Integrali curvilinei

2.1 Curve nel piano e nello spazio

Sia I un qualunque intervallo della retta reale e sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una funzione. Indichiamo con $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ il punto immagine di $t \in I$ attraverso γ. Diciamo che γ è una **funzione continua su** I se le componenti $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

Definizione 2.1 *Dicesi* **curva** *(nello spazio) una funzione continua* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$*. L'immagine* $C = \gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ *viene detta* **sostegno** *della curva.*

Se il sostegno della curva giace su un piano, diremo che la **curva** è **piana**. Un caso notevole è dato dalle curve $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), 0\big)$ che giacciono nel piano xy e che indicheremo semplicemente come $\gamma : I \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Notiamo che una curva è una funzione di variabile reale mentre il sostegno di una curva è un insieme nello spazio. Una curva definisce un modo di parametrizzare il suo sostegno associando ad ogni valore del parametro $t \in I$ uno e un solo punto del sostegno. Tuttavia l'insieme C può essere il sostegno di curve diverse, ovvero può essere parametrizzato in modi diversi.

Ad esempio la curva piana $\gamma(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$ ha come sostegno il segmento di estremi $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$. Tale segmento è anche il sostegno della curva $\delta(t) = (t^2, t^2)$, $t \in [0, 1]$; le curve γ e δ costituiscono due parametrizzazioni del segmento AB. Ad esempio, il punto medio di AB è individuato dal parametro $t = \frac{1}{2}$ nel primo caso e $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nel secondo.

La **curva** γ si dice **semplice** se γ è un'applicazione iniettiva, ossia se valori diversi del parametro individuano punti diversi del sostegno.

Se l'intervallo $I = [a, b]$ è chiuso e limitato, come negli esempi precedenti, la curva γ si chiamerà **arco**. Un **arco** si dice **chiuso** se $\gamma(a) = \gamma(b)$; ovviamente un arco chiuso non è una curva semplice. Tuttavia, si parla di **arco chiuso e semplice** (o **arco di Jordan**) se il punto $\gamma(a) = \gamma(b)$ è l'unico punto del sostegno ad essere immagine di due valori diversi del parametro.

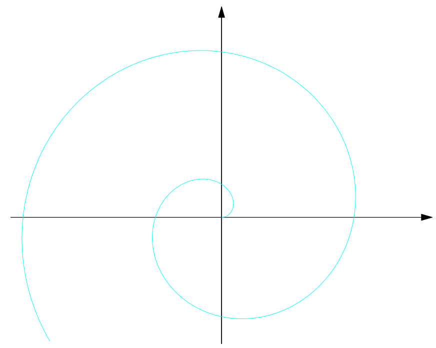

Figura 2.1. Rappresentazione della spirale definita nell'Esempio 2.2 iii)

Esempi 2.2 i) La curva

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (1 + \cos t, 3 + \sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

ha come sostegno la circonferenza di centro $(1, 3)$ e raggio 1; infatti $\big(x(t)-1\big)^2 + \big(y(t)-3\big)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Si tratta di un arco chiuso e semplice e costituisce il modo più naturale per parametrizzare tale circonferenza percorrendola in senso antiorario a partire dal punto $(2, 3)$.
In generale l'arco chiuso e semplice

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

ha come sostegno la circonferenza centrata in (x_0, y_0) di raggio r.
Si osservi che se t varia in un intervallo di tipo $[0, 2k\pi]$, con k intero positivo ≥ 2, l'arco ha ancora come sostegno la circonferenza ma essa viene percorsa k volte; dunque l'arco non è semplice.
Se invece t varia nell'intervallo $[0, \pi]$, la corrispondente curva è un arco (di circonferenza) semplice ma non chiuso.

ii) Similmente, assegnati $a, b > 0$, l'arco chiuso e semplice

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (a\cos t, b\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

parametrizza l'ellisse centrato nell'origine e con semiassi a e b.

iii) La curva

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t\cos t, t\sin t)\,, \qquad t \in [0, +\infty]\,,$$

ha come sostegno la spirale rappresentata in Figura 2.1, che viene percorsa in senso antiorario a partire dall'origine. Infatti il punto $\gamma(t)$ ha distanza dall'origine uguale a $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = t$ che cresce al crescere di t. La curva è semplice.

