

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MILANO-BICOCCA

MODELLI PROBABILISTICI PER LE DECISIONI
PROGETTO FINALE

Filtro di Kalman

Autore:

Andrea Corvaglia - 802487 - a.corvaglia@campus.unimib.it

July 6, 2019



Abstract

Nel seguente elaborato viene trattato il filtro di Kalman, introducendo le basi teoriche ed approfondendo il ruolo dei vari parametri. Nella seconda parte è presentata una applicazione in python per il tracking in due dimensioni di un oggetto di cui viene simulato il moto con rumore sia nella misura sia nella velocità del sistema.

1 Introduzione

Da un punto di vista teorico, il filtro di Kalman è un algoritmo che permette un'inferenza esatta in un sistema lineare dinamico, che è un modello bayesiano simile a un modello di Markov nascosto, ma dove lo spazio degli stati delle variabili è continuo e dove le variabili nascoste e le variabili osservate hanno una distribuzione gaussiana (spesso multi variata).

1.1 Distribuzione di probabilità

La scelta più comune per estendere le tabelle di probabilità condizionata [1] (relative alle variabili discrete) alle variabili continue è l'uso di distribuzioni normali che associano un valore (continuo) alla variabile a partire dal valore, anch'esso continuo, dei genitori. Una distribuzione di questo tipo ha, infatti, diversi vantaggi e proprietà speciali. La distribuzione congiunta in una rete contenente solo variabili continue con distribuzione di probabilità gaussiana è una distribuzione gaussiana multi-variata.

Una distribuzione di probabilità normale con media μ e deviazione standard σ (e quindi varianza σ^2) è definita come:

$$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^2/\sigma^2 \right]$$

Dove x è una variabile continua.

Se la variabile x in oggetto è un vettore in n dimensioni, la sua pdf è una gaussiana multi-variata:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right]$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ è il vettore delle medie e $\boldsymbol{\Sigma}$ è la matrice delle covarianze.

La matrice delle covarianze, spesso indicata con σ , è una matrice contenente la covarianza tra gli elementi di un vettore di variabili casuali. Data $X = (X_1, \dots, X_n)^T$, le entrate della matrice delle covarianze sono come segue:

$$\Sigma_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)^T]$$

1.2 Filtro di Kalman

I modelli basati sul filtro di Kalman [2] si basano sull'assunzione che lo stato del sistema al tempo t si sia evoluto a partire dallo stato precedente al tempo $t - 1$ in accordo con l'equazione:

$$x_t = F_t x_{t-1} + B_t u_t + w_t$$

dove:

- x_t è il vettore di stato, contiene i termini di interesse per il sistema al tempo t (i.e. posizione, velocità ...).
- F_t è la matrice di transizione dello stato, applica l'effetto di ogni parametro del sistema al tempo $t - 1$ sul vettore di stato al tempo t (es. La posizione e la velocità al tempo $t - 1$ influenzano entrambi la posizione al tempo t).
- u_t è il vettore che contiene gli input di controllo, ovvero le azioni applicate al sistema.
- B_t è la matrice degli input di controllo e applica l'effetto di ogni parametro del vettore degli input di controllo al vettore di stato.
- w_t è il vettore contenente il rumore del processo associato ad ogni parametro nel vettore di stato. Si suppone che il rumore del processo provenga da una distribuzione di probabilità gaussiana multi-variata con covarianza data dalla matrice delle varianze e covarianze Q_t .
- Nessun tipo di input di controllo, quindi vettore di input nullo

Si possono anche prendere delle misure del sistema, in accordo col modello:

$$z_t = H_t x_t + v_t$$

dove:

- z_t è il vettore delle misure, contenente la misura per ogni termine del vettore di stato.
- H_t è la matrice di trasformazione, che mappa gli elementi dallo spazio degli stati al dominio delle misure.
- v_t è il vettore che contiene il rumore di misura per ogni osservazione nel vettore delle misure.

Come il rumore del processo, il rumore di misura si suppone essere descritto da una densità di probabilità normale con media nulla e covarianza data dalla matrice R_t .

