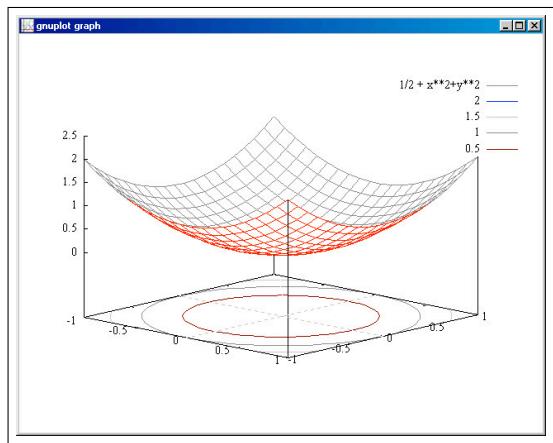


FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

2006-2007



prof. L.Lamberti
<http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti>
Appunti del Corso di
Funzioni di piú variabili
Corso di Laurea In Fisica
2006-2007

Il disegno di copertina, il grafico del paraboloido

$$z = \frac{1}{2} + x^2 + y^2,$$

sul quadrato $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ con valori $z \in [-0.1, 2.5]$
é stato realizzato con GNUPLOT, versione 4.0 con il seguente programma

```
gnuplot> set xrange [-1:1]
gnuplot> set yrange [-1:1]
gnuplot> set zrange [-0.1:2.5]
gnuplot> set isosamples 20,20
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> set zeroaxis
gnuplot> set contour base
gnuplot> unset mouse
gnuplot> splot 1/2 + x**2+y**2
```

*Appunti rivisti con la collaborazione di tutti gli studenti del Corso 2006,
in particolare*

*Riccardo Antonelli,
Michele Croia,
Lorenzo De Silva,
Diego Di Battista,
Matteo Mitrano,
Serena Persichetti,
Umberto Prospieri,
Elisa Rojatti,
Paolo Rosati.*

Ultima revisione: 5 gennaio 2007

Indice

Parte 1. Il corso	1
Capitolo 1. \mathbb{R}^2 spazio vettoriale normato	3
1. Il piano cartesiano: \mathbb{R}^2 come insieme	3
2. La struttura di spazio vettoriale	3
3. \mathbb{R}^2 come spazio normato	5
4. La distanza	9
5. Altre distanze	12
6. Convergenza in \mathbb{R}^2	14
7. Condizioni di convergenza	15
8. Il teorema di Bolzano	17
9. Come una successione può convergere ad un punto...?	20
10. Le successioni di Cauchy	23
11. Sottoinsiemi del piano	24
12. Punti interni e punti esterni a un insieme S	29
Capitolo 2. Le funzioni continue	37
1. Preliminari	37
2. Quando si parla di funzioni continue ?	40
3. La definizione	41
4. Insieme di definizione	42
5. Produrre funzioni continue	43
6. Le funzioni radiali	45
7. Grafico o linee di livello	48
8. I punti di discontinuità	53
9. Funzioni lipschitziane	55
10. Incollare espressioni diverse	56
Capitolo 3. Le curve	61
1. Introduzione	61
2. I segmenti	62
3. Le circonferenze	63
4. Le ellissi	64
5. Un'elica	64
6. I profili altimetrici	65

Capitolo 4. Due teoremi fondamentali	67
1. Contrimmagini tramite funzioni continue	67
2. Il teorema di Weierstrass	70
3. Il teorema d'esistenza degli zeri	75
4. Le conseguenze	76
Capitolo 5. I limiti	79
1. Il concetto di limite	79
2. Modifichiamo un valore	81
3. Prolungamento per continuitá	82
4. Ordine di infinitesimo di una funzione in un punto	82
5. Come si riconosce il limite in un punto	85
6. Limite secondo una direzione	87
7. Limite infinito	91
8. Limiti all'infinito	92
9. Funzioni composte	93
Capitolo 6. Le derivate	95
1. Derivate parziali	95
2. La pendenza di una superficie secondo una direzione	97
3. Le derivate parziali: prime, seconde,...	100
Capitolo 7. Derivabilitá e continuitá	107
1. Introduzione	107
2. Grafici piú o meno regolari	110
3. Differenziabilitá, continuitá, derivate parziali	111
4. Sono molte le funzioni differenziabili ?	113
5. Il piano tangente	114
6. Una caratterizzazione delle derivate	118
Capitolo 8. La derivazione delle funzioni composte	119
1. Introduzione	119
2. La variazione di funzioni composte	121
3. Derivate direzionali	123
4. Il teorema del valor medio	129
5. Interpretazione geometrica	132
Capitolo 9. Formula di Taylor	133
1. Introduzione	133
2. La formula in una dimensione	134
3. La formula di Taylor in due variabili	136
4. Formule di Taylor di ordine superiore	139
5. Formule di Taylor quasi gratuite...	141
6. Riflettiamo sulla formula di Taylor	142

	INDICE	v
7. Forme quadratiche	143	
8. La riduzione a forma canonica	147	
 Capitolo 10. Massimi e minimi relativi	 151	
1. Introduzione	151	
2. La selezione: condizioni sufficienti	153	
3. Massimo e minimo in insiemi chiusi e limitati	155	
4. Estremo superiore ed inferiore	159	
 Capitolo 11. Il teorema di Schwarz	 161	
1. Quante sono le derivate parziali seconde, terze,... ?	161	
2. Le derivate seconde miste	162	
3. Il teorema	164	
4. Un problema	165	
 Capitolo 12. Integrali di funzioni dipendenti da parametri	 167	
1. Il primo caso	167	
2. La regolarità	168	
3. Il caso generale	171	
4. Funzione composta	173	
5. Primitive di ordine superiore	174	
6. Il resto di Taylor	175	
 Capitolo 13. Misura di Peano Jordan nel piano	 177	
1. L'area dei sottografici	177	
2. Proprietà dell'area	178	
3. L'algoritmo di Peano Jordan	178	
4. L'area della frontiera...	181	
5. Un problema	182	
6. Arece di unioni e intersezioni...	182	
7. Un insieme non misurabile	183	
 Capitolo 14. Integrali multipli	 185	
1. Le somme integrali	185	
2. Somme, differenze e prodotti di funzioni integrabili	188	
3. Additività	189	
4. Integrabilità delle funzioni continue	190	
5. Il teorema della media	192	
6. Una generalizzazione naturale...	193	
7. Integrali tripli	195	
 Capitolo 15. Formule di riduzione degli integrali	 197	
1. Integrali sopra rettangoli	197	
2. Integrali su domini normali	200	

Parte 1

Il corso

CAPITOLO 1

\mathbb{R}^2 spazio vettoriale normato

1. Il piano cartesiano: \mathbb{R}^2 come insieme

L'insieme \mathbb{R}^2 é dato delle *coppie ordinate* di numeri reali

$$P \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow P \equiv (x, y) \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Tale insieme puó essere identificato, tramite un riferimento cartesiano, con il piano.

Coppie *ordinate* vuol dire che se, ad esempio, $P \equiv (3, 7)$, $Q \equiv (7, 3)$ allora

$$P \neq Q.$$

Il concetto di coppie ordinate é familiare: il giorno 4 marzo, (4, 3) é diverso dal 3 aprile, (3, 4).

I due numeri 3 e 7 si dicono coordinate di $P \equiv (3, 7)$, la prima si denomina anche con x_P e la seconda con y_P , quindi, nei casi precedenti

$$x_P = 3, \quad y_P = 7, \quad x_Q = 7, \quad y_Q = 3$$

OSSERVAZIONE 1.1. *Le terne (x, y, z) di numeri reali rappresentano lo spazio \mathbb{R}^3 che si identifica, tramite un riferimento cartesiano, con lo spazio fisico; le quaterne (x, y, z, w) formano \mathbb{R}^4 e possono pensarsi come punti di uno spazio di dimensione 4 ecc.*

2. La struttura di spazio vettoriale

Sugli elementi di \mathbb{R}^2 sono possibili le due operazioni seguenti:

- **La somma :**

$$\text{somma} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$+ : \{(x, y), (x', y')\} \rightarrow (x + x', y + y')$$

L'interpretazione geometrica insegna, per determinare la somma, *la regola del parallelogramma*.

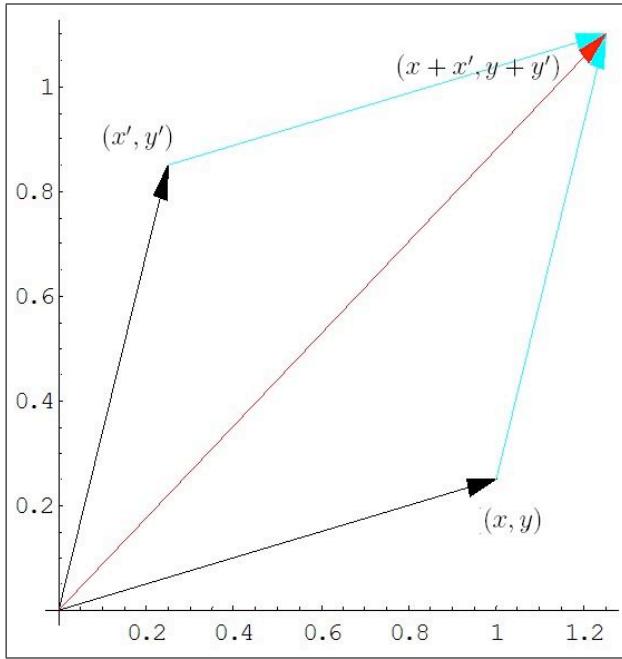


FIGURA 1. La regola del parallelogramma.

- **La moltiplicazione per uno scalare:**

$$\text{moltiplicazione} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\cdot : \{\lambda, (x, y)\} \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$$

OSSERVAZIONE 2.1. *La somma e la moltiplicazione per uno scalare stanno rispettivamente alla base delle seguenti trasformazioni del piano*

- *traslazioni*
- *omotetie*

Combinando la somma e la moltiplicazione introdotte, riconosciamo che

\mathbb{R}^2 è uno spazio vettoriale su \mathbb{R}

In altre parole si ha:

$$\text{se } P, Q \in \mathbb{R}^2, \quad \text{e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{allora } \alpha P + \beta Q \in \mathbb{R}^2$$

Esplicitiamo la frase precedente:

$$\begin{aligned} \text{se } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad \text{e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{allora} \\ (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

2.1. ATTENZIONE. La proprietà di ordinamento ben nota in \mathbb{R} si perde in \mathbb{R}^2 . In altre parole la frase:

$$P \in \mathbb{R}^2, \quad P' \in \mathbb{R}^2, \quad P \text{ è minore di } P'$$

è priva di significato in \mathbb{R}^2 .

E, d'altra parte, in che senso $(0, 1)$ potrebbe essere *minore* o *maggior*e di $(1, 0)$?

3. \mathbb{R}^2 come spazio normato

Sia

$$P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$$

si chiama norma (o anche modulo) di P il numero reale non negativo definito da

$$(1) \quad \|P\| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

Indichiamo la norma $\|P\|$ con due linee verticali, $\|\ \|$, per sottolineare il legame con il modulo $| |$ definito in \mathbb{R} .

La norma è un'applicazione da \mathbb{R}^2 in $[0, +\infty)$... è una funzione di due variabili:

$$\| \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

La norma $\|P\|$ rappresenta, tenuto conto del teorema di Pitagora, la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo \triangle_{OPH} essendo $O \equiv (0, 0)$, $H \equiv (x_P, 0)$.

È quindi ragionevole dire anche che la norma $\|P\|$ rappresenta la *distanza* di P dall'origine O e dare ad essa, in virtù del legame osservato con la geometria euclidea, il nome di *norma euclidea*.

Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 dotato della norma si dice

spazio vettoriale normato.

3.1. Proprietà della norma.

- *positività.* Per ogni $P \in \mathbb{R}^2$ riesce $\|P\| \geq 0$

$$\|P\| = 0 \Leftrightarrow P = O$$

- *omogeneità.* Per ogni $P \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ riesce

$$\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$$

in particolare $\|P\| = \| -P \|$

- *disuguaglianza triangolare.* Per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^2$ riesce, vedi Figura 2

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$$

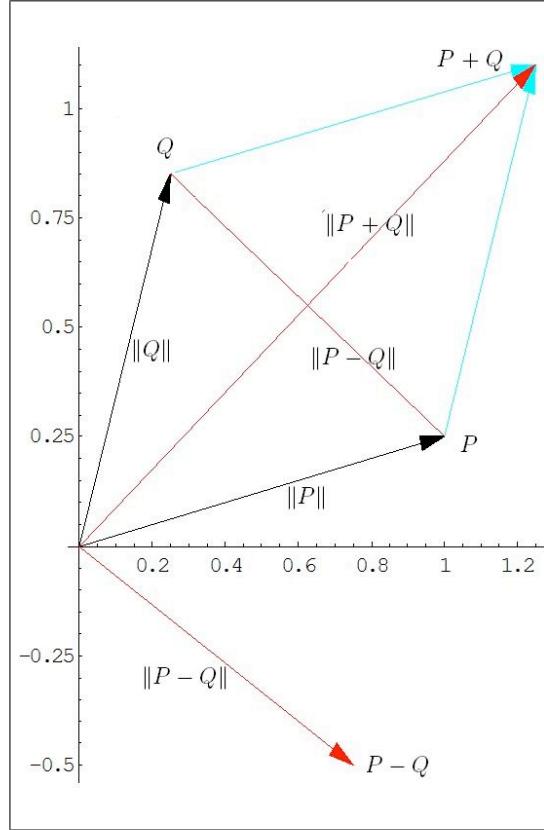


FIGURA 2. $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$, $|\|P\| - \|Q\|| \leq \|P - Q\|$

Le prime due affermazioni sono evidenti, la terza (molto meno ovvia) é dimostrata di seguito come un utile ... *esercizio algebrico*
Osserviamo il seguente

TEOREMA 3.1. *Qualunque siano $P, Q \in \mathbb{R}^2$ riesce*

$$|\|P\| - \|Q\|| \leq \|P - Q\|$$

DIMOSTRAZIONE.

$$P = Q + (P - Q) \Rightarrow \|P\| \leq \|Q\| + \|P - Q\|$$

da cui

$$(2) \quad \|P\| - \|Q\| \leq \|P - Q\|$$

Analogo procedimento partendo da

$$Q = P + (Q - P) \Rightarrow \|Q\| \leq \|P\| + \|Q - P\|$$

da cui, tenuto conto che $\|Q - P\| = \|P - Q\|$, segue

$$(3) \quad \|Q\| - \|P\| \leq \|P - Q\|$$

Le (2) e (3) implicano quindi la tesi. \square

3.2. Un esercizio algebrico.

Siano

$$P \equiv (x_P, y_P), \quad Q \equiv (x_Q, y_Q)$$

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$$

equivale a verificare che

$$(4) \quad \sqrt{(x_P + x_Q)^2 + (y_P + y_Q)^2} \leq \sqrt{x_P^2 + y_P^2} + \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$$

ovvero elevando al quadrato,

$$(x_P + x_Q)^2 + (y_P + y_Q)^2 \leq x_P^2 + y_P^2 + x_Q^2 + y_Q^2 + 2 \left(\sqrt{x_P^2 + y_P^2} \cdot \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} \right)$$

Semplificando si riconosce che resta da verificare che, qualunque siano i quattro numeri x_P, y_P, x_Q, y_Q si abbia

$$x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q \leq \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \cdot \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$$

Se $x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q \leq 0$ abbiamo finito altrimenti elevando ancora al quadrato, si deve avere

$$x_P^2 \cdot x_Q^2 + y_P^2 \cdot y_Q^2 + 2x_P \cdot x_Q \cdot y_P \cdot y_Q \leq x_P^2 \cdot x_Q^2 + y_P^2 \cdot x_Q^2 + x_P^2 \cdot y_Q^2 + y_P^2 \cdot y_Q^2$$

Semplificando i termini a primo e secondo membro siamo ridotti a verificare la diseguaglianza

$$(5) \quad 2x_P \cdot x_Q \cdot y_P \cdot y_Q \leq y_P^2 \cdot x_Q^2 + x_P^2 \cdot y_Q^2 \Leftrightarrow (x_Q y_P - x_P y_Q)^2 \geq 0$$

Quindi la (5) è vera e, quindi con essa anche la diseguaglianza iniziale (4) ad essa equivalente.

3.3. Una digressione: altre norme.

La norma

$$\|(x_P, y_P)\| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

soddisfa le tre proprietà elencate in 3.1 e si chiama *norma euclidea*.

A fianco alla norma euclidea si possono considerare altre espressioni che continuano a soddisfare tali proprietà e che pertanto meritano anch'esse

il nome di norme.

Ad esempio le seguenti

$$\|(x_P, y_P)\|_1 = \sqrt{4x_P^2 + 9y_P^2}$$

$$\|(x_P, y_P)\|_2 = |x_P| + |y_P|$$

$$\|(x_P, y_P)\|_3 = \max(|x_P|, |y_P|)$$

Sussiste, al riguardo di tali varie norme diverse, il seguente importante

TEOREMA 3.2. *Sia $\|P\|$ l'ordinaria norma euclidea e sia $\|P\|_k$ un'altra norma, cioè un'altra applicazione*

$$\|\cdot\|_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

che soddisfi le tre proprietà 3.1. Allora esistono due costanti positive m ed M tali che

$$m\|P\| \leq \|P\|_k \leq M\|P\|$$

DIMOSTRAZIONE. Limitiamoci a verificare il teorema proposto nel caso che la norma $\|P\|_k$ sia una delle tre precedentemente proposte:

- il caso della prima norma:

$$\begin{aligned}\|P\| &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \leq \sqrt{4x_P^2 + 9y_P^2} = \|P\|_1 \\ \|P\|_1 &= \sqrt{4x_P^2 + 9y_P^2} \leq 3\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = 3\|P\|\end{aligned}$$

$$\|P\| \leq \|P\|_1 \leq 3\|P\|$$

- il caso della seconda norma:

$$\begin{aligned}\|P\| &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \leq |x_P| + |y_P| = \|P\|_2 \\ \|P\|_2 &= |x_P| + |y_P| \leq 2\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = 2\|P\|\end{aligned}$$

$$\|P\| \leq \|P\|_2 \leq 2\|P\|$$

- il caso della terza norma:

$$\begin{aligned}\|P\| &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \leq 2 \max(|x_P|, |y_P|) = 2\|P\|_3 \\ \|P\|_3 &\leq 2\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = 2\|P\|\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\|P\| \leq \|P\|_3 \leq 2\|P\|$$

□

OSSERVAZIONE 3.3. Qual'è il valore del precedente teorema ?

Se tutti i punti di un certo insieme $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ hanno norma euclidea $\|P_i\| \leq \rho$ allora avranno, di conseguenza, le norme $\|P_i\|_k \leq M\rho$. Viceversa se tali punti avessero tutti $\|P_i\|_k \leq r$ allora avrebbero anche norme euclideanee

$$\|P_i\| \leq \frac{1}{m}r$$

In altri termini ogni norma è dominabile dalle altre ...

4. La distanza

DEFINIZIONE 4.1. La distanza $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ di due punti

$$P = (x_P, y_P) \quad Q = (x_Q, y_Q)$$

si definisce come la norma del vettore $Q - P$ da essi determinato

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

La distanza si indica spesso anche con la notazione

$$d(P, Q) = \overline{PQ}$$

DEFINIZIONE 4.2. Un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice limitato se $\exists M \geq 0$ tale che $\forall P \in A$ si abbia $\|P\| \leq M$.

OSSERVAZIONE 4.3. Dal precedente Teorema 3.2, vedi anche l'Osservazione 3.3, discende che per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ la limitatezza non dipende dalla norma scelta: se A è limitato rispetto ad una norma, ad esempio quella euclidea, allora è di conseguenza limitato rispetto a qualsiasi altra norma e viceversa.

4.1. Le proprietá della distanza.

- La distanza tra due punti P e Q è nulla se e solo se i due punti coincidono.
- La distanza è simmetrica: cioè la distanza di P da Q è la stessa della distanza di Q da P
- Vale la proprietà triangolare : comunque si prendano tre punti P , Q ed R riesce

$$\overline{PQ} \leq \overline{PR} + \overline{RQ}$$

Si tratta di tre proprietà immediate conseguenze delle tre proprietà della norma osservate precedentemente.

Nel caso di due punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ messi sulla stessa orizzontale, $y_P = y_Q$, riesce

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q|$$

ricordate il modulo...!

Il non metterlo avrebbe conseguenze devastanti:

- la distanza \overline{PQ} potrebbe venire negativa,
- la distanza non sarebbe più simmetrica.

Analoga attenzione al caso di punti messi sulla stessa verticale $x_P = x_Q$,

$$\overline{PQ} = \sqrt{(y_P - y_Q)^2} = |y_P - y_Q|$$

4.2. Una disegualianza fondamentale. $|x_P - x_Q|$ e $|y_P - y_Q|$ rappresentano le lunghezze dei due cateti del triangolo rettangolo PQP' , vedi Figura 3.

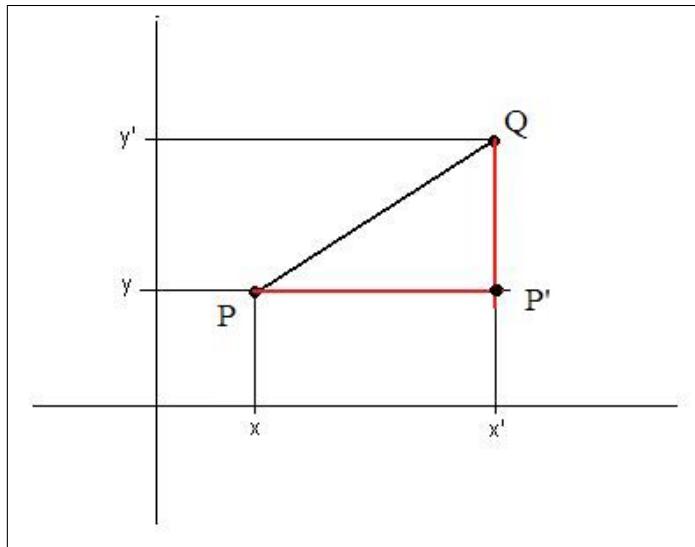


FIGURA 3. Il teorema di Pitagora

Tenuto conto che la lunghezza dei cateti è minore di quella dell'ipotenusa si ha

$$|x_P - x_Q| \leq \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2},$$

$$|y_P - y_Q| \leq \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

e ovviamente

$$|x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \leq 2\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

4.3. L'invarianza per traslazione. Scelto un punto T la corrispondenza τ_T che fa corrispondere a ogni $P \in \mathbb{R}^2$ il punto $\tau_T(P) = P + T$ si dice *traslazione* determinata da P .

Sussiste il seguente importante

TEOREMA 4.4. *Le traslazioni conservano le distanze: cioè $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$ riesce*

$$\overline{\tau_T(P)\tau_T(Q)} = \overline{PQ}$$

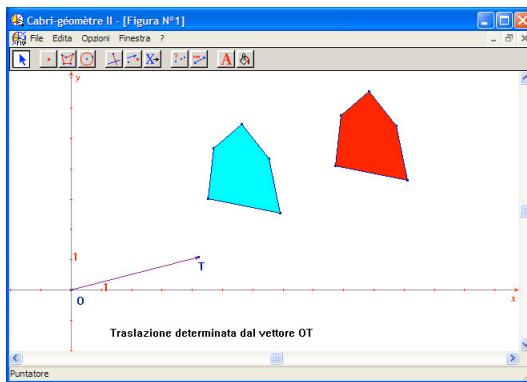


FIGURA 4. La traslazione.

DIMOSTRAZIONE.

$$\overline{\tau_T(P)\tau_T(Q)} = \|(Q + T) - (P + T)\| = \|Q - P\| = \overline{PQ}$$

□

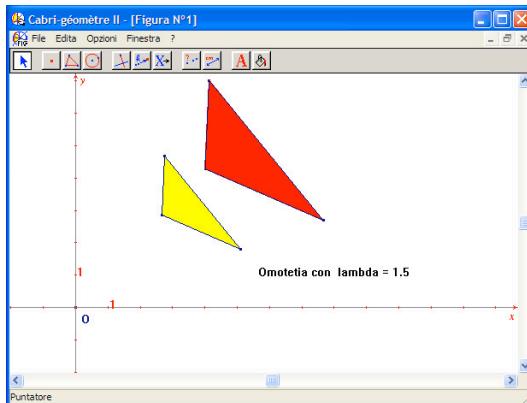


FIGURA 5. L'omotetia con $\lambda = 1.5$.

OSSERVAZIONE 4.5. *Le omotetie determinate da un parametro $\lambda \neq 1$*

$$\lambda : P \rightarrow \lambda P$$

non conservano le distanze: riesce infatti, vedi Figura 5,

$$\overline{(\lambda P)(\lambda Q)} = |\lambda| \overline{PQ}$$

4.4. Gli intorni circolari. Definita la distanza si parla dei cerchi o dischi, oggetti che la geometria definisce appunto tramite la distanza: il *disco aperto* o intorno circolare aperto di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio δ è l'insieme $I_\delta(C)$ dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$\overline{PC} < \delta$$

$$I_\delta(C) = \{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < \delta^2\}.$$

L'insieme

$$\{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq \delta^2\}.$$

si dice invece intorno chiuso di C .

L'insieme

$$\{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \delta^2\}.$$

è la circonferenza che delimita l'intorno circolare, la *buccia* di $I_\delta(C)$

5. Altre distanze

La definizione della distanza tra due punti assunta, vedi Definizione 4.1 , e riferita alla norma euclidea può essere sostituita con altre dedotte da norme diverse quali, ad esempio

$$(6) \quad d_1(P, Q) = \|P - Q\|_1$$

oppure

$$(7) \quad d_2(P, Q) = \|P - Q\|_2$$

oppure ancora

$$(8) \quad d_3(P, Q) = \|P - Q\|_3$$

ecc. ecc.

Le distanze generalizzate introdotte soddisfano le tre proprietà della distanza illustrate nel paragrafo precedente.

Le traslazioni continuano a conservare le distanze anche nei casi generalizzati indicati sopra.

Anche per le distanze generalizzate si possono considerare gli intorni circolari, con la sorpresa che non sempre essi somigliano, vedi Figura 6, ai cerchi della geometria euclidea...!

Si possono riconoscere, tenuto conto del Teorema 3.2, le seguenti relazioni di confronto:

- $d_1(PQ) \leq 3 d(PQ)$

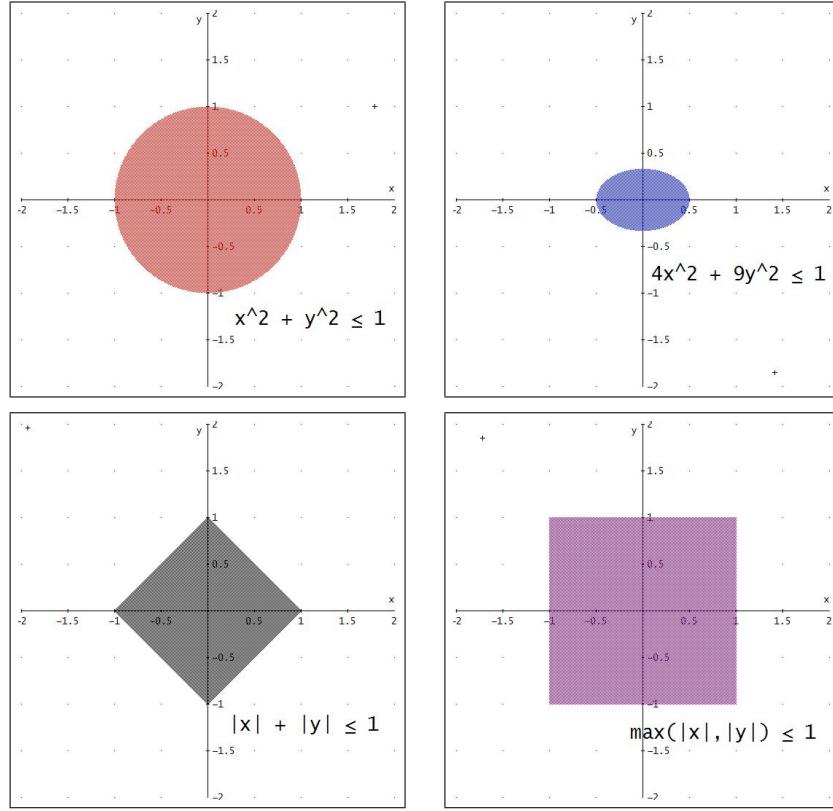


FIGURA 6. Intorno circolare dell'origine di raggio 1 nella metrica euclidea e nelle altre tre introdotte

- $d(PQ) \leq d_1(PQ) \leq 3d(PQ)$
- $d(PQ) \leq d_2(PQ) \leq 2d(PQ)$

Da tali relazioni si deduce, fra l'altro che dentro ogni intorno circolare di un punto P relativamente ad una di tali metriche si trova un analogo intorno, di raggio diverso, relativo a ciascuna delle altre metriche.

5.1. Una distanza sorprendente... Definiamo la distanza di P da Q al modo seguente

$$\delta(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{se } P \neq Q \\ 0 & \text{se } P = Q \end{cases}$$

È facile verificare che tale (sorprendente) espressione soddisfa le tre proprietà osservate nel paragrafo 4.1.

Piú interessante é riflettere su come siano fatti gli intorni circolari di un punto rispetto a tale metrica: per ogni P l'intorno circolare aperto $I_\rho(P)$ di raggio ρ é formato del solo punto P se $\rho \leq 1$, é formato da tutto lo spazio se $\rho > 1$.

Si potrebbe dire che questa sorprendente metrica cancella le idee naturali dell'essere

abbastanza vicino, più vicino ancora, vicinissimo, ecc.

o si coincide, e allora si ha (giustamente) distanza nulla o non si coincide e allora si ha, dovunque ci si trovi, la stessa distanza, convenzionalmente assunta 1.

Tale distanza viene tradizionalmente indicata col titolo di *metrica discreta*.

OSSERVAZIONE 5.1. *La metrica discreta non è dedotta da alcuna norma: basta controllare come si comporta di fronte alle omotetie di coefficiente λ . Le metriche δ dedotte da una norma verificano infatti necessariamente la relazione*

$$\delta(\lambda P, \lambda Q) = |\lambda| \delta(P, Q)$$

mentre per la metrica discreta riesce

$$\delta(\lambda P, \lambda Q) = \delta(P, Q), \quad \forall \lambda \neq 0$$

Un'altra sorpresa della... sorprendente metrica discreta si incontra con la nozione di insieme limitato: tutti gli insiemi sono limitati rispetto alla metrica discreta, infatti nessun punto dista dall'origine più di 1...

Si noti che al contrario di quanto osservato per la nozione di spazio normato, cfr. Teorema 3.2, in spazi metrici generali, cioè con distanze anche non dedotte da norme, possono incontrarsi insiemi limitati rispetto ad una distanza e non limitati rispetto ad un'altra.

6. Convergenza in \mathbb{R}^2

Tenuto conto della definizione di norma nel piano, Definizione 4.1, una successione di punti $P_n = \{(x_n, y_n)\}$ $n = 1, 2, \dots$ può essere:

- **limitata** : se esiste un $M > 0$ ed un disco di raggio M che contenga tutti i punti P_n

ESEMPIO 6.1.

- La successione $P_n = (n, n^2)$ non è limitata,
- La successione $P_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ è limitata.