iv) Siano $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ punti distinti dello spazio. La curva semplice
$$\gamma(t) = P + (Q - P)t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$
ha come sostegno la retta passante per P e Q. Infatti $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ e il vettore $\gamma(t) - P$ ha direzione costante essendo parallelo a $Q - P$.
Una più generale parametrizzazione della stessa retta è data da
$$\gamma(t) = P + (Q - P)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.1}$$
con $t_0 \neq t_1$; in tal caso si ha $\gamma(t_0) = P$, $\gamma(t_1) = Q$.

v) La curva semplice
$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (\cos t, \sin t, t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$
ha come sostegno l'elica circolare rappresentata in Figura 2.2. Si noti che il sostegno giace sul cilindro infinito di asse coincidente con l'asse z e raggio 1.

Diremo che una **curva** $\gamma :\to \mathbb{R}^3$ è **derivabile** se le sue componenti $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili su I (ricordiamo che una funzione è derivabile su un intervallo I se è derivabile in tutti i punti interni ad I ed è derivabile unilateralmente negli eventuali estremi appartenenti ad I). Indichiamo con $\gamma' : I \to \mathbb{R}^3$ la funzione derivata $\gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$.

Definizione 2.3 *Una* **curva** $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *dicesi* **regolare** *se è derivabile su* I *con derivata continua (cioè se le componenti sono funzioni di classe* $\mathcal{C}^1$ *su* I*) e se* $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$*, per ogni* $t \in I$*. Una* **curva** $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *dicesi* **regolare a tratti** *se* I *è unione di un numero finito di intervalli su cui* γ *è regolare.*

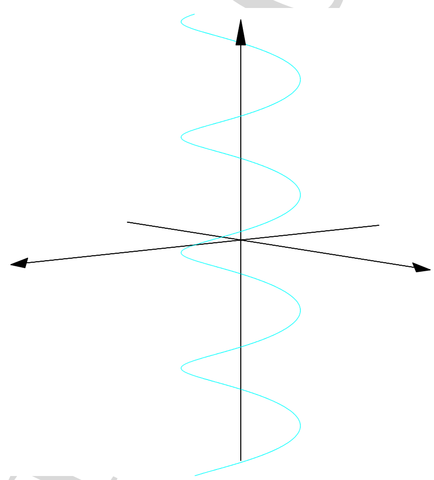

Figura 2.2. Rappresentazione dell'elica circolare definita nell'Esempio 2.2 v)

Se γ è una curva regolare e se $t_0 \in I$, il vettore $\gamma'(t_0)$ dicesi **vettore tangente** al sostegno della curva nel punto $P_0 = \gamma(t_0)$. Tale definizione può essere giustificata geometricamente nel modo seguente. Sia $t_0 + \Delta t \in I$ tale che il punto $P_{\Delta t} = \gamma(t_0 + \Delta t)$ sia diverso da P_0. Consideriamo la retta passante per P_0 e $P_{\Delta t}$, che – ricordata la (2.1) – può essere parametrizzata come

$$S(t) = P_0 + \big(P_{\Delta t} - P_0\big)\frac{t - t_0}{\Delta t} = \gamma(t_0) + \frac{\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)}{\Delta t}(t - t_0)\,. \tag{2.2}$$

Facendo tendere Δt a 0, il punto $P_{\Delta t}$ tende a P_0 (nel senso che ogni componente di $P_{\Delta t}$ tende verso la corrispondente componente di P_0). Nel contempo, grazie all'ipotesi di regolarità di γ, il vettore $\dfrac{\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)}{\Delta t}$ tende a $\gamma'(t_0)$. Dunque la posizione limite della retta (2.2) è la retta

$$T(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

tangente al sostegno della curva in P_0. A rigore, il vettore tangente al sostegno in P_0 è il vettore applicato $\big(P_0, \gamma'(t_0)\big)$ (vedi il Paragrafo 1.2.3), ma comunemente lo si indica semplicemente con $\gamma'(t_0)$. Si può verificare che la retta tangente al sostegno di una curva in un punto è intrinseca al sostegno, cioè non dipende dalla parametrizzazione scelta; invece il vettore tangente dipende dalla parametrizzazione per quanto riguarda modulo e verso.

