1. Integrazione di funzioni razionali fratte

Si supponga di voler calcolare un integrale del tipo: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

(ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'indeterminata x di grado assegnato).
Supponiamo che:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

I coefficienti a_i e b_i appartengano al campo reale e a_n e b_k siano diversi da zero in modo da non abbassare il grado dei polinomi.
Si possono presentare tre casi:

- $\mathrm{gr}(P(x)) > \mathrm{gr}(Q(x))$;
- $\mathrm{gr}(P(x)) = \mathrm{gr}(Q(x))$;
- $\mathrm{gr}(P(x)) < \mathrm{gr}(Q(x))$.

1.1. I Caso: gr(P(x)) > gr(Q(x))

Per poter calcolare l'integrale si esegue la divisione tra i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ e si sostituisce il risultato nell'integrale stesso.
Esistono due metodi per eseguire la divisione tra polinomi:
- **I metodo**: si esegue l'usuale **divisione**.
- **II metodo**: si utilizza il **principio di identità dei polinomi**.

Esempio Sia $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}dx$

Si noti che
– $\mathrm{gr}(P(x)) = 3$ (grado del polinomio al numeratore)
– $\mathrm{gr}(Q(x)) = 2$ (grado del polinomio a denominatore).
Si può eseguire la divisione:

$$
\begin{array}{rrr|ll}
x^3 & +3x^2 & & x^2+1 & \\
\hline
-x^3 & & -x & x+3 \ \Leftarrow & \text{quoziente} \\
\hline
0 & +3x^2 & -x & & \\
\hline
 & -3x^2 & -3 & & \\
\hline
 & -x & -3 & \Leftarrow & \text{resto}
\end{array}
$$

e risulta:

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}$$

e quindi :

$$\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{-x-3}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-3\,\mathrm{arctg}\,x+c$$

Si perviene al medesimo risultato utilizzano il **principio di identità dei polinomi.**

Osservando che :

$$gr\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)=gr(P(x))-gr(Q(x))=gr(x^3-3x^2)-gr(x^2-1)=3-2=1$$

il polinomio può essere riscritto nel modo seguente:

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

ove: $ax + b$ è il polinomio quoziente e $cx + d$ è il resto della divisione.
Eguagliando ambo i membri, si ricava:

$$x^3+3x^2 = (ax+b)(x^2+1)+cx+d$$

Da cui si può determinare il valore di *a, b, c,* e *d,* imponendo l'eguaglianza tra il polinomio del I membro e quello del II membro.

Si ricava:

$$x^3+3x^2 = ax^3+ax+bx^2+b+cx+d \equiv ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d$$

Da cui:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-1 \\ d=-3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati si perviene allo stesso risultato ottenuto prima:

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}=x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}$$

1.2. II Caso: gr(P(x)) = gr(Q(x))

In questo caso non si segue una regola ben definita: le operazioni da eseguire dipendono dai polinomi in gioco; è comunque possibile eseguire ancora la divisione tra polinomi.

Esempio:

$$\int\frac{x}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{2x-1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\log|2x-1|+c$$

1.3. III Caso: gr(P(x))< gr(Q(x))

Va ricordato che il **Teorema Fondamentale dell'Algebra** afferma che un polinomio di grado n ammette esattamente n radici nel campo complesso; tale proprietà verrà sfruttata per decomporre il polinomio $Q(x)$ in fattori primi irriducibili.
Le radici di $Q(x)$ possono essere o reali o complesse coniugate (a due a due), con molteplicità maggiore o uguale a uno.

Supponiamo che il polinomio $Q(x)$ ammetta la seguente decomposizione:

$$Q(x) = k(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}...(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}$$

dove α_1, ..., α_k sono radici reali e i polinomi $x^2 + p_h x + q_h$ corrispondono alle coppie di radici complesse coniugate.

Gli “ordini di molteplicità” sono:

$m_1, m_2, ..., m_k$ per le radici reali,
$2r_1, 2r_2, ..., 2r_j$ per le radici complesse coniugate

e devono soddisfare alla seguente relazione:

$$m_1 + m_2 + ... + m_k + 2r_1 + 2r_2 + ... + 2r_j = n \quad \text{(grado di } Q(x)\text{)}.$$

Per semplicità considereremo in modo differente i casi relativi a radici reali distinte, a radici complesse coniugate e i casi con radici reali o complesse coniugate con molteplicità maggiore di uno.