- **convergente** : se esiste un punto $C = (\alpha, \beta)$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esista n_ϵ tale che

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \|P_n - C\| < \epsilon$$

in questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C$$

e C si chiama ancora **limite** della successione P_n .

ESEMPIO 6.2.

- La successione $\{P_n\} = \{\cos(n)/n, \sin(n)/n\}$ é convergente all'origine.
- La successione $\{P_n\} = \{n, n\}$ non é convergente.

Dire che una successione $\{P_n\}$ converge al punto C significa che i punti P_n si avvicinano, al crescere di n , sempre piú a C :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P_n C} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - C\| = 0$$

ovvero che la successione numerica $\|P_n - C\|$ delle norme é infinitesima.

- **non limitata** oppure **limitata e non convergente**.
 - La successione precedente $\{P_n\} = \{n, n\}$ é non limitata
 - La successione $\{P_n\} = \{\cos(n), \sin(n)\}$ é limitata ma non convergente¹.

OSSERVAZIONE 6.3. Se una successione $\{P_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ $n = 1, 2, \dots$ converge al punto C in una norma continua a convergere a C in ogni altra norma, risultato che deriva dal Teorema 3.2.

7. Condizioni di convergenza

Nel caso delle successioni di numeri reali la convergenza é spesso abbinata alla monotonia: quasi tutte le successioni che conosciamo come convergenti lo sono in quanto monotone (il numero e , le somme delle serie a termini positivi, ecc.).

Molto diversa é, cfr. 2.1, la situazione nel piano: una successione di punti non puó essere monotona per il semplice motivo che nel piano, diversamente che sulla retta, non c'é ordinamento (cosa vuol dire che un punto P precede un punto Q ?).

Una successione $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ di punti del piano corrisponde a... due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di numeri reali.

Usando la definizione 1 si vede che

- dire che la $\{P_n\}$ é limitata equivale a dire che sono limitate entrambe le successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$,
- dire che la $\{P_n\}$ non é limitata equivale a dire che non é limitata una almeno delle due $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

¹I punti $\{P_n\} = \{\cos(n), \sin(n)\}$ si distribuiscono sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ in un modo irregolare ma sorprendente: costituiscono sulla circonferenza un insieme ovunque denso. Il motivo certamente non banale di ciò é l'irrazionalitá di π

TEOREMA 7.1. Condizione necessaria e sufficiente perché la successione

$$P_n = (x_n, y_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

converga al punto $C = (\alpha, \beta)$ è che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$$

DIMOSTRAZIONE.

Necessità: Tenuto conto della diseguaglianza fondamentale, cateti più corti dell'ipotenusa, vedi Figura 3, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (\alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} |x_n - \alpha| \leq \|P_n - C\| \\ |y_n - \beta| \leq \|P_n - C\| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta \end{cases}$$

Sufficienza: Tenuto conto della diseguaglianza fondamentale, ipotenusa più corta della somma dei cateti, vedi Figura 3, si ha

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_n - \alpha| \leq \epsilon \\ |y_n - \beta| \leq \epsilon \end{cases} \Rightarrow P_n C \leq \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2} = \epsilon\sqrt{2}$$

□

OSSERVAZIONE 7.2 (Una dimostrazione sintetica). È evidente che

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|\} = 0$$

Tenuto conto del Teorema 3.2 si ha

$$0 \leq \max \{|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|\} \leq \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2}$$

$$0 \leq \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \leq 2 \max \{|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|\}$$

quindi, teorema dei carabinieri, dalla prima si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|\} = 0$$

e dalla seconda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|\} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} = 0$$

7.1. Convergenza e metriche diverse.

Dire che una successione $\{P_n\}$ converge al punto C significa che i punti P_n si avvicinano, al crescere di n , sempre più a C :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, C) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - C\| = 0$$

Disponendo di metriche diverse potrebbe quindi accadere che una stessa successione $\{P_n\}$ sia convergente rispetto a certe metriche e non convergente rispetto ad altre.

I confronti riconosciuti nel paragrafo 5, pagina 12 tuttavia consentono di riconoscere che se una successione $\{P_n\}$ è convergente rispetto alla distanza tradizionale lo è anche rispetto alle distanze 6, 7, 8 introdotte. Diversamente vanno le cose riferendosi alla (sorprendente) distanza *discreta* del paragrafo 5.1: dire infatti che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(P_n, C) = 0$$

non può che significare, tenuto conto che δ produce solo valori 1 o 0, che

$$\delta(P_n, C) = 0, \quad \forall n > n_0$$

cosa che corrisponde ad avere

$$P_n = C, \quad \forall n > n_0$$

In altri termini le successioni convergenti rispetto alla metrica discreta sono pochissime: solo quelle i cui termini divengono definitivamente costanti !

Quel che è peggio è che il carattere di convergenza o meno di una successione dipende, qualora si ammettano distanze non dedotte da una norma, dal tipo di distanza adottata.

8. Il teorema di Bolzano

Il precedente Teorema 7.1 riconosce l'equivalenza tra convergenza di una successione $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ di punti del piano e la convergenza delle due successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ delle relative coordinate.

Un analogo risultato sussiste per la limitatezza: l'insieme

$$E = \{P_0, P_1, \dots\}$$

è limitato se e solo se sono limitati i due insiemi di numeri reali

$$A = \{x_0, x_1, \dots\} \quad B = \{y_0, y_1, \dots\}$$

formati dalle coordinate dei P_n .

TEOREMA 8.1. *Le successioni convergenti sono (tutte) limitate.*

OSSERVAZIONE 8.2. *Dal teorema 8.1, precedente, discende, quindi, che una successione non limitata non è convergente.*

DEFINIZIONE 8.3. *Sia $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ una successione assegnata e sia*

$$\{i_1, i_2, i_3, \dots\}$$

una successione di naturali strettamente crescente: la successione

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\}$$

si dice sottosuccessione della successione assegnata.

OSSERVAZIONE 8.4. *Il termine sottosuccessione può essere chiarito tramite alcuni esempi.*

Consideriamo la successione $\{1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali

- *la successione $\{1, \pi, 2, 3, 4, \dots\}$ non è una sottosuccessione della successione dei naturali,*
- *la successione $\{1, 3, 2, 4, \dots\}$ non è una sottosuccessione della successione dei naturali,*
- *la successione $\{1, 2, 2, 3, 4, \dots\}$ non è una sottosuccessione della successione dei naturali,*
- *la successione $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ è una sottosuccessione della successione dei naturali.*

Riassumendo:

- *una sottosuccessione di una successione assegnata deve essere composta di termini appartenenti alla prima successione, nel primo esempio di cui sopra quel $\pi \dots$*
- *i termini devono figurare nello stesso ordine in cui figuravano nella prima, quello scambio di 3 con 2 del secondo esempio...*
- *non si possono, nella sottosuccessione, ripetere termini che nella successione non siano ripetuti, quella ripetizione di 2 nel terzo esempio...*

Se una successione $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ converge ad ℓ allora convergono, ancora ad ℓ , tutte le sue sottosuccessioni.

Viceversa una successione non convergente può avere sottosuccessioni ancora non convergenti e sottosuccessioni convergenti.

Il Teorema di Bolzano di \mathbb{R}^1 ,

*da ogni successione limitata di numeri reali $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$
si può estrarre una sottosuccessione convergente ,*

consente di stabilire l'analogo importante teorema relativo alle successioni limitate di punti del piano

TEOREMA 8.5 (Bolzano). *Da ogni successione $\{P_n\}$ di punti del piano limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente*².

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{P_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ limitata in \mathbb{R}^2 : allora sono limitate anche le due successioni di numeri reali delle coordinate

$$\{x_n\}, \quad \{y_n\}$$

Applichiamo alla prima, $\{x_n\}$, il teorema di Bolzano unidimensionale: sia

$$\{x_{n_k}\}$$

una sua sottosuccessione convergente.

Consideriamo ora la sottosuccessione

$$\{y_{n_k}\}$$

estratta dalla $\{y_n\}$ con gli stessi indici della $\{x_{n_k}\}$: essa è ancora limitata e quindi, applicando ancora ad essa il teorema di Bolzano unidimensionale si ricava l'esistenza di una

sotto-sotto-successione

$$\{y_{n_{k_j}}\}$$

convergente.

Consideriamo ora la successione

$$\left\{ P_{n_{k_j}} \right\} = \left\{ (x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \right\}$$

si tratta di una sottosuccessione della $\{P_n\}$ convergente perché sono convergenti entrambe le due successioni delle coordinate:

- la prima $\{x_{n_{k_j}}\}$ perché sottosuccessione della $\{x_{n_k}\}$ già convergente,
- la seconda perché la $\{y_{n_{k_j}}\}$ era convergente.

Abbiamo quindi riconosciuto l'esistenza di sottosuccessioni della successione limitata $\{P_n\}$ convergenti: abbiamo quindi dimostrato il teorema di Bolzano in \mathbb{R}^2 .

Una dimostrazione perfettamente analoga può essere proposta in \mathbb{R}^3 .

□

²...relativamente a qualsiasi metrica dedotta da una norma: attenzione la sorprendente metrica discreta non è dedotta da una norma e infatti per essa non vale il Teorema di Bolzano.

OSSERVAZIONE 8.6 (Una curiosità). *Prendete due successioni qualsiasi di numeri reali $\{\xi_n\}$ e $\{\eta_n\}$ e considerate la successione*

$$\{P_n = (\cos(\xi_n), \sin(\eta_n)), \quad n = 0, 1, \dots\}$$

Essa contiene (infinite) sottosuccessioni convergenti.

Si tratta infatti di una successione $\{P_n\}$ limitata del piano e quindi, per il Teorema di Bolzano, contiene sottosuccessioni convergenti.

Che ce ne siano infinite poi... è ovvio !

9. Come una successione può convergere ad un punto...?

Consideriamo ora, tramite alcuni esempi alcuni stili di convergenza di successioni P_n di punti del piano ad un limite C :



$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right)$$

La successione, Figura 7 a sinistra converge a $C = (0, 0)$: i

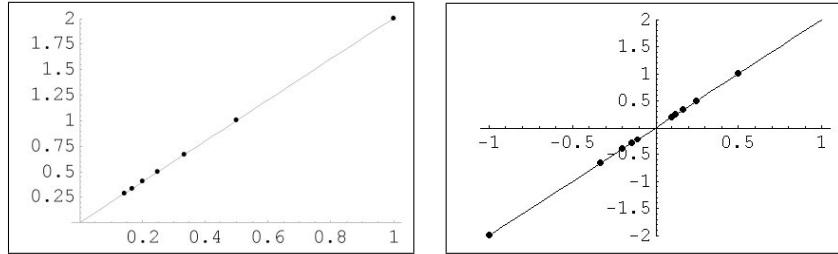


FIGURA 7. Due successioni: $P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right)$ e $P_n = \left((-1)^n \frac{1}{n}, (-1)^n \frac{2}{n} \right)$

punti della successione sono tutti collocati sulla retta del piano $y = 2x$.

I punti si avvicinano, al crescere di n , all'origine muovendosi sulla semiretta $y = 2x$, $x > 0$.



$$P_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-2)^n}{n} \right)$$

La successione, Figura 7 a destra converge a $C = (0, 0)$: i punti della successione sono tutti collocati sulla retta del piano $y = 2x$.

I punti si avvicinano, al crescere di n , all'origine muovendosi alternativamente sulla semiretta $y = 2x$, $x > 0$ e su quella opposta relativa a $x < 0$.

•

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right)$$

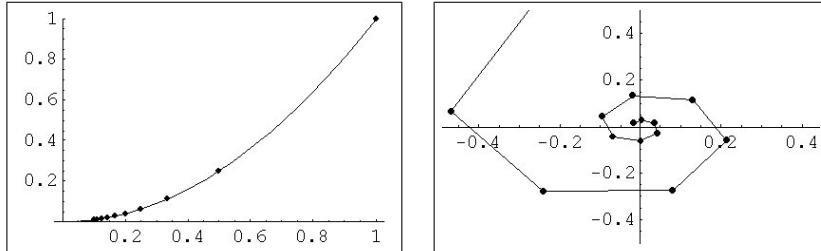


FIGURA 8. Una successione sulla $y = x^2$: $P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right)$
e un'altra spiraleggianti $P_n = e^{-\frac{n}{4}} (\cos n, \sin n)$

La successione, Figura 8 a sinistra converge a $C = (0, 0)$: i punti della successione sono tutti collocati sulla parabola $y = x^2$.

•

$$P_n = \left(e^{-\frac{n}{4}} \cos n, e^{-\frac{n}{4}} \sin n \right)$$

La successione, Figura 8 a destra converge a $C = (0, 0)$: infatti

$$\overline{P_n C} = \sqrt{(e^{-\frac{n}{4}} \cos n - 0)^2 + (e^{-\frac{n}{4}} \sin n - 0)^2} = e^{-\frac{n}{4}}$$

I punti P_n si avvicinano all'origine viaggiando su una spirale...

9.1. Visualizzare una successione con GnuPlot. Questi sono i comandi per visualizzare i primi 15 punti della successione

$$P_n = \left(\cos(n) \frac{1}{n}, \sin(n) \frac{1}{n} \right)$$

con GnuPlot, vedi schermata di GnuPlot Figura 9:

```
set parametric
set function style linespoints
x(t)=cos(int(t))/int(t)
y(t)=sin(int(t))/int(t)
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
plot [1:15] x(t),y(t)
```

Si noti che i valori interi di n sono espressi da

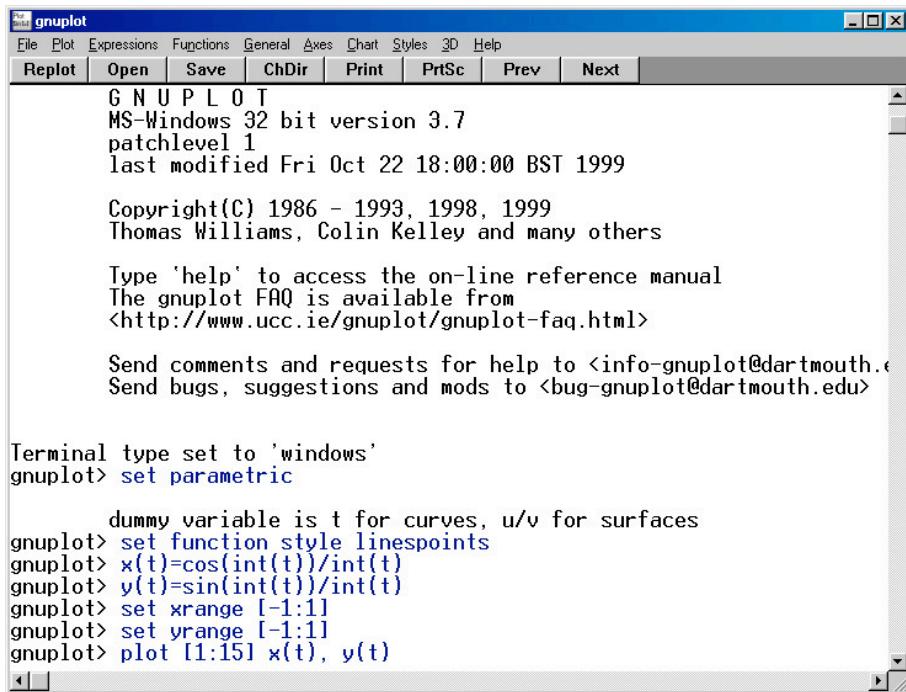


FIGURA 9. La schermata di GnuPlot

int(t)

le funzioni x_n ed y_n sono definite con le due funzioni $x(t)$ ed $y(t)$, cambiando le quali si possono rappresentare altre successioni.

Si noti la scelta della finestra cartesiana

`set xrange [-1:1], set yrange [-1:1]`

da scegliere adeguata alla successione che si vuol visualizzare.

Se avessimo scelto, ad esempio `set xrange [-2:-11]`, sullo schermo non sarebbe stato visualizzato nessun punto della successione.

Se avessimo scelto invece

```
set xrange [-100:100]
set yrange [-100:100]
```

una finestra molto ampia i punti della successione sarebbero apparsi tanto vicini fra loro da confondersi in una sola macchiolina....

Le linee `set function style linespoints` che collegano i punti della successione, Figura 10, non necessarie a priori, sono tuttavia utili a evidenziare la sequenza primo punto, secondo punto, terzo,...

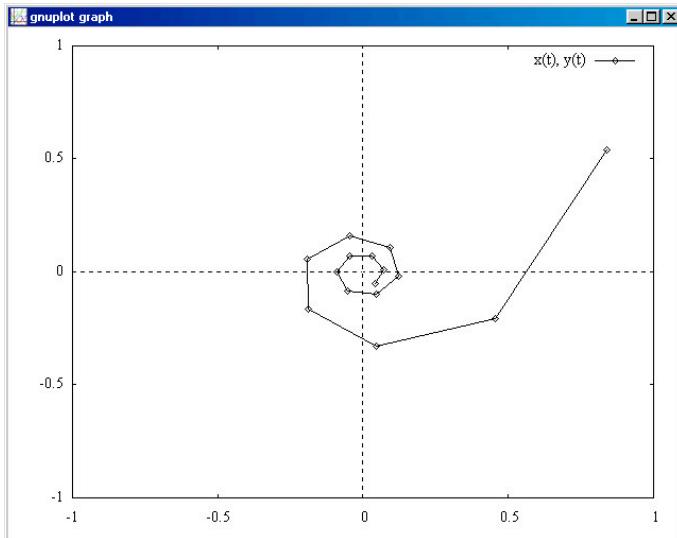


FIGURA 10. $P_n = \left(\cos(n)\frac{1}{n}, \sin(n)\frac{1}{n} \right)$, $n \in [1, 15]$

10. Le successioni di Cauchy

DEFINIZIONE 10.1. Una successione $\{P_n\} \in \mathbb{R}^2$ é una successione di Cauchy (o successione fondamentale) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|P_n - P_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

Come quelle di \mathbb{R}^1 anche le successioni di Cauchy in \mathbb{R}^2 godono delle proprietà:

TEOREMA 10.2.

- (1) Ogni successione di Cauchy é limitata.
- (2) Ogni successione convergente é di Cauchy.
- (3) Ogni successione di Cauchy é convergente.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione é fondata sul precedente Teorema 7.1 che lega la convergenza di una successione di punti $\{P_n\} \in \mathbb{R}^2$ alla convergenza delle due successioni di numeri reali delle coordinate

$$(9) \quad \{x_{P_n}\}, \quad \{y_{P_n}\}$$

É facile riconoscere che la successione $\{P_n\}$ é di Cauchy se e solo se sono di Cauchy le due successioni (9) delle coordinate.

Ma allora se le (9) sono di Cauchy saranno

- limitate,
- convergenti.

E allora, sempre per il Teorema 7.1 sarà limitata e convergente anche la successione $\{P_n\} \in \mathbb{R}^2$. \square

DEFINIZIONE 10.3. *Uno spazio normato nel quale tutte le successioni di Cauchy siano convergenti si dice completo.*

Ricordiamo che \mathbb{R} è completo: la proprietà di completezza di \mathbb{R} è espressa spesso servendosi dell'ordinamento (sezioni di Dedekind, ecc.)

La completezza di \mathbb{R}^2 è espressa invece esclusivamente tramite le successioni di Cauchy.

11. Sottoinsiemi del piano

La determinazione di un insieme del piano, ([2], pag.3) può essere fatta in *infiniti* modi: gli insiemi più comuni sono tuttavia regioni del piano delimitate da curve regolari a tratti

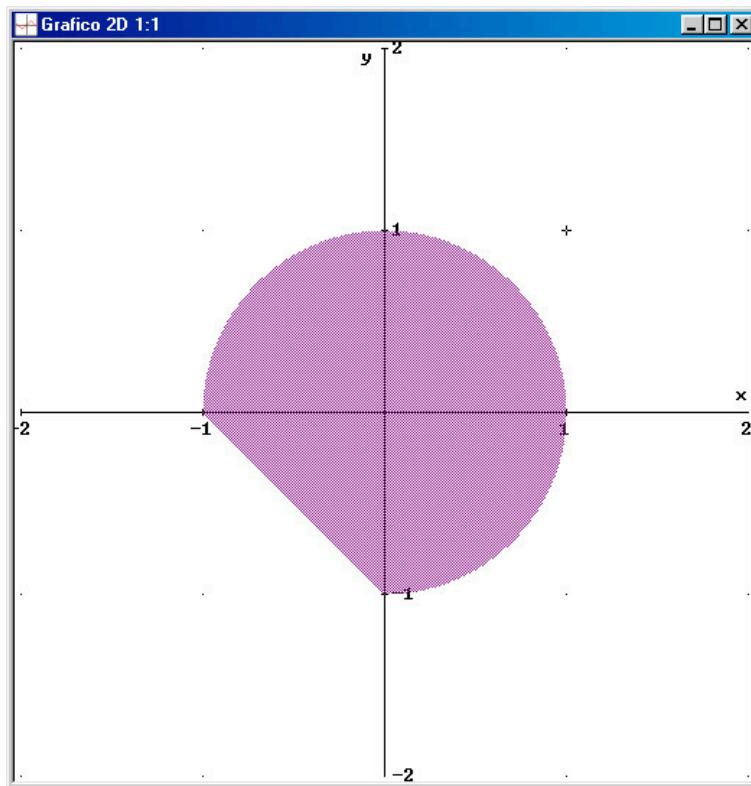


FIGURA 11. Cerchio e semipiano: $(x^2 + y^2 \leq 1) \cap (x + y + 1 \geq 0)$

- **semipiani:**

semipiani : $ax + by + c > 0$, semipiano aperto esclusa la retta che lo delimita,

- **semipiani:** $ax + by + c \geq 0$ semipiano chiuso che include anche la retta che lo delimita.

Per riconoscere un semipiano assegnato come in Figura 12, basta

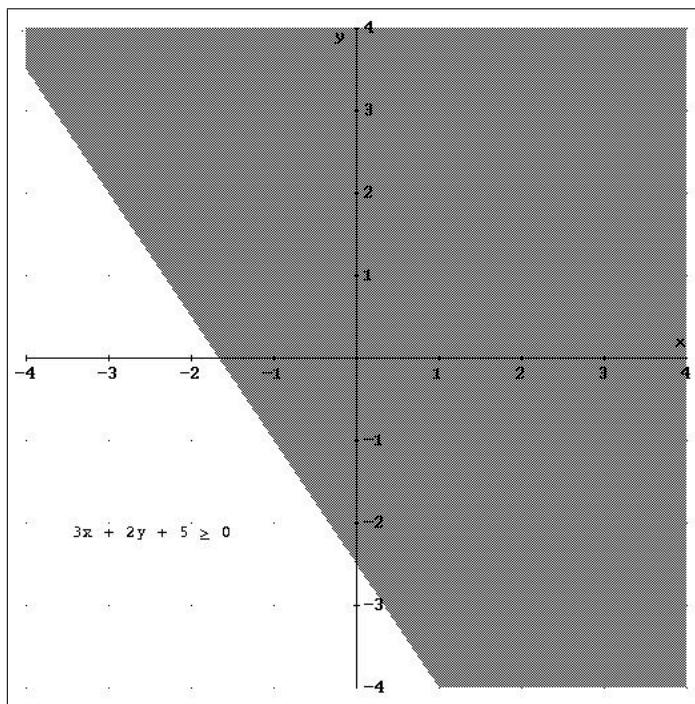


FIGURA 12. Il semipiano $3x + 2y + 5 \geq 0$

- disegnare la retta che lo delimita
- provare prendendo un punto in uno, a caso, dei due semipiani, se esso soddisfa o meno la disequazione richiesta.
- Nel caso di Figura 12, si può provare, ad esempio con l'origine: riconosciuto che $3.0 + 2.0 + 5 = 5 \geq 0$ si conclude che il semipiano determinato dalla disequazione $3x + 2y + 5 \geq 0$ è, dei due determinati dalla retta $3x + 2y + 5 = 0$, quello che contiene l'origine³.

³La prova che il controllo suggerito, controllo su un solo punto, sia giusto e sufficiente non è, al livello del Corso attuale, ancora dimostrato. Dovremmo riconoscere (o accettare come evidente) che se in due punti l'espressione $ax + by + c$ prende valori di segno opposto il segmento da essi determinato taglia necessariamente la retta $ax + by + c = 0$.

- **rettangoli:**

domini rettangolari aperti: $a < x < b$, $c < y < d$, il rettangolo senza la sua cornice-frontiera,

domini rettangolari chiusi: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, il rettangolo inclusa la frontiera.

- **dischi:**

dischi aperti $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$

- interno aperto di un'ellisse $(x - \alpha)^2/a^2 + (y - \beta)^2/b^2 < 1$

- ricorrendo a sistemi di disequazioni si possono, Figura 11, rappresentare domini intersezioni dei precedenti

- **sottografici:**

domini normali aperti (sottografici) $a < x < b$, $g(x) < y < f(x)$ essendo $g(x)$, $f(x)$ funzioni definite su $[a, b]$ con $g(x) < f(x)$.

In Figura 13 é riportato il dominio normale determinato per $x \in [-1, 1]$ da due parabole

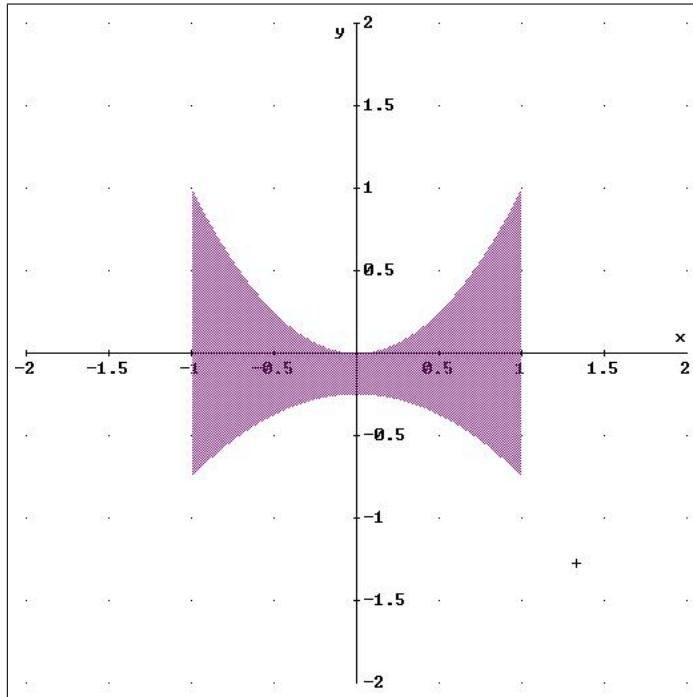


FIGURA 13. Il dominio normale aperto $-1 < x < 1$, $-0.25 - 0.5x^2 < y < x^2$

11.1. Equazioni e disequazioni. Si noti come gli insiemi del piano considerati finora siano determinati tramite DISEQUAZIONI.

Anche le equazioni, ad esempio

$$(10) \quad x^2 + y^2 = 1,$$

determinano insiemi del piano: ma essi sono, differentemente dai precedenti, quasi sempre composti da linee del piano.

Nel caso dell'equazione (10) si rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

È particolarmente importante saper riconoscere le linee del piano relative alle equazioni formate da un polinomio di secondo grado,

$$a x^2 + b y^2 = 1 :$$

si tratta di *coniche*,

- $a = b > 0$ circonferenze di centro l'origine e raggio $r = 1/\sqrt{a}$
- $a > 0, b > 0, a \neq b$ ellissi di centro l'origine e semiassi $1/\sqrt{a}, 1/\sqrt{b}$, vedi Figura 14

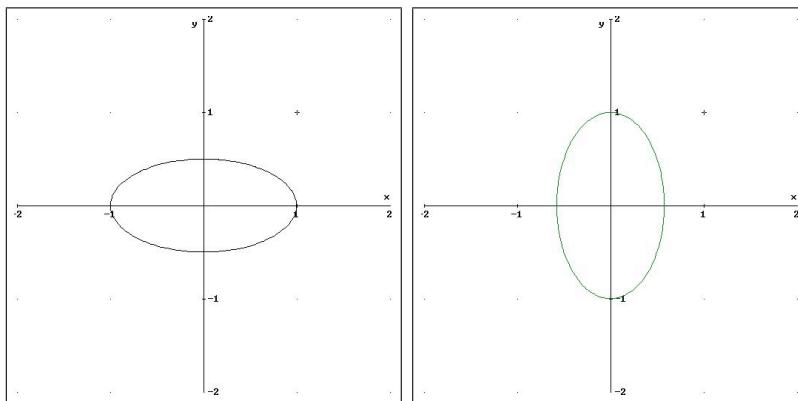


FIGURA 14. Due ellissi: $x^2 + 4y^2 = 1$, $3x^2 + y^2 = 1$

- $a.b < 0$ (a e b di segni opposti) iperboli di centro l'origine e semiassi $1/\sqrt{|a|}, 1/\sqrt{|b|}$, Figura 15

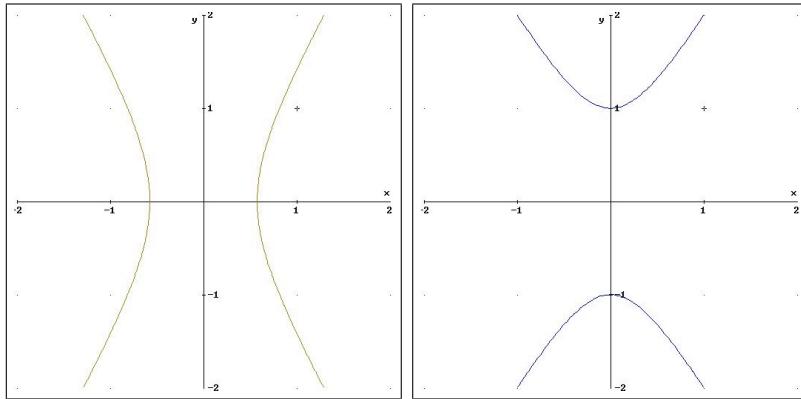
OSSERVAZIONE 11.1. *Le espressioni*

$$(11) \quad a x^2 + b y^2 + c x + d y + e = 0$$

si riconducono facilmente alle espressioni di ellissi o iperboli precedenti, mediante una traslazione dell'origine del riferimento.

Osserviamo l'uguaglianza

$$A x^2 + B x = A \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2}{4A},$$

FIGURA 15. Due iperboli: $3x^2 - y^2 = 1$, $-3x^2 + y^2 = 1$

reiterata sugli addendi che contengono la x e su quelli che contengono la y essa permette di trasformare la (11) nella forma

$$a \left(x + \frac{c}{2a} \right)^2 + b \left(y + \frac{d}{2b} \right)^2 - \frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b} + e = 0$$

Indicati con

$$(12) \quad \begin{cases} X = x + \frac{c}{2a} \\ Y = y + \frac{d}{2b} \\ K = \frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e \end{cases}$$

la (11) si riduce nella forma

$$aX^2 + bY^2 = K$$

che rientra nelle coniche già considerate.

Le (12) è una traslazione degli assi: nel nuovo riferimento l'origine cade nel punto

$$C = \left(-\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2b} \right)$$

OSSERVAZIONE 11.2. Il caso di polinomi di secondo grado generali

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

non differisce gran che dal caso semplice $ax^2 + by^2 = k$: come appreso nei Corsi di Geometria si tratta, per tali casi generali, di curve ottenute traslando o ruotando le ellissi o le iperboli osservate nel caso dei polinomi più semplici illustrati sopra.