Da un punto di vista cinematico, una curva rappresenta la traiettoria di una particella che al tempo t occupa la posizione $\gamma(t)$ nello spazio. Se la curva è regolare, il vettore $\gamma'(t)$ rappresenta la velocità della particella al tempo t.

Esempi 2.4 i) È facile verificare che tutte le curve considerate negli Esempi 2.2 sono regolari.

ii) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con continuità sull'intervallo I; la curva

$$\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)\,, \qquad t \in I\,,$$

è una curva regolare avente come sostegno il grafico della funzione f. Si osservi infatti che

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \neq (0,0)\,, \qquad \text{per ogni } t \in I\,.$$

iii) L'arco $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,1)\,, & t \in [0,1)\,, \\ (t,t)\,, & t \in [1,2]\,, \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale ABC (si veda la Figura 2.3, a sinistra); invece l'arco

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,1)\,, & t \in [0,1)\,, \\ (t,t)\,, & t \in [1,2)\,, \\ \big(t, 2 - \frac{1}{2}(t-2)\big)\,, & t \in [2,4] \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale $ABCA$ (si veda la Figura 2.3, a destra). Entrambe le curve sono regolari a tratti.

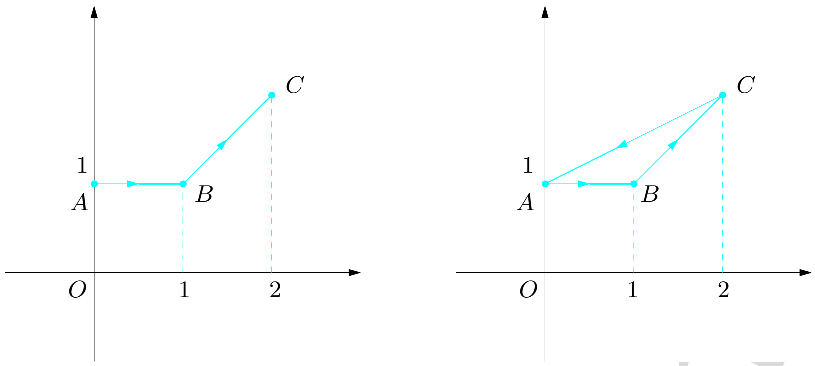

Figura 2.3. Poligonale ABC, a sinistra e $ABCA$, a destra, definite nell'Esempio 2.4 iii)

iv) Le curve

$$\gamma(t) = \big(1 + \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t\big)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
$$\overline{\gamma}(t) = \big(1 + \sqrt{2}\cos 2t, -\sqrt{2}\sin 2t\big)\,, \qquad t \in [0, \pi]\,,$$

sono due parametrizzazioni (la prima antioraria, la seconda oraria) della stessa circonferenza C, avente centro in $(1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$. Esse sono regolari e le loro derivate sono date da

$$\gamma'(t) = \sqrt{2}\big(-\sin t, \cos t\big)\,, \qquad \overline{\gamma}'(t) = 2\sqrt{2}\big(-\sin 2t, -\cos 2t\big)\,.$$

Il punto $P_0 = (0,1) \in C$ è immagine mediante γ del valore $t_0 = \frac{3}{4}\pi$ del parametro e mediante $\overline{\gamma}$ del valore $\bar{t}_0 = \frac{5}{8}\pi$ del parametro, ossia $P_0 = \gamma(t_0) = \overline{\gamma}(\bar{t}_0)$. Nel primo caso il vettore tangente è $\gamma'(t_0) = (-1,-1)$ e la retta tangente a C in P_0 è data da

$$T(t) = (0,1) - (1,1)(t - \frac{3}{4}\pi)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

mentre nel secondo caso si ha $\overline{\gamma}'(\bar{t}_0) = (2,2)$ e

$$\overline{T}(t) = (0,1) + (2,2)(t - \frac{5}{8}\pi)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

I vettori tangenti in P_0 hanno verso e lunghezza diversi, ma la retta tangente è la stessa, di equazione cartesiana $y = 1 + x$. □

2.2 Integrali curvilinei

In molte applicazioni, è utile integrare una funzione reale definita sul sostegno di una curva. Introduciamo quindi il concetto di integrale curvilineo; esso rappresenta il primo esempio di integrazione di una funzione di più variabili reali.

