Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/06/2019 ☐

COGNOME: ⌊ | | | | | | | | | | | | | | | ⌋ NOME: ⌊ | | | | | | | | | | | | | | | ⌋

CANALE: ☐ Canale I (Siconolfi) ☐ Canale II (Leoni)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – In uno spazio metrico (X, d), siano $E \subset X$ un arbitrario sottoinsieme e

$$f(x) = \inf\{d(x, y)\,,\; y \in E\}\,.$$

(i) dimostrare che f è una funzione Lipschitziana, e determinarne la costante di Lipschitz;

(ii) dimostrare che $\{x \in X \;:\; f(x) > 0\} = \operatorname{int}(X \setminus E)$.

Esercizio n. 2 – Dato lo spazio $C([0,1])$ delle funzioni continue in $[0,1]$, con la usuale norma del sup, definiamo

$$(Lf)(x) = \int_0^1 e^{-(x+2)t}\, f(t)\, dt\,, \quad \forall\, f \in C([0,1])\,.$$

– Si provi che $Lf \in C([0,1])$ $\forall\, f \in C([0,1])$;

– si provi che $\exists!\, u \in C([0,1])$ tale che $L\,u = u$.

Esercizio n. 3 – Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2+2x)^k}{k\, \ln(k+1)}\,.$$

Esercizio n. 4 – Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\,(y-3) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

(i) si determini il parametro reale α in modo che la soluzione massimale sia definita in tutto $\mathbb{R}$ e risulti infinitesima per $t \to +\infty$;

(ii) determinare la soluzione massimale per $\alpha = \frac{3}{2}$.

Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/06/2019 ☐

COGNOME: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋ NOME: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

CANALE: ☐ Canale I (Siconolfi) ☐ Canale II (Leoni)

Esercizio n. 1 – In uno spazio metrico (X, d), siano $E \subset X$ un arbitrario sottoinsieme e

$$f(x) = \inf\{d(x, y)\,,\ y \in E\}\,.$$

(i) dimostrare che f è una funzione Lipschitziana, e determinarne la costante di Lipschitz;

(ii) dimostrare che $\{x \in X \ :\ f(x) > 0\} = \ \mathrm{int}\,(X \setminus E)$.

Esercizio n. 2 – Dato lo spazio $C([0, 1])$ delle funzioni continue in $[0, 1]$, con la usuale norma del sup, definiamo

$$(Lf)(x) = \int_0^1 e^{-(x+3)t} f(t)\,dt\,, \quad \forall\, f \in C([0, 1])\,.$$

– Si provi che $Lf \in C([0, 1])\ \forall\, f \in C([0, 1])$;

– si provi che $\exists\,!\, u \in C([0, 1])$ tale che $L\,u = u$.

Esercizio n. 3 – Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4x^2 + 4x)^k}{k\,(\ln k + 1)}\,.$$

Esercizio n. 4 – Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\,(y - 2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

(i) si determini il parametro reale α in modo che la soluzione massimale sia definita in tutto $\mathbb{R}$ e risulti infinitesima per $t \to +\infty$;

(ii) determinare la soluzione massimale per $\alpha = 1$.