La qualità, essere ellissi o iperboli, si riconosce dal complesso dei termini di secondo grado, vedi Figura 16.

$$\begin{cases} b^2 - 4ac < 0 & \rightarrow \text{ellisse} \\ b^2 - 4ac = 0 & \rightarrow \text{parabola} \\ b^2 - 4ac > 0 & \rightarrow \text{iperbole} \end{cases}$$

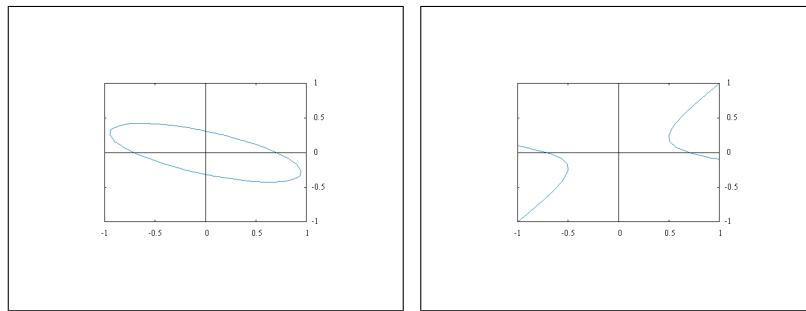


FIGURA 16. A sinistra $2x^2 + 6xy + 10y^2 = 1$, a destra $2x^2 + 9xy - 10y^2 = 1$

OSSERVAZIONE 11.3. *Le successioni $\{P_n\}, n = 0, 1, \dots$ del piano sono sottoinsiemi del piano?*

Non è esatto: pensate a quell'indice n a pedice dei P_n . Una successione $\{P_n\}, n = 0, 1, \dots$ è infatti

una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Questo non esclude che si usi spesso l'insieme di \mathbb{R}^2 formato dai punti della successione.

12. Punti interni e punti esterni a un insieme S

DEFINIZIONE 12.1. *Un punto P si dice interno ad un insieme S se esiste almeno un disco aperto di centro P completamente contenuto (interno) ad S .*

DEFINIZIONE 12.2. *Un punto P si dice esterno ad un insieme S se esiste almeno un disco aperto di centro P che non interseca S , ovvero tutto contenuto nel complementare di S .*

Nelle due definizioni precedenti si parla di

almeno un disco

cioé, pensando per esempio ad un punto P interno ad S , di almeno un raggio $r_0 > 0$ tale che i dischi di centro P e raggi $r \leq r_0$ sono completamente contenuti in S , senza escludere, naturalmente, che dischi di raggi maggiori possano non essere contenuti interamente in S . Il raggio r_0 varia da punto a punto: se, per esempio, l'insieme S é il quadrato chiuso di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$ allora

- il punto $P_1 = (0.5, 0.5)$ é interno ad S e il raggio massimo r_0 che gli compete é 0.5
- il punto $P_2 = (0.8, 0.5)$ é ancora interno ad S e il raggio massimo che gli compete é $r_0 = 0.2$, infatti dischi di raggi maggiori fuoriescono da S
- il punto $P_3 = (1, 1)$ non é interno ad S .

OSSERVAZIONE 12.3. *I punti esterni ad un insieme sono interni al complementare di tale insieme.*

12.1. Punti di frontiera. Ogni insieme E del piano permette di classificare tutti i punti del piano in tre categorie

- i punti interni ad E
- i punti esterni ad E
- gli *altri...* cioé i punti che non sono né interni ad E né esterni ad E

I punti - *altri* - che non siano né interni né esterni ad un insieme S prendono il nome di punti di frontiera di S : ricordate le proprietá dei punti interni e di quelli esterni, deriva che i punti di frontiera sono caratterizzati dalla seguente

DEFINIZIONE 12.4. *Un punto P si dice punto di frontiera dell'insieme S se ogni δ -intorno di P , cioé ogni cerchio di centro P e raggio δ , contiene punti di S e punti del complementare di S .*

L'insieme dei punti di frontiera di S si chiama frontiera di S e si denota con $\mathcal{F}S$ o con ∂S .

ESEMPIO 12.5. *Le zone interne di uno stato (Italia, Francia, ecc.), quelle esterne e quelle di frontiera sono concetti ben noti: Parma e la sua provincia sono interne all'Italia, Parigi e tutta l'Ile de France sono esterne, Gorizia é di frontiera.*

ESEMPIO 12.6. *Nel caso di un semipiano*

$$ax + by + c > 0$$

i punti di frontiera sono tutti e soli i punti della retta $ax + by + c = 0$. Nel caso di un disco aperto (cioé escludendo la circonferenza che lo delimita)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$$

i punti di frontiera sono tutti e soli quelli che verificano l'uguaglianza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Anche nel caso del disco chiuso (cioé includendo la circonferenza che lo delimita)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq r^2$$

i punti di frontiera sono, ancora, tutti e soli quelli che verificano l'uguaglianza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

OSSERVAZIONE 12.7. *Una frontiera curiosa : consideriamo l'insieme*

$$S : 0 < (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$$

cioé il disco di centro (α, β) e raggio r bucato, ossia privato del suo centro.

La frontiera di S è composta:

- dalla circonferenza $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$
- dal centro (α, β)

OSSERVAZIONE 12.8. *I punti interni ad un insieme sono, ovviamente punti appartenenti all'insieme. I punti esterni sono, altrettanto ovviamente punti non appartenenti all'insieme. I punti di frontiera possono sia appartenere all'insieme che appartenere, invece, al suo complementare (vecchia e ben nota conflittualità dei paesi frontalieri...).*

PROBLEMA 12.9. *Provare che la frontiera di un insieme E e quella dell'insieme complementare $\mathcal{C}E$ coincidono.*

12.2. Aperti e chiusi.

DEFINIZIONE 12.10. *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice aperto⁴ se i suoi punti sono **tutti** interni.*

Viceversa un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

ESEMPIO 12.11. *L'insieme*

- $A := \{x^2 + y^2 < 1\}$ é aperto,
- $C := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ é chiuso,

il segmento $S := \{x = 0, 0 < y < 1\}$ non é né aperto né chiuso.

⁴[2], pag.6, vedi anche Appendice A.3 pag. 113

ESEMPIO 12.12. I due insiemi (curiosi) \mathbb{R}^2 , l'intero piano, e \emptyset l'insieme vuoto sono entrambi, contemporaneamente, chiusi e aperti.

Si puó dimostrare che sono gli unici sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 che siano contemporaneamente aperti e chiusi.

TEOREMA 12.13. Un insieme A é aperto se e solo se

$$A \cap \partial A = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE. I punti $P \in A$ possono essere di due soli tipi

- punti interni ad A
- punti della frontiera ∂A di A .

L'ipotesi fatta implica quindi che i punti di A sono soli punti del primo tipo: interni, ovvero A é aperto. \square

COROLLARIO 12.14. Un insieme é chiuso se e solo se contiene **tutti** i suoi (eventuali) punti di frontiera.

DIMOSTRAZIONE. Un insieme E e il suo complementare $\mathcal{C}E$ hanno lo stesso insieme frontiera F .

Se $F \subseteq E$ allora $F \cap \mathcal{C}E = \emptyset$ e quindi, per il precedente Teorema 12.13, $\mathcal{C}E$ é aperto, ovvero E é chiuso. \square

OSSERVAZIONE 12.15. Gli insiemi aperti, come pure i chiusi sono insiemi da considerarsi speciali: é molto piú probabile per un insieme non essere né chiuso né aperto.

Pensate alla luce del precedente teorema a un dominio quadrato $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$ privato di un lato o a un disco che includa metá della circonferenza che lo delimita e l'altra metá no !

12.3. Limiti di successioni.

TEOREMA 12.16. Il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ di una successione convergente $\{P_n\} \in C$ con C chiuso, appartiene anch'esso a C .

DIMOSTRAZIONE. Se fosse $P \notin C$ allora P dovrebbe essere esterno a C , e, quindi, dovrebbe esistere un disco I_r di centro P e raggio r tutto contenuto nel complementare di C .

Ma questo non é possibile perché i punti della successione $P_n \in C$ convergono a P e quindi ne cadranno anche dentro I_r . \square

OSSERVAZIONE 12.17. Il precedente semplice teorema puó essere considerato la vera origine della parola chiuso, come proprietá topologica di un insieme:

chiuso *rispetto ai limiti delle successioni convergenti*.

$$\{P_n \in C, P_n \rightarrow Q\} \Rightarrow Q \in C$$

... non si esce da un chiuso convergendo !

12.4. Chiusura di un insieme. Un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di frontiera: *chiudere* un insieme, che non sia già chiuso, significa aggiungergli tutti i punti di frontiera che non gli appartenevano già:

DEFINIZIONE 12.18. *La chiusura di un insieme S è, per definizione⁵ l'insieme*

$$\overline{S} = S \cup \mathcal{F}S$$

ESEMPIO 12.19. *La chiusura del dominio quadrato $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$ è, naturalmente*

$$\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

12.5. Gli insiemi connessi. La qualifica di *connesso* per un insieme corrisponde all'idea intuitiva di insieme fatto di *un solo pezzo*. Purtroppo cosa sia

un solo pezzo

nessuno lo sa poi veramente...

Un requisito preciso che esprime la connessione per un insieme è la possibilità di congiungere fra loro i punti dell'insieme tramite un numero **finito** di segmenti concatenati, interamente contenuti nell'insieme.

DEFINIZIONE 12.20. *Assegnati $n + 1$ punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ si dice poligonale Π da essi determinata l'insieme unione degli n segmenti*

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$$

I due punti P_0 e P_n si dicono estremi della poligonale Π .

DEFINIZIONE 12.21. *Un insieme A si dice connesso per poligonali se comunque si prendano due suoi punti P e Q esiste una poligonale di estremi P e Q interamente contenuta in A*

Nel seguito chiameremo *connessi* gli insiemi che siano connessi per poligonali.

⁵[2], pag 9

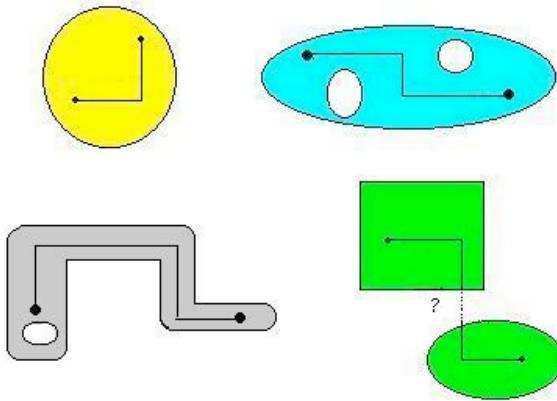


FIGURA 17. 4 insiemi: Il primo addirittura convesso, due solo connessi, l'ultimo (due pezzi) non connesso !

OSSERVAZIONE 12.22. *Esistono numerosi insiemi fatti di un solo pezzo che tuttavia non soddisfano la connessione per poligonali : basta pensare ad un arco di curva, per esempio l'insieme S fatto da un quarto di circonferenza di estremi A e B .*

È evidente che comunque si prendano due punti $P, Q \in S$ non esiste alcuna poligonale di estremi P e Q contenuta in S , per il semplice motivo che ... non esistono poligonali contenute in S .

12.6. Connessi evidenti...

È facile riconoscere che sono connessi gli insiemi convessi, come il disco, gli insiemi cioè che se contengono due punti P e Q contengono di conseguenza tutto il segmento PQ .

È connessa anche la ciambella: un disco bucato.

Sono connessi anche, vedi Figura 17, gli insiemi ottenibili da un insieme connesso con modificazioni *elasto-plastiche* (ellissi, ferri di cavallo (buchi dei chiodi inclusi), ...) !

OSSERVAZIONE 12.23. *Un insieme, anche non ridotto ad una semplice linea curva, può essere fatto di un solo pezzo senza tuttavia soddisfare la definizione di connesso per poligonali.*

Pensate ad un S a forma di spirale, vedi Figura 18, che si arrotoli, sempre più stretto intorno all'origine: una sorta di sezione di guscio di lumaca, che includa anche l'origine.

L'origine non è congiungibile con gli altri punti di S con poligonali: nessun segmento, per quanto breve, uscente dall'origine può, infatti, essere contenuto in S !

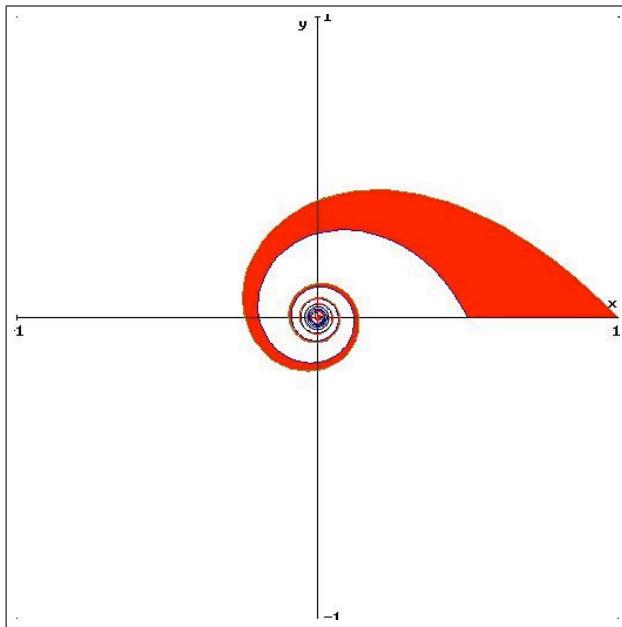


FIGURA 18. Una spirale che esce dall'origine...

12.7. Metrica e topologia. Le definizioni di aperto, chiuso, ecc. date precedentemente fanno uso del concetto di intorno circolare di un punto, concetto che fa uso, a sua volta della distanza adottata. Osservato, vedi precedente paragrafo 5, che si possono introdurre distanze diverse si deduce che

ne possano

derivare topologie diverse:

in altri termini un insieme A che risulti aperto pensando alla ordinaria distanza euclidea sar ancora aperto se prendessimo come distanza un'altra delle espressioni proposte, ad esempio la

$$d_3(P, Q) = |x - x'| + |y - y'| \quad ?$$

La risposta, in questo caso,  s: infatti le diseguaglianze

$$d(P, Q) \leq d_3(P, Q) \leq 2 d(P, Q)$$

osservate tra le due distanze permettono di riconoscere che

- dentro ogni intorno circolare di un punto P rispetto alla distanza d si trova un intorno circolare di P rispetto alla d_3
- e viceversa

Quindi se P  interno ad un insieme S secondo la metrica d lo  anche rispetto alla metrica d_3 e viceversa. Quindi la famiglia degli insiemi aperti costruita riferendosi alla distanza d  la stessa di quella riferita

alla distanza d_3 e viceversa. Analogo discorso per la famiglia degli insiemi chiusi e per il riconoscimento dei punti di frontiera. Se ne conclude che la distanza d_3 produce la stessa topologia della distanza euclidea ordinaria. Stesso discorso, ancora più prevedibile, si può fare per le distanze d_1 e d_2 introdotte precedentemente.

Molto diversamente vanno le cose se ci si riferisce alla (sorprendente) distanza discreta d_4 : la topologia che ne deriva è anch'essa sorprendente

- tutti gli insiemi sono aperti
- tutti gli insiemi sono chiusi.

Quindi, tenuto conto che questo non avviene per le famiglie degli aperti e dei chiusi costruite a partire dalla distanza euclidea, se ne conclude che *la distanza discreta produce una topologia diversa da quella prodotta dalla distanza euclidea*.

CAPITOLO 2

Le funzioni continue

1. Preliminari

Le *funzioni* sono algoritmi che fanno corrispondere ad ogni punto di un insieme (il loro dominio) un altro, unico, punto di un altro insieme (il codominio).

Al di là di questa definizione generale è bene considerare alcuni tipi fondamentali di funzioni:

1.1. Funzioni di una variabile.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = f(x)$$

si tratta delle funzioni reali, cioè che producono risultati valori reali, di una variabile reale x considerate nel *Corso di Derivate e Integrali*: l'input è un numero reale, l'output un'altro numero reale.

1.2. Funzioni di due variabili. Funzioni

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y)$$

funzioni che fanno corrispondere a punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ numeri $z \in \mathbb{R}$: l'input è una coppia di numeri reali, l'output un numero reale.

Il loro grafico è il sottinsieme di \mathbb{R}^3

$$G_F : \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = F(x, y)\}$$

Il grafico di una funzione $z = F(x, y)$ ha, quasi sempre l'aspetto di una superficie dello spazio.

ESEMPIO 1.1. Pensando, ad esempio, alla funzione $z = 1 + x + y$ la superficie grafico è un piano: si tratta di un risultato già incontrato in Geometria ovvero riconoscibile riflettendo sul grafico delle sezioni

$$z = 1 + x + (-1), \quad z = 1 + x + 0, \quad z = 1 + (0.5) + y, \dots$$

tutte rette.

ESEMPIO 1.2. Pensando, ad esempio, alla funzione $z = x^2 + y^2$ la superficie grafico é una sorta di coppa riconoscibile pensando alle sezioni del grafico relative a fissare una delle due variabili x o y .
In Figura 1 si vede il grafico di $z = x^2 + y^2$ suggerito dall'esame dei grafici delle sezioni $y = k$ oppure $x = k$

$$z = x^2 + k^2, \quad z = k^2 + y^2$$

tracciate in corrispondenza a numerosi valori $k \in [-1, 0]$

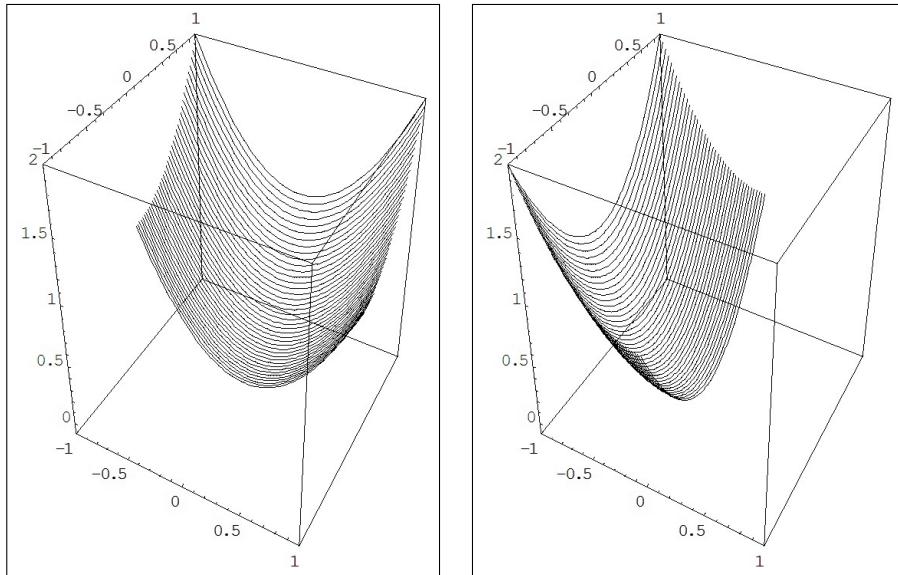


FIGURA 1. $z = x^2 + k^2, \quad z = k^2 + y^2, \quad z = x^2 + y^2$

Un'altro tipo di sezioni utili, oltre quelli $y = k$ o $x = k$ é quello $z = k$: disegnare cioè, nel caso della $z = x^2 + y^2$, le circonferenze $x^2 + y^2 = k^2$, poste a quota $z = k^2$, vedi Figura 2

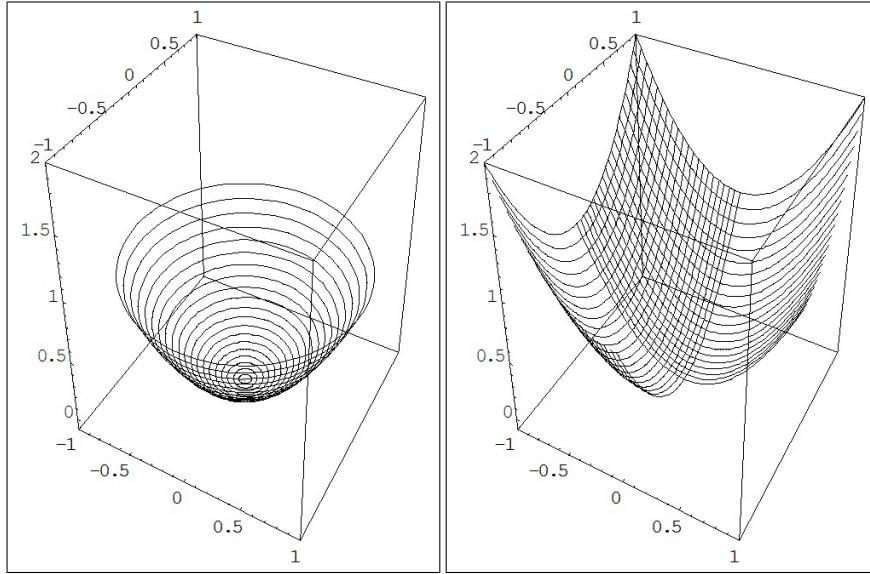


FIGURA 2. $z = k^2$, $x^2 + y^2 = k^2$ e la sintesi delle prime due famiglie di sezioni.

1.3. Le curve.

$$\Phi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t)$$

si tratta di funzioni che ai valori reali t fanno corrispondere le coppie $(\varphi(t), \chi(t))$, cioè dei punti del piano \mathbb{R}^2 .

In questo caso l'oggetto interessato non è il grafico ma piuttosto l'insieme immagine, talvolta chiamato sostegno

$$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2 : \{(x, y) = (\varphi(t), \chi(t)), \forall t \in [a, b]\}$$

Pensando ad esempio alla funzione

$$\Phi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

il sostegno è la circonferenza di \mathbb{R}^2 di centro l'origine e raggio 1.

1.4. Le trasformazioni del piano.

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v)$$

si tratta di funzioni che fanno corrispondere alla coppia $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ la coppia $(\varphi(u, v), \chi(u, v))$.

Parlare del loro grafico è improprio: possiamo pensare tali funzioni come trasformazioni del piano, ad esempio la funzione

$$(u, v) \rightarrow (u + v, u - v)$$

produce la trasformazione suggerita in Figura 3

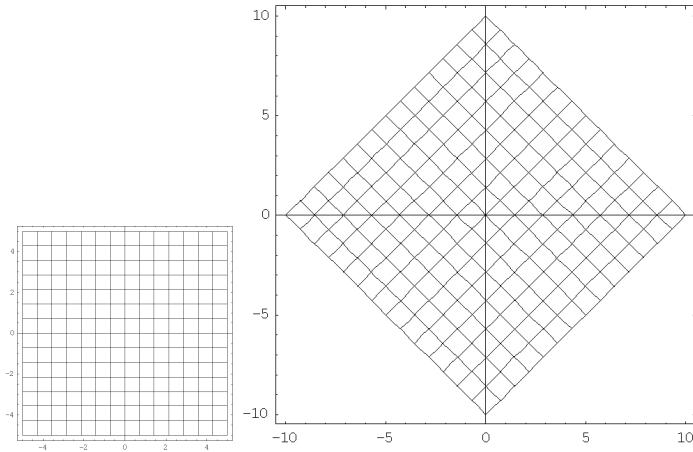


FIGURA 3. $(u, v) \rightarrow (u+v, u-v)$ Il quadrato della prima figura viene dilatato e ruotato...

2. Quando si parla di funzioni continue ?

Si puó parlare di continuitá (o meno) a fronte di ogni funzione

$$f : X \rightarrow Y$$

ogni qualvolta i due spazi, quello X in cui varia la variabile indipendente e quello Y sul quale la funzione f prende i suoi valori siano dotati ciascuno di *distanze*.

Infatti dire che una funzione é **continua** significa che

trasforma punti vicini in punti vicini

frase che mette bene in evidenza come il concetto di continuitá sia strettamente collegato alla nozione di vicinanza, quindi alla disponibilitá di una *distanza*.

Le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

possono quindi essere continue come pure possono non esserlo: tanto in \mathbb{R}^2 quanto in \mathbb{R} sono infatti definite le distanze.

Analogamente si riconosce come il concetto di continuitá puó essere considerato per tutti e quattro i tipi di funzioni precedentemente elencati.

3. La definizione

Il concetto di continuità , di una funzione¹ in un punto (x_0, y_0) è collegato ai valori della funzione nei punti (x, y) vicini ad (x_0, y_0) : per continuità di $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) si intende

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$$

quando

$$(x, y) \approx (x_0, y_0)$$

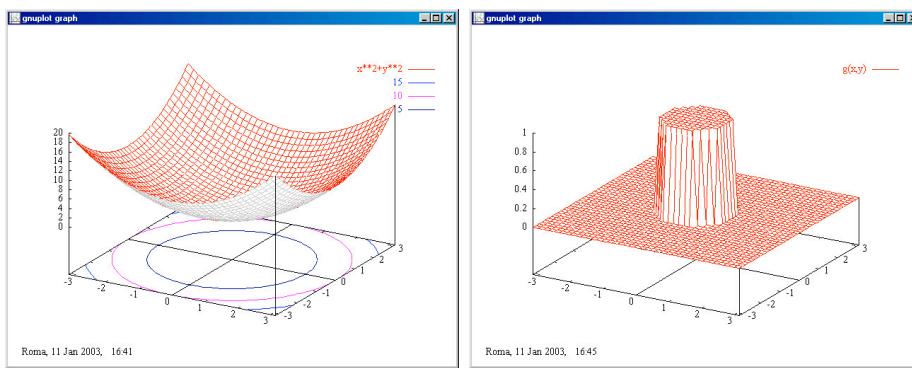


FIGURA 4. La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, continua, la funzione $\chi(x, y)$ caratteristica del disco $x^2 + y^2 \leq 1$, non continua

La maniera di rendere rigorosa l'idea intuitiva precedente è basata su un argomento ($\varepsilon \delta$) sostanzialmente identico a quello visto per funzioni di una variabile

DEFINIZIONE 3.1. Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $P_0 = (x_0, y_0)$ se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

ESEMPIO 3.2. La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è continua in ogni punto: è infatti facilmente prevedibile che se $(x, y) \approx (x_0, y_0)$ allora

$$x \approx x_0, \quad \rightarrow \quad x^2 \approx x_0^2, \quad y \approx y_0, \quad \rightarrow \quad y^2 \approx y_0^2,$$

da cui

$$x^2 + y^2 \approx x_0^2 + y_0^2$$

Diversamente vanno le cose, vedi Figura 4, riferendosi alla funzione caratteristica del disco $x^2 + y^2 \leq 1$, denominata con χ , che vale 1 in tutti i punti di tale disco e 0 nei punti che non appartengono al disco.

¹[2], pag. 17

Ad esempio $\chi(1, 0) = 1$ mentre $\chi(1.001, 0) = 0 \dots$ eppure il punto $(1.001, 0)$ è abbastanza vicino al punto $(1, 0)$.

È evidente che ci sono punti comunque vicini a $(1, 0)$ sui quali la χ vale 0 e quindi differisce notevolmente dal valore 1 preso in $(1, 0)$.

DEFINIZIONE 3.3. Una funzione f continua in tutti i punti in cui è definita si dice continua.

OSSERVAZIONE 3.4. La continuità della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) equivale alla certezza di poter vincere (sempre) la seguente scommessa:

- un giocatore assegna, a suo piacere, una quantità positiva, che chiamiamo ε ,
- l'altro giocatore risponde, e vince, se produce un'altra quantità positiva δ tale che se

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

riesca sicuramente

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

È chiaro che vincere il gioco è tanto più difficile quanto più sono piccole le quantità ε lanciate dal primo giocatore.

Attenzione: se si invertono le parti nel gioco la scommessa si perde. È possibile che f sia continua ma, per quanto dato $\delta > 0$ piccolo si possa trovare $\varepsilon > 0$ per cui pur essendo (x_1, y_1) distante da (x_2, y_2) meno di δ riesca $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > \varepsilon$.

Provate!

4. Insieme di definizione

Una funzione di due variabili è generalmente assegnata indicando un procedimento di calcolo che può essere applicabile ad alcuni punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e non ad altri.

L'insieme dei punti (x, y) ai quali il procedimento relativo alla funzione è correttamente applicabile si dice *insieme di definizione* o *dominio* della funzione.

- $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$: $x + y \neq 0$ l'insieme di definizione è l'intero piano \mathbb{R}^2 privato della retta $x + y = 0$
- $g(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$: $1 - x^2 - y^2 > 0$ l'insieme di definizione è il disco aperto di centro l'origine e raggio 1.

- $\sqrt{3x^2 + 2y^2 - 5} : 3x^2 + 2y^2 - 5 \geq 0$ l'insieme di definizione é l'intero piano \mathbb{R}^2 privato dell'interno dell'ellisse

$$\frac{x^2}{5/3} + \frac{y^2}{5/2} = 1$$

5. Produrre funzioni continue

Le funzioni continue piú semplici sono

$$f(x, y) = 1, \quad g(x, y) = x, \quad r(x, y) = y$$

5.1. Il metodo α . Un modo semplice di produrre funzioni di due variabili $f(x, y)$ continue é il seguente:

- prendiamo due funzioni a e b di una variabile definite in \mathbb{R} e continue,
- definiamo

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = a(x).b(y)$$

- la $f(x, y)$ cosí prodotta é continua, infatti detta M una costante tale che

$$x \simeq x_0 \rightarrow |a(x)| \leq M \quad \text{e} \quad y \simeq y_0 \rightarrow |b(y)| \leq M$$

riesce

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |a(x)| |b(y) - b(y_0)| + |b(y_0)| |a(x) - a(x_0)|$$

da cui

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq M \{ |b(y) - b(y_0)| + |a(x) - a(x_0)| \}$$

- tenuto conto che a e b sono funzioni continue, $x \simeq x_0$ e $y \simeq y_0$ implicano che $|a(x) - a(x_0)|$ e $|b(y) - b(y_0)|$ siano piccoli e, quindi, sia piccolo anche $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$

Riassumendo: la funzione di due variabili

$$f(x, y) = a(x).b(y)$$

prodotto di due funzioni di una variabile entrambe continue é una funzione reale di due variabili reali continua².

In base a quanto osservato sono quindi continue anche le nuove funzioni

$$xy, \quad x^2y, \quad x^7y^3, \quad \sin(x)\cos(y), \quad e^{-x^2}\sin(1+y), \dots$$

²Esistono funzioni di due variabili che non siano il prodotto di una funzione della sola x per un'altra della sola y ?

5.2. Il metodo β . In maniera simile a quanto visto per le funzioni di una variabile è possibile costruire funzioni continue a partire da singole funzioni continue tramite somma, prodotto e rapporto (nel caso in cui il denominatore sia diverso da zero).

Ad esempio, supponiamo f e g continue in (x_0, y_0) , allora la funzione $f(x, y) + g(x, y)$ è continua in (x_0, y_0) : infatti dato che

$$\begin{aligned} & |(f(x, y) + g(x, y)) - (f(x_0, y_0) + g(x_0, y_0))| \\ & \leq |f(x, y) - f(x_0, y_0)| + |g(x, y) - g(x_0, y_0)|, \end{aligned}$$

il primo modulo può essere reso arbitrariamente piccolo se sono altrettanto piccoli i due moduli a secondo membro, cosa che certamente è possibile a patto di scegliere (x, y) sufficientemente vicino a (x_0, y_0) . tenuto conto che f e g sono continue in (x_0, y_0) .

TEOREMA 5.1. *Somme, differenze, prodotti e quozienti (quando leciti) di funzioni continue producono funzioni ancora continue.*

Dal precedente teorema 5.1 discende, ad esempio, che

- tutti i polinomi, ad esempio $x^2y + 4xy + 5y^2 + x + y + 1$, sono funzioni continue
- tutte le funzioni razionali, ad esempio $\frac{x + y^2}{x^2y^4 + 3x^2 + 1}$, sono continue dove sono definite ³.