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ (con $d = 2,3$) un arco di curva regolare, e sia $C = \gamma([a,b])$ il suo sostegno. Sia poi $f : \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione definita almeno su C, cioè tale che $C \subseteq \mathrm{dom}\, f$. Supponiamo che la funzione composta $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita come $(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$, sia continua su $[a,b]$.

Definizione 2.5 *L'***integrale curvilineo** *di f su γ è il numero*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \|\gamma'(t)\|\, dt\,, \tag{2.3}$$

dove $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}$ è il modulo (cioè la norma euclidea) del vettore $\gamma'(t)$.

Notiamo che l'integrale a secondo membro della (2.3) è ben definito in quanto la funzione integranda $f\big(\gamma(t)\big)\, \|\gamma'(t)\|$ è continua su $[a,b]$. Infatti γ è per ipotesi regolare, dunque le derivate prime delle sue componenti sono funzioni continue, e quindi la norma $\|\gamma'(t)\|$ ha tale proprietà essendo ottenuta componendo funzioni continue; inoltre $f\big(\gamma(t)\big)$ è continua per ipotesi.

Esempi 2.6 i) Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ l'arco di curva regolare $\gamma(t) = (t, t^2)$ che parametrizza la parte della parabola $y = x^2$ compresa tra i punti $O = (0,0)$ e $A = (1,1)$. Si ha $\gamma'(t) = (1, 2t)$ e dunque $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$. Sia poi $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 3x + \sqrt{y}$. La funzione composta $f \circ \gamma$ vale $f\big(\gamma(t)\big) = 3t + \sqrt{t^2} = 4t$. Pertanto

$$\int_\gamma f = \int_0^1 4t\sqrt{1+4t^2}\, dt\,,$$

che si calcola con la sostituzione $s = 1 + 4t^2$ ottenendo

$$\int_\gamma f = 2\int_1^5 \sqrt{s}\, ds = 2\Big[\frac{2}{3}s^{3/2}\Big]_1^5 = \frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 1)\,.$$

ii) Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione della circonferenza di centro $(2,1)$ e raggio 2 data da $\gamma(t) = (2 + \cos t, 1 + \sin t)$, per la quale si ha $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$ per ogni t. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = (x-2)(y-1) + 1$, si ha $f\big(\gamma(t)\big) = 4\sin t\cos t + 1$ e dunque

$$\int_\gamma f = 2\int_0^{2\pi} (4\sin t\cos t + 1)\, dt = 2\big[2\sin 2t + t\big]_0^{2\pi} = 4\pi\,.$$

Se invece si parametrizza la stessa circonferenza mediante la curva $\overline{\gamma}$ avente le stesse componenti di γ ma con t variabile in $[0, 2k\pi]$ (cioè si percorre la circonferenza k volte), si ha

$$\int_{\overline{\gamma}} f = 2\int_0^{2k\pi} (4\sin t\cos t + 1)\, dt = 4k\pi\,. \qquad \square$$

L'ultimo esempio considerato mostra che l'integrale curvilineo di una funzione non dipende solo dal sostegno della curva, ma anche dal modo con cui tale sostegno viene parametrizzato. Tuttavia, parametrizzazioni equivalenti od opposte – nel senso di seguito precisato – danno luogo allo stesso integrale curvilineo.

Definizione 2.7 *Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ e $\delta : J \to \mathbb{R}^d$ due curve regolari. Esse si dicono* **equivalenti** *se esiste una biiezione $\varphi : J \to I$, derivabile con derivata continua e strettamente positiva, tale che*

$$\delta = \gamma \circ \varphi \,,$$

cioè $\delta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ per ogni $\tau \in J$.

Definizione 2.8 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ una curva regolare. Detto $-I$ l'intervallo $\{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$, la curva $-\gamma : -I \to \mathbb{R}^d$ definita da $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ si chiama l'* **opposta** *di γ.*

L'opposta di una curva γ si può ancora scrivere come $(-\gamma) = \gamma \circ \varphi$, dove $\varphi : -I \to I$ è la biiezione $\varphi(t) = -t$. Notiamo poi che se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è un arco di curva regolare, allora $-\gamma$ è un arco regolare definito sull'intervallo $[-b, -a]$.