Lo stato reale del sistema x_t non può essere direttamente osservato e il filtro di Kalman fornisce un algoritmo per determinare una stima \hat{x}_t , combinando la conoscenza legata al modello del sistema e le misurazioni rumorose di alcuni parametri (elementi del vettore di stato) o funzioni lineari di questi. Le stime dei parametri di interesse nel vettore di stato, che nella realtà sono valori puntuali, all'interno del modello sono densità di probabilità con una media, stima più verosimile, e con una varianza che ne rappresenta l'incertezza. Come detto, in particolare il filtro di Kalman si basa su pdf gaussiane descritte interamente dalla conoscenza della media (nel nostro caso un vettore di medie rappresentato dal vettore di stato) e della varianza e covarianza, informazioni contenute nella matrice delle varianze P_t . I termini sulla diagonale principale sono le varianze associate al corrispondente termine nel vettore di stato. Le altre entrate della matrice, invece, contengono le covarianze tra i termini nel vettore di stato. Vogliamo derivare le equazioni del filtro di Kalman che ci permettano di calcolare ricorsivamente x_t combinando la conoscenza a priori, data dalla stima dal modello del sistema, con le misure rumorose. L'algoritmo del filtro di Kalman si svolge in due step reiterati: predizione dello stato e aggiornamento basato sulle misure.

- Le equazioni di predizione dello stato proiettano in avanti lo stato corrente e la covarianza dell'errore di stima al fine di ottenere una stima a priori per il successivo istante temporale.
- Le equazioni di aggiornamento dello stato realizzano il meccanismo in retroazione, cioè incorporano le nuove misure nella stima a priori per ottenere una stima a posteriori migliorata.

1.2.1 Predizione

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t$$

Dove Q_t è la matrice delle covarianze del rumore del processo. La varianza associata alla predizione $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ del valore reale sconosciuto x_t è data da:

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{E}[(x_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})(x_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T]$$

che si dimostra essere equivalente a:

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \mathbf{E}[(x_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})(x_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T] \mathbf{F}_t^T + E[ww^T]$$

E quindi infine:

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t$$

Questa fase, quindi, permette di stimare il valore più probabile dello stato successivo e la sua covarianza a partire dallo stato attuale e dalla conoscenza della dinamica del sistema racchiusa nella matrice di transizione F . Si noti che il processo porta ad una riduzione della confidenza nel risultato, rilevabile in una crescita nel valore delle entrate di P . Infatti intuitivamente l'aggiornamento di P consiste in una somma di gaussiane che danno come risultato ancora una gaussiana, ma con varianze maggiori. Questo comportamento è ragionevole in quanto la previsione consiste in una stima, e stime reiterate danno risultati via via meno affidabili.

1.2.2 Aggiornamento

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_t &= \mathbf{z}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \\ \mathbf{S}_t &= \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t \\ \mathbf{K}_t &= \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T \mathbf{S}_t^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \tilde{\mathbf{y}}_t \\ \mathbf{P}_{t|t} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_{t|t-1} \end{aligned}$$

Si valuta per prima cosa $\tilde{\mathbf{y}}_t$, la distanza tra la misura e l'ultima stima mappata nello stesso spazio delle misure. A questo punto si valuta il guadagno di Kalman \mathbf{K}_t , che si può interpretare come il rapporto tra la varianza legata alla stima e la varianza totale. Si utilizza poi questo guadagno per parametrizzare il segmento che congiunge la stima alla misura, per poi valutare la nuova stima migliore $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$.

E' stata adottata la notazione Bayesiana, secondo cui $a \mid b$ significa a data l'evidenza di b . Il cappuccio rappresenta una stima. Così $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ significa la stima dello stato x al tempo t data l'evidenza allo step precedente $t - 1$, in altre parole la stima a priori. La stima a posteriori fornita dall'aggiornamento della misura, invece, è rappresentata come $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$, che significa la stima dello stato al tempo t data l'evidenza fino al tempo t . Dopo ogni coppia di aggiornamenti di tempo e misura, il processo è ripetuto con la precedente stima a posteriori, per procedere con una ulteriore proiezione o valutazione della nuova stima a priori. Questa natura ricorsiva è una delle caratteristiche che rendono il filtro di Kalman così vantaggioso, poiché ne rende l'implementazione pratica molto più comoda.