OSSERVAZIONE 5.2. *Il precedente Teorema 5.1 implica in particolare che l'insieme delle funzioni $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue costituisce uno spazio vettoriale sui reali (cioé considerando combinazioni lineari a coefficienti reali).*

Si può riflettere sulla vastità di tale spazio vettoriale: ad esempio pensando quale dimensione attribuirgli...

5.3. Il metodo γ . Sono continue anche le funzioni

$$M(x, y) = \max\{f(x, y), g(x, y)\} \quad m(x, y) = \min\{f(x, y), g(x, y)\}$$

ottenute dalle due funzioni continue $f(x, y)$ e $g(x, y)$ prendendo in ogni punto rispettivamente il valore maggiore, **max**, oppure il valore minore, **min**.

Nella Figura 5 si riconosce il grafico della funzione

$$f(x, y) = \max\{x + y, -x - y\}$$

³Le funzioni razionali sono le prime funzioni di due variabili che incontriamo che possono essere definite in \mathbb{R}^2 privato di alcuni punti o addirittura alcune linee.

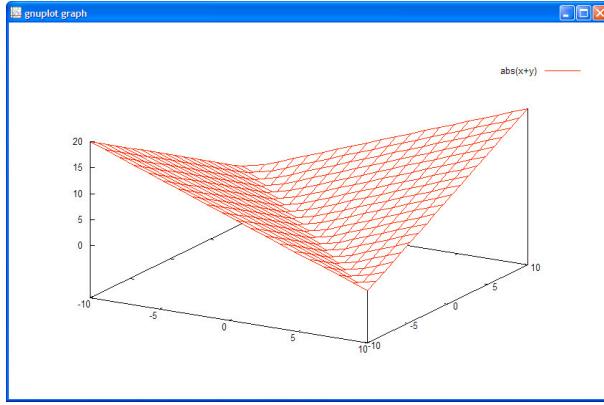


FIGURA 5.

nella quale é facile riconoscere nient'altro che

$$|x + y|$$

ESEMPIO 5.3. *Funzioni definite con il metodo γ appaiono molto spesso in questioni di fisica.*

Un esempio é il potenziale gravitazionale $V(x, y)$ generato da un disco omogeneo di raggio 1: indicata con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ha

$$V(x, y) = g(r) = \begin{cases} r & 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{1}{r^2} & 1 < r \end{cases}, \quad \rightarrow \quad g(r) = \min\{r, \frac{1}{r^2}\}$$

ovvero, vedi Figura 6,

$$V(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \end{cases}$$

6. Le funzioni radiali

Le funzioni radiali sono quelle funzioni che prendono lo stesso valore su tutti i punti (x, y) che hanno la stessa distanza $x^2 + y^2$ dall'origine: esse cioé non dipendono realmente dal punto (x, y) ma solo dalla sua distanza - il raggio, donde l'aggettivo *radiali* - dall'origine.

ESEMPIO 6.1. *Sono funzioni radiali le seguenti funzioni $z = f(x, y)$:*

$$z = 1, \quad z = 1+x^2+y^2, \quad z = \sin(x^4+2x^2y^2+y^4), \quad z = (x^2 + y^2 + 5)^5$$

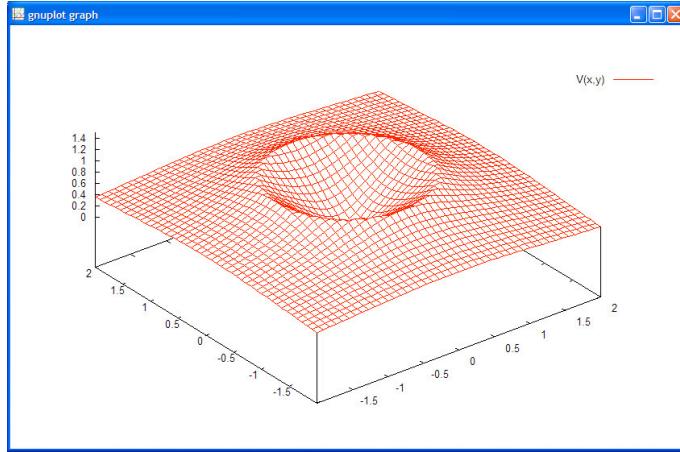


FIGURA 6. Il potenziale gravitazionale $V(x, y)$ generato da un disco omogeneo.

Se indichiamo con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ le funzioni precedenti si esprimono anche come

$$z = 1, \quad z = 1 + r^2, \quad z = \sin(r^4), \quad z = (r^2 + 5)^5$$

Ad ogni funzione $f(t)$ di una variabile, definita per $t \geq 0$ possiamo associare una funzione $F(x, y)$ di due variabili radiali

$$F(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

OSSERVAZIONE 6.2. Le funzioni $f(x, y)$ radiali godono di evidenti proprietà di simmetria:

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y)$$

6.1. Il grafico. Conosciuto il grafico di $f(t)$ per $t \geq 0$ si ottiene, molto facilmente, il grafico di $F(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$: basta far ruotare, intorno all'asse verticale, la linea grafico di f : la superficie ottenuta con tale rotazione è il grafico di F

OSSERVAZIONE 6.3. Costruzioni meccaniche di grafici: supponiamo di aver disegnato sul piano (x, z) il grafico della funzione reale di una variabile reale $z = f(x)$, $x \geq 0$:

cosa succede se spingiamo tale grafico parallelamente all'asse y ?

Si ottiene la superficie cilindrica di Figura 9.

e cosa succede, invece, se facciamo ruotare il grafico $z = f(x)$ come una bandieruola intorno all'asse z ?

Si ottiene la superficie di rotazione di Figura 10.

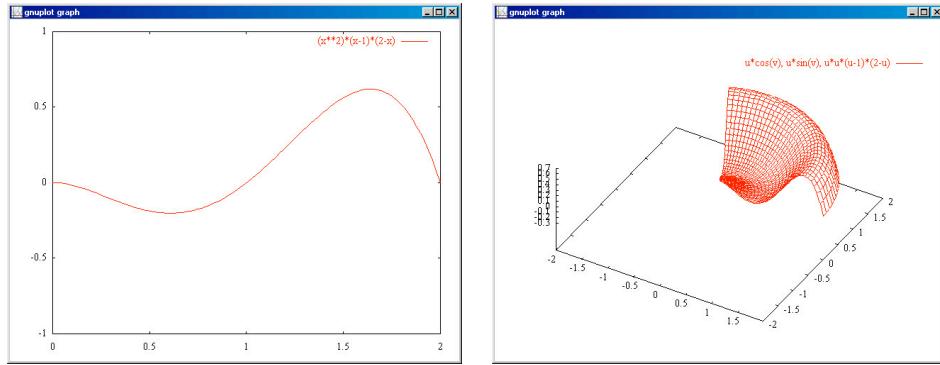


FIGURA 7. a) Il grafico di $f(x) = x^2(x-1)(2-x)$ $x \in [0, 2]$ b) La superficie ottenuta ruotando con $\theta \in [0, 2]$

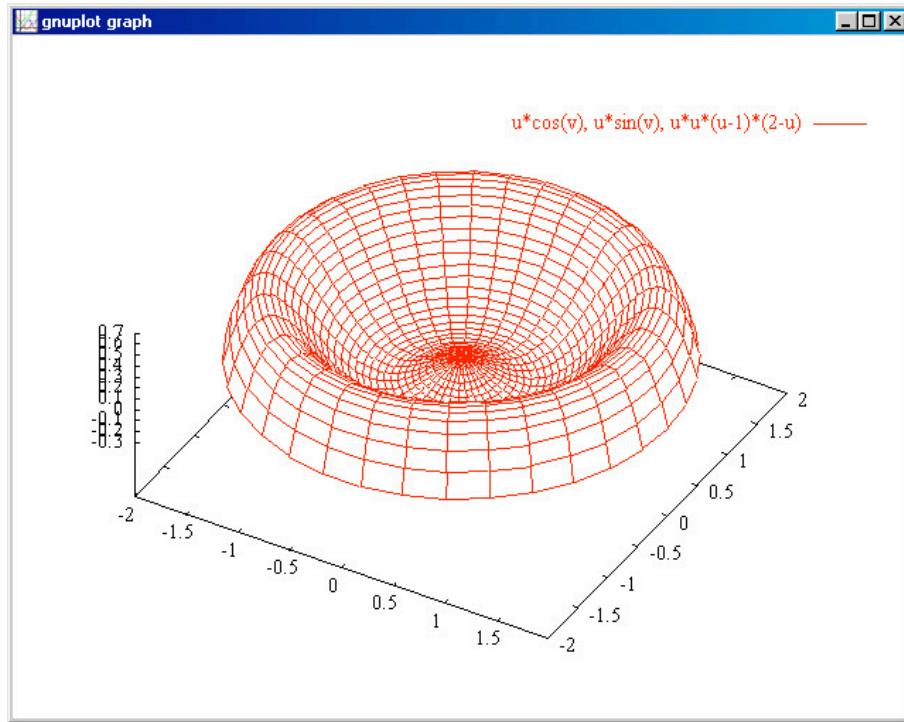


FIGURA 8. Il grafico completo della radiale $\sqrt{x^2 + y^2}^2 (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(2 - \sqrt{x^2 + y^2})$ associata alla $f(x)$ della Figura precedente.

OSSERVAZIONE 6.4. *Cosa succede se facciamo ruotare una linea che, diversamente da quella proposta in Figura 7 arrivi su $t = 0$ con una pendenza non nulla?*

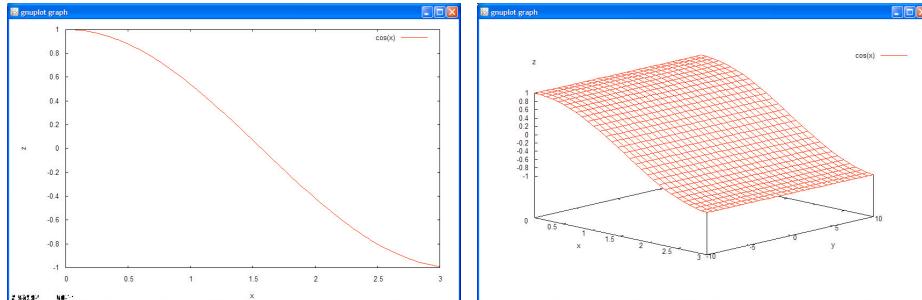


FIGURA 9. Il grafico di $z = \cos(x)$ e il risultato di spingerlo lungo la direzione dell'asse y

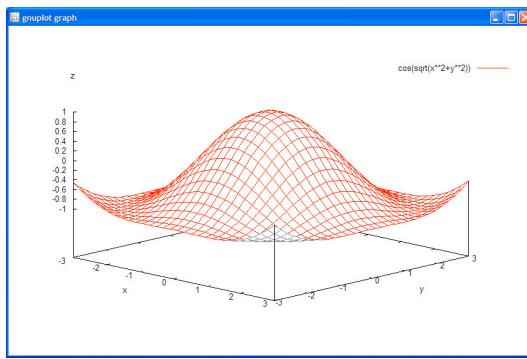


FIGURA 10. Ruotare il grafico di $z = \cos(x)$ intorno all'asse z

Pensate di ruotare il grafico della funzione $1 - t$: che superficie di rotazione otterreste? Si tratta di una superficie geometrica molto nota... La funzione radiale associata è $F(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.2. La continuità.

Le funzioni radiali $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ dedotte da funzioni $f(t)$ continue per $t \geq 0$ sono funzioni continue in tutto \mathbb{R}^2 : la dimostrazione corretta della loro continuità sarà un'importante applicazione del teorema di continuità delle funzioni composte che incontreremo a breve.

7. Grafico o linee di livello

Il grafico di una funzione reale di due variabili reali $f(x, y)$ (ragionevolmente regolare) è una superficie: la sua rappresentazione si ottiene

generalmente con gli espedienti del disegno prospettico (assonometria, prospettiva).

Un altro modo di rappresentare la funzione $f(x, y)$ è quello di disegnare nel piano (x, y) le *linee di livello*

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 1, \quad f(x, y) = 2, \dots$$

vedi Figura 11.

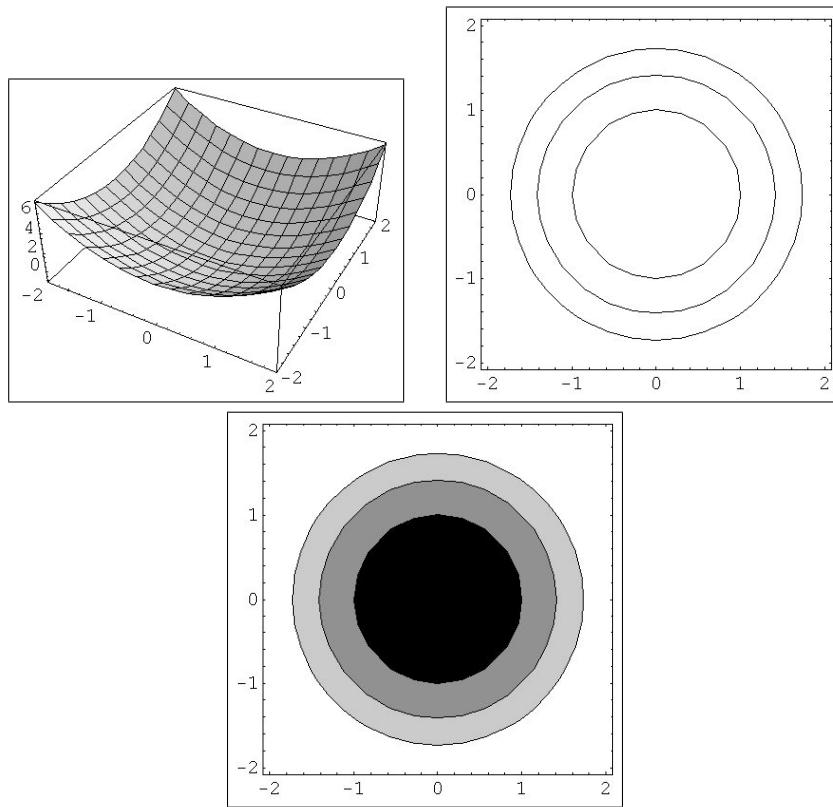


FIGURA 11. $z = x^2 + y^2 - 1$, $f(x, y) = 0, f(x, y) = 1, f(x, y) = 2$

Il metodo delle linee di livello è quello usato nelle carte geografiche.

Un metodo che arricchisce quello delle linee di livello, anch'esso usato in topografia, è quello delle scale cromatiche che rappresentano i rilievi: toni di marrone via via più deciso per le catene montuose, toni di blu sempre più intenso per le profondità degli oceani...

Nelle Figure degli esempi seguenti useremo solo la scala dei grigi: scuro per le quote basse, chiaro per le alte.

Nella Figura 11 il cerchio di grigio più scuro ricopre la parte in cui

$$x^2 + y^2 - 1 < 0$$

Le due corone di grigi intermedi delimitano le regioni

$$0 < f(x, y) < 1, \quad 1 < f(x, y) < 2$$

Mentre la parte bianca si riferisce alla regione in cui

$$f(x, y) > 2$$

ESEMPIO 7.1. Consideriamo la funzione $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$: si tratta di una funzione radiale,

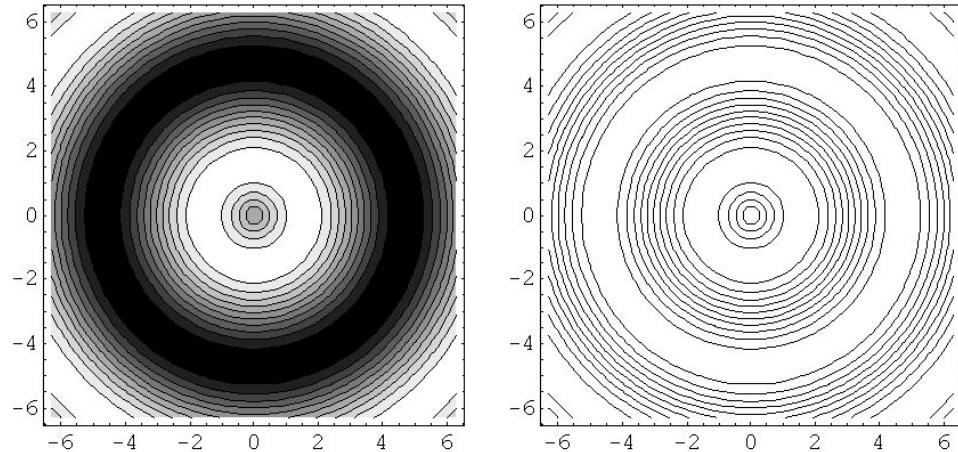
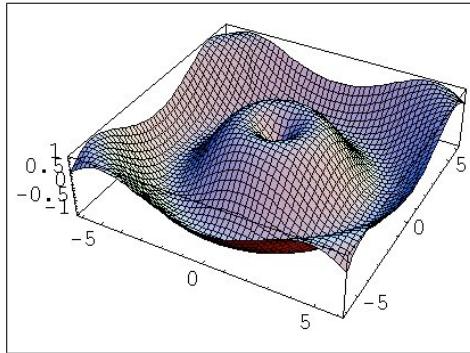


FIGURA 12. $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$, funzione radiale, grafico prospettico, scala cromatica per le quote, linee di livello

Il grafico prospettico illustra la superficie ottenuta facendo ruotare il grafico di $y = \sin(x)$, $x \geq 0$ intorno all'asse y .

Il grafico in scala di grigi rappresenta le quote raggiunte da $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ in corrispondenza ai vari punti $\{x, y\}$: chiaro per le quote alte, scuro per le quote basse.

La terza figura rappresenta le linee di livello: ovviamente, nel caso di una funzione radiale, circonferenze di centro l'origine.

La maggiore o minore rarefazione delle linee di livello si riferisce (come ogni alpinista sa bene) alla maggiore o minore pendenza del grafico in quella zona.

Considerato che il tracciamento delle linee di livello si riferisce a quote equidistanziate fra loro

$$f(x, y) = A, f(x, y) = A + p, f(x, y) = A + 2p, f(x, y) = A + 3p, \dots$$

il trovare due linee molto vicine vuol dire che si passa assai presto dalla quota f_0 alla quota $f_0 + p$, mentre se le due linee sono lontane vuol dire che le variazioni di quota sono molto meno rapide, siamo quasi in pianura...

Riferendosi alla superficie di rotazione $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ si capisce che si avrà pendenza accentuata

- vicino all'origine (*il grafico di $y = \sin(x)$ taglia l'origine con una pendenza di 45°*)
- vicino alla circonferenza $x^2 + y^2 = \pi^2$ (*il grafico di $y = \sin(x)$ taglia $x = \pi$ con una pendenza di 45°*)
- vicino alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4\pi^2$ (*il grafico di $y = \sin(x)$ taglia $x = 2\pi$ con una pendenza di 45°*)

mentre avrà poca pendenza in corrispondenza ai punti della circonferenza

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\pi^2$$

motivo prevedibile pensando ancora al grafico di $y = \sin(x)$ intorno al punto $x = \pi/2$.

ESEMPIO 7.2. Consideriamo la funzione $z = \sin(x) \cos(y)$, vedi Figura 13.

Si noti il legame tra le tre forme grafiche: i tre colli e le tre valli, visibili nel grafico prospettico si ritrovano nel secondo, scala di grigi, nel quale il colore bianco si riferisce alle quote alte, quello nero a quelle basse.

Il terzo grafico disegna solo linee di livello: camminando su ciascuna di esse si cammina su punti $\{x, y\}$ sui quali la funzione $z = \sin(x) \cos(y)$ prende lo stesso valore, sentieri piani, a quota altimetrica costante.

In una buona carta topografica da escursioni vicino ad ognuna delle linee della terza figura sarebbe stata segnata la relativa quota.

OSSERVAZIONE 7.3. Il grafico in scala di grigi (o, ovviamente in scala di altro colore convenzionale) permette di immaginare le possibili escursioni sul grafico a quota costante: percorsi che siano interamente contenuti in una stessa tonalità del grigio.

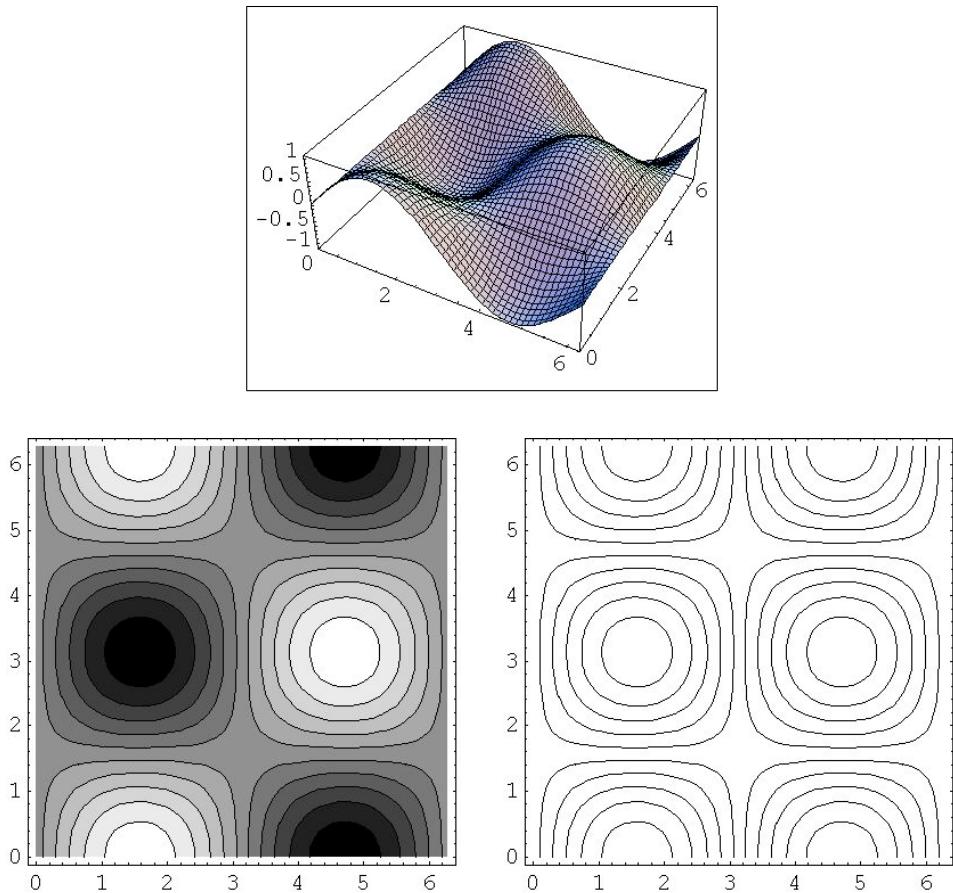


FIGURA 13. $z = \sin(x) \cos(y)$, grafico prospettico, scala cromatica per le quote, linee di livello

È evidente (come ogni escursionista sa bene) che non esistono percorsi ad altitudine costante da una vetta all'altra, mentre si trovano (o perlomeno si cercano fiduciosamente) percorsi da una valle all'altra, tutti ad una stessa (bassa) quota: è quello che studiano, ad esempio, i tracciati ferroviari.

OSSERVAZIONE 7.4. *Le linee di livello di una funzione radiale sono... (almeno tutte le volte che costituiscano delle linee) sempre e solo circonferenze!*

La funzione costante $z = 1$ è certo anche radiale: in quali punti del piano prende il valore 1?

Risposta: in tutto il piano... che non è generalmente chiamato una circonferenza!

8. I punti di discontinuità

Nel caso unidimensionale si erano elencati i punti di discontinuità distinguendo, in un punto, il limite di una funzione da sinistra da quello da destra.

Nel caso di funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si possono incontrare funzioni che

- siano continue in un punto
- non abbiano limite⁴ lungo qualche direzione
- non siano continue nel punto perché hanno limiti diversi cambiando le direzioni

8.1. L'esempio fondamentale.

$$(13) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

I valori di questa funzione variano a seconda che si prenda $(x, y) \in y = mx$: su tutti i punti diversi dall'origine di ciascuna di tali rette infatti la funzione prende uno stesso valore, rette diverse valori diversi,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{m}{1+m^2} & y = mx, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Poiché

- tutte le rette $y = mx$ passano per l'origine,
- la funzione $f(x, y)$ è costante su ciascuna di tali rette,
- costanti diverse su rette diverse,

la funzione non può, comunque la si definisse nell'origine, essere continua in tale punto. Basta a tale scopo considerare due rette $y = m_1 x$ e $y = m_2 x$ e considerare che su punti vicini quanto si vuole all'origine la funzione f prende i due diversi valori

$$\frac{m_1^2}{1+m_1^2}, \quad \frac{m_2^2}{1+m_2^2}$$

e quindi non si stabilizza su alcun valore particolare.

OSSERVAZIONE 8.1. *Come costruire o come immaginare di costruire la superficie di Figura 14?*

⁴Il limite di una funzione di due variabili sarà precisato nel capitolo sui limiti.

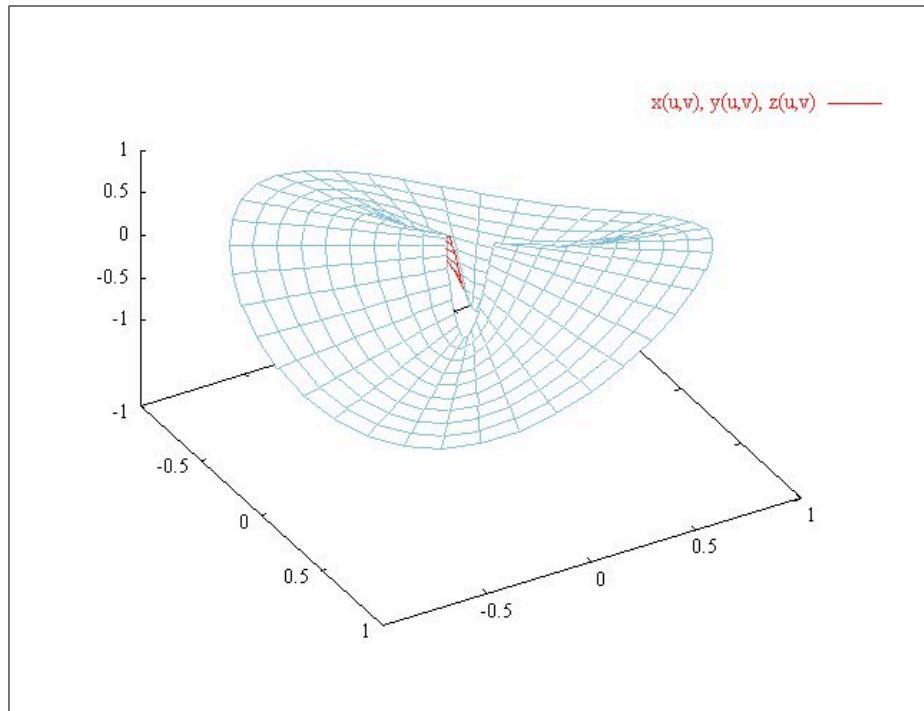


FIGURA 14. La funzione non continua (13): non provate a chiudere il buco...

- Preparate sul piano $z = 0$ il cerchio bucato $0 < x^2 + y^2 \leq 1$
- Immaginatelo come l'insieme di tutti i suoi (infiniti) raggi
- Ogni raggio corrisponde ad un angolo θ , ad esempio l'angolo formato con l'asse delle x
- Sollevate, o abbassate, ciascun raggio portandolo, interamente, alla quota $\sin(\theta) \cos(\theta)$
- A sollevamenti completati avete la superficie di Figura 14...

8.2. Passeggiare sul grafico... Studiamo i profili altimetrici ottenuti percorrendo due strade diverse dirigendosi dal punto $(-1, 1)$ verso il punto $(0, 0)$ relativi al grafico di Figura 14.

Dato che la funzione f non è continua in $(0, 0)$, la speranza di tendere alla stessa quota d'arrivo è malriposta!

- Il primo cammino sia diretto: il segmento

$$y = -x, \quad x \in [-1, 0],$$

In questo caso si ha

$$h(x) = f(x, -x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Spostandosi lungo la retta di equazione $y = -x$, si resta costantemente all'altezza $-1/2$ ($y = -x$ è una linea di livello di f).

- Come secondo cammino scegliamo la parabola di equazione $y = x^2$, $x \in [-1, 0]$,

Lungo questo cammino il profilo altimetrico k è dato da

$$k(x) = f(x, x^2) = \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

La funzione k è strettamente crescente dato che

$$k'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \quad x \in [-1, 1]$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0.$$

Quindi *cammini diversi, ma con stessi estremi, danno luogo a quote di arrivo diverse!*

8.3. Usiamo GnuPlot.

```
gnuplot> f(x,y)=(x**2+y**2>0) ? x*y/(x**2+y**2) : 0
gnuplot> set contour
gnuplot> splot f(x,y)
```

Il grafico di Figura 14 è stato costruito più o meno così.

Notate come funzionano le assegnazioni condizionate (IF) in GnuPlot:

- la condizione da controllare $x^{**2}+y^{**2}>0$
- il punto interrogativo ?
- le due possibili risposte, separate dai due punti :

9. Funzioni lipschitziane

DEFINIZIONE 9.1. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(P) - f(Q)| \leq L \cdot \overline{PQ} \quad \forall P, Q \in A$$

TEOREMA 9.2. Le funzioni Lipschitziane sono continue.

Le funzioni lipschitziane, vedi Figura 15, sono continue ma il loro grafico può presentare angoli, vertici...

... piramidi, non solo dune !

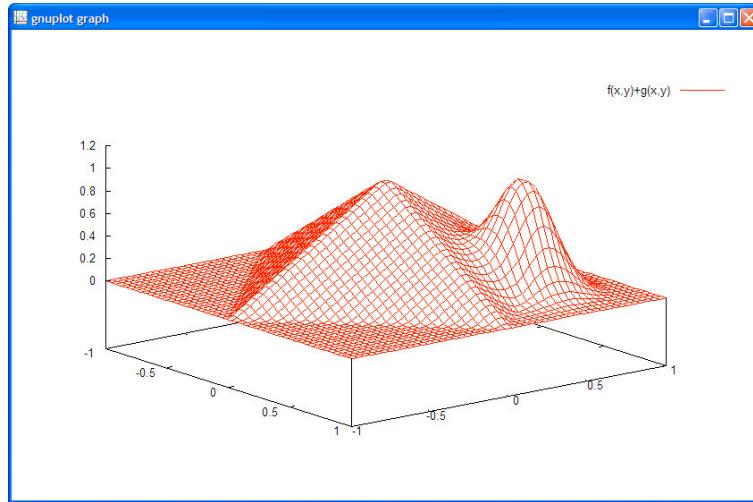


FIGURA 15. Una funzione lipschitziana

A titolo di curiositá il grafico di Figura 15 appartiene alla funzione

$$f(x, y) = \max(1 - |x| - |y|, 0) + e^{-25((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}$$

La piramide é collegata al primo addendo (quei moduli fanno delle pieghe), la duna al secondo.

OSSERVAZIONE 9.3. *Una certezza: comunque si scivoli passeggiando sul grafico di una funzione lipschitziana di costante L non si incontrano pendenze di angolo superiore ad α essendo*

$$\tan(\alpha) = L$$

L’Osservazione precedente fa capire che le funzioni non lipschitziane saranno (probabilmente) quelle con grafici a pendenze terribili...