È conveniente dire che due curve regolari γ e δ sono **congruenti** se esse sono equivalenti oppure se l'una è equivalente all'opposta dell'altra. Ciò significa che $\delta = \gamma \circ \varphi$ con φ biiezione derivabile, avente derivata continua e di segno costante.

È importante per il seguito osservare che due curve congruenti hanno lo stesso sostegno. Inoltre, tutte le curve congruenti a una curva semplice sono ancora semplici.

Sia f una funzione definita sul sostegno di un arco regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ e tale che $f \circ \gamma$ sia continua, di modo che esiste l'integrale curvilineo di f su γ. Allora le funzioni $f \circ \delta$ (con δ arco equivalente a γ) e $f \circ (-\gamma)$ sono continue, in quanto ottenute componendo una funzione continua tra due intervalli della retta reale con la funzione continua $f \circ \gamma$.

Proposizione 2.9 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ un arco di curva regolare, di sostegno C, e sia f una funzione definita su C e tale che $f \circ \gamma$ sia continua. Allora si ha*

$$\int_\gamma f = \int_{-\gamma} f \qquad e \qquad \int_\gamma f = \int_\delta f \,,$$

per ogni curva δ equivalente a γ.

Dimostrazione. Osserviamo che $(-\gamma)'(t) = -\gamma'(-t)$ e dunque $\|(-\gamma)'(t)\| = \|\gamma'(-t)\|$. Pertanto,

$$\int_{-\gamma} f = \int_{-b}^{-a} f\big((-\gamma)(t)\big) \, \|(-\gamma)'(t)\| \, dt = \int_{-b}^{-a} f\big(\gamma(-t)\big) \, \|\gamma'(-t)\| \, dt \,.$$

Con la sostituzione $s = -t$, da cui $ds = -dt$, si ha

$$\int_{-\gamma} f = -\int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\,\|\gamma'(s)\|\,ds = \int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\,\|\gamma'(s)\|\,ds = \int_\gamma f\,.$$

Analogamente, se $\delta = \gamma \circ \varphi$, con $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, è un arco equivalente a γ, si ha $\delta'(\tau) = \gamma'\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)$ con $\varphi'(\tau) > 0$. Dunque

$$\begin{aligned}\int_\delta f &= \int_c^d f\big(\delta(\tau)\big)\,\|\delta'(\tau)\|\,d\tau = \int_c^d f\big(\gamma(\varphi(\tau))\big)\,\|\gamma'\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)\|\,d\tau \\ &= \int_c^d f\big(\gamma(\varphi(\tau))\big)\,\|\gamma'\big(\varphi(\tau)\big)\|\,\varphi'(\tau)\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Ora eseguiamo la sostituzione $t = \varphi(\tau)$, da cui $dt = \varphi'(\tau)\,d\tau$, ottenendo

$$\int_\delta f = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f\,. \qquad \square$$

In base alla proposizione precedente, l'integrale curvilineo di una funzione non cambia se alla curva sostituiamo una curva ad essa congruente.

Notiamo che, detto c un qualunque punto in (a,b) e posto $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}$ e $\gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$, si ha, per la proprietà di additività dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione,

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f\,. \tag{2.4}$$

Il concetto di integrale curvilineo si estende in modo naturale agli archi regolari a tratti. Più precisamente sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un arco regolare a tratti e siano $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ punti di $[a,b]$ tali che gli archi di curva $\gamma_i = \gamma_{|[a_{i-1},a_i]}$, $i = 1,\ldots,n$, siano archi regolari. Sia ora f, come prima, una funzione definita almeno su C e tale che la funzione composta $f \circ \gamma$ sia continua su $[a,b]$. Si pone allora per definizione

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f\,.$$

Tale definizione è coerente con la proprietà additiva (2.4) delle curve regolari.