2 Descrizione del modello

Come applicazione del filtro di Kalman verrà affrontato il problema del tracking di un telefono in una rete wireless. Il risultato della misura potrebbe provenire da una trilaterazione rispetto a tre antenne che valutano il tempo di volo del segnale il quale, mediante una valutazione tramite minimi quadrati, ci riporta la posizione dell'oggetto. Per semplicità le misure della posizione fornite al modello saranno simulate aggiungendo alla posizione reale un rumore estratto da una gaussiana di media nulla e varianza presa dalla matrice R . Verrà simulata l'intera traiettoria inserendo, però, anche un errore legato al processo che modifichi leggermente la velocità. Questo per rendere più interessante l'effetto del filtro e per aggiungere l'azione della matrice di covarianza del rumore del processo Q . L'errore nel processo è 10 volte minore lungo la componente x della velocità al fine di avere un grafico della traiettoria più chiaro (che non possa tornare indietro). Si considera un sistema con:

2.1 Ipotesi preliminari

- Una velocità costante
- Matrici di covarianza per il rumore del processo Q_t e per il rumore di misura R_t costanti nel tempo (verranno quindi indicate con Q e R)
- Errori di misura e del processo indipendenti e non correlati sia nel tempo che tra loro e provenienti da gaussiane con medie nulle e varianze

note

- Nessun tipo di input di controllo, quindi vettore di input nullo.

2.2 Definizione della struttura del vettore di stato e della matrice di transizione

Si è scelto di eseguire il tracking nel piano e di sfruttare nel modello anche le velocità per migliorarne le performance. Risulta, quindi, X composto da due coordinate per la posizione (x e y) nel piano e due per la velocità lungo le ascisse (v_x) e lungo le ordinate (v_y).

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

La struttura della matrice di transizione descriverà, quindi, due diversi tipi di aggiornamento: per posizione e velocità.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SI ottiene a partire delle leggi di Newton per il moto di un corpo, ipotizzando una velocità costante. Esplicitamente, l'aggiornamento di posizione e velocità risultano:

$$\begin{cases} \bar{y} = y + v_y * \\ \bar{v}_y = v_y \end{cases}$$

Quindi il sistema corrispondente, ordinato in modo da evidenziarne la struttura matriciale, risulta:

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 * x + 0 * y + dt * v_x + 0 * v_y \\ \bar{y} = 0 * x + 1 * y + 0 * v_x + dt * v_y \\ \bar{v}_x = 0 * x + 0 * y + 1 * v_x + 0 * v_y \\ \bar{v}_y = 0 * x + 0 * y + 0 * v_x + 1 * v_y \end{cases}$$

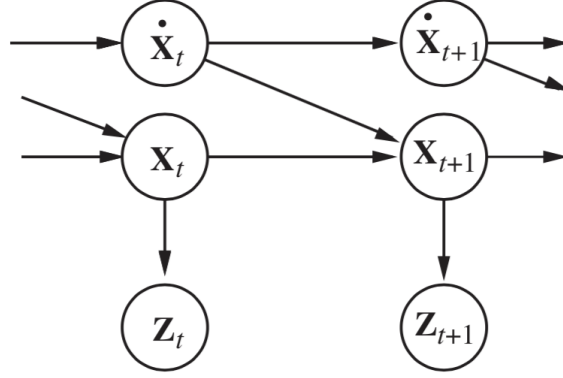


Figure 1: In figura la struttura della rete bayesiana relativa al sistema in esame. [1]

2.3 Variabili nascoste

Visto che la misura ci dà evidenza diretta solo della posizione, aggiungere la derivata prima della posizione nello stato significa aggiungere delle variabili nascoste, ovvero non direttamente osservabili. Sicuramente c'è correlazione tra posizione e velocità, ma nell'inizializzazione non sappiamo esattamente quanto, ragion per cui la matrice delle covarianze è inizialmente diagonale. La scelta di aggiungere la velocità al vettore di stato è legata al fatto che le variabili nascoste possono portare ad un significativo miglioramento nell'accuratezza del filtro. Questo è possibile perché le variabili nascoste sono correlate con le variabili osservate (Nella figura (1) è evidenziata la struttura della rete bayesiana del modello).

L'inizializzazione pone un problema particolarmente difficile per le variabili nascoste. Se si parte con una inizializzazione scorretta, il filtro può recuperare per le variabili osservate, ma può avere problemi con quelle nascoste. La stima delle variabili nascoste è uno strumento potente, anche se talvolta pericoloso.