Non é lipschitziana la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\max\left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2, 0\right)}$$

il cui grafico vedete in Figura 16.

10. Incollare espressioni diverse

Potremmo denominare questo come

metodo δ

dopo i metodi α , β , γ , illustrati precedentemente.

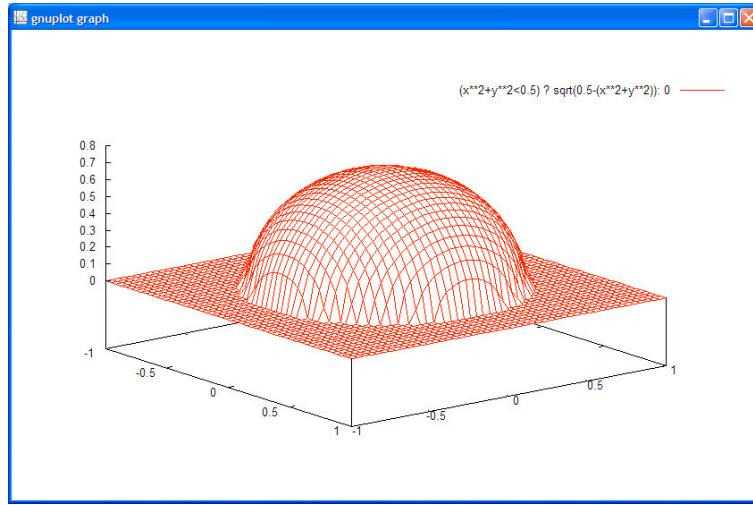


FIGURA 16. Il grafico di una semisfera... una funzione non lipschitziana

Il metodo consiste nel definire una funzione $f(x, y)$ su un insieme $C = A \cup B \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \emptyset$ al modo seguente

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x, y) & \text{se } \{x, y\} \in A \\ b(x, y) & \text{se } \{x, y\} \in B \end{cases}$$

essendo $a(x, y)$ e $b(x, y)$ due funzioni precedentemente costruite e definite su insiemi che includano rispettivamente A e B .

ESEMPIO 10.1. Consideriamo ad esempio la funzione

$$(14) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 + x + y & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x + y & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

di cui alla Figura 17.

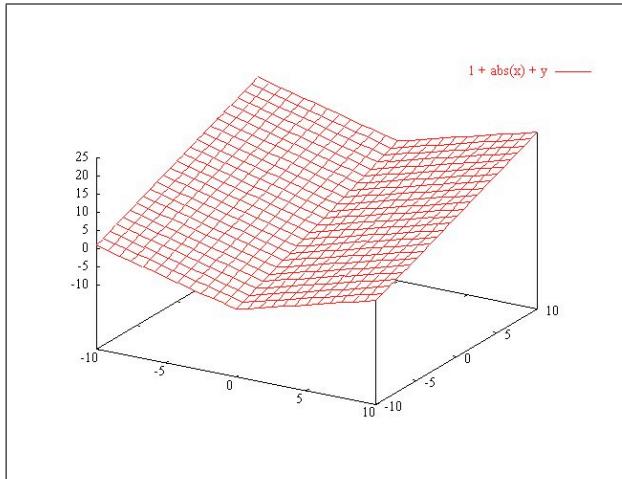


FIGURA 17. Il grafico della funzione (14)

La continuitá

Un problema fondamentale consiste nel riconoscere (o meno) la continuitá di una funzione definita *incollando* due funzioni $a(x, y)$ e $b(x, y)$ ciascuna separatamente continua.

La questione della non continuitá puó presentarsi lungo la linea lungo la quale le due parti A e B si congiungono: chi assicura che su tale linea le due funzioni $a(x, y)$ e $b(x, y)$ si sposino bene, cioé prendano gli stessi valori?

Nel caso del precedente esempio (10.1) la linea di separazione tra la parte $A : x \geq 0$ e $B : x < 0$ era la retta $x = 0$ e su di essa le due funzioni $a(x, y) = 1 + x + y$ e $b(x, y) = 1 - x + y$ prendevano gli stessi valori

$$a(0, y) = b(0, y) = 1 + y$$

Quindi le due espressioni si incollavano bene, e, in definitiva la funzione (14) risultava continua.

Diversamente possono andare le cose come risulta dall'esempio seguente

ESEMPIO 10.2. *Sia*

$$(15) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 + x + y & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + y^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ancora si ha $A : x \geq 0$ e $B : x < 0$: la linea di separazione é la retta $x = 0$ ma lungo essa riesce

$$a(0, y) = 1 + y, \quad b(0, y) = y^2$$

i due valori sono in generale diversi, a meno che

$$1 + y = y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Concludendo si può riconoscere che la funzione (15)

- è continua in tutti i punti dei due semipiani aperti $x > 0$ e $x < 0$
- sui due punti $\{0, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$, $\{0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}$ della retta che separa i due semipiani la funzione $f(x, y)$ è ancora continua
- sugli altri punti della retta $x = 0$ la f non è continua.

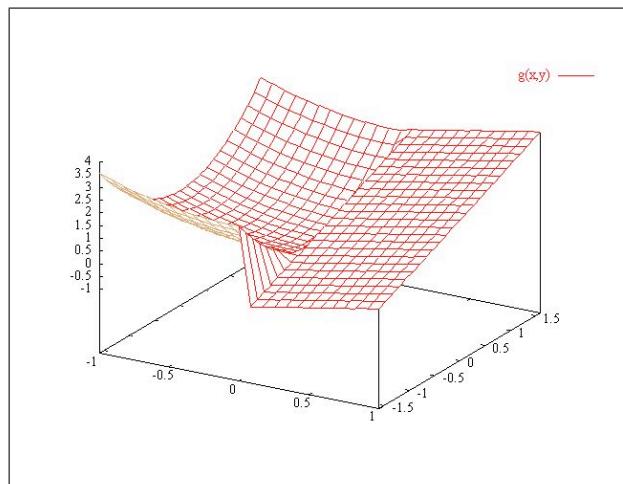


FIGURA 18. Il grafico della funzione (15)

CAPITOLO 3

Le curve

1. Introduzione

Ci occupiamo in questo capitolo delle funzioni

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \rightarrow \{x(t), y(t), z(t)\}$$

Il grafico di queste funzioni, almeno nel caso in cui $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ soddisfino ragionevoli requisiti di regolarità, rappresentano *curve regolari*.

Le curve regolari ([1], Cap.4, pag. 324) sono sottinsiemi importanti dello spazio: segmenti, circonferenze, ellissi, eliche, ecc.

Le prime tre precedenti meritano il nome di curve piane, la quarta - l'elica - no.

DEFINIZIONE 1.1. Una curva regolare è una funzione regolare

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

cioè

- una terna $\Phi(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ di funzioni reali di una variabile reale,
- definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$
- di classe C^1 ,
- tali che in ogni t una almeno delle tre derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ sia diversa da zero.

I punti

$$P(t) := \{(x(t), y(t), z(t))\}, \quad t \in I$$

rappresentano l'oggetto geometrico \mathcal{C} al quale diamo correntemente il nome di curva .

La terna di funzioni $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ si dice rappresentazione parametrica della curva \mathcal{C} .

OSSERVAZIONE 1.2. La quarta condizione

in ogni t una almeno delle tre derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ sia diversa da zero

corrisponde all'immagine cinematica della curva come traiettoria

$$P(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

di un punto che avanza nello spazio senza fermarsi per $t \in I$.

La condizione infatti corrisponde a richiedere che la velocità

$$\vec{v}(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\} \neq 0$$

Dal punto di vista geometrico la terza condizione garantisce del resto l'esistenza in ogni punto della curva di una retta tangente.

Se la terza $z(t)$ delle tre funzioni è identicamente nulla, ovvero non viene neanche assegnata, la curva è una curva piana appartenente al piano $z = 0$.¹

OSSERVAZIONE 1.3. Come vedremo in numerose occasioni una stessa curva \mathcal{C} , intesa come oggetto geometrico, può essere dotata di diverse rappresentazioni parametriche: non esiste quindi corrispondenza biunivoca tra curve intese come oggetti geometrici e loro rappresentazioni parametriche.

2. I segmenti

Le funzioni $(x(t), y(t), z(t))$ rappresentazione parametrica di un segmento possono essere scelte lineari in t .

Il segmento determinato dai due punti $P = (a, b, c)$ e $Q = (d, e, f)$ si rappresenta con

$$x(t) = a + (d - a)t, \quad y(t) = b + (e - b)t, \quad z(t) = c + (f - c)t \quad t \in [0, 1]$$

ESEMPIO 2.1. Consideriamo il segmento AB di estremi $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1, 0\}$ una sua rappresentazione parametrica è

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

Un trucco per riconoscere che la rappresentazione fornita sia esattamente quella del segmento assegnato è il seguente

- le funzioni $x(t) = t$ e $y(t) = 1 - t$ della rappresentazione sono polinomi di primo grado, quindi la curva è una porzione di retta,
- la t varia in un intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$, quindi la porzione di retta è un segmento estremi inclusi,
- $\{x(0), y(0)\} = \{0, 1\} = A$, $\{x(1), y(1)\} = \{1, 0\} = B$

¹Una curva si dice piana se appartiene tutta ad uno stesso piano, che può, naturalmente essere diverso dal piano $z = 0$. Curve piane si ottengono sezionando una superficie dello spazio con un piano.

ESEMPIO 2.2. Lo stesso segmento AB precedente poteva essere rappresentato anche con

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in [0, 1/2]$$

come pure (sorprendentemente) con

$$\begin{cases} x = 1 - \cos(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

OSSERVAZIONE 2.3. Le due rappresentazioni parametriche del segmento AB offerte sopra differiscono dal punto di vista cinematico:

- il punto $P(t)$ che si muove da A a B secondo la prima rappresentazione si muove di moto rettilineo uniforme,
- il secondo viaggia ancora da A a B ma il suo moto rettilineo non è più uniforme: parte molto lentamente e va via via acquistando velocità...

ESEMPIO 2.4. Consideriamo il segmento dello spazio di estremi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$: una sua rappresentazione parametrica è

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

3. Le circonferenze

Sia $C = (\alpha, \beta)$ il centro ed r il raggio: la circonferenza del piano $z = 0$ si rappresenta con

$$\varphi(t) = \alpha + r \cos(t), \quad \chi(t) = \beta + r \sin(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

ESEMPIO 3.1. Il quarto di circonferenza di centro l'origine, raggio $r = 3$ contenuto nel secondo quadrante ha la seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3 \cos(t) \\ y = 3 \sin(t) \end{cases} \quad t \in [\pi/2, \pi]$$

ESEMPIO 3.2. La semicirconferenza inferiore di centro il punto $C = \{1, 1\}$ e raggio $r = 5$ ha la seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + 5 \cos(t) \\ y = 1 + 5 \sin(t) \end{cases} \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

come pure, ovviamente, la seguente altra rappresentazione

$$\begin{cases} x = 1 + 5 \cos(2t) \\ y = 1 + 5 \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [\pi/2, \pi]$$

4. Le ellissi

Sia $C = (\alpha, \beta)$ il centro e a e b i semiassi: l'ellisse si rappresenta con

$$\varphi(t) = \alpha + a \cos(t), \quad \chi(t) = \beta + b \sin(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

ESEMPIO 4.1. L'intera ellisse di centro l'origine, semiasse_x = 3 e semiasse_y = 5 ha la seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3 \cos(t) \\ y = 5 \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

5. Un'elica

La curva di rappresentazione parametrica

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t) \quad z(t) = t \quad t \in \mathbb{R}$$

rappresenta un'elica che esce dall'origine e sale nella direzione dell'asse z .

ESEMPIO 5.1. Le eliche, o viti, si incontrano nella realizzazione delle scale a chiocciola: collegare, ad esempio, il punto $A = (\{1, 0, 0\}$ del piano terra con il corrispondente $B = \{1, 0, 5\}$ posto all'altezza $z = 5$. Il collegamento può essere fatto in vari modi

- la pertica (uso caserme dei pompieri):

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 5]$$

- una chiocciola abbastanza ripida

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = \frac{5}{2\pi}t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

- una chiocciola meno ripida

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = \frac{5}{4\pi}t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$

- una chiocciola ancora meno ripida

$$\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \\ z = \frac{5}{4\pi}t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$

6. I profili altimetrici

Sia

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} :$$

e sia

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

una curva piana contenuta in A : si può considerare la curva C_G corrispondente sul grafico G di f :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f[x(t), y(t)] \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Le quote $f[x(t), y(t)]$ raggiunte muovendosi su C_G rappresentano il profilo altimetrico di G lungo C .

Si riconosce facilmente che se f è una funzione continua allora il profilo altimetrico $h(t) = f[x(t), y(t)]$ è una funzione continua di $t \in [a, b]$.

6.1. Un esempio. Consideriamo i profili altimetrici che si incontrano in corrispondenza alla funzione $x^2 + y^2$ relativamente alle seguenti curve del piano $z = 0$

- circonferenza $x(t) = 0.6 \cos(t)$, $y(t) = 0.6 \sin(t)$ $t \in [-\pi, \pi]$,
- ellisse $x(t) = 0.8 \cos(t)$, $y(t) = 0.3 \sin(t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

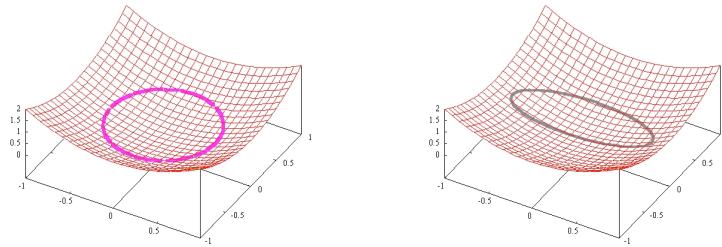


FIGURA 1. Profilo altimetrico relativo alla circonferenza, all'ellisse.

OSSERVAZIONE 6.1 (Un criterio di discontinuità).

I profili altimetrici su funzioni continue sono continui: se trovo un profilo altimetrico discontinuo, la funzione è discontinua.

PROBLEMA 6.2 (Un problema altimetrico). *Sia $f(x, y)$ una funzione definita in tutto il piano \mathbb{R}^2 , siano $A = \{a_1, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2\}$ due punti assegnati, nei quali riesca*

$$f(A) = f(B)$$

esiste una curva C da A a B tale che il corrisponde profilo altimetrico sia costante ?

In altri termini si può andare, passeggiando sul grafico da $\{a_1, a_2, f(a_1, a_2)\}$ a $\{b_1, b_2, f(b_1, b_2)\}$ mantenendosi sempre alla stessa quota ?

CAPITOLO 4

Due teoremi fondamentali

1. Contrimmagini tramite funzioni continue

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata: scelto un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si chiama

contrimmagine di E tramite f,

e si indica con $f^{-1}(E)$ l'insieme

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \in E\}$$

La definizione data è esattamente la stessa che si incontrava nell'ambito delle funzioni di una sola variabile.

ESEMPIO 1.1. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$, la contrimmagine dell'intervallo chiuso $[1, 4] \subseteq \mathbb{R}$ tramite f è l'insieme

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

la corona circolare di centro l'origine e raggi $r = 1$ e $R = 2$.

Le contrimmagini $f^{-1}(E)$ con

- **E aperto** di \mathbb{R}
- **f funzione continua**

hanno la proprietà importante di essere insiemi aperti di \mathbb{R}^2 : anzi, il test maggiormente utilizzabile per riconoscere che un insieme $F \subseteq \mathbb{R}^2$ sia un aperto è riconoscere che esso sia la contrimmagine di un aperto di \mathbb{R} tramite una funzione continua.

TEOREMA 1.2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita nell'aperto A e continua, per ogni aperto $E \subseteq \mathbb{R}$ la contrimmagine $f^{-1}(E)$ è aperta in \mathbb{R}^2 .

DIMOSTRAZIONE. La contrimmagine di cui si parla è, per definizione,

$$f^{-1}(E) = \{(x, y) \in A \mid f(x, y) \in E\}$$

Riconoscere che $f^{-1}(E)$ è un aperto vuol dire riconoscere che tutti i suoi punti sono punti interni:

- sia $(x_0, y_0) \in f^{-1}(E) \rightarrow (x_0, y_0) \in A, f(x_0, y_0) = k \in E$

- essendo E aperto esiste un intorno di k $(k - \sigma, k + \sigma) \subseteq E$
- essendo f continua in (x_0, y_0) esiste un raggio ρ tale che

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r < \rho \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \sigma$$

- essendo A aperto esiste certamente un raggio r_0 tale che i cerchi di centro (x_0, y_0) e raggio $r < r_0$ sono interamente contenuti in A
- scelto un raggio r minore sia di ρ che di r_0 si riconosce che

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \sigma$$

Ne segue, in altri termini, che l'intorno di (x_0, y_0) di raggio tale r è interamente contenuto in $f^{-1}(E)$: abbiamo cioè riconosciuto che il punto (x_0, y_0) è interno ad E .

Tenuto conto che (x_0, y_0) era un punto qualsiasi di $f^{-1}(E)$ abbiamo riconosciuto che $f^{-1}(E)$ è aperto. \square

OSSERVAZIONE 1.3. Notate la piccola differenza tra le affermazioni precedenti il Teorema e l'enunciato del Teorema stesso: si richiede, nel Teorema, che l'insieme di definizione A della f sia aperto in \mathbb{R}^2 . Si tratta di un'ipotesi sufficiente, senza la quale tuttavia il risultato che $f^{-1}(E)$ sia aperto potrebbe perdere.

Si pensi infatti alla funzione $f(x, y) = \sqrt{x + y}$, definita com'è nota nel semipiano chiuso $x + y \geq 0$, e si cerchi la contrimmagine della semiretta aperta $E : z < 1$: si ottiene

$$f^{-1}(E) : 0 \leq x + y < 1$$

insieme, una striscia del piano, che non è né aperto né chiuso.

ESEMPIO 1.4.

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La contrimmagine

$$f^{-1}[(0, 2)] = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è un insieme chiuso.

1.1. Aperti di \mathbb{R} famosi.

I più importanti aperti di \mathbb{R} sono :

- tutto \mathbb{R}
- le semirette aperte: $x > b$ oppure $x < a$
- gli intervalli limitati aperti ($a < x < b$)

1.2. Aperti del piano corrispondenti.

La corrispondenza consiste nel prendere una funzione continua $f(x, y)$ e nel considerare le contrimmagini tramite essa degli aperti famosi citati sopra:

- $f(x, y) = ax + by + c$ funzioni lineari: si ottengono semipiani aperti e strisce aperte
- $f(x, y) = x^2 + y^2$: si ottengono cerchi aperti e corone circolari aperte

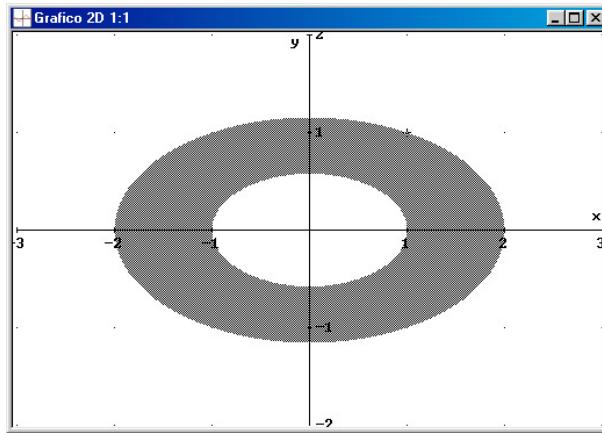
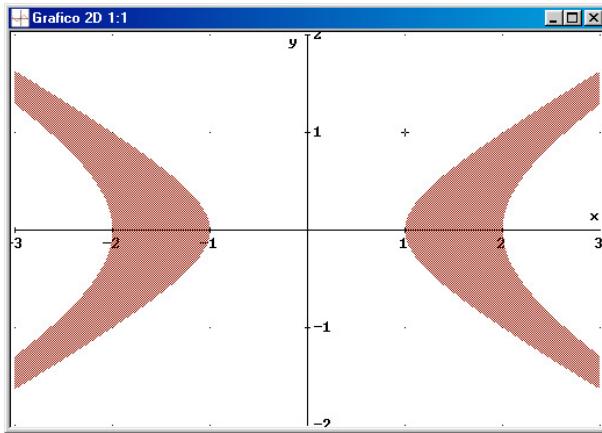
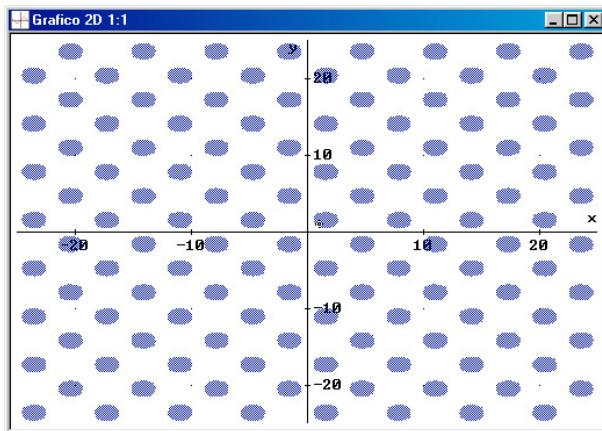


FIGURA 1. Aperto ellisse: $1 < x^2 + 3y^2 < 4$

- $f(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2$: si ottengono regioni delimitate da un'ellisse aperte e corone ellittiche aperte,
- $f(x, y) = \pm a^2x^2 \mp b^2y^2$: (segni discordi) si ottengono regioni aperte delimitate da iperboli.

1.3. Una contrimmagine curiosa... Consideriamo la contrimmagine, vedi Figura 3, della semiretta $z > 1/2$ tramite la funzione continua $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$:

- aperta
- illimitata (la funzione sin è periodica... il valore che prende in un punto lo riprende in molti, molti altri !)
- non connessa.

FIGURA 2. Aperto iperbole: $1 < x^2 - 3y^2 < 4$ FIGURA 3. Aperto da funzioni periodiche:
 $\sin(x)\sin(y) > 1/2$

2. Il teorema di Weierstrass

2.1. L'insieme immagine.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, per ogni insieme $E \subseteq A$ possiamo considerare l'insieme

$$f(E) = \{f(x, y), \forall (x, y) \in E\}$$

dei valori $f(x, y)$ relativi ai valori $(x, y) \in E$.

L'insieme $f(E)$ si dice immagine di E tramite f .

Se non si precisa l'insieme di cui costruire l'immagine si sottintende che si tratti dell'immagine dell'intero insieme di definizione della funzione.

Tenuto conto che $f(E) \subseteq \mathbb{R}^1$ consideriamo le seguenti domande importanti:

- $f(E)$ é limitato ?
- $f(E)$ ha minimo e/o massimo ?

La risposta dipende, com'è prevedibile da

- il tipo di insieme E
- il tipo di funzione f

ESEMPIO 2.1. *L'immagine del semipiano $x > 0$ tramite la funzione continua $x^2 + y^2$ è la totalità dei numeri positivi, insieme non limitato e non chiuso.*

ESEMPIO 2.2. *L'immagine del cerchio bucato $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ mediante la funzione continua $\ln(x^2 + y^2)$ è l'insieme dei numeri non positivi, insieme chiuso ma non limitato.*



FIGURA 4. Karl Weierstrass, (1815-1897)

TEOREMA 2.3 (Weierstrass). *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $E \subseteq A$ con E chiuso e limitato, l'immagine $f(E)$ è un insieme chiuso e limitato.*

Il teorema afferma che

- se $E \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso e limitato

- se f è continua in un insieme A che contiene E
- l'insieme

$$F = \{f(x, y), \forall (x, y) \in E\}$$

- è limitato
- è chiuso, quindi ha minimo e ha massimo.

OSSERVAZIONE 2.4. Si tratta (come in tutti i teoremi veramente utili) di una condizione sufficiente: soddisfatte le due ipotesi siamo certi che esiste sia il minimo che il massimo, in mancanza di una o di entrambe tali ipotesi non possiamo negare l'esistenza di minimo e di massimo, possiamo solo... dubitarne!

OSSERVAZIONE 2.5. Il problema del massimo o del minimo di una funzione $f(x, y)$ è, generalmente, proposto assegnando

- una funzione f
- un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ su cui deve essere considerata la f .

La richiesta del massimo e/o del minimo richiede, come risposta due numeri reali

- il valore del massimo,
- il valore del minimo.

Può essere richiesto anche di determinare i punti (potrebbero essere più d'uno) in cui la funzione prende il valore massimo, come pure i punti in cui la funzione prende il valore minimo. Queste seconde richieste avranno come risposte

- certi punti $(x_M, y_M) \in A$, che saranno detti punti di massimo,
- certi punti $(x_m, y_m) \in A$, che saranno detti punti di minimo.

ESEMPIO 2.6. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sull'insieme $A : x^2 + y^2 \leq 1$.

RISPOSTA:

L'insieme A assegnato è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass, esiste sia il minimo che il massimo.

Il minimo è 0, il massimo è 1.

C'è un solo punto di minimo che è l'origine.

Ci sono più punti di massimo, che sono tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, frontiera di A .

La tecnica con cui sono state trovate le risposte fornite è in questo caso assolutamente naif: problemi più complessi saranno affrontati con tecniche adeguate nel seguito.

2.2. La dimostrazione.

Forniamo in questo paragrafo la dimostrazione del Teorema di Weierstrass, dimostrazione che fa uso del precedente Teorema di Bolzano.

DIMOSTRAZIONE.

La limitatezza

Dimostrare che $f(E)$ è limitato significa provare che

$$\forall(x, y) \in E \quad m \leq f(x, y) \leq M$$

con m ed M due costanti opportune.

Cominciamo con il mostrare che esiste M tale che

$$\forall(x, y) \in E \quad f(x, y) \leq M,$$

e conduciamo la dimostrazione per assurdo, ammettendo cioè che per ogni $n \in N$ ci sia qualche punto $(x_n, y_n) \in E$ nel quale riesca

$$(16) \quad f(x_n, y_n) \geq n$$

Applichiamo alla successione $\{(x_n, y_n)\} \in E$, contenuta nell'insieme limitato E , il teorema di Bolzano: se ne trae l'esistenza di una sottosequenza

$$\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$$

convergente.

Detto (ξ, η) il suo limite riesce, essendo E chiuso $(\xi, \eta) \in E$. Essendo f continua ne segue l'assurdo

$$f(\xi, \eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = +\infty$$

da cui si esclude l'esistenza della successione (16) ovvero si riconosce l'esistenza di una costante M che limiti superiormente i valori $f(x, y) \forall(x, y) \in E$.

La prova dell'esistenza dell'altra costante m che limiti i valori

$$f(x, y) \forall(x, y) \in E$$

inferiormente si conduce con la stessa strategia.

Abbiamo pertanto riconosciuto che $f(E)$ è limitato.

Esistenza del massimo

Indichiamo con M

$$M = \sup_{(x,y) \in E} f(x, y) = \sup f(E)$$

Per ogni $n \in N$ consideriamo un punto $(x_n, y_n) \in E$ nel quale riesca

$$(17) \quad M - \frac{1}{n} \leq f(x_n, y_n) \leq M$$

l'esistenza di tali punti (x_n, y_n) discende dalle proprietá dell'estremo superiore: i valori $M - \frac{1}{n}$ sono minori dell'estremo superiore di $f(E)$, quindi ci deve essere qualche valore di $f(E)$ che li supera...

Applichiamo ora alla successione

$$\{(x_n, y_n)\} \in E,$$

contenuta in un insieme limitato, il teorema di Bolzano: se ne deduce l'esistenza di una sottosuccessione

$$\{(x_{n_k}, y_{n_k})\} \in E$$

convergente a un punto (x_M, y_M) che, tenuto conto che E é chiuso appartiene certamente ad E .

Tenuto conto che f é continua riesce

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_M, y_M)$$

del resto, tenuto conto della (17) riesce anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(M - \frac{1}{n_k} \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq M$$

da cui

$$M \leq f(x_M, y_M) \leq M \quad \rightarrow \quad M = f(x_M, y_M)$$

Ovvvero

- l'estremo superiore $M = \sup f(E)$ é massimo,
- il punto $(x_M, y_M) \in E$ é un punto di massimo.

La prova dell'esistenza del minimo é del tutto analoga. \square

OSSERVAZIONE 2.7. *La dimostrazione dell'esistenza del massimo é stata svolta per esteso: non altrettanto quella del minimo.*

Notiamo tuttavia che la dimostrazione dell'esistenza del massimo fornisce, di fatto, anche la prova dell'esistenza del minimo tenuto conto che

$$\min f(E) = - \max \{-f(E)\}$$

e dell'ovvia continuitá di $-f$.

3. Il teorema d'esistenza degli zeri

Il risultato corrisponde all'esistenza di soluzioni $(x, y) \in A$, per l'equazione $f(x, y) = 0$, o in generale,

$$f(x, y) = k$$

La risposta dipende anche qui da

- il tipo di insieme A
- il tipo di funzione f
- il tipo di valore k

TEOREMA 3.1 (Teorema esistenza degli zeri). *Se*

- A é connesso per poligonali,
- f é continua,

se riesce $f(P_1) < f(P_2)$ in corrispondenza a due punti $P_1, P_2 \in A$ allora per ogni

$$f(P_1) \leq k \leq f(P_2)$$

esiste almeno un punto $Q \in A$ tale che $f(Q) = k$.

Il Teorema 3.1 riconosce che una funzione continua, definita su un insieme connesso per poligonali, che prenda due valori $f(P_1) < f(P_2)$ prende, di conseguenza, anche tutti i valori k intermedi $f(P_1) \leq k \leq f(P_2)$.

Il nome di teorema d'esistenza degli zeri discende dal caso in cui $f(P_1) < 0$ ed $f(P_2) > 0$ nel quale si deduce l'esistenza di almeno un punto $Q \in A$ in cui $f(Q) = 0$, esistenza appunto di uno zero per la funzione.

3.1. Un enunciato alternativo...

TEOREMA 3.2 (Teorema dei valori intermedi). *Se*

- A é connesso per poligonali,
- f é continua,

l'insieme immagine é un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Si ricorda piú facilmente e... dice esattamente la stessa cosa, aiutandoci a ricordare la proprietá caratteristica degli intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$, la loro convessitá

.. se I contiene due numeri α e β contiene, di conseguenza, tutti i γ intermedi.

OSSERVAZIONE 3.3. *Si tratta ovviamente anche in questo caso di una condizione sufficiente: soddisfatte le tre ipotesi siamo certi che esiste una soluzione per l'equazione $f(x, y) = k$, in mancanza di una o piú*

d'una di tali ipotesi non possiamo dichiarare che l'equazione non ha soluzioni, possiamo solo... dubitarne!

4. Le conseguenze

I due teoremi precedenti, [2.3](#) e [3.1](#) aiutano a determinare l'insieme immagine di funzioni continue:

- se la funzione continua é definita su un insieme
 - connesso
 - chiuso
 - limitato
 allora l'insieme immagine é l'intervallo chiuso e limitato $[m, M]$ avendo indicato con m e M il minimo e il massimo della funzione,
- se la funzione continua é definita su un insieme connesso (ma non anche chiuso e limitato) allora l'insieme immagine rimane un intervallo che però puó essere illimitato o puó non includere gli estremi.

ESEMPIO 4.1. *L'insieme immagine della funzione $x^2 + y^2$ considerata definita sul quadrato di estremi l'origine e il punto $(1, 1)$ é l'intervallo $[0, 2]$.*

ESEMPIO 4.2. *L'insieme immagine della funzione*

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

é l'intervallo $(0, 1]$ che include 1 ma non 0

ESEMPIO 4.3. *La funzione*

$$\frac{1}{x + y}$$

é definita per $x + y \neq 0$.