Osservazione 2.10 Il calcolo di un integrale curvilineo relativo a un arco regolare a tratti, può essere reso più agevole usando la Proposizione 2.9. Infatti si ha

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i} f \tag{2.5}$$

dove ogni δ_i è un arco di curva congruenti a γ_i, $i = 1,\ldots,n$, scelti in modo da semplificare il calcolo dei singoli integrali a secondo membro. $\square$

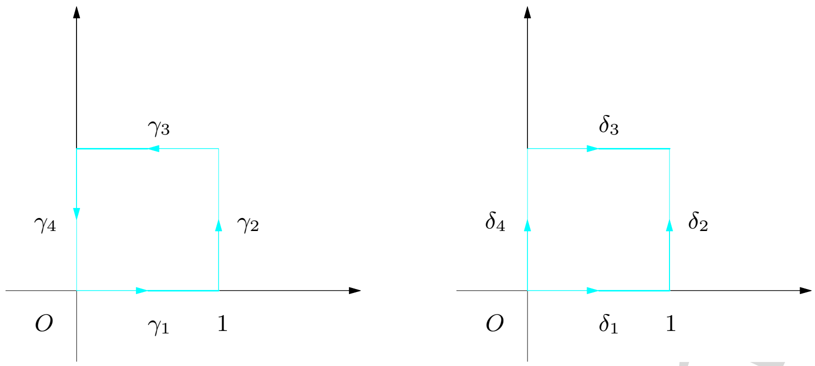

Figura 2.4. Parametrizzazione del quadrato unitario relativo all'Esempio 2.11

Esempio 2.11 Si voglia calcolare $\int_\gamma x^2$, dove $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ è la seguente parametrizzazione del bordo del quadrato unitario $[0,1] \times [0,1]$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = (t,0) & 0 \le t < 1\,, \\ \gamma_2(t) = (1,t-1) & 1 \le t < 2\,, \\ \gamma_3(t) = (3-t,1) & 2 \le t < 3\,, \\ \gamma_4(t) = (0,4-t) & 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

(si veda la Figura 2.4, a sinistra). Introduciamo la parametrizzazione

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1(t) = \gamma_1(t) & 0 \le t \le 1\,, & \delta_1 = \gamma_1\,, \\ \delta_2(t) = (1,t) & 0 \le t \le 1\,, & \delta_2 \sim \gamma_2\,, \\ \delta_3(t) = (t,1) & 0 \le t \le 1\,, & \delta_3 \sim -\gamma_3\,, \\ \delta_4(t) = (0,t) & 0 \le t \le 1\,, & \delta_4 \sim -\gamma_4 \end{cases}$$

(si veda la Figura 2.4, a destra). Allora si ha

$$\int_\gamma x^2 = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 1\,dt + \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 0\,dt = \frac{5}{3}\,. \qquad \square$$

2.3 Lunghezza di un arco e ascissa curvilinea

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un arco regolare a tratti; definiamo **lunghezza** di γ il numero

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma 1\,. \tag{2.6}$$

Nel caso di arco regolare, $\ell(\gamma)$ si esprime come

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt\,. \tag{2.7}$$

Tale definizione trova la seguente giustificazione geometrica. Introduciamo una suddivisione di $[a,b]$ mediante i punti $a = t_0 < t_1 < \ldots, t_{n-1} < t_n = b$ e consideriamo i punti $P_i = \gamma(t_i) \in C$, $i = 0, \ldots, n$. Tali punti individuano una poligonale in $\mathbb{R}^3$ (eventualmente degenere) la cui lunghezza è data da

$$\ell(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(P_{i-1}, P_i)$$

dove $\operatorname{dist}(P_{i-1}, P_i) = \|P_i - P_{i-1}\|$ è la distanza euclidea di due punti. Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned}\|P_i - P_{i-1}\| &= \sqrt{\big(x(t_i) - x(t_{i-1})\big)^2 + \big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big)^2 + \big(z(t_i) - z(t_{i-1})\big)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)_i^2}\, \Delta t_i\end{aligned}$$

avendo posto $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i = \left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right),$$

e similmente per le altre coordinate. Si ha dunque

$$\ell(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)_i^2}\, \Delta t_i\,;$$

si noti l'analogia con l'ultimo integrale della (2.7), di cui tale espressione può considerarsi un'approssimazione. Si dimostra che, se la curva è regolare a tratti, l'estremo superiore della quantità $\ell(t_0, t_1, \ldots, t_n)$, al variare di tutte le possibili suddivisioni di $[a,b]$, è finito e coincide con $\ell(\gamma)$.

