 0.021549912 0.005375686 0.001934635 0.003915123
FCHC 0.005375686 0.015136819 0.002131519 0.005649234
ENI  0.001934635 0.002131519 0.003185649 0.002430350
```

[10] $\mu_{i,t} = ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$

```
LDOF 0.003915123 0.005649234 0.002430350 0.011449965

> #Calcolo vettore contenente le varianze dei titoli
> varianze_titoli=diag(matrice_covarianza)
> varianze_titoli
       BRBI        FCHC         ENI        LDOF
0.021549912 0.015136819 0.003185649 0.011449965

> #Calcolo vettore contenente la deviazione standard titoli
> devstd_titoli=sqrt(varianze_titoli)
> devstd_titoli
      BRBI       FCHC        ENI       LDOF
0.14679888 0.12303178 0.05644155 0.10700451
```

Riassumendo i risultati ottenuti

Titolo	*Nome*	μ_i	σ_i^2	σ_i
1	*BRBI*	−0.003332516	0.021549912	0.14679888
2	*FCHC*	−0.011543455	0.015136819	0.12303178
3	*ENI*	0.001865848	0.003185649	0.05644155
4	*LDOF*	0.001244712	0.011449965	0.10700451

$Coppia(i, j)$	σ_{ij}
$(1, 2)$	0.005375686
$(1, 3)$	0.001934635
$(2, 3)$	0.002131519
$(1, 4)$	0.003915123
$(2, 4)$	0.005649234
$(3, 4)$	0.002430350

Volendo approfondire la correlazione tra titoli

```
> #Calcolo matrice di correlazione
> matrice_correlazione=cor(logdiff)
> matrice_correlazione
          BRBI      FCHC       ENI      LDOF
BRBI 1.0000000 0.2976417 0.2334949 0.2492416
FCHC 0.2976417 1.0000000 0.3069537 0.4291115
ENI  0.2334949 0.3069537 1.0000000 0.4024090
LDOF 0.2492416 0.4291115 0.4024090 1.0000000
> library(eqs2lavaan)
> plotCov(matrice_correlazione)
```

L'immagine 2.1 rappresenta una mappa di calore. Il colore è tanto più tendente al rosso quanto più i titoli risultano positivamente correlati. Invece, il

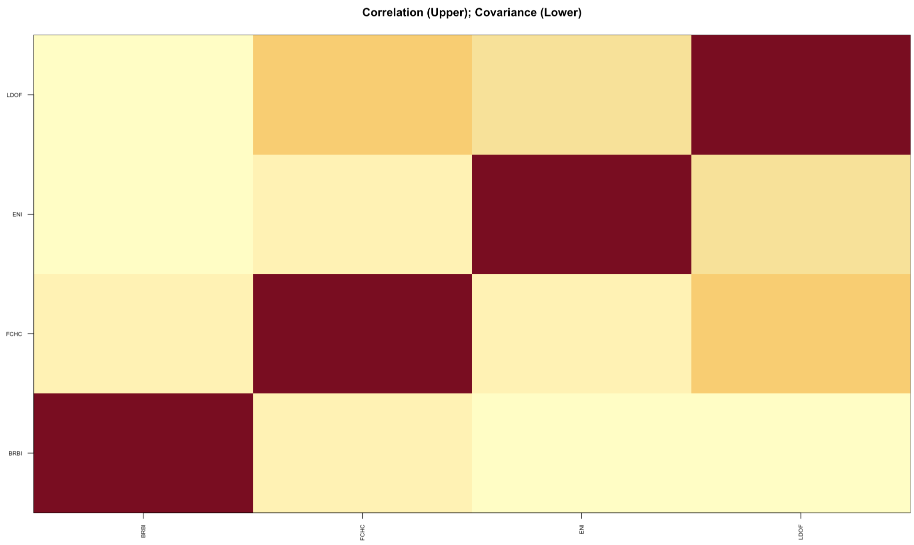

Figura 3: Mappa di calore inerente la correlazione tra titoli

colore tende al giallo/verde tanto più i titoli risultano negativamente correlati.
Volendo rappresentare i titoli nel piano μ, σ.