2.4 Matrice delle covarianze

Per quanto riguarda la matrice delle varianze e delle covarianze, la si inizializza come una matrice diagonale non avendo informazioni sulla correlazione tra le variabili, che verranno aggiunte automaticamente nell'aggiornamento della matrice tramite l'azione della matrice di transizione. Quindi l'unica

ipotesi che viene fatta è quella sulle varianze: 1 per la posizione e 10 per la velocità. L'inizializzazione più cauta per le velocità è legata al fatto che sono variabili nascoste e per quanto detto sopra è rischioso avere un valore sbagliato, specie se associato ad una varianza bassa, ovvero alla convinzione del modello di essere "nel giusto".

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

2.5 Misura

Ogni misura di posizione è un vettore 2×1 (x,y). Visto che consideriamo una misura nella stessa unità di misura della variabile, questo banalizza un po' il ruolo della matrice di trasformazione H , che però serve ancora per riportare lo stato 4×1 ad un vettore confrontabile con la misura per andarne a valutarne il range. Per quanto detto H non può quindi che essere una matrice 2×4 :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dal prodotto tra H e X dunque risulta:

$$\mathbf{H}M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Ovvero un vettore della stessa dimensione di quello riportato da una misura.

2.6 Definizione di Q e R

Come detto nelle assunzioni iniziali nè Q nè R vengono aggiornati, quindi i valori che vengono assegnati all'inizio rimarranno per tutto lo svolgersi dell'algoritmo. Ha senso fare riferimento alle modalità di simulazione del moto per la definizione dei valori iniziali, infatti R contiene sulla diagonale principale le varianze legate alla misura della posizione σ_R . Q , invece, contiene l'incertezza legata allo spostamento σ_Q , tenuto conto della dinamica

del sistema contenuta nella matrice di transizione. Va prestata attenzione al fatto che nella simulazione l'errore della misura è uguale per entrambe le coordinate, mentre per quanto riguarda l'errore legato al processo viene modificata solo la velocità e in modo asimmetrico, quindi una possibile implementazione è la seguente:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sigma_Q}{100}dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_Q dt \\ \frac{\sigma_Q}{100}dt & 0 & \frac{\sigma_Q}{100} & 0 \\ 0 & \sigma_Q dt & 0 & \sigma_Q \end{bmatrix}$$

Si noti che per la correlazione tra le variabili si è scelto di moltiplicare l'incertezza sulle velocità per l'intervallo di tempo, in quanto una variazione nella velocità influenza la posizione all'istante successivo dipendentemente dalla lunghezza dell'intervallo dt stesso.

\mathbf{R} rappresenta l'errore legato alla misura. Nel caso in esame, quindi, è una matrice quadrata a quattro entrate e diagonale. Si nota, anche in questo caso, che \mathbf{R} non viene in alcun modo riaggiornata e che è legata semplicemente al funzionamento dei sensori. Visto che gli errori sulle misurazioni in questo caso vengono simulati, basta semplicemente utilizzare la varianza della gaussiana da cui viene estratto il rumore della misura per inizializzare la diagonale della matrice.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 \\ 0 & \sigma_R \end{bmatrix}$$

3 Risultati e discussione

Come si vede nella figura (2) il filtro riesce a seguire bene la traiettoria, nonostante l'allontanamento dalla situazione ideale di velocità costante, grazie all'incertezza inserita nella matrice \mathbf{Q} . Sfrutta l'informazione contenuta nelle misure fornite (in rosso nel grafico), ma senza saltare da una all'altra e risultando quindi in un output molto più smussato rispetto alle sole misure.

Si vuole ora valutare se la decrescita dei valori sulla diagonale di \mathbf{P}_t nel (mostrata nella figura (3)) sia giustificata, ovvero se i valori della varianza descrivano realisticamente la dispersione delle stime rispetto ai valori reali. La trattazione è limitata alla sola variabile y in quanto, per come è stato formulato il modello, l'ordinata del punto è la variabile più soggetta ad errori, visto che ad essere modificata maggiormente dal rumore del processo è la velocità