L'immagine del semipiano (connesso per poligonali) $x + y > 0$ é un intervallo ([Teorema 3.2](#)).

Poiché tale immagine contiene sia valori positivi molto grandi¹ sia valori positivi molto piccoli² non puó che essere l'intervallo dei numeri positivi.

Tenuto conto che la funzione non produce mai il valore 0 se ne conclude che l'immagine del semipiano $x + y > 0$ mediante la funzione $1/(x + y)$ é l'intervallo aperto $z > 0$.

¹valori della funzione su (x, y) vicini alla frontiera

²valori della funzione su (x, y) molto lontano dall'origine

Discorso analogo per l'immagine dell'altro semipiano $x + y < 0$: l'immagine é l'intervallo aperto $z < 0$.

Concludendo: l'immagine della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x+y}$$

definita (ovviamente) per $x + y \neq 0$, insieme non limitato, non chiuso e non连通o é l'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$, insieme non limitato, non chiuso, non connesso.

CAPITOLO 5

I limiti

1. Il concetto di limite

È analogo ([2], pag. 19) al concetto di continuità: i valori della funzione $f(x, y)$ devono *stabilizzarsi* per $(x, y) \approx (x_0, y_0)$ su un valore L .

ESEMPIO 1.1. La funzione

$$\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: i suoi valori infatti continuano ad oscillare follemente tra -1 e 1.

ESEMPIO 1.2. La funzione

$$(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

ha limite 0 per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: i suoi valori infatti sono il prodotto di un fattore $x^2 + y^2$ che diventa sempre più vicino a 0 mano mano che il punto (x, y) è vicino all'origine, e un fattore $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ che oscilla mantenendosi tuttavia limitato tra -1 e 1.

ESEMPIO 1.3. La funzione

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: sui punti (t, mt) , $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ la funzione prende il valore

$$\frac{mt^2}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m^2}{1 + m^2}$$

Valori diversi su rette $y = mx$ diverse, tutte uscenti dall'origine: non c'è stabilizzazione vicino all'origine !

ESEMPIO 1.4. La funzione

$$\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: indicato con

$$\rho^2 = x^2 + y^2 : (x, y) \approx (0, 0) \rightarrow \rho \approx 0$$

é noto che

$$\rho \approx 0 \rightarrow \frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2} \approx 1$$

DEFINIZIONE 1.5. Sia P_0 il centro di un disco interno al dominio A dove é definita f , si dice che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$$

con L numero reale, se per ogni $\epsilon > 0$ assegnato esiste un raggio δ_ϵ tale che

$$0 < \overline{PP_0} < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(P) - L| < \epsilon$$

Notate che nella definizione precedente si considerano punti P tali che

$$0 < \overline{PP_0} < \delta_\epsilon$$

La diseguaglianza a sinistra significa che si considerano soltanto punti

$$0 < \overline{PP_0} \Leftrightarrow P \neq P_0.$$

In altri termini l'eventuale valore $f(P_0)$ non fa parte dei valori da considerare.

Al limite (ci si consenta il bisticcio di parole) la funzione potrebbe anche non essere definita nel punto nel quale si cerca il limite !

La situazione, apparentemente paradossale, é proprio la piú interessante e comune: di fatto si cerca molte volte il limite di una funzione proprio nei punti in cui essa non é definita.

Si cerca cioè di riconoscere se i valori della funzione f nei punti $(x, y) \approx (x_0, y_0)$

- si stabilizzino intorno a un certo valore L (esista il limite)
- non si stabilizzino su alcun valore particolare ma oscillino o divergano (non esista limite)

PROBLEMA

Se la funzione é definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, per quali punti di \mathbb{R}^2 ha senso cercare il limite della funzione f ?

Pensate che avrebbe senso cercarlo in un punto P_0 esterno a A ?

TEOREMA 1.6. *Sia A aperto e sia*

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

sia $P_0 \in A$: f è continua in P_0 se e solo se

- *esiste $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$*
- *tale limite coincide con $f(P_0)$*

OSSERVAZIONE 1.7. *Riconosciuto per qualche motivo che la funzione $f(x, y)$ è continua in A allora il limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ è $f(x_0, y_0)$*

2. Modifichiamo un valore

Sia $f(x, y)$ una funzione continua, ad esempio in tutto \mathbb{R}^2 : scelto un punto (x_0, y_0) possiamo decidere di modificare la f in quel punto dando un valore $\lambda \neq f(x_0, y_0)$.

Indichiamo con F la nuova funzione così modificata: F , non sarà continua in (x_0, y_0) ma resta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Stesso discorso per una qualsiasi funzione f per la quale si sappia che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

Qualunque modifica del valore $f(x_0, y_0)$ non influisce sull'esistenza e sul valore del limite.

Ricordate che il limite di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_0, y_0)

- non tiene conto che il punto (x_0, y_0) appartenga o meno all'insieme di definizione della funzione, serve solo che la funzione sia definita in punti vicini a (x_0, y_0) ,
- è determinato dai valori che la funzione prende nei punti $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, e non dal valore che la funzione prende nel punto (x_0, y_0) ,
- esiste se e solo se i valori della funzione nei punti $(x, y) \approx (x_0, y_0)$ possiedono il requisito di stabilizzarsi su un valore.

OSSERVAZIONE 2.1. *L'esistenza e/o il valore del limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ non dipendono né dall'eventuale valore $f(x_0, y_0)$ né dai valori della f in punti (ξ, η) tutti a distanza*

$$\sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2} > \rho > 0$$

L'esistenza e il valore del limite dipendono solo dai valori di f nella corona circolare

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r, \quad r > 0$$

3. Prolungamento per continuità

Sia f continua in $A - P_0$: se esiste, finito, il

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell \in \mathbb{R}$$

si può prolungare f fin su P_0 attribuendo ad f in tale punto il valore del limite ℓ e approdando con tale prolungamento ad una funzione continua in A incluso P_0 .

ESEMPIO 3.1. *Sia*

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

tenuto conto che riesce

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = 0$$

si può prolungare $f(x, y)$ nella funzione continua in tutto R^2 seguente:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ESEMPIO 3.2. *Un contresempio:*

la funzione, precedentemente considerata,

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

non è prolungabile per continuità sull'origine.

Quale valore del resto potremmo attribuirle nell'origine considerato che su ogni raggio uscente dall'origine prende valori diversi?

4. Ordine di infinitesimo di una funzione in un punto

Alcune convenzioni:

- i punti (x, y) vicini al punto (ξ, η) si possono indicare con

$$x = \xi + h, \quad y = \eta + k$$

con (h, k) vicino a $(0, 0)$

- Dire che riesce

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)} f(x, y) = \ell$$

equivale a dire che, posto

$$\phi(h, k) = f(\xi + h, \eta + k) - \ell$$

riesce

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \phi(h, k) = 0$$

Indicata con

$$\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$$

si dice che $\phi(h, k) = f(\xi + h, \eta + k) - \ell$ tende a zero di ordine $\mathcal{O}(1)$ se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\left| \frac{\phi(h, k)}{\rho} \right| \leq C$$

Si dice che $\phi(h, k)$ tende a zero di ordine superiore a $\mathcal{O}(1)$ se riesce

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\phi(h, k)}{\rho} = 0$$

In luogo del quoziente con ρ introdotto sopra si puó usare il quoziente con ρ^α , una qualunque potenza positiva α

DEFINIZIONE 4.1. si dice che $\phi(h, k)$ tende a zero di ordine $\mathcal{O}(\alpha)$ o che é un infinitesimo di ordine α , se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\left| \frac{\phi(h, k)}{\rho^\alpha} \right| \leq C$$

Se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\phi(h, k)}{\rho^\alpha} = 0$$

si dice che $\phi(h, k)$ é un infinitesimo di ordine $> \alpha$.

4.1. L'interpretazione grafica.

- La funzione

$$f(x, y) = 1 + x + 2y$$

ha limite $\ell = 1$ nell'origine: la differenza

$$f(x, y) - 1 = x + 2y$$

é un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(1)$, vedi Figura 1

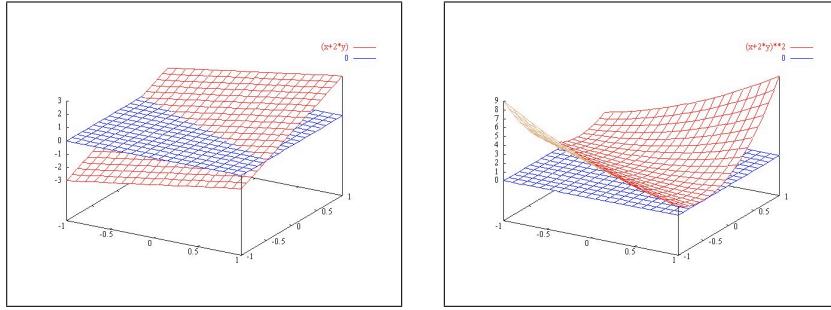
- La funzione

$$g(x, y) = 1 + (x + 2y)^2$$

ha ancora limite $\ell = 1$ nell'origine: la differenza

$$g(x, y) - 1 = (x + 2y)^2$$

é un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(2)$, vedi Figura 1

FIGURA 1. a) $f(x, y) - \ell = \mathcal{O}(1)$, b) $g(x, y) - \ell = \mathcal{O}(2)$

Nel primo caso, $\mathcal{O}(1)$, la funzione si avvicina alla quota $\ell = 1$ tagliando la quota stessa in modo obliquo.

Nel secondo caso, $\mathcal{O}(2)$, la $g(x, y)$ si
schiaccia

sulla quota $\ell = 1$. Si tratta del fenomeno del piano tangente...

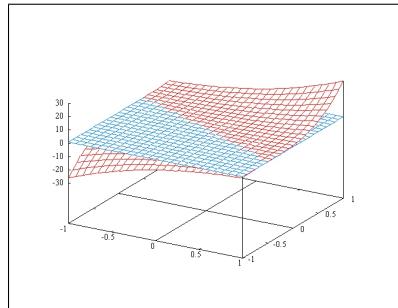
- La funzione

$$q(x, y) = 1 + (x + 2y)^3$$

ha ancora limite $\ell = 1$ nell'origine : la differenza

$$q(x, y) - 1 = (x + 2y)^3$$

é un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(3)$, vedi Figura 2

FIGURA 2. Lo schiacciamento di $q(x, y) = 1 + (x + 2y)^3$
di ordine 3

OSSERVAZIONE 4.2. *L'occhio umano distingue molto bene la differenza tra la prima $f(x, y) = 1 + (x + 2y)$ e la seconda $g(x, y) = 1 + (x + 2y)^2$ in termini di schiacciamento: ma non riconosce il differente schiacciamento della terza.*

In altre parole l'occhio umano riconosce la derivata prima ma non distingue le derivate successive...!

Si noti che molti fenomeni naturali invece dipendono anche dalle derivate successive: per esempio la forza centrifuga cui è soggetta un'automobile nelle curve dipende dalla curvatura del tracciato, quindi dalle derivate seconde. L'occhio umano non apprezza affatto la discontinuità della curvatura tra una circonferenza e la retta tangente: proprio la loro tangenza suggerisce, erroneamente, un'assoluta regolarità di raccordo, cosa tutt'altro che vera.

Ancora pensando alle automobili (o anche alle ferrovie) si ricordi infatti che i raccordi, ad esempio i curvoni autostradali veloci, non si realizzano mai incollando tratti rettilinei con archi di circonferenza né di ellisse.

Si ricorre a curve molto più complesse, vedi le foto aeree, proprio nel tentativo di ottenere un buon raccordo a livello anche di derivate seconde.

4.2. Un equivoco frequente. La funzione $u(x, y) = x + y$ è un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(1)$ nell'origine, la funzione $v(x, y) = (x + y)^2$ è un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(2)$ nell'origine: ne deriva (?) che nei punti del cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ riesce

$$|v(x, y)| \leq |u(x, y)|$$

Questa conclusione è falsa: basta pensare, ad esempio alla coppia di funzioni

$$u(x, y) = \frac{1}{100}(x + y), \quad v(x, y) = 100(x + y)^2$$

Ancora la prima, u , è un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(1)$, la seconda v è un infinitesimo di ordine $\mathcal{O}(2)$, ma evidentemente il confronto

$$|v(x, y)| \leq |u(x, y)|$$

nei punti del cerchio è manifestamente falso.

Ricordate quindi che le dichiarazioni

$$u \text{ è } \mathcal{O}(1) \text{ nell'origine,}$$

ovvero

$$v \text{ è } \mathcal{O}(2) \text{ nell'origine,}$$

significano sempre e solo che valgono in un intorno dell'origine le maggiorazioni

$$|u(x, y)| \leq C_1 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |v(x, y)| \leq C_2(x^2 + y^2)$$

Un qualsiasi confronto tra $|u|$ e $|v|$ richiederebbe almeno un'informazione sui valori delle due costanti C_1 e C_2 usate...

5. Come si riconosce il limite in un punto

Riconoscere che la funzione f ammette limite ℓ nel punto (ξ, η) significa riconoscere che la differenza

$$\phi(h, k) = f(\xi + h, \eta + k) - \ell$$

ha limite 0 nell'origine.

È conveniente servirsi delle coordinate polari

$$\begin{cases} h = \rho \cos(\theta) \\ k = \rho \sin(\theta) \end{cases} :$$

se riesce

$$|\phi(h, k)| = |\phi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))| = \rho^\alpha |g(\theta)|$$

con

$$\alpha > 0 \quad \text{e} \quad |g(\theta)| \leq M,$$

si ha

$$|\phi(h, k)| \leq M \rho^\alpha \Rightarrow \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \phi(h, k) = 0$$

ESEMPIO 5.1. Sia

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$$

definita per $(x, y) \neq (0, 0)$: vogliamo riconoscere che riesce

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

Servendosi delle coordinate polari si ottiene

$$f(x, y) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \rho \cos^2(\theta) \sin^3(\theta)$$

Tenuto presente che

$$|g(\theta)| = |\cos^2(\theta) \sin^3(\theta)| \leq 1$$

riesce $|f(x, y)| \leq \rho$ e quindi

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

ESEMPIO 5.2. Servendosi delle coordinate polari nell'esempio precedente

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

si riconosce che

$$|f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))| = |\cos(\theta) \sin(\theta)|$$

quantità che non è affatto infinitesima quando $\rho \rightarrow 0$.

ESEMPIO 5.3. Sia

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

definita per $(x, y) \neq (0, 0)$, servendosi delle coordinate polari si ottiene

$$f(x, y) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \frac{1}{\rho^2} \cos(\theta) \sin(\theta)$$

quantità che non è limitata per $\rho \rightarrow 0$ e, quindi non ha limite.

6. Limite secondo una direzione

In relazione alle funzioni reali di una variabile reale

$$y = f(x)$$

si erano affiancati al concetto di limite in un punto x_0 quelli, più deboli, di limite *sinistro* e limite *destro*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Nulla di tutto ciò si trasporta in due dimensioni: non ha senso infatti l'ordinamento, e quindi non hanno senso i limiti sinistro e destro.

Si possono tuttavia considerare limiti di una funzione di due variabili in un punto (x_0, y_0)

secondo una direzione assegnata $\vec{\nu} = (\alpha, \beta)$

Si tratta di limiti più deboli che si riferiscono alla stabilizzazione (o meno) dei valori della funzione nei punti (x, y)

- appartenenti ad una particolare semiretta (la direzione) uscente da (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

- vicini a (x_0, y_0) cioè $0 < t < \varepsilon$

ESEMPIO 6.1. *La funzione*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

non ha limite nell'origine, tuttavia ha invece limite lungo qualsiasi direzione $\vec{\nu} = (\alpha, \beta)$ uscente dall'origine.

Infatti preso

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \end{cases}$$

riesce

$$f(x, y) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

valori addirittura costanti...

Naturalmente valori costanti diversi a seconda della direzione scelta, quindi $f(x, y)$ ha limiti (diversi) secondo ogni direzione uscente dall'origine.

6.1. Un contrempio. Consideriamo la funzione

$$(18) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Considerata sui punti di qualsiasi retta per l'origine $y = mx$ essa diventa

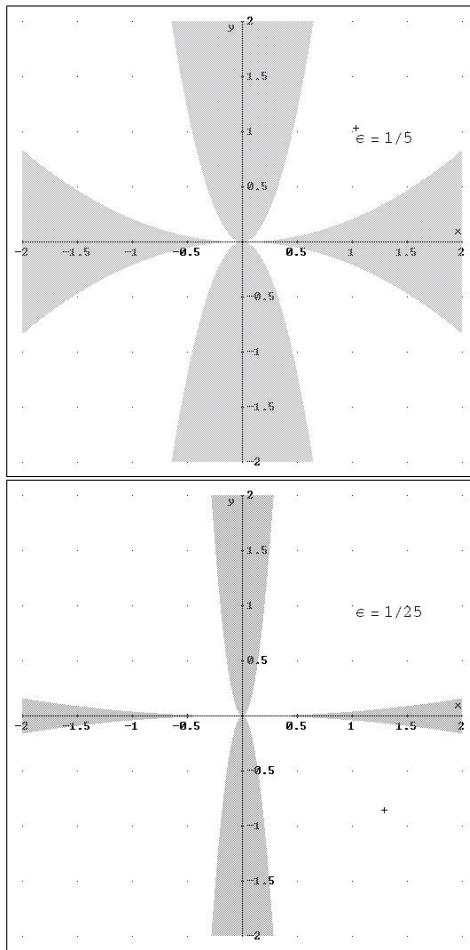
$$f(x, mx) = \begin{cases} \frac{m}{x^2 + m^2} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Risulta evidente che tali valori hanno, per $x \rightarrow 0$ tutti limite 0: in altri termini la funzione $f(x, y)$ assegnata ha limite zero lungo tutte le rette per l'origine.

Tuttavia non è vero che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

basta considerare, nelle Figure 3 seguenti, le zone, colorate in grigio, in cui riesce $|f(x, y)| < 1/5$ oppure $|f(x, y)| < 1/25$: si riconosce che non esiste alcun cerchio di centro l'origine nel quale possa riconoscersi, ad esempio, che $|f(x, y)| < 1/5$.

FIGURA 3. $|f(x, y)| < 1/5$, $|f(x, y)| < 1/25$

La mancanza di cerchi con tale requisito significa appunto che non c'è limite 0 nell'origine.

Chi pensasse che ci sia il limite e che valga, forse, qualche altro numero si sbaglierebbe di grosso: sulle rette per l'origine infatti la funzione si stabilizza, vicino all'origine, sullo 0...

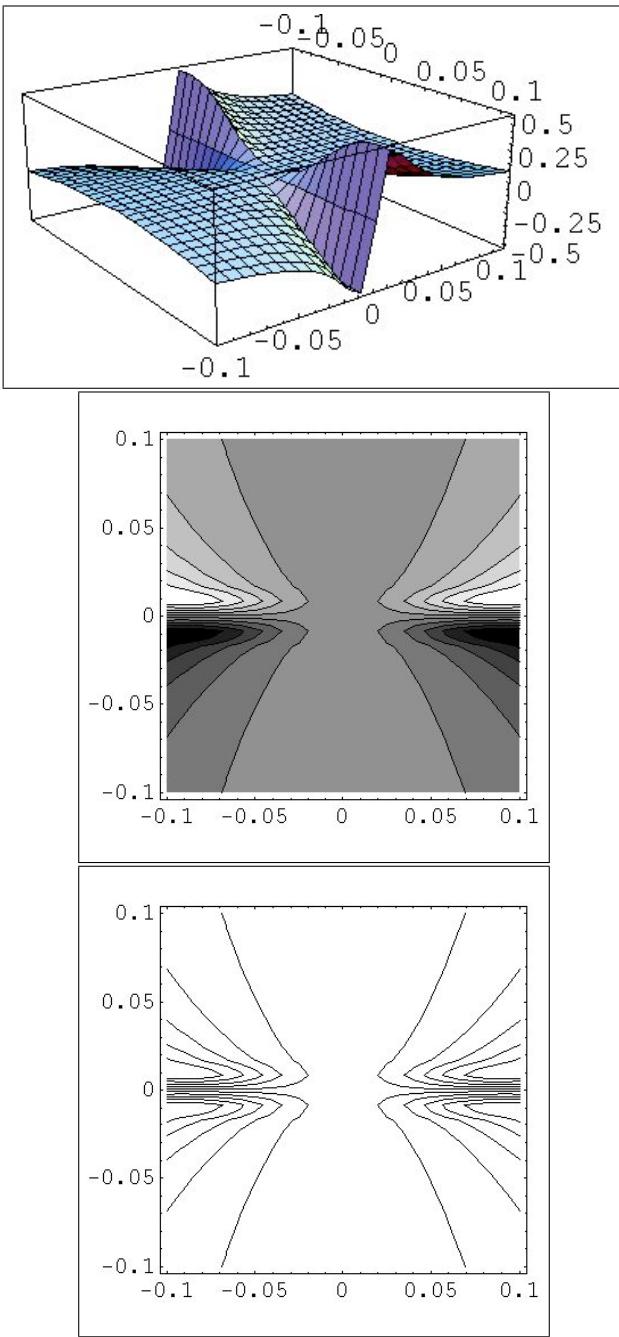


FIGURA 4. Grafico della funzione (18): prospettico, scala di grigi, linee di livello

Apprezzate la lezione di questo contesempio: per le funzioni di una variabile $y = f(x)$ se esistevano i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$$

ed erano uguali $\ell^- = \ell^+ = \ell$ si concludeva che allora tale comune valore ℓ era anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Questo fenomeno non accade piú nel caso delle funzioni di 2 variabili...!

6.2. Un percorso altimetrico speciale... Esaminiamo i valori che la precedente funzione (18) prende sui punti delle parabole del piano (x, y)

$$y = ax^2, \quad a \in R$$

Riesce

$$f(x, ax^2) = \begin{cases} \frac{a}{1+a} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Valori diversi in corrispondenza alle scelte diverse che possiamo fare per a . Le parabole considerate passano per l'origine, quindi su di esse possiamo considerare punti vicini all'origine quanto desideriamo, punti sui quali si ottengono valori

$$\frac{a}{1+a}$$

veramente qualsiasi...!

La scoperta di questi valori

$$\frac{a}{1+a}$$

diversi da 0 e presi in punti vicini all'origine quanto si voglia é la vera prova della non esistenza del limite nell'origine.

7. Limite infinito

Conoscere il limite di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_0, y_0) vuol dire disporre di un'informazione sui valori $f(x, y)$ della funzione nei punti $(x, y) \approx (x_0, y_0)$.

Anche il sapere che $f(x, y)$ diverge positivamente per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ é un'informazione che puó essere utile: sotto questo punto di vista si parla a volte, oltre che di limite finito, anche di limiti $+\infty$ o $-\infty$:

DEFINIZIONE 7.1.

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = +\infty$$

significa che comunque si prenda un M esiste δ_M tale che se $0 < \overline{PP_0} < \delta_M$ riesce $f(P) > M$

ESEMPIO 7.2. *La funzione*

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

ha limite $+\infty$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

ESEMPIO 7.3. *La funzione*

$$\frac{1}{x + y}$$

non ha limite (neanche $\pm\infty$) per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

ESEMPIO 7.4. *La funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

definita in tutto il piano privato della retta $y = 0$, asse delle x , non ha limite, neppure infinito, nei punti $(h, 0)$

8. Limiti all'infinito

Un'altra informazione importante per una funzione può essere quella relativa ai valori $f(P)$ che prende sui punti P via via più lontani dall'origine: se essi si stabilizzano su una quota L diremo che

$$\lim_{\overline{OP} \rightarrow \infty} f(P) = L$$

ovvero che L è il limite di f per $P \rightarrow \infty$.

ESEMPIO 8.1. *La funzione*

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

ha limite 0 per $P \rightarrow \infty$.

Le funzioni

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha, \quad \alpha \in Z$$

Z insieme degli interi, sono funzioni radiali: prendono cioè lo stesso valore su tutti i punti (x, y) che hanno la stessa distanza $\sqrt{x^2 + y^2}$ dall'origine.

Riesce

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} F(x, y) = \begin{cases} = 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ = +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 8.2. *La funzione*

$$3 + \frac{\sin(xy)}{1 + x^2 + y^2}$$

ha limite 3 per $P \rightarrow \infty$.

9. Funzioni composte

La pratica del calcolo propone continuamente funzioni ottenute da altre per composizione: così nel caso delle funzioni di una variabile si parla di

$$\sin(x^2), \quad \sqrt{1+x^2}, \quad \log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Analogo procedimento si incontra per funzioni di due variabili

$$\sin(x^2+y^2), \quad \sqrt{1+x^2+y^2}, \quad \log\left(1+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)$$

Non è sempre possibile eseguire la composizione $f[u(x, y), v(x, y)]$: occorre naturalmente

- prendere (x, y) nell'insieme di definizione della u e della v
- prendere inoltre (x, y) tali che il punto $(u(x, y), v(x, y))$ appartenga all'insieme di definizione della f .

Una questione fondamentale è riconoscere quali delle proprietà delle funzioni che si compongono si ritrovino nella funzione composta.

Ad esempio, sempre che la composizione sia possibile,

- una funzione limitata composta con qualsiasi funzione è limitata,
- una funzione positiva composta tramite qualsiasi funzione è positiva,
- ecc.

Una questione particolarmente importante è la conservazione della continuità

TEOREMA 9.1. *Siano $f(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ componibili e continue: la funzione composta $f[u(x, y), v(x, y)]$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Esaminiamo la continuità (o meno) nel punto (x_0, y_0) : indichiamo con

$$\xi_0 = u(x_0, y_0), \quad \eta_0 = v(x_0, y_0)$$

La funzione f , continua per ipotesi, sarà continua nel punto (ξ_0, η_0) : cosa che significa che, scelto comunque $\varepsilon > 0$ esiste δ_ε tale che

$$(19) \quad \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\xi, \eta) - f(\xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$$

Tenuto conto del resto che sia la $u(x, y)$ che la $v(x, y)$ sono continue, ancora per ipotesi, esisterà certamente un ρ tale che

$$(20) \quad \begin{cases} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho \Rightarrow |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho \Rightarrow |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon \end{cases}$$

Ne segue pertanto, sintetizzando le (19) e (20) che

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f[u(x, y), v(x, y)] - f[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]| < \varepsilon$$

□

OSSERVAZIONE 9.2. *La precedente dimostrazione ricorda molto la nota affermazione TRANSITIVA*

gli amici degli amici sono amici.

Le due funzioni continue u e v mutano punti (x, y) e (x_0, y_0) vicini in valori $\{u, v\}$ e $\{u_0, v_0\}$ vicini.

La funzione continua f non puó che trasformare i punti (u, v) e (u_0, v_0) vicini, in valori $f(u, v)$ e $f(u_0, v_0)$ vicini.

CAPITOLO 6

Le derivate

1. Derivate parziali

Sia $f(x, y)$ definita nell'aperto A del piano \mathbb{R}^2 . Se si tiene fissa la variabile $y = y_0$ e si fa variare *solo* la variabile x , si ottiene una funzione di una variabile.

Geometricamente questo corrisponde, ([2], pag. 26) a sezionare la superficie grafico della funzione con un piano $y = y_0$ verticale, parallelo all'asse x , passante per l'ordinata y_0 fissata.

La condizione di derivabilità di questa sezione corrisponde all'esistenza del limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il significato geometrico del limite di questo rapporto incrementale è la *pendenza* della superficie nella direzione dell'asse x .

DEFINIZIONE 1.1. *La funzione f è DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO AD x nel punto (x_0, y_0) se esiste, finito, il limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

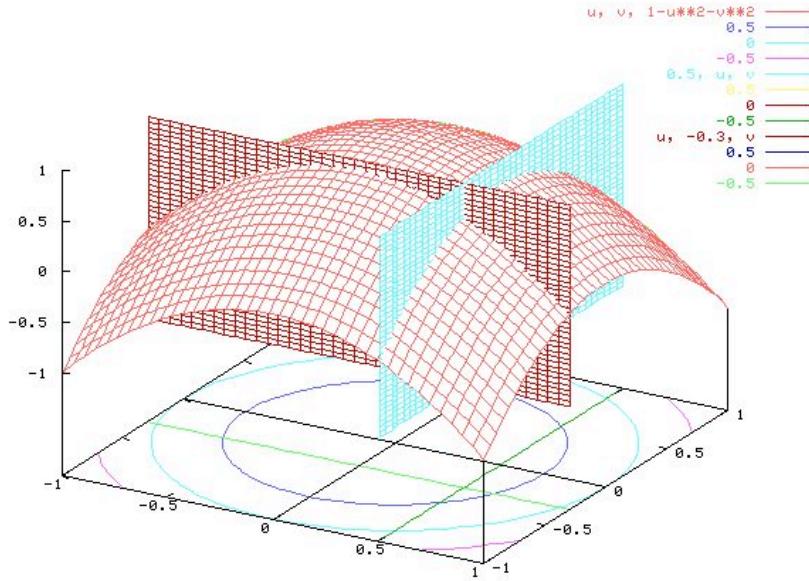
Il valore del limite si indica con uno dei simboli seguenti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0).$$

Analogamente, f è DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO AD y nel punto (x_0, y_0) se esiste, finito,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il calcolo delle derivate parziali si fa con le stesse regole di derivazione delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} : la/e variabile/i rispetto a cui non si deriva sono trattate come costanti.



Roma, 23 Dec 2002, 15:43

FIGURA 1. $z = 1 - x^2 - y^2$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = -0.3$

Ad esempio,

$$\begin{aligned} f(x, y) = x^2 + y^2 &\implies f_x(x, y) = 2x, & f_y(x, y) = 2y, \\ f(x, y) = x^3y + y^2 &\implies f_x(x, y) = 3x^2y, & f_y(x, y) = x^3 + 2y, \\ f(x, y) = \sin(x^2y) &\implies f_x(x, y) = 2xy \cos(x^2y), & f_y(x, y) = x^2 \cos(x^2y). \end{aligned}$$

Il vettore a due componenti,

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

è detto GRADIENTE DI f (nel punto (x_0, y_0))¹.

OSSERVAZIONE 1.2. Il gradiente di una $f(x, y)$ dotata di derivate parziali prime in ogni punto rappresenta un campo vettoriale, cioè una funzione

$$\nabla : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Ad ogni punto (α, β) fa corrispondere un vettore $(f_x(\alpha, \beta), f_y(\alpha, \beta))$. In Figura 2 vedete disegnato, certamente in modo approssimativo, in corrispondenza di un reticolato abbastanza fitto di punti (x_k, y_k) di $[-3, 3] \times [-3, 3]$ le frecce che rappresentano il vettore gradiente della $x^2 + y^2$

¹Il simbolo ∇ si legge “nabla”.