Osserviamo che la lunghezza di un arco, così come definita dalla (2.6), dipende non solo dal sostegno C dell'arco, ma anche dalla particolare parametrizzazione scelta. Ad esempio, se parametrizziamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ mediante $\gamma_1(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, abbiamo

$$\ell(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r\,,$$

come ben noto dalla geometria elementare. Se invece usiamo la parametrizzazione $\gamma_2(t) = (r\cos 2t, r\sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$ otteniamo

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^{2\pi} 2r\, dt = 4\pi r\,.$$

In questo secondo caso, la circonferenza è stata percorsa due volte. In base alla Proposizione 2.9, due archi congruenti hanno la stessa lunghezza. Si può dimostrare che la lunghezza di un arco *semplice* o *di Jordan* dipende solo dal suo sostegno C; essa viene detta **lunghezza** di C e indicata con $\ell(C)$. Nell'esempio precedente, γ_1 è semplice mentre γ_2 non lo è; come si è visto, la lunghezza $\ell(C)$ della circonferenza è data da $\ell(\gamma_1)$.

Sia γ una curva regolare definita sull'intervallo I. Fissiamo un punto arbitrario $t_0 \in I$ e introduciamo la funzione $s : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau \,. \tag{2.8}$$

Ricordando l'espressione della lunghezza di un arco regolare data dalla (2.7), si ha

$$s(t) = \begin{cases} \ell(\gamma_{|[t_0,t]}) & t > t_0 \,, \\ 0 & t = t_0 \,, \\ -\ell(\gamma_{|[t,t_0]}) & t < t_0 \,. \end{cases}$$

La funzione s permette di definire una curva equivalente a γ che fornisce una nuova parametrizzazione del sostegno di γ. Infatti, ricordando il Teorema fondamentale del calcolo integrale e la definizione di curva regolare, si ha

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \,, \qquad \forall t \in T \,;$$

pertanto la funzione s è strettamente crescente e dunque invertibile su I. Detto $J = s(I)$, l'intervallo immagine di I attraverso s, indichiamo con $t : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ la funzione inversa di s. In altri termini, esprimiamo il parametro t in funzione di un nuovo parametro s, come $t = t(s)$. La curva $\widetilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^d$ definita come $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ è equivalente a γ (in particolare ha lo stesso sostegno C). Se $P = \gamma(t_1) \in C$ avremo anche $P = \widetilde{\gamma}(s_1)$ con t_1 e s_1 legati dalla relazione $t_1 = t(s_1)$. Il numero s_1 è detto **ascissa curvilinea** di P. Ricordando l'espressione della derivata di una funzione inversa, si osservi che

$$\widetilde{\gamma}'(s) = \frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s) = \frac{d\gamma}{dt}\big(t(s)\big)\,\frac{dt}{ds}(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \,;$$

da ciò segue

$$\|\widetilde{\gamma}'(s)\| = 1 \,, \qquad \forall s \in J \,.$$

Questo significa che usando l'ascissa curvilinea il sostegno della curva viene percorso con "velocità" costante uguale a 1.

Osservazione 2.12 Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ un arco regolare e sia s l'ascissa curvilinea definita dalla (2.8) con $t_0 = a$; allora $s(a) = 0$ e $s(b) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau = \ell(\gamma)$. Usando tale parametro per esprimere l'integrale curvilineo di una funzione f, si ha

$$\int_\gamma f = \int_{\widetilde{\gamma}} f = \int_0^{\ell(\gamma)} f\big(\widetilde{\gamma}(s)\big)\, ds = \int_0^{\ell(\gamma)} f\big(\tilde{\gamma}(t(s))\big)\, ds \,. \qquad \square$$

La definizione precedente di ascissa curvilinea può essere estesa in modo ovvio alle curve regolari a tratti.

Esempio 2.13 Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ il cui sostegno è l'elica circolare (vedasi l'Esempio 2.2 v)). Si ha $\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = (\sin^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} = \sqrt{2}$. Pertanto, scegliendo $t_0 = 0$, abbiamo

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau = \sqrt{2}\int_0^t d\tau = \sqrt{2}t\,.$$

Ne segue che $t = t(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s$, con $s \in \mathbb{R}$ e l'elica circolare può essere riparametrizzata mediante l'ascissa curvilinea come

$$\widetilde{\gamma}(s) = \left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}s, \sin\frac{\sqrt{2}}{2}s, \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\,. \qquad \square$$

2.4 Integrali di linea

Sia Ω un sottoinsieme non vuoto in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$.