```
> plot(devstd_titoli,rendimento_titoli, ylab="rendimento", xlab="dev standard",
col="red", pch=19, cex=2)
> text(devstd_titoli,rendimento_titoli,labels = c("BRBI","FCHC","ENI","LDOF"),
cex=1.5, pos=1)
```

Per creare ed analizzare portafogli di titoli finanziari si utilizzeranno le funzioni presenti nello script *portfolio.R* di E. Zivot.[11]
Si crea un portafoglio equipesato con $\mathbf{x} = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$

```
> #Creo vettore di pesi
> pesi_portafoglio1=c(0.25,0.25,0.25,0.25)
> #Calcolo portafoglio equipesato
> portafoglio1=getPortfolio(er=rendimento_titoli,
cov.mat=matrice_covarianza,weights=pesi_portafoglio1)
> portafoglio1
Call:
getPortfolio(er = rendimento_titoli, cov.mat = matrice_covarianza,
    weights = pesi_portafoglio1)

Portfolio expected return:     -0.002941352
```

[11] Si allega in appendice C il codice dello script *portfolio.R*

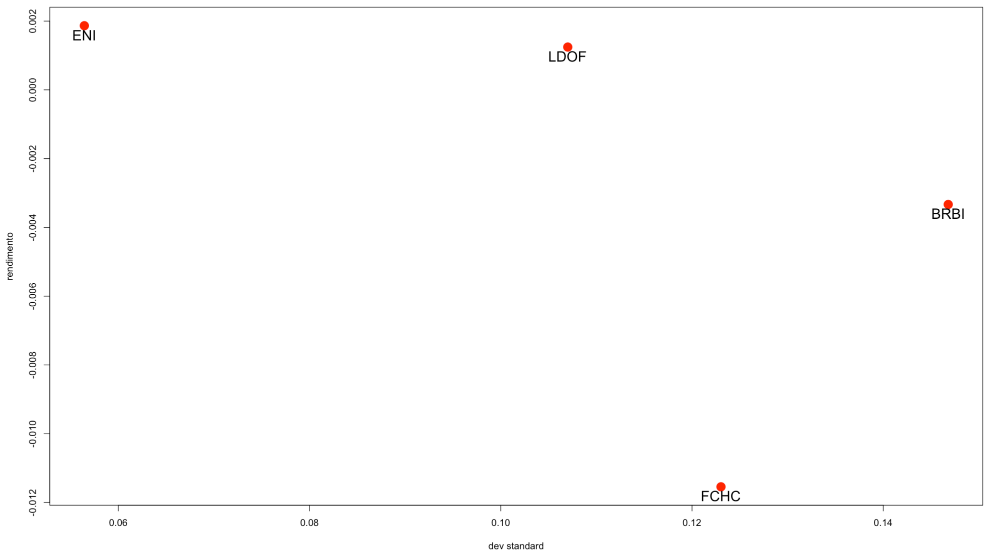

Figura 4: Rappresentazione dei titoli nel piano media - deviazione standard

```
Portfolio standard deviation:  0.07672819
Portfolio weights:
BRBI FCHC  ENI LDOF
0.25 0.25 0.25 0.25
```

Si può notare come il portafoglio equipesato abbia rendimento $\mu = -0.002941352$ e deviazione standard $\sigma = 0.07672819$.
Come visto nel paragrafo 1.4, il portafoglio di minima varianza globale (MVG) è caratterizzato dal sistema (1.5)

$$\begin{cases} min\,\sigma^2_{p,m} = \mathbf{m^T \Sigma m} \\ \mathbf{m^T 1} = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{\Sigma^{-1} \cdot 1}}{\mathbf{1^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1}}$$

Per trovare il portafoglio MVG occorre trovare **m**, cioè i pesi dei titoli. Ciò si può fare agevolmente utilizzando la funzione *globalMin.portfolio()* presente nello script *portfoglio.R* di E. Zivot [6].

```
> #Calcolo portafoglio di minima varianza globale
> portafoglio_mvg=globalMin.portfolio(rendimento_titoli,matrice_covarianza)
> portafoglio_mvg
Call:
globalMin.portfolio(er = rendimento_titoli, cov.mat = matrice_covarianza)
```