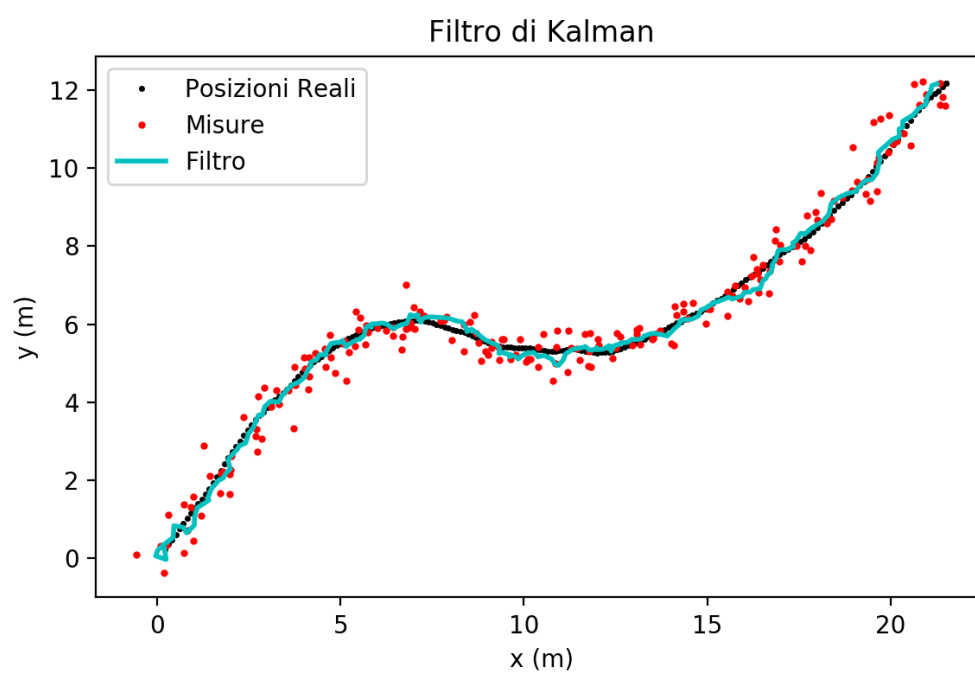


Figure 2: Nel grafico viene mostrato l'effetto del filtro. In nero le posizioni reali, in rosso le misure e in verde la traiettoria filtrata. Per 200 iterazioni da 0.1 s con i parametri descritti nel capitolo sul modello.

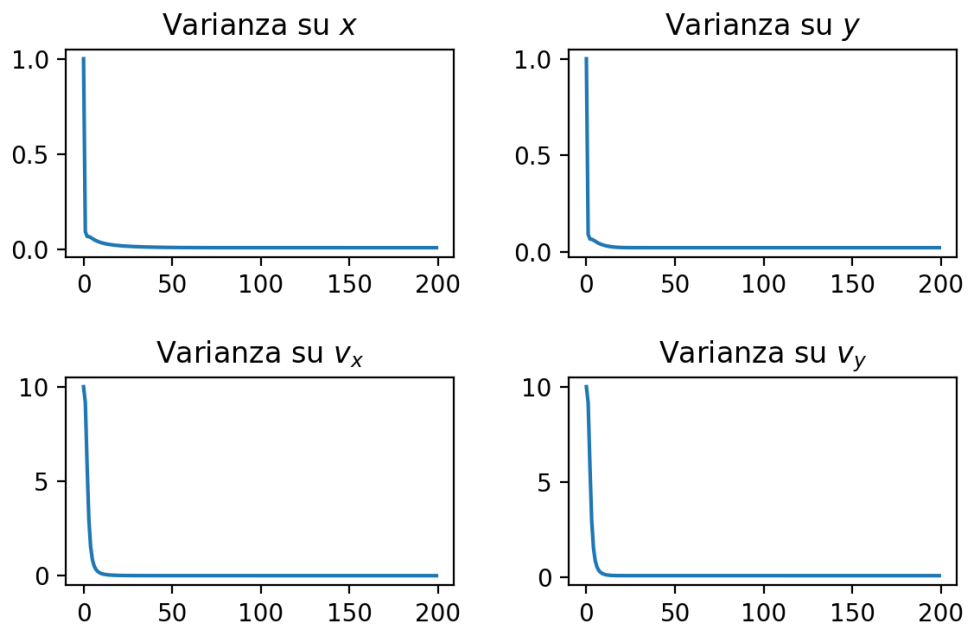


Figure 3: Nell'immagine è mostrato l'andamento degli elementi sulla diagonale principale della matrice delle covarianze P_t rispetto alle iterazioni.