1.3.1. Radici reali distinte

Si cercano le radici di $Q(x)$. Il denominatore della frazione si può decomporre nel seguente modo:

$$Q(x) = m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)..(x-\alpha_k)$$

Le radici: α_1, ..., α_k sono per ipotesi reali e distinte di molteplicità uno.
Si cerca di scrivere la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{m}\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)...(x-\alpha_k)} = \frac{1}{m}\left[\frac{A_1}{x-\alpha_1} + ... + \frac{A_k}{x-\alpha_k}\right]$$

ove $A_1, A_2, ..., A_k$ sono costanti reali da determinare in base ai polinomi assegnati.
Per determinare il valore delle costanti $A_1, A_2, ..., A_k$ ci si avvale di due metodi distinti e fra di loro equivalenti:

I Metodo: **Passaggio al limite.**

Moltiplicando di volta in volta ambo i membri per $x - \alpha_h$ ($h = 1, 2, …, k$), si ottiene:

$$\frac{(x-\alpha_h)P(x)}{m(x-\alpha_1)...(x-\alpha_k)} = \frac{1}{m}\left[\frac{A_1(x-\alpha_h)}{x-\alpha_1} + \frac{A_2(x-\alpha_h)}{x-\alpha_2} + ... \frac{A_h(x-\alpha_h)}{x-\alpha_h} + ... + \frac{A_k(x-\alpha_h)}{x-\alpha_k}\right]$$

Ripetendo questa operazione per tutte le radici si ottengono k limiti da calcolare separatamente:

$$\lim_{x\to\alpha_h}\frac{(x-\alpha_h)P(x)}{Q(x)} = A_h$$

Tale relazione deve valere per ogni scelta di $h = 1, 2, …, k$. Si osservi che di volta in volta al denominatore manca il termine $x - \alpha_h$.

Dal calcolo dei limiti così ottenuti, si ricava il valore delle costanti

$$A_1, A_2, …, A_k.$$

Esempio 1 Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$

Si cercano le radici del polinomio a denominatore

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Quindi si identifica la funzione integranda con la seguente:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Moltiplicando ambo i membri per $(x - 3)$ si ottiene:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-5x+6} = \frac{A(x-3)}{x-3} + \frac{B(x-3)}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-2} = A + \frac{B(x-3)}{x-2}$$

Eseguendo il passaggio al limite, si ricava:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{x\to 3}\left(A + \frac{B(x-3)}{x-2}\right)$$

ossia: $A = 6$.

Moltiplicando ora per $(x - 2)$ ambo i membri si ricava:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x^2-5x+6} = \frac{A(x-2)}{x-3} + \frac{B(x-2)}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-3} = \frac{A(x-2)}{x-3} + B$$

Eseguendo il passaggio al limite, si ottiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-3} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{A(x-2)}{x-3} + B\right)$$

ossia: $B = -5$.

Si può ora procedere al calcolo dell'integrale:

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int\left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}\right)dx = \int \frac{6}{x-3}dx - \int \frac{5}{x-2}dx$$

Si ottengono così due integrali che ammettono come primitive delle funzioni di tipo logaritmico.

II Metodo: **Mediante il principio di identità dei polinomi.**

Questo metodo permette di calcolare tutte le costanti $A_1, A_2, \ldots, A_k$ in blocco, senza ricorrere al calcolo di k limiti separatamente, ma mediante la risoluzione di un sistema lineare di k equazioni in k incognite.

Supponiamo che la funzione integranda si possa scrivere nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{m}\left[\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha_k}\right]$$

Si esegue la somma dei termini a secondo membro e si ricava:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1[(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)] + A_2[(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)] + \ldots}{m(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)}$$

È possibile eliminare i denominatori in quanto uguali. Si ottiene:

$$P(x) = A_1[(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)] + A_2[(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)] + \ldots + A_k[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{k-1})]$$

Per il principio di identità dei polinomi, si ottiene un sistema di k equazioni nelle k incognite A_1, $A_2, \ldots, A_k$.

Esempio 2: Metodo alternativo per calcolare il valore dell'integrale presentato nell'esempio 1.
Si cercano le radici di $Q(x)$: (già calcolate nell'esempio 1)

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Quindi si cerca di soddisfare alla relazione:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Svolgendo la somma al secondo membro, e eliminando i denominatori si ottiene:

$$x + 3 = A(x-2) + B(x-3)$$

da cui, applicando il principio di identità dei polinomi, si costruisce il seguente sistema lineare di due equazioni nelle due incognite A e B:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -2+2B-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=6 \\ B=-5 \end{cases}$$

Come era da aspettarsi, si ottengono gli stessi valori per le costanti A e B.
Una volta calcolati A e B, si può procedere al calcolo dell'integrale come nell'esempio 1.

1.3.2. Radici complesse coniugate

Come nel caso precedente si decompone il denominatore $Q(x)$ in fattori primi irriducibili, andando a cercare le radici del polinomio.
Il denominatore della frazione si può decomporre nel seguente modo:

$$Q(x) = m\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)\ldots\left(x^2 + p_j x + q_j\right)$$

Il polinomio $Q(x)$ ammette, in tal caso, j radici complesse e j radici complesse coniugate del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \\ \bar{x}_1 = \alpha_1 - i\beta_1 \end{cases}; \ldots ; \begin{cases} x_j = \alpha_j + i\beta_j \\ \bar{x}_j = \alpha_j - i\beta_j \end{cases}$$

La funzione integranda diventa si può scrivere nella forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{m}\left[\frac{A_1 x + B_1}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)} + \ldots + \frac{A_j x + B_j}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)}\right]$$

ove le A_h e B_h sono costanti reali da determinare utilizzando il principio di identità dei polinomi.
Si osservi che a numeratore appaiono polinomi di I grado e non più delle costanti come nel caso precedente.