```
Portfolio expected return:     0.0009731705
Portfolio standard deviation:  0.05520179
Portfolio weights:
  BRBI   FCHC    ENI   LDOF
0.0439 0.0475 0.8644 0.0442
> plot(portafoglio_mvg)
```

Quindi, $\mu_{p,m} = 0.0009731705$ e $\sigma_{p,m} = 0.05520179$. Come mostrato nel grafico sottostante, $\mathbf{m} = (0.0439, 0.0475, 0.8644, 0.0442)^T$

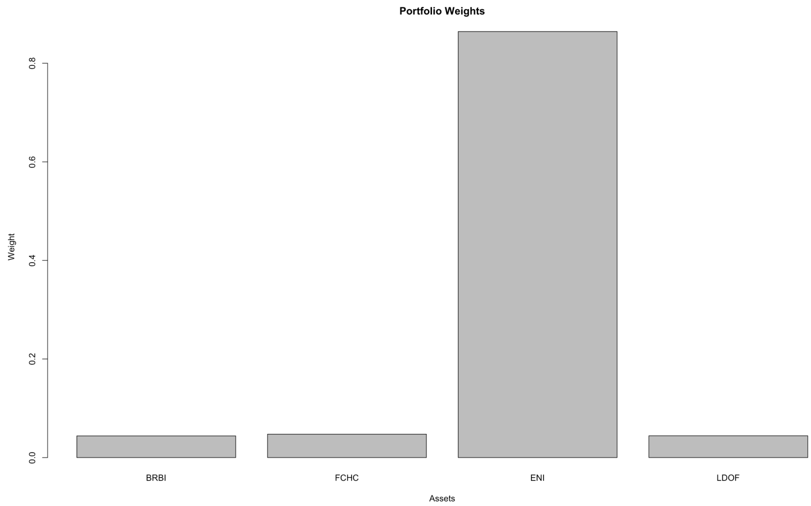

Figura 5: Pesi del portafoglio avente minima varianza globale

Per trovare un portafoglio efficiente fissato un rendimento $\mu_p = 0.001244712$, uguale al rendimento del titolo LDOF, occorre risolvere il sistema (1.11)

$$\begin{cases} min\,\sigma_p^2 = \mathbf{x^T \Sigma x} \\ \mu_p = \mathbf{x^T}\boldsymbol{\mu} = 0.001244712 \\ \mathbf{x^T 1} = 1 \end{cases} \tag{17}$$

dall'equazione (1.16)

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma^{-1} M B^{-1} u}$$

```
> #Fisso rendimento
> rendimento_fissato=rendimento_titoli[4]
> #Ricerca portafoglio efficiente avente il rendimento rendimento fissato
> portaf_eff_ldof=efficient.portfolio(rendimento_titoli,
matrice_covarianza,rendimento_fissato)
> portaf_eff_ldof
```

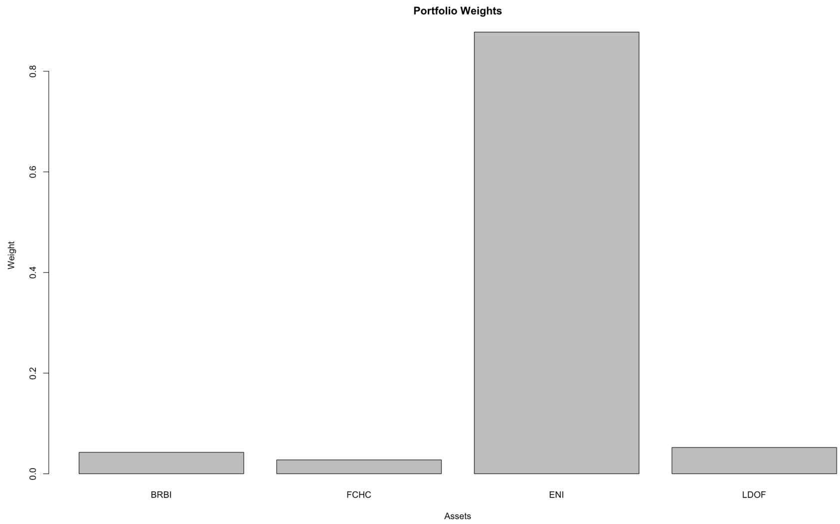

Figura 6: Pesi del portafoglio efficiente avente lo stesso rendimento del titolo LDOF

```
Call:
efficient.portfolio(er = rendimento_titoli, cov.mat = matrice_covarianza,
    target.return = target_return)

Portfolio expected return:     0.001244712
Portfolio standard deviation:  0.05524844
Portfolio weights:
  BRBI   FCHC    ENI   LDOF
0.0425 0.0274 0.8779 0.0522
```

Il portafoglio efficiente, avente rendimento $\mu_{p,m}$ = 0.001244712, ha deviazione standard $\sigma_{p,m}$ = 0.05524844 e pesi $\mathbf{x} = (0.0425, 0.0274, 0.8779, 0.0522)^T$, rappresentati nella figura 2.4. Per rappresentare la frontiera efficiente è sufficiente utilizzare la funzione *efficient.frontier()* di *portfolio.R* (6).