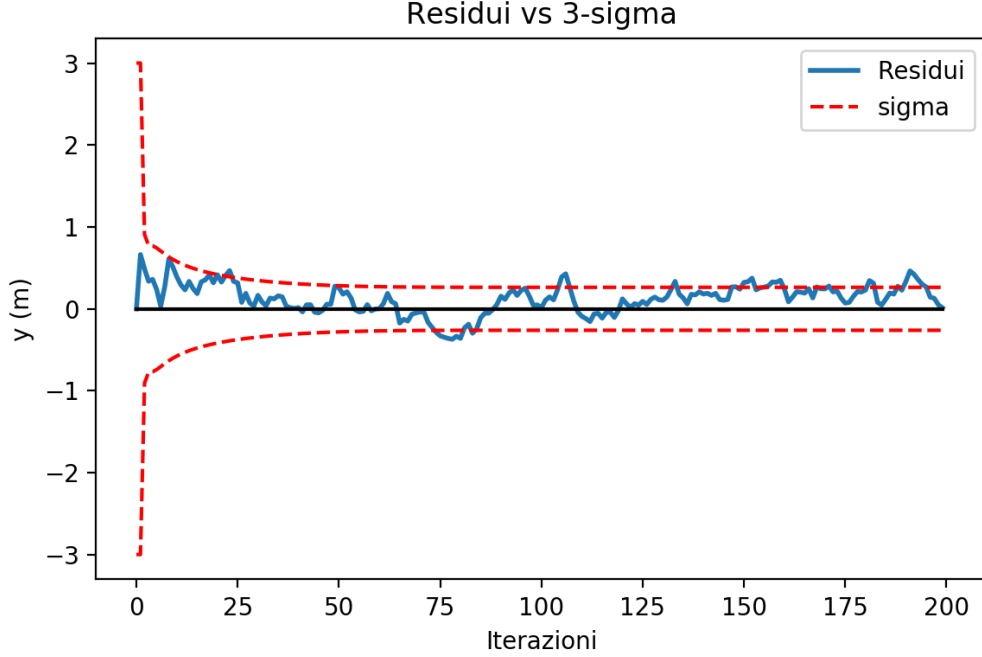


Figure 4: Nel grafico è mostrato l'andamento dei residui ($\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$) al passare delle iterazioni dell'algoritmo. Le linee tratteggiate rosse indicano tre volte la varianza relativa alla posizione lungo y contenuta nella matrice delle covarianze dello stato P . La linea blu invece rappresenta l'andamento dei residui, confrontabile con la linea nera che rappresenta lo 0.

verticale. Il valore stimato dal filtro, come detto, è una pdf gaussiana con un valore più probabile (vettore delle medie) e una incertezza (matrice di covarianze), quindi considerando un elemento del vettore di stato, in questo caso la posizione lungo y , con una probabilità di $*0.97*$, la stima si deve trovare entro tre volte la deviazione standard σ_y , ottenuta come radice quadrata della varianza σ_y^2 (secondo elemento sulla diagonale principale della matrice di covarianza dello stato P). Come mostrato nella figura (4), i residui sono completamente contenuti entro il limite sopra citato, prova del fatto che il modello valuta bene la varianza.

4 Conclusioni

In conclusione l'output del filtro risulta essere più fluido delle misure e più vicino alle posizioni reali non divergendo, nonostante le variazioni casuali di velocità. In ogni caso l'algoritmo non ha nessun tipo di controllo che lo renda numericamente stabile, infatti successivi sviluppi si potrebbero focalizzare sull'assicurarsi che le matrici simmetriche restino tali. In ogni caso questo filtro è solo un modello, visto che simulando le posizioni si era a conoscenza dell'esatta varianza del rumore di misura e del processo. Si potrebbe quindi approfondire il problema delle misure rendendo il filtro più realistico, adattandolo all'output fornito dalla trilaterazione delle antenne.

References

- [1] S. J. Russell and P. Norvig, *Artificial intelligence: a modern approach*. Malaysia; Pearson Education Limited,, 2016.
- [2] R. Faragher *et al.*, "Understanding the basis of the kalman filter via a simple and intuitive derivation," *IEEE Signal processing magazine*, vol. 29, no. 5, pp. 128–132, 2012.