Definizione 2.14 *Una funzione* $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *dicesi* **campo vettoriale** *in* Ω.

Indichiamo con $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$, le **componenti** di $\boldsymbol{F}$, ossia scriviamo $\boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_d)$.

Il concetto di integrale curvilineo può essere esteso ai campi vettoriali dando origine al concetto di integrale di linea. Precisamente sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ un arco regolare tale che il sostegno $C = \gamma([a, b])$ sia contenuto in Ω; in tal modo è definita su $[a, b]$ la funzione composta $\boldsymbol{F} \circ \gamma : t \mapsto \boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big)$ a valori in $\mathbb{R}^d$. Supporremo che tale funzione sia continua, vale a dire che tutte le componenti $f_i\big(\gamma(t)\big)$, definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$ siano funzioni continue. Per ogni $t \in [a, b]$, indichiamo con

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

il **versore tangente** al sostegno dell'arco nel punto $P(t) = \gamma(t)$. La funzione scalare $F_\tau = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}$ definita come

$$F_\tau(t) = \big(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\big)(t) = \boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \boldsymbol{\tau}(t)$$

rappresenta la componente del campo $\boldsymbol{F}$ lungo il versore tangente al sostegno di γ in $P = \gamma(t)$.

Definizione 2.15 *L'***integrale di linea** *di* $\boldsymbol{F}$ *su* γ *è l'integrale curvilineo su* γ *della funzione* F_τ*. Poniamo dunque*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot dP = \int_\gamma F_\tau\,.$$

Si osservi che l'integrale a secondo membro vale

$$\int_\gamma F_\tau = \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau} = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\boldsymbol{\tau}(t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,dt\,.$$

Pertanto l'integrale di linea di $\boldsymbol{F}$ su γ può essere espresso come

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot dP = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,dt\,. \tag{2.9}$$

Il significato fisico è di particolare importanza. Se $\boldsymbol{F}$ rappresenta un campo di forze applicato al sostegno della curva, l'integrale di linea rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ relativo allo spostamento definito dall'arco γ. La seguente proposizione è la controparte della Proposizione 2.9 per gli integrali di linea.

Proposizione 2.16 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ un arco di curva regolare, di sostegno C, e sia $\boldsymbol{F}$ un campo vettoriale definito su C e tale che $\boldsymbol{F}\circ\gamma$ sia continua. Allora si ha*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot dP = -\int_{-\gamma}\boldsymbol{F}\cdot dP \qquad e \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot dP = \int_\delta \boldsymbol{F}\cdot dP\,,$$

per ogni curva δ equivalente a γ.

Esempi 2.17 i) Consideriamo il campo vettoriale piano $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\boldsymbol{F}(x,y) = (y,x)$. Consideriamo poi l'ellisse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$che parametrizziamo mediante l'arco $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t)$. Si ha $\boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big) = (2\sin t, 3\cos t)$ e $\gamma'(t) = (-3\sin t, 2\cos t)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot dP &= \int_0^{2\pi}(2\sin t, 3\cos t)\cdot(-3\sin t, 2\cos t)\,dt\\ &= 6\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt = 6\int_0^{2\pi}(2\cos^2 t-1)\,dt\\ &= 12\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt - 12\pi = 0\,,\end{aligned}$$

essendo

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)\Big|_0^{2\pi} = \pi\,.$$

ii) Sia ora $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\mathrm{e}^x, x+y, y+z)$ e sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ l'arco $\gamma(t) = (t,t^2,t^3)$. Abbiamo $\boldsymbol{F}\big(\gamma(t)\big) = (\mathrm{e}^t, t+t^2, t^2+t^3)$ e $\gamma'(t) = (1,2t,3t^2)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot dP &= \int_0^1(\mathrm{e}^t, t+t^2, t^2+t^3)\cdot(1,2t,3t^2)\,dt\\ &= \int_0^1\big[\mathrm{e}^t+2(t^2+t^3)+3(t^4+t^5)\big]\,dt = \mathrm{e}+\frac{19}{15}\,.\end{aligned}$$

□