```
> #Creazione frontiera efficiente
> ef=efficient.frontier(rendimento_titoli,matrice_covarianza,
alpha.min=-10, alpha.max=5, nport=20)
> #Grafico frontiera efficiente
> plot(ef, plot.assets = T)
> points(devstd_titoli, rendimento_titoli, col='blue',pch=17, cex=1.5)
```

Nel paragrafo 1.6 è stata presentata la teoria di portafoglio in presenza di attività prive di rischio.
Supponiamo che sia disponibile un titolo privo di rischio, avente rendimento

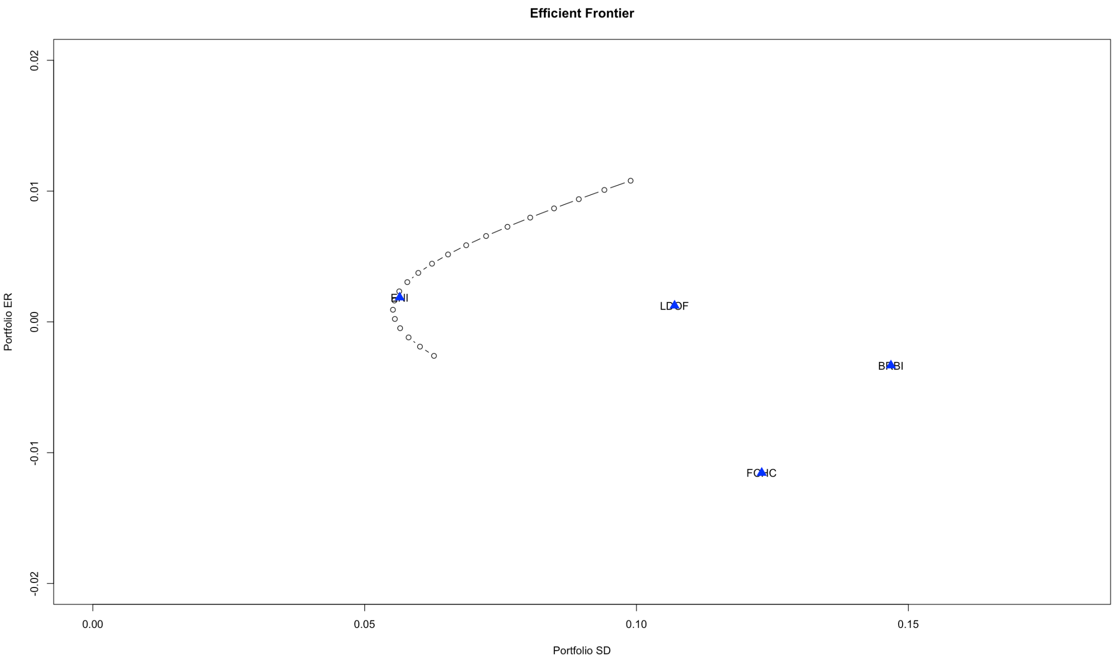

Figura 7: Rappresentazione della frontiera efficiente dei titoli: BRBI, LDOF, FCHC, ENI

$r_f = 0.0002$. Secondo il teorema di Tobin l'investitore ha la possibilità di investire in un portafoglio composto sia da attività rischiose sia da attività non rischiose. Il rendimento atteso e la deviazione standard di un tale portafoglio è

$$\mu_{p*} = 0.0002 + x_t(\mu_{p,t} - 0.0002)$$

$$\sigma_{p*} = x_t \sigma_{p,t}$$

Di conseguenza, l'investitore, a seconda della sua predisposizione al rischio, dividerà la sua ricchezza tra un portafoglio rischioso, formato dai quattro titoli disponibili, e il titolo privo di rischio. Il risultato sarà un nuovo portafoglio composto dalla combinazione dei due.
Un investitore avverso al rischio investirà la sua ricchezza principalmente nel titolo privo di rischio, quindi quest'ultimo avrà un peso predominante nel portafoglio. L'investitore propenso al rischio invece, sceglierà un portafoglio prossimo al portafoglio di tangenza. È possibile calcolare il portafoglio di tangenza si utilizza la funzione *tangency.portfolio()* [6].