Esempio 3: Calcolare il valore del seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx$

Le radici del polinomio a denominatore sono:

$$x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm i;$$

Cerchiamo di scrivere il rapporto nella forma:

$$\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

$$x^2+3x+2 = A(x^2+1)+x(Bx+C)$$

da cui:

$$x^2+3x+2 = Ax^2+A+Bx^2+Cx=(A+B)\,x^2+Cx+A$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=3 \end{cases}$$

e quindi la funzione integranda si scrive:

$$\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}+\frac{-x+3}{x^2+1}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$$

Tornando all'integrale di partenza si ottiene:

$$\int\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{3dx}{x^2+1}-\int\frac{xdx}{x^2+1}$$

Si ottengono così tre integrali facilmente calcolabili.

1.3.3. Radici dotate di molteplicità

Si decompone ancora in fattori primi il polinomio $Q(x)$ al denominatore. Si cercano le radici del polinomio:

$$Q(x)=m(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$$

dove

$$2r_1,\ 2r_2,\ldots,\ 2r_j,\ m_1,\ m_2,\ldots,\ m_k$$

rappresentano gli "ordini di molteplicità" delle radici trovate (reali o complesse coniugate).
La funzione integranda si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{m}\left\{\left[\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{A_{21}}{(x-\alpha_2)}+\frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}}\right]+$$

$$\left.+\ldots+\left[\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{B_{1r_1}x+C_{1r_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}}\right]+\ldots\right\}$$

dove le varie costanti reali A_h, B_t, C_s vanno determinate mediante il principio di identità dei polinomi.

Esempio 4: Calcolare $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

Le radici del polinomio al denominatore sono 3: $x=0$; e $x=1$ con molteplicità 2
Cerchiamo una forma equivalente della funzione integranda:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Le potenze del denominatore $(x-1)$ si ripetono fino a raggiungere l'ordine di molteplicità. Quindi:

$$1 = (A+B)\,x^2 + (-2A-B+C)\,x + A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

quindi l'integrale si può riscrivere nel seguente modo

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Esempio 5: Calcolare $\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx$

È $\mathrm{gr}(Q(x)) > \mathrm{gr}(P(x))$
Per decomporre tale frazione bisogna determinare le radici del polinomio al denominatore

$$4x^5+4x^3+x=0 \quad \Rightarrow \quad x(4x^4+4x^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x(2x^2+1)^2=0$$

Le radici sono : $x=0$; e $x = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$ con ordine di molteplicità 2 $\Rightarrow$ si hanno 4 radici complesse e 1 radice reale. Per il teorema di decomposizione dei polinomi la funzione integranda si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+2 = A(2x^2+1)^2 + (Bx+C)x(2x^2+1) + (Dx+E)x$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+2 = (4A+2B)x^4 + 2Cx^3 + (4A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

da cui si ricava il sistema lineare nelle incognite A, B, C, D, E:

$$\begin{cases} 4A+2B=0 \\ 2C=0 \\ 4A+B+D=1 \\ C+E=0 \\ A=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-4 \\ C=0 \\ D=-3 \\ E=0 \end{cases}$$

Quindi la frazione si può scrivere come somma di frazioni, nel modo seguente:

$$\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}=\frac{2}{x}-\frac{4x}{2x^2+1}-\frac{3x}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

Esercizio. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2(x^2-1)}$

1.4. Teorema di decomposizione dei polinomi

N.B. La tecnica di decomposizione dei polinomi non è finalizzata all'integrazione, ma può essere usata ogni volta che si ha a che fare con il quoziente di due polinomi che rispettino le ipotesi esposte.

Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi reali con coefficienti reali e tali che gr($P(x)$)< gr($Q(x)$).
Se il polinomio $Q(x)$ si può fattorizzare nel seguente modo:

$$Q(x)=m(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\ldots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$$

risulta che :

- $2r_1, 2r_2, \ldots, 2r_j, m_1, m_2, \ldots, m_k$ sono gli ordini di molteplicità delle radici del polinomio $Q(x)$.
- $m_1 + m_2 + \ldots + m_k + 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_j) = \text{gr}(Q(x))$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ sono le radici reali dell'equazione $Q(x)=0$
- $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_jx+q_j$ sono polinomi di secondo grado irriducibili nel campo reale, ossia ammettono radici complesse coniugate.

Il rapporto $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ si può esprimere come somma di frazioni parziali nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{m}\left\{\underbrace{\left[\frac{A_{h1}}{(x-\alpha_h)}+\frac{A_{h2}}{(x-\alpha_h)^2}+\ldots+\frac{A_{hm_h}}{(x-\alpha_h)^{m_h}}\right]}_{\text{per ogni radice reale}}+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\left[\frac{B_{k1}x+C_{k1}}{x^2+p_kx+q_k}+\frac{B_{k2}x+C_{k2}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^2}+\ldots+\frac{B_{kr_k}x+C_{kr_k}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{r_k}}\right]}_{\text{per ogni coppia di radici complesse coniugate}}\right\}$$

ove le costanti reali A, B, C si determinano mediante il principio di identità dei polinomi.