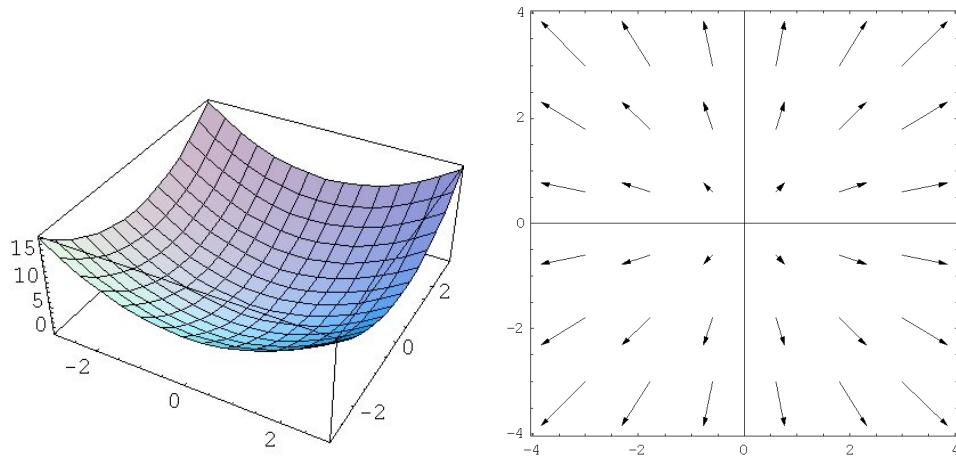


FIGURA 2. a) grafico di $x^2 + y^2$ b) il campo vettoriale dei gradienti

nel punto stesso.

Si riconosce ad esempio che

- *A $(0, 0)$ corrisponde il gradiente $(0, 0)$*
- *A $(3, 3)$ corrisponde un gradiente con le componenti uguali e positive*
- *A $(3, -3)$ corrisponde un gradiente con la prima componente positiva e la seconda negativa,*
- *ecc.*

OSSERVAZIONE 1.3. *Per indicare le derivate parziali si usa il simbolo ∂ (“d storto”) per ricordare che ci sono molte direzioni di derivabilità e che l’informazione che si ottiene con una singola derivata è una informazione parziale.*

2. La pendenza di una superficie secondo una direzione

La pendenza del grafico $y = g(x)$ di una funzione reale di una variabile reale ha un senso ben preciso: camminando sulla linea grafico nel verso delle x crescenti si percorre una salita o una discesa o si avanza orizzontalmente. Si può misurare la pendenza affrontata tramite il coefficiente

angolare della retta tangente.

La pendenza di una superficie $u = f(x, y)$ non ha altrettanto significato preciso: si puó, durante un'escursione in montagna, camminare su una costa faticando a salire, scivolando in discesa, mantenendosi (come la maggioranza dei sentieri) *in quota*.

Non ha quindi senso parlare della pendenza della costa, dipendendo questa dalle direzioni lungo le quali ci si muove su di essa (naturalmente si puó parlare della pendenza massima).

Le osservazioni fatte precedentemente circa le sezioni del grafico di $f(x, y)$ giustificano la seguente osservazione:

OSSERVAZIONE 2.1. *La derivata parziale*

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

rispetto ad x misura la pendenza della superficie $u = f(x, y)$ nella direzione dell'asse x.

Analogamente la derivata parziale

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

rispetto ad y misura la pendenza della superficie $u = f(x, y)$ nella direzione dell'asse y.

2.1. Un problema:

Assegnata la superficie $z = f(x, y)$ e scelto un suo punto

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

lungo quale direzione si incontra la pendenza maggiore ?

Proviamo a risolvere il problema nel caso che la superficie sia il piano $z = ax + by + c$.

Supponiamo di partire dal punto $(0, 0)$: siamo a quota c . Andiamo, fatto uno spostamento di lunghezza ρ nella direzione dell'angolo α , nel punto $(\rho \cos(\alpha), \rho \sin(\alpha))$: la quota raggiunta é

$$a \rho \cos(\alpha) + b \rho \sin(\alpha) + c$$

La quota é variata dalla iniziale quota c della quantitá

$$\rho(a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha))$$

che puó essere

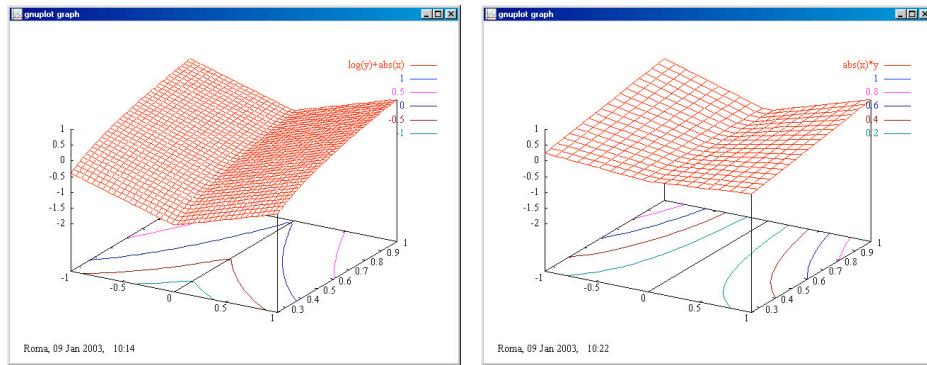


FIGURA 3. a) $f(x, y) = \ln(y) + |x|$, b) $f(x, y) = |x|y$

- positiva se $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ hanno rispettivamente gli stessi segni di a e b
- nulla se, sempre ad esempio,

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\alpha) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- negativa se $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ hanno segni opposti a quelli di a e b

Un problema (semplice ma non banale) é riconoscere l'angolo α lungo il quale il cambio di quota é maggiore: dove pensate che scivoli una goccia d'acqua su tale piano ?

Avete notato che direzioni propongono in ogni punto i vari gradienti disegnati in Figura 2 ?

E naturalmente avrete notato il legame con il grafico di x^2+y^2 disegnato a fianco.

ESEMPIO 2.2. Data la funzione $f(x, y) = |x|y$, in quali punti esistono f_x e f_y ? In tali punti calcolare ∇f .

2.2. I grafici... Sono stati eseguiti con GnuPlot

```
gnuplot> f(x,y)=log(y)+abs(x)
gnuplot> set xrange [-1:1]
gnuplot> set yrang [0.25:1]
gnuplot> set zrange [-2:1]
gnuplot> splot f(x,y)
```

Analoga serie di comandi per la seconda funzione.

La scelta del dominio dove far variare la x , la y e la quota z si trova nella tendina **Axes**.

Notate sul piano (x, y) le linee: sono linee di livello della funzione considerata (la linea blu è quella dei punti in cui $f(x, y) = 1$, la viola è quella in cui $f(x, y) = 0.5$ ecc.)

La tendina 3D contiene varie scelte relative alle linee di livello: provate... Notate lo spigolo del grafico lungo i punti con $x = 0$ sui quali la funzione non ha una delle due derivate parziali.

3. Le derivate parziali: prime, seconde,...

Analogamente al caso di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , è possibile ([2], pag. 32) definire, per le $f(x, y)$ le *derivate parziali successive*.

Supponiamo che la funzione f ammetta derivate rispetto ad x e rispetto ad y , cioè che siano definite le funzioni f_x e f_y : le funzioni f_x e f_y sono funzioni di due variabili che possono essere a loro volta derivabili parzialmente.

Una funzione di due variabili ammette (al più) due derivate prime (cioè f_x e f_y) e (al più) quattro derivate seconde:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x, y) = x^3y + y^2$. Allora

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2y, & f_y &= x^3 + 2y, \\ f_{xx} &= 6xy, & f_{xy} &= 3x^2, & f_{yx} &= 3x^2, & f_{yy} &= 2. \end{aligned}$$

Chiaramente è possibile definire anche le derivate terze, quarte, ... di una funzione f . Nel caso $f(x, y) = x^3y + y^2$,

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= 6y, & f_{xxy} &= 6x, & f_{xyx} &= 6x, & f_{xyy} &= 0, \\ f_{yxx} &= 6x, & f_{yxy} &= 0, & f_{yyx} &= 0, & f_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.1. Calcolare le derivate prime, seconde e terze di $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

ESEMPIO 3.2. Quante derivate quarte ha una funzione di due variabili?

ESEMPIO 3.3. Se una funzione f gode della simmetria rispetto alle due variabili, la proprietà $f(x, y) = f(y, x)$, quale legame intercorre tra le derivate prime, e tra le derivate seconde? È possibile dedurre f_{yy} dall'espressione di f_{xx} ?

Risposte:

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{f(y_0, x_0 + h) - f(y_0, x_0)}{h}$$

ne segue, passando al limite per $h \rightarrow 0$

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(y_0, x_0)$$

Non é detto tuttavia che le derivate parziali siano ancora funzioni simmetriche, si pensi, ad esempio alla $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

due funzioni non simmetriche ($f_x(0, 1) = 0, f_x(1, 0) = 2$.)

Nulla quindi puó dirsi sulle derivate seconde né tantomeno dedurre f_{xx} da f_{yy} .

3.1. Punti critici. Si dicono punti critici o stazionari di una funzione $f(x, y)$ dotata di derivate parziali prime i punti

$$(x, y) | \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Essi hanno un ruolo simile a quello svolto, nel caso di una variabile dai punti

$$x | f'(x) = 0$$

ESEMPIO 3.4. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$: c'e un solo punto stazionario, l'origine, infatti

$$f_x = 2x = 0, \quad f_y = 2y = 0, \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$$

3.2. L'hessiano.

DEFINIZIONE 3.5. Data una funzione che ammette tutte le derivate seconde, la matrice

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

si dice MATRICE HESSIANA DI f (o semplicemente HESSIANO DI f).

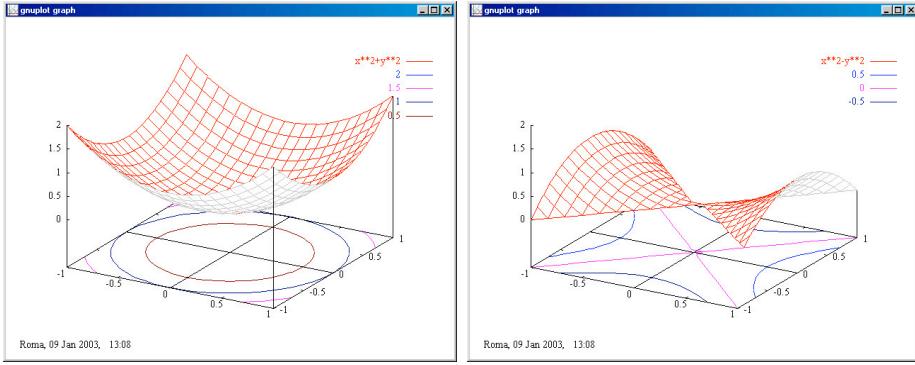
Ad esempio,

$$(21) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y) \Rightarrow Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(22)

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f = (-2x, -2y) \Rightarrow Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(23) \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, -2y) \Rightarrow Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

FIGURA 4. a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

La matrice hessiana di una funzione svolge un ruolo equivalente in più dimensioni a quello della derivata seconda nel caso di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} : è collegata a proprietà di convessità/concavità della funzione o, più in generale, a proprietà di curvatura del grafico.

Nei casi scritti sopra, è particolarmente significativo che,

- la prima matrice, (21), ha autovalori positivi (e nel punto critico c'è il minimo),
- la seconda matrice, (22), ha autovalori negativi (e nel punto critico c'è il massimo),
- la terza, (23), ha un autovalore negativo e uno positivo (e nel punto critico c'è una sella), Figura 4.

Torneremo più avanti sulla questione.

3.3. Le funzioni armoniche.

L'operatore Δ che associa ad una funzione la somma delle derivate seconde $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ (o, equivalentemente, la traccia della matrice hessiana) è detto *operatore di Laplace*, e ricopre un ruolo fondamentale in molte questioni di fisica matematica.

L'equazione $\Delta f(x,y) = 0$ si dice *equazione di Laplace*. e le funzioni che soddisfano tale relazione si dicono *funzioni armoniche*.

I polinomi di primo grado

$$f(x,y) = ax + by + c$$

sono le funzioni armoniche più evidenti.

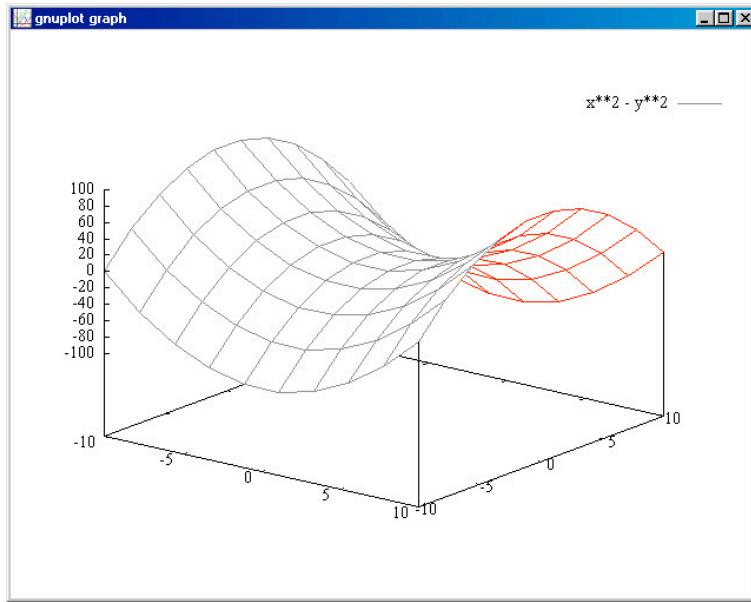
Essi soddisfano la seguente proprietà: scelto un punto (x_0, y_0) consideriamo il profilo altimetrico relativo a una circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r qualsiasi

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(\theta) \\ y = y_0 + r \sin(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

è evidente che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a(x_0 + r \cos(\theta)) + b(y_0 + r \sin(\theta)) + c] d\theta = ax_0 + by_0 + c$$

Il valore $f(x_0, y_0)$ nel centro corrisponde alla media dei valori del profilo altimetrico.

FIGURA 5. Una funzione armonica $x^2 - y^2$

La stessa proprietá é soddisfatta da qualsiasi funzione armonica: sperimentiamo tale affermazione (peraltro non dimostrata) riferendoci alla funzione armonica

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(x_0 + r \cos(\theta))^2 - (y_0 + r \cos(\theta))^2] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x_0^2 - y_0^2 - 2r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) - r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))] d\theta = x_0^2 - y_0^2 \end{aligned}$$

I grafici delle funzioni armoniche, vedi Figura 5, sono... armoniosi: sembra che il valore assunto in ogni punto sia una sorta di media dei valori presi intorno! In Figura 5 potete seguire il profilo altimetrico della funzione $x^2 - y^2$ quando il punto (x, y) si muove sulla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

ESEMPIO 3.6. Date le funzioni $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$, verificare che

$$(24) \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

e che $\Delta u = \Delta v = 0$.

Le equazioni (differenziali alle derivate parziali) del sistema (24) sono note come *equazioni di Cauchy-Riemann*.

3.4. Le soluzioni ondose. Ogni funzione della forma $u(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$, è soluzione dell'equazione

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (\text{equazione delle onde}).$$

Il grafico, vedi Figura 6, di una funzione del tipo detto giustifica il nome dato all'equazione. Pensiamo l'asse y delle ordinate come riferito al tempo t : l'ondina che per $t = 0$ si nota

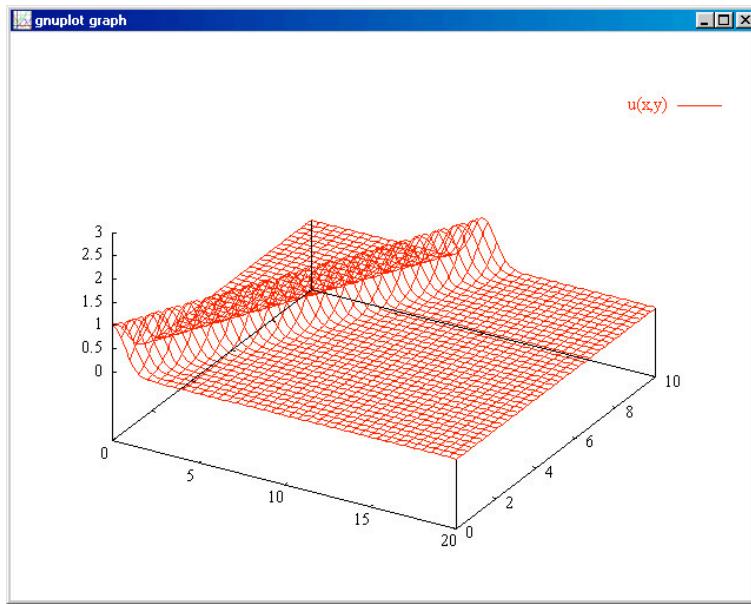


FIGURA 6. Il grafico di $u(x, t) = e^{-(x-t)^2}$

in corrispondenza di $x = 0$ viaggia, al crescere di t , verso valori x piú grandi... proprio come un'onda che avanza.

Il grafico di una funzione del tipo detto

$$u(x, t) = e^{-(x-t)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x+t-15)^2}$$

rende ancora meglio l'idea: un'onda che avanza e una, piú piccola, inizialmente con la cresta su $x = 15$ che retrocede...Figura 7

ESEMPIO 3.7. Verificare che la funzione $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$ soddisfa l'equazione

$$u_t = u_{xx} \quad (\text{equazione del calore})$$

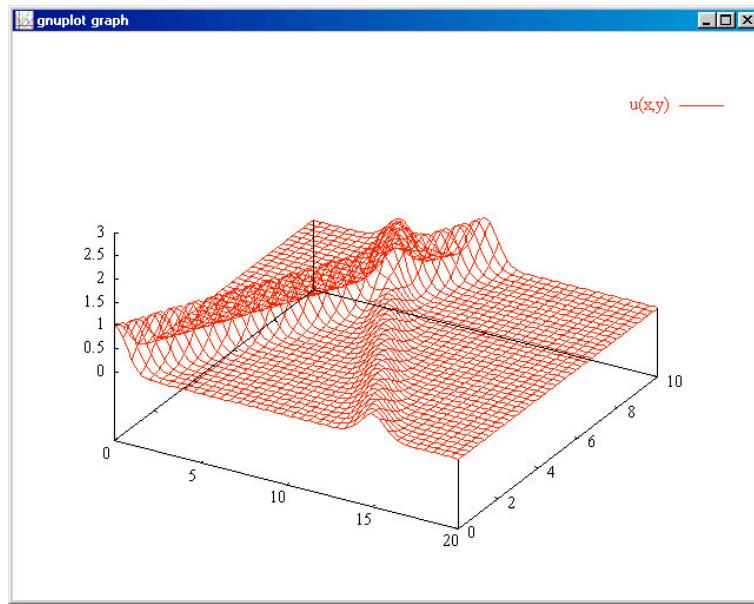


FIGURA 7. Un'onda che avanza e una, più piccola che retrocede...

CAPITOLO 7

Derivabilità e continuità

1. Introduzione

Contrariamente a quanto osservato nel caso di funzioni $f(x)$ di una sola variabile, l'esistenza delle derivate parziali f_x e f_y non garantisce la continuità delle funzioni di due o più variabili ([2], pag. 34).

Le derivate parziali riguardano infatti la $f(x, y)$ ristretta alle due direzioni speciali indicate dagli assi cartesiani uscenti da ciascun punto (x_0, y_0) e trascurano quanto la funzione faccia su punti che non stiano su tali direzioni: le derivate parziali in un punto (x_0, y_0) danno solo proprietà delle due restrizioni di $f(x, y)$

$$f(x, y_0), \quad f(x_0, y)$$

Consideriamo un primo esempio *fondamentale*, quello della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \in \text{assi} \\ 1 & \text{se } (x, y) \notin \text{assi} \end{cases}$$

È evidente che $f(x, y)$ non è continua nell'origine: si trovano ovviamente punti (x, y) , fuori degli assi, vicini all'origine quanto si voglia sui quali la funzione vale 1, come ovviamente punti altrettanto vicini, ma sugli assi, sui quali la funzione vale 0.

Tuttavia esistono nell'origine le due derivate parziali: infatti i due rapporti incrementali

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h}, \quad \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h}$$

valgono, per $h \neq 0$ entrambi 0 e quindi hanno limite, 0.

Ovvero riesce

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

L'esempio mostra che una funzione può avere in un punto anche entrambe le derivate parziali ed essere in tale punto addirittura discontinua.

Un secondo esempio *fondamentale* è

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

che abbiamo riconosciuta non continua nell'origine.

Le restrizioni di tale funzione sui due assi sono invece regolarissime:

$$f(x, 0) \equiv 0, \quad f(0, y) \equiv 0$$

costantemente nulle !

Quindi $f(x, y)$ possiede le due derivate parziali nell'origine (entrambe nulle).

1.1. Il teorema di Lagrange.

Per le funzioni di una variabile derivabili vale il teorema di Lagrange o del valor medio

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\xi)$$

con ξ un punto medio tra x_1 e x_2 .

Nel caso delle funzioni di due variabili dotate delle due derivate parziali prime, vale (quasi ovviamente) un risultato analogo che coinvolge... due punti medi !

Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti, supponiamo che la funzione $f(x, y)$ sia definita in tutto il rettangolo che ha i due punti come estremi,

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = [f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)] + [f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)]$$

Basta ora gestire i due addendi a secondo membro con il teorema di Lagrange unidimensionale che conosciamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) &= (x_1 - x_2)f'_x(\xi, y_1), \\ f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2) &= (y_1 - y_2)f'_y(x_2, \eta) \end{aligned}$$

per ottenere

$$(25) \quad f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = (x_1 - x_2)f'_x(\xi, y_1) + (y_1 - y_2)f'_y(x_2, \eta)$$

ESEMPIO 1.1. Sia $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$ e siano $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (3, 4)$:

$$(26) \quad f(3, 4) - f(1, 1) = [f(3, 4) - f(3, 1)] + [f(3, 1) - f(1, 1)]$$

Il primo addendo in parentesi quadra a secondo membro rappresenta la differenza dei valori della funzione

$$f(3, y) = 27 + 5y^2, \quad f'_y(3, y) = 10y$$

corrispondenti a $y_2 = 4$ e $y_1 = 1$:

$$f(3, y_2) - f(3, y_1) = f'_y(3, \eta)(y_2 - y_1) = 10\eta(4 - 1)$$

. Il secondo addendo, sempre in parentesi quadre nella (26), rappresenta la differenza dei valori della funzione

$$f(x, 1) = 3x^2 + 5, \quad f'_x(x, 1) = 6x$$

corrispondenti a $x_2 = 3$ e $x_1 = 1$

$$f(x_2, 1) - f(x_1, 1) = 6\xi(x_2 - x_1) = 6\xi 2$$

Ne segue,

$$f(3, 4) - f(1, 1) = 10\eta(4 - 1) + 6\xi 2$$

relazione che corrisponde alla (25) .

1.2. Una condizione di continuitá.

TEOREMA 1.2. Una funzione $f(x, y)$

- dotata delle due derivate parziali prime in tutti i punti di un rettangolo (aperto) D
- derivate entrambe limitate

$$|f_x(x, y)| \leq M, \quad |f_y(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in D$$

é Lipschitziana (quindi continua) in D .

DIMOSTRAZIONE. Siano $(x, y), (x + h, y + k) \in D$

Stimiamo la differenza $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ come indicato dalla precedente formula (25) di Lagrange.

Tenuto conto che le derivate sono maggiorate dalla costante M si ha

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| \leq M(|h| + |k|) \leq 2M\sqrt{h^2 + k^2}$$

ovvero

$$|f(P) - f(Q)| \leq 2M\overline{PQ}, \quad \forall P, Q \in D$$

□

Quale delle due ipotesi del precedente teorema non verificava la funzione dell'esempio fondamentale precedentemente richiamata ?

2. Grafici piú o meno regolari

La superficie grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ può essere dolcemente priva di pieghe o spigoli tanto da essere, almeno localmente, approssimabile soddisfacentemente con un piano, come accade ad esempio con una porzione di superficie sferica, oppure può presentare spigoli, come accade con una superficie poliedrica.

La dolce regolarità del primo caso si chiama, tecnicamente, differenziabilità, ed è precisabile al modo seguente

DEFINIZIONE 2.1. *Una funzione $f(x, y)$ si dice differenziabile nel punto (x_0, y_0) se il valore $f(x, y)$ nei punti vicini a (x_0, y_0) si può esprimere come somma*

$$(27) \quad f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

- *del valore $f(x_0, y_0)$ preso nel punto (x_0, y_0)*
- *di una parte lineare $A(x - x_0) + B(y - y_0)$*
- *e di un ulteriore addendo, $R(x, y)$, che diremo resto, infinitesimo d'ordine superiore a 1 rispetto alla distanza*

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

tra (x, y) e (x_0, y_0) , cioè tale che

$$(28) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

ESEMPIO 2.2. *La funzione $f(x, y) = 3x + 5y + 1$ è differenziabile in ogni punto (x_0, y_0) : infatti*

$$3x + 5y + 1 = 3x_0 + 5y_0 + 1 + 3(x - x_0) + 5(y - y_0)$$

in questo caso il terzo addendo, quello che doveva essere infinitesimo d'ordine superiore alla distanza, è addirittura nullo.

Una verifica più ovvia era pensare al grafico di $3x + 5y + 1$: un piano esso stesso...!

ESEMPIO 2.3. *La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, è differenziabile in ogni punto (x_0, y_0) : infatti*

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) &= (x_0^2 + y_0^2) + (x - x_0)(x + x_0) + (y - y_0)(y + y_0) = \\ &= (x_0^2 + y_0^2) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

I due addendi

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

sono la parte lineare, il terzo, il resto,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

è esattamente il quadrato della distanza, è quindi infinitesimo di ordine 2, superiore a 1, rispetto alla distanza.

ESEMPIO 2.4. La funzione $|x + y|$ non è differenziabile nell'origine, come pure in tutti i punti della retta $x + y = 0$; più che una di-

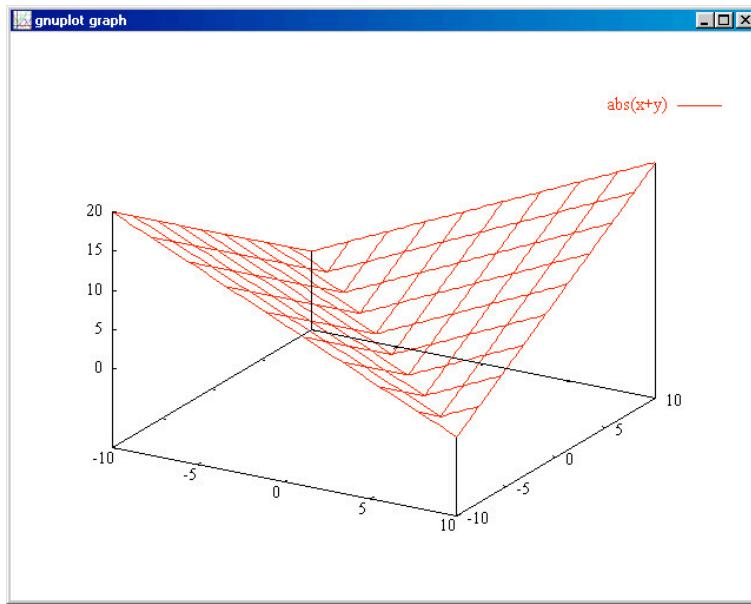


FIGURA 1. La funzione $|x + y|$ non è differenziabile

mostrazione basta guardare la superficie grafico, vedi Figura 1: due piani che si incontrano ad angolo proprio in corrispondenza dei punti della retta $x + y = 0$

3. Differenziabilità, continuità, derivate parziali

3.1. Continuità. Le funzioni $f(x, y)$ differenziabili sono continue: infatti la differenza

$$(29) \quad f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

si esprime con tre addendi (i due lineari e il *resto*) tutti piccoli se piccola è la distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

3.2. Il differenziale. La differenza $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ si dice incremento della funzione f da (x_0, y_0) a (x, y) e si indica spesso con Δf . La somma dei due addendi $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ che compaiono nell'espressione (3.2) prende il nome di

differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0)

e si indica con df .

La differenziabilità ([2], pag. 40) si riduce quindi a riconoscere che le due quantità Δf e df sono, se $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, molto simili, simili al punto da riuscire

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

3.3. Derivate parziali prime. Se $f(x, y)$ è differenziabile dalla (29), bloccato y alla quota y_0 segue

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + R(x, y_0)$$

ovvero

$$(30) \quad \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = A + \frac{R(x, y_0)}{x - x_0}$$

Quando $x \rightarrow x_0$ il secondo addendo a secondo membro della (30) va a 0 e quindi riesce

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = A$$

Cioé

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}$$

Ovviamente analogo discorso per la derivata parziale rispetto ad y :

$$B = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$$

Riassumendo: Se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) allora:

- esistono le due derivate parziali prime $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$

- i due coefficienti A e B che compaiono nell'espressione (29) coincidono rispettivamente con $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$.
- Una funzione che non possieda anche una sola delle due derivate parziali prime non può essere differenziabile.

4. Sono molte le funzioni differenziabili ?

Si tratta di una domanda importante perché la differenziabilità è un requisito di regolarità richiesto quasi sempre nel calcolo, mentre finora conosciamo pochissime funzioni che lo possiedano.

Il seguente teorema, di cui potete anche trascurare la dimostrazione, fornisce una condizione sufficiente di differenziabilità, molto importante:

TEOREMA 4.1 (Condizione sufficiente). *Una funzione $f(x, y)$ continua e dotata di derivate parziali continue nell'aperto Ω è differenziabile in ogni punto di Ω .*

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema di Lagrange, vedi il precedente Capitolo 5, si ha

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0)$$

La stessa strategia usata nell'esempio (2.3) consente

$$(31) \quad \begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ (f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0))(y - y_0) \end{aligned}$$

I primi due addendi a secondo membro della (31) forniscono i contributi lineari, per quanto concerne il terzo gruppo di addendi, quello nella seconda riga, esso ha il ruolo di *resto* nella formula (3.2): osserviamo infatti che

- i fattori $[f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$ e $[f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)]$ sono infinitesimi con la distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ per la continuità delle due derivate parziali,
- i fattori $x - x_0$ e $y - y_0$ sono infinitesimi del primo ordine rispetto alla distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,
- quindi la somma di seconda riga della (31) è infinitesima d'ordine superiore alla distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

□

Conseguenze

- tutte le funzioni rappresentate da polinomi sono differenziabili
- tutte le funzioni rappresentate da espressioni razionali sono differenziabili (naturalmente nei punti in cui sono definite)
- tutte le funzioni $f(x, y) = a(x).b(y)$ ottenute a partire da due funzioni a e b di classe C^1 sono differenziabili...
- sommando, sottraendo, moltiplicando o dividendo (prudenza...) due funzioni di classe C^1 si ottengono funzioni differenziabili.

5. Il piano tangente

La condizione di differenziabilità di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_0, y_0) corrisponde, esattamente all'idea intuitiva di esistenza del piano tangente alla superficie grafico in quel punto ([2], pag46) .

L'insieme definito da

$$(32) \quad \pi : \quad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

rappresenta un piano dello spazio ed è il piano, vedi Figura 2, che meglio approssima il grafico di f vicino al punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

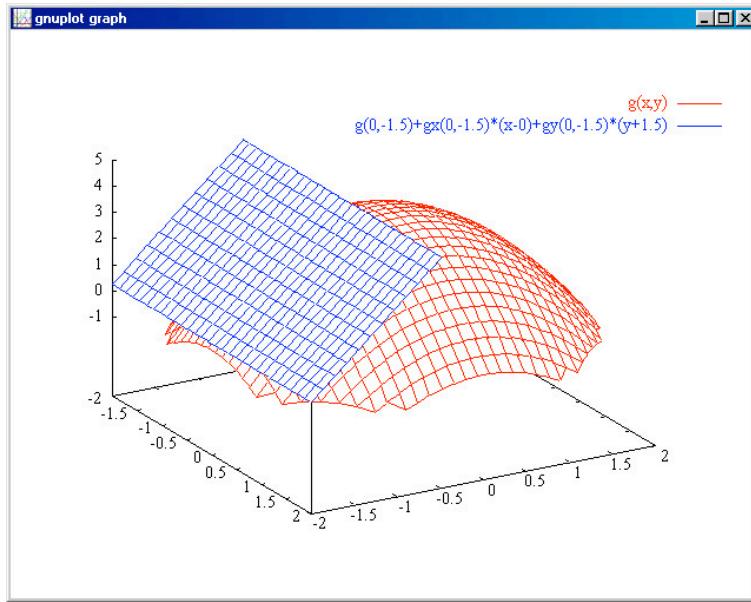


FIGURA 2. $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, -1.5)$

L'ipotesi di differenziabilità garantisce infatti che la differenza

$$|f(x,y) - z|$$

sia infinitesima di ordine superiore alla distanza ovvero che il grafico di $f(x,y)$ differisca, in un intorno di (x_0, y_0) , da quello del piano (32) per una quantità, quella che abbiamo chiamato nelle (3.2), *resto*, $R(x,y)$, infinitesima d'ordine superiore alla distanza tra (x,y) e (x_0, y_0) .