```
> rendimento_riskfree=0.0002
> portafoglio_tangente=tangency.portfolio(rendimento_titoli,
matrice_covarianza,rendimento_riskfree)
> portafoglio_tangente
Call:
```

```
tangency.portfolio(er = rendimento_titoli, cov.mat = matrice_covarianza,
    risk.free = rendimento_riskfree)

Portfolio expected return:     0.05736943
Portfolio standard deviation:  0.4746762
Portfolio weights:
   BRBI    FCHC     ENI    LDOF
-0.2575 -4.1180  3.6765  1.6991
```

Qualora l'investitore sia totalmente avverso al rischio, si indebiterà al tasso $r_f = 0.0002$, al fine di avere una ricchezza maggiore, investendo poi la somma complessiva in un portafoglio rischioso.
La regione dei portafogli ammissibili è data dalla semiretta avente origine in (0.0002) e tangente alla frontiera efficiente, come mostrato dalla figura 1.2.
Volendo rappresentare graficamente quanto detto, contestualizzato al caso in esame:

```
> ef=efficient.frontier(rendimento_titoli,matrice_covarianza, alpha.min=-100,
alpha.max=5, nport=100)
> plot(ef, plot.assets = T)
> points(devstd_titoli, rendimento_titoli, col='blue',pch=17, cex=2)
> points(portafoglio_tangente$sd, portafoglio_tangente$er, col="red",
pch=19, cex=2)
> points(0,rendimento_riskfree, col="green", pch=18, cex=2)
> sr.tan = (portafoglio_tangente$er - rendimento_riskfree)/
portafoglio_tangente$sd
> abline(a=rendimento_riskfree, b=sr.tan)
```

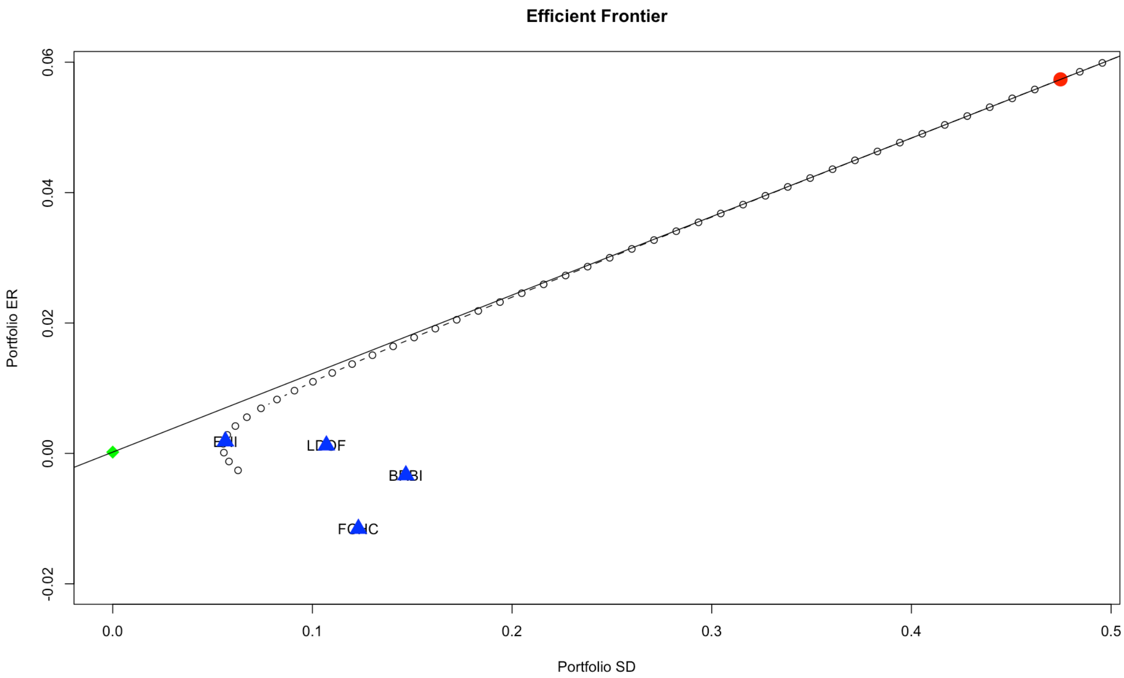

Figura 8: Rappresentazione della frontiera efficiente di un titolo risk free e dei titoli: BRBI, LDOF, FCHC, ENI