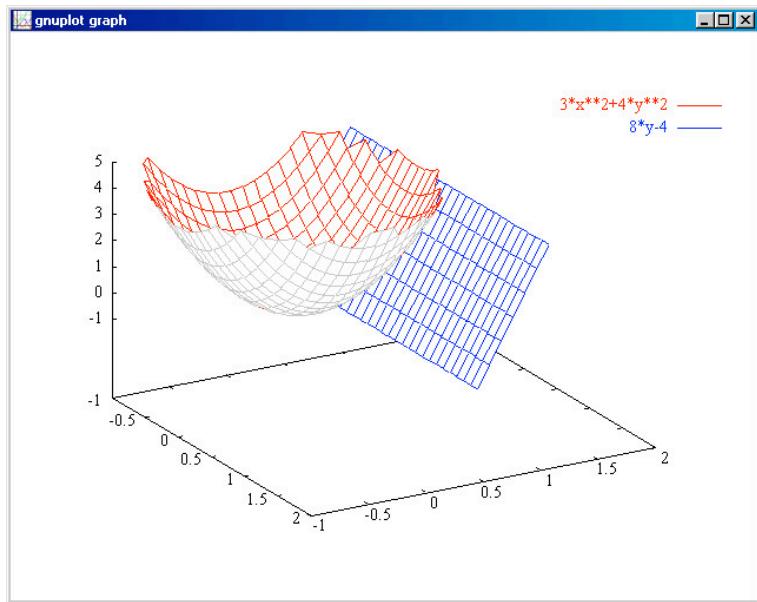
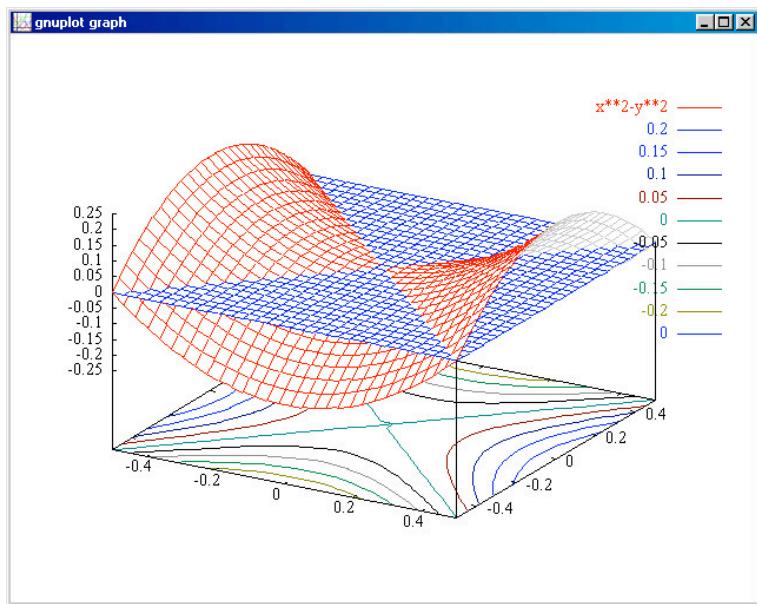
Per questo il piano π definito da (32) è il *piano tangente* al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

ESEMPIO 5.1. Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ nel punto di coordinate $(0, 1, 4)$, vedi Figura 3, ha equazione

$$z = 8y - 4,$$

dato che $\nabla f = (6x, 8y)$, $\nabla f(0, 1) = (0, 8)$.

ESEMPIO 5.2. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ nel punto $(0, 0, 0)$ è il piano, vedi Figura 4, $z = 0$: la sua posizione rispetto al grafico di f può destare qualche sorpresa, specie a chi pensi (sempre e solo) alla figura tradizionale del piano tangente ad una sfera. Un piano tangente può tagliare la superficie, come del resto facevano le rette tangenti nei punti di flesso.

FIGURA 3. $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$, $(0, 1, 4)$, $z = 8y - 4$ FIGURA 4. La sella $x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$ tangente nell'origine

Che $z = 0$ sia il piano che meglio approssima $x^2 - y^2$ vicino all'origine si può verificare ad esempio ricorrendo alle coordinate polari: la distanza tra la quota $z = f(x, y)$ del grafico e la quota $z = 0$ del piano tangente, si

maggiora come segue

$$|(x^2 - y^2) - 0| = \rho^2 |(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))| \leq 2\rho^2$$

é quindi, effettivamente, infinitesima d'ordine 2 rispetto alla distanza $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ di (x, y) da $(0, 0)$.

ESEMPIO 5.3. *Per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$ il piano tangente al grafico di $f(x, y) = ax^2 + bxy + c$ nel punto di coordinate $(1, 1, f(1, 1))$ ha equazione $z = x - y$?*

Il piano tangente é, vedi formula (32) il seguente

$$f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} f_x(1, 1) = 2a + b \\ f_y(1, 1) = b \\ f(1, 1) = a + b + c \end{cases}$$

deve riuscire $a + b + c + (2a + b)(x - 1) + b(y - 1) = x - y$ che implica

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ b = -1 \\ -a + c - b = 0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0$$

5.1. Sezioni grafico e piano tangente. La sella di Figura 4 con il suo piano tangente rappresenta una configurazione non comune almeno fin quando si immagini sempre e solo superfici simili alla sfera: la superficie che si schiaccia sul piano tangente restando interamente in uno dei due semispazi determinati dal piano tangente stesso. Le figure seguenti rappresentano i profili altimetrici della $x^2 - y^2$ relativi a diverse rette $y = m x$: in relazione ad alcuni si hanno curve convesse verso l'alto, in corrispondenza ad altre curve convesse verso il basso...

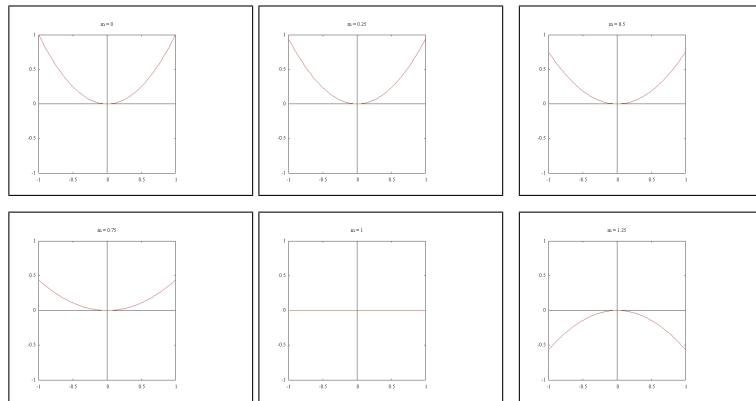


FIGURA 5. Le sezioni relative alle rette $y = mx$, $m = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25$

6. Una caratterizzazione delle derivate

Supponiamo di sapere che in un punto (x_0, y_0) riesca

$$f(x, y) = c + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

Allora in tale punto riesce:

- $f(x_0, y_0) = c$
- $f_x(x_0, y_0) = a$
- $f_y(x_0, y_0) = b$

ESEMPIO 6.1. Quanto vale la derivata $f_x(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \sin(\sin^2(x^3 + y^5)) \quad ?$$

È facile, 0 : infatti

$$|f(x, y)| \leq |x^3 + y^5|^2 \leq (x^2 + y^2)^3$$

da cui

$$f(x, y) = o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

e quindi... $c = a = b = 0$.

CAPITOLO 8

La derivazione delle funzioni composte

1. Introduzione

Sia $u = f(\phi, \psi)$ e supponiamo di esprimere

$$\phi = \phi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$$

Sia $F(x, y) = f[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ la funzione composta ¹ ([2], pag 53)

TEOREMA 1.1 (continuitá). *Componendo funzioni continue si genera una funzione continua.*

DIMOSTRAZIONE. ...ovvia ! □

TEOREMA 1.2. *La composizione di funzioni differenziabili produce funzioni differenziabili.*

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi di differenziabilitá di $u = f(\phi, \psi)$ si ha

$$(33) \quad \Delta u = f_\phi \Delta \phi + f_\psi \Delta \psi + R(\Delta \phi, \Delta \psi)$$

essendo

$$R(\Delta \phi, \Delta \psi) = o(\sqrt{(\Delta \phi)^2 + (\Delta \psi)^2})$$

Tenuto conto della differenziabilitá delle due funzioni $\phi = \phi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ si ha

$$(34) \quad \begin{cases} \Delta \phi = \phi_x \Delta x + \phi_y \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \\ \Delta \psi = \psi_x \Delta x + \psi_y \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \end{cases}$$

ove i termini indicati con $o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ rappresentano i resti, infinitesimi d'ordine superiore alla distanza.

Il simbolo usato o si legge *o piccolo*.

Sostituendo le (34) nella (33) si ha

$$(35) \quad \begin{aligned} \Delta u &= [f_\phi \phi_x + f_\psi \psi_x] \Delta x + [f_\phi \phi_y + f_\psi \psi_y] \Delta y + \\ &\quad + (f_x + f_y) o \left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) + R(\Delta \phi, \Delta \psi) \end{aligned}$$

Dalle (34) riesce, di conseguenza

¹La composizione richiede alcune condizioni di compatibilitá tra la f e le funzioni con la quale si vuole comporre...

$$(36) \quad \begin{cases} |\Delta\phi|^2 \leq M^2 ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \\ |\Delta\psi|^2 \leq M^2 ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \end{cases}$$

con M costante opportuna.

Dalle (36) discende quindi che

$$\begin{aligned} \frac{R(\Delta\phi, \Delta\psi)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \frac{R(\Delta\phi, \Delta\psi)}{\sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2}} \frac{\sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq \\ &\leq M\sqrt{2} \frac{R(\Delta\phi, \Delta\psi)}{\sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2}} \end{aligned}$$

Da cui si riconosce che, essendo $R(\Delta\phi, \Delta\psi)$ infinitesimo d'ordine superiore a $\sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2}$, è infinitesimo d'ordine superiore anche a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

Ne segue che gli addendi della seconda riga della (35) costituiscono un infinitesimo d'ordine superiore a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ e quindi

(37)

$$\Delta u = [f_\phi \phi_x + f_\psi \psi_x] \Delta x + [f_\phi \phi_y + f_\psi \psi_y] \Delta y + o\left[\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right]$$

Ricordato che i coefficienti di Δx e di Δy devono essere le derivate parziali, si deduce la (attesa) regola di derivazione delle funzioni composte:

$$F_x = f_\phi \phi_x + f_\psi \psi_x, \quad F_y = f_\phi \phi_y + f_\psi \psi_y$$

□

1.1. Il caso più semplice. Componiamo una funzione $f(\phi)$ continua e derivabile di una sola variabile con una $\phi(x, y)$ differenziabile:

$$F(x, y) = f[\phi(x, y)] : \quad \begin{cases} F_x(x, y) = f'[\phi(x, y)]\phi_x(x, y), \\ F_y(x, y) = f'[\phi(x, y)]\phi_y(x, y) \end{cases}$$

ESEMPIO 1.3. $f(\phi) = \sin(\phi)$, $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, $F(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 + y^2) = \cos(x^2 + y^2) 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sin(x^2 + y^2) = \cos(x^2 + y^2) 2y$$

1.2. Il caso intermedio. Componiamo una funzione $f(\phi, \psi)$ con due funzioni $\phi(t), \psi(t)$ di una sola variabile:

$$F(t) = f[\phi(t), \psi(t)] : \quad F'(t) = f_\phi \phi'(t) + f_\psi \psi'(t)$$

ESEMPIO 1.4. $f(\phi, \psi) = \ln(1 + \phi^2 + \psi^4)$

$$\frac{d}{dt} \ln(1 + \cos^2(t) + \sin^4(t)) = \frac{-2 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^3(t) \cos(t)}{1 + \cos^2(t) + \sin^4(t)}$$

1.3. Il caso generale. Componiamo una funzione $f(\phi, \psi)$ con due funzioni $\phi = \phi(x, y), \psi = \psi(x, y)$ $F(x, y) = f[\phi(x, y), \psi(x, y)],$

$$(38) \quad \begin{cases} F_x(x, y) = f_\phi \phi_x(x, y) + f_\psi \psi_x(x, y) \\ F_y(x, y) = f_\phi \phi_y(x, y) + f_\psi \psi_y(x, y) \end{cases}$$

ESEMPIO 1.5. *Il caso delle coordinate polari: sia*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} : \quad x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta)$$

$$F(\rho, \theta) = \rho \cos^2(\theta) \sin(\theta)$$

Un calcolo diretto (possediamo l'espressione esplicita della funzione composta) produce

$$F_\rho(\rho, \theta) = \cos^2(\theta) \sin(\theta)$$

Il risultato garantito dal teorema è invece

$$\begin{aligned} F_\rho &= f_x x_\rho + f_y y_\rho = f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta) = \\ &\cos(\theta) \left(\frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) + \sin(\theta) \left(\frac{-2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

Sostituendo, dovunque si incontrino, ad x e y le relative espressioni in ρ e θ si ha

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + 2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^4(\theta) \sin(\theta) &= \\ = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) &= \cos^2(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

2. La variazione di funzioni composte

La regola di derivazione delle funzioni composte, nel caso di più variabili, appare più complessa di quanto non sia realmente.

Indichiamo nelle sottosezioni seguenti aspetti che aiutano a comprendere e a servirsi della regola di derivazione.

2.1. Input - Output. Il calcolo del valore di una funzione reale di due variabili reali $f(\phi, \psi)$ corrisponde ad un algoritmo che

- chiede due numeri ϕ e ψ come INPUT,
- produce un numero, $f(\phi, \psi)$ come OUTPUT.

$$f : (\phi_0, \psi_0) \rightarrow f(\phi_0, \psi_0)$$

Se cambio la coppia in input da (ϕ_0, ψ_0) a $(\phi_0 + \Delta\phi, \psi_0 + \Delta\psi)$ il risultato, supponendo che f sia differenziabile cambia, in prima approssimazione, il risultato $f(\phi_0, \psi_0)$ della quantità

$$(39) \quad \Delta f = f_\phi(\phi_0, \psi_0)\Delta\phi + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\Delta\psi$$

Se a loro volta gli INPUT ϕ ed ψ sono l'OUTPUT di altre due funzioni, anch'esse differenziabili,

$$\phi = \phi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$$

e supponiamo di eseguire il calcolo a partire dalle due coppie

$$(x_0, y_0), \quad (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

avremo variazioni, sempre in prima approssimazione,

$$(40) \quad \begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_x(x_0, y_0)\Delta x + \phi_y(x_0, y_0)\Delta y, \\ \Delta\psi &= \psi_x(x_0, y_0)\Delta x + \psi_y(x_0, y_0)\Delta y, \end{aligned}$$

Componendo la (39) con le (40) si ha quindi

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_\phi(\phi_0, \psi_0) \{ \phi_x(x_0, y_0)\Delta x + \phi_y(x_0, y_0)\Delta y \} + \\ &\quad + f_\psi(\phi_0, \psi_0) \{ \psi_x(x_0, y_0)\Delta x + \psi_y(x_0, y_0)\Delta y \} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \Delta f &= [f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_x(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_x(x_0, y_0)]\Delta x + \\ &\quad + [f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_y(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_y(x_0, y_0)]\Delta y \end{aligned}$$

Ricordato che il coefficiente di Δx rappresenta la derivata rispetto ad x e quello di Δy la derivata rispetto ad y si ha

$$\begin{aligned} f_x &= f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_x(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_x(x_0, y_0), \\ f_y &= f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_y(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2.2. La formula mnemonica. La regola di derivazione delle funzioni composte si ricorda facilmente nella forma seguente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}$$

2.3. Lettura vettoriale.

La formula (38) si può leggere anche in modo vettoriale chiamando con J la matrice 2×2

$$J = \begin{pmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_y & \psi_y \end{pmatrix}$$

Con tale notazione si ha

$$\nabla F = J \nabla f$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x(x, y) & \psi_x(x, y) \\ \phi_y(x, y) & \psi_y(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\phi[\phi(x, y), \psi(x, y)] \\ f_\psi[\phi(x, y), \psi(x, y)] \end{pmatrix}$$

formula che corrisponde, perfettamente alla precedente espressione *mnemonica*.

Nel caso delle coordinate polari

$$\xi = \rho \cos(\theta), \quad \psi = \rho \sin(\theta)$$

la matrice J è la seguente

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e infatti

$$\begin{pmatrix} F_\rho \\ F_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

3. Derivate direzionali

La derivata di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_0, y_0) secondo un'assegnata direzione ([2], pag. 43) è una generalizzazione di quanto proposto per le due derivate parziali.

Nel loro caso si consideravano rapporti incrementali lungo le direzioni dei due assi, perché non scegliere anche altre direzioni ?

- 1. assegnare il punto (x_0, y_0)
- 2. assegnare direzione e verso \vec{n} su cui lavorare

$$\vec{n} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

assegnando cioè un *versore*² \vec{n}

- 3. incrementare (x_0, y_0) secondo tale direzione

$$(x_0 + \rho \cos(\alpha), y_0 + \rho \sin(\alpha))$$

²Vettore di modulo unitario

- 4. cercare il limite

$$(41) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos(\alpha), y_0 + \rho \sin(\alpha)) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

- 5. Il limite, supponendo che esista, si indica, con le notazioni

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}, \quad \frac{df}{d\vec{n}}$$

Se la funzione assegnata é differenziabile il limite (41) si elabora ulteriormente come segue:

- il numeratore si esprime come:

$$f_x(x_0, y_0)\rho \cos(\alpha) + f_y(x_0, y_0)\rho \sin(\alpha) + o(\rho)$$

avendo indicato con $o(\rho)$ il resto,

- il rapporto incrementale proposto diviene pertanto

$$f_x(x_0, y_0) \cos(\alpha) + f_y(x_0, y_0) \sin(\alpha) + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

- riesce quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos(\alpha), y_0 + \rho \sin(\alpha)) - f(x_0, y_0)}{\rho} &= \\ &= f_x(x_0, y_0) \cos(\alpha) + f_y(x_0, y_0) \sin(\alpha) \end{aligned}$$

- Usando il gradiente si ha anche

$$(42) \quad \frac{df}{d\vec{n}} = \nabla f(x, y) \times \vec{n}$$

L'ultima formula indicata esprime la derivata direzionale delle funzioni differenziabili tramite un prodotto scalare: questa espressione agevola problemi quali decidere su quale direzione la derivata direzionale sia maggiore, su quali minore, quale puó essere il valore maggiore in modulo, ecc.

ESEMPIO 3.1. La derivata di $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 2)$ lungo la direzione

$$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

corrisponde al limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \rho \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \rho \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1, 2)}{\rho}$$

ovvero

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{3\rho\sqrt{2} + \rho^2}{\rho} = 3\sqrt{2}$$

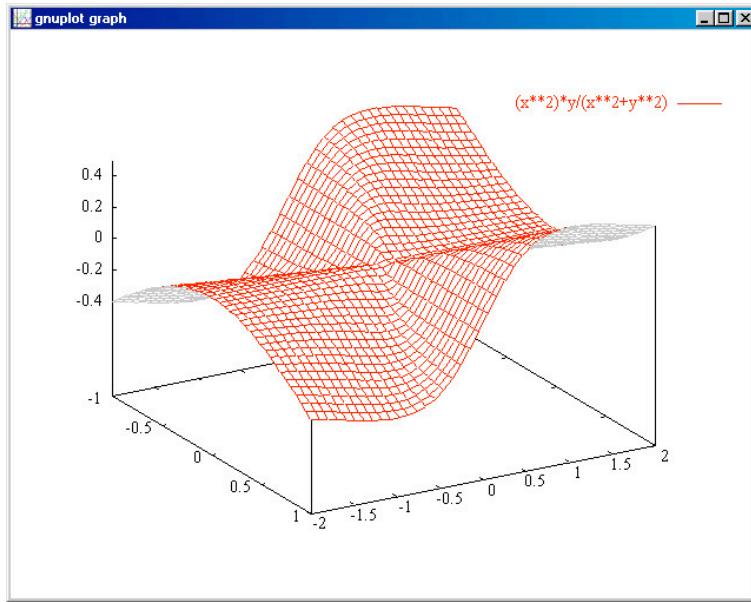


FIGURA 1. Derivabile ma non differenziabile: $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Il valore trovato corrisponde al seguente fenomeno altimetrico: una persona che camminasse sul grafico di x^2+y^2 partendo dal punto $(1, 2, 5)$ e muovendosi nella direzione NORD-EST, questa è di fatto la direzione indicata dal versore \vec{n} assegnato, affronterebbe, al primo passo, una salita di un angolo φ con

$\tan(\varphi) = 3\sqrt{2}, \quad \varphi \simeq 0.713724 \text{ radianti}$
più o meno una pendenza di 77° gradi.

3.1. Un contesempio.

Una funzione non differenziabile f può ammettere derivate direzionali. In tale caso tuttavia non accade necessariamente che la derivata direzionale si esprima con il comodo prodotto scalare $\nabla f(x, y) \times \vec{n}$

Si consideri ad esempio la funzione, vedi Figura 1, continua in tutto \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, \quad \text{con } f(0, 0) = 0$$

riesce

$$\frac{f(\rho \cos(\alpha), \rho \sin(\alpha)) - f(0, 0)}{\rho} = \cos^2(\alpha) \sin(\alpha)$$

per cui, qualunque sia la direzione α riesce

$$\frac{df}{d\vec{n}}(0, 0) = \cos^2(\alpha) \sin(\alpha)$$

Tenuto conto che $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ ne segue che

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0,$$

la formula (42) avrebbe, usata a sproposito³, dato come derivate direzionali

$$\nabla f(0, 0) \times \vec{n} = 0$$

ESEMPIO 3.2. Sia $f(x, y) = x + y + 1$; indicare su quali direzioni le derivate direzionali valgono $(\sqrt{3} + 1)/2$:

$$\nabla f(x, y) \times \vec{n} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Le direzioni relative agli angoli $\pi/6, \pi/3$ con l'asse delle x .

3.2. Un'applicazione.

Consideriamo la cupola grafico della funzione

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

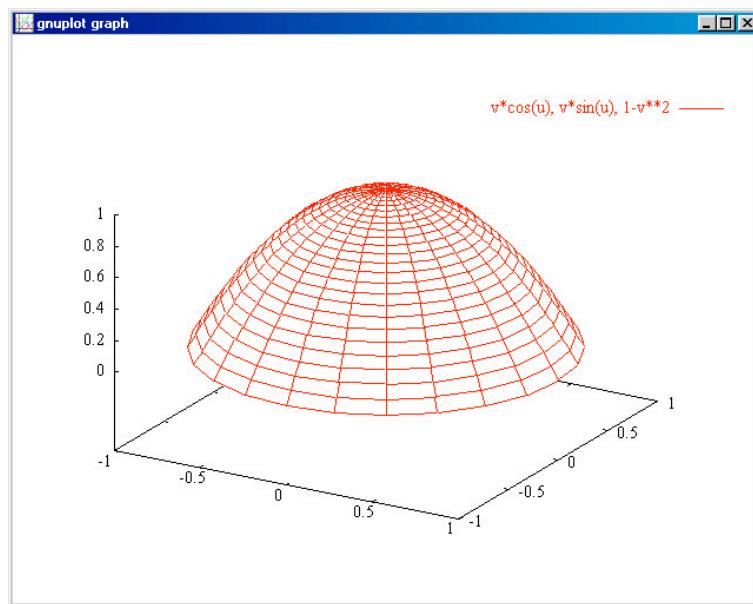


FIGURA 2. La cupola: $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

³Evidentemente $f(x, y)$ non è differenziabile nell'origine: se lo fosse stata la formula (42) avrebbe dovuto produrre gli esatti valori delle derivate direzionali calcolati direttamente prima !

essa tocca terra, cioè il piano xy , nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

Che pendenza attribuiresti alla cupola, Figura 2, arrivando a terra? Non è una domanda banale: abbiamo già osservato che parlare della pendenza di una superficie è una... superficialità!

Tuttavia certamente molti, nella domanda precedente sottintendono la pendenza maggiore, quella che seguono le gocce di pioggia colando verso il basso, almeno supponendo la superficie della cupola perfettamente levigata.

Accogliamo tale scelta sottintesa e cerchiamo la pendenza maggiore tra quelle prodotte dalla formula precedente:

$$\frac{df}{d\vec{n}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \sin(\alpha)$$

da cui, calcolate le due derivate parziali $f_x = -2x$, $f_y = -2y$ si ha

$$\left| \frac{df}{d\vec{n}} \right| = 2 |x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)|$$

Risultati:

- La derivata direzionale di modulo maggiore corrisponde al massimo del prodotto $|x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)|$
- Tale massimo si ottiene, tenuto conto che $x^2 + y^2 = 1$ se

$$\cos(\alpha) = x, \quad \sin(\alpha) = y$$

- La direzione di maggiore pendenza è quella del gradiente, che ha, come *verso*, quello corrispondente alla *salita*.

Attenzione:

La derivata direzionale della funzione $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, la cupola rovesciata precedente, nel punto $(1, 0)$ secondo la direzione ad esempio della retta $y = -(x - 1)$, direzione $(\cos(3 * \pi/4), \sin(3 * \pi/4))$, non è la derivata della funzione composta

$$(43) \quad \frac{d}{dx} f(x, -(x - 1)), \quad x = 1$$

ma è il limite

$$(44) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(1 + \rho \cos(3 * \pi/4), \rho \sin(3 * \pi/4)) - f(1, 0)}{\rho}$$

Che le due formule siano diverse si riconosce calcolandole: la prima produce -2 la seconda $\nabla f(1, 0) \times (\cos(3 * \pi/4), \sin(3 * \pi/4)) = \sqrt{2}$.

Dov'è la differenza ?

Sul tipo di rapporto incrementale: nella (43) si considera il

$$(45) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, -h) - f(1, 0)}{h}$$

nella (44), scritta usando lo stesso parametro h il limite è invece,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h \cos(3 * \pi / 4), h \sin(3 * \pi / 4)) - f(1, 0)}{h}$$

...simile, ma non uguale !

Nella (41) infatti a denominatore si trova esattamente la distanza tra il punto iniziale (x_0, y_0) e il punto incrementato $(x_0 + \rho \cos(\alpha), y_0 + \rho \sin(\alpha))$.

Nella (45) invece la distanza tra punto iniziale e punto incrementato è $h\sqrt{2}$ mentre a denominatore c'è solo h !

3.3. Osservazioni ed esempi.

ESEMPIO 3.3. $f(x, y) = x^2 - y^2$: la direzione \vec{n} lungo la quale cercare la derivata sia determinata assegnando l'angolo α . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Si faccia attenzione al limite finale: si tratta di un limite lungo una direzione fissata (individuata da α che è fissato al principio). Questo limite non va confuso con il limite di funzioni di più variabili che tiene conto di tutti i cammini possibili.

ESEMPIO 3.4. Consideriamo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fissato α , vediamo se la funzione è derivabile nella direzione di $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ nel punto $(0, 0)$. Dato che

$$\frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0, 0)}{\rho} = \frac{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \alpha}}{\rho} = \frac{|\rho|}{\rho},$$

la derivata direzionale non esiste per nessuna scelta di α .

ESEMPIO 3.5. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dimostrare che

- (i) esiste $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0)$ per ogni \vec{n} ;
(ii) f non è continua in $(0,0)$.

Soluzione. (i) Sia, come sempre, $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Allora

$$\frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0,0)}{\rho} = \frac{\rho^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{\rho(\rho^4 \cos^4 \alpha + \rho^2 \sin^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{\rho^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Passando al limite per $\rho \rightarrow 0$, si deduce che esiste la derivata direzionale e vale

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} & \alpha \neq k\pi \\ 0 & \alpha = k\pi \end{cases} \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Per riconoscere che la funzione non è continua⁴, basta studiare i profili altimetrici lungo le rette per l'origine e lungo la parabola di equazione $y = x^2$, infatti lungo le rette $y = mx$ riesce

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \rightarrow 0$$

mentre lungo la parabola riesce

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Dal momento che i limiti lungo profili altimetrici diversi sono diversi....

4. Il teorema del valor medio

Le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

di due (o più) variabili beneficiano di un risultato naturale estensione del teorema di Lagrange incontrato nel caso delle funzioni $y = f(x)$ definite su intervalli $a \leq x \leq b$ ([2], pag. 66).

Consideremo d'ora in poi funzioni $u = f(x, y)$, a valori reali, che abbiano

⁴La stessa funzione è stata considerata nel paragrafo Passeggiare sul grafico di pagina 54

- dominio di definizione D convesso ⁵.
- siano continue,
- abbiano derivate parziali prime continue.

Per calcolare la differenza

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

consideriamo:

- una rappresentazione parametrica del segmento di estremi

$$(x_0, y_0), \quad (x, y)$$

$$\begin{cases} \xi = x_0 + t(x - x_0), \\ \eta = y_0 + t(y - y_0) \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

- la funzione composta

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)),$$

funzione di una variabile definita per $t \in [0, 1]$

- la differenza

$$F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

- se la funzione $f(x, y)$ possiede derivate parziali prime continue allora $F(t)$ è derivabile ⁶

$$(46) \quad \begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) + \\ &+ f_y(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0) \end{aligned}$$

(quindi ad essa può essere applicato il teorema di Lagrange in $[0, 1]$).

Ogni algoritmo che rappresenti $F(1) - F(0)$ rappresenterà quindi

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) :$$

applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $F(t), t \in [0, 1]$

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1 - 0)$$

Indicato con (ξ, η) il punto del segmento $(x, y), (x_0, y_0)$ corrispondente al valore θ si ha

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(\xi, \eta)(y - y_0)$$

Il risultato osservato è riassunto nel seguente

⁵Ricordiamo che un insieme $D \subseteq R^2$ si dice convesso se contiene tutti i segmenti di cui contenga gli estremi (rettangoli, poligoni regolari, cerchi, ecc sono convessi, insiemi a ferro di cavallo non sono convessi, non sono convesse le corone circolari e tutti gli insiemi dotati di lacune)

⁶Teorema di derivazione delle funzioni composte

TEOREMA 4.1 (Teorema del valor medio). *La funzione $f(x, y)$ sia definita in un insieme D aperto⁷ e convesso, sia continua e abbia le derivate parziali prime continue: comunque si prendano due punti (x_0, y_0) e (x, y) in D esiste almeno un punto (ξ, η) appartenente al segmento (x_0, y_0) , (x, y) tale che*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(\xi, \eta)(y - y_0)$$

OSSERVAZIONE 4.2. *Indicato con*

$$\overrightarrow{PP_0} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

il precedente Teorema 4.1 si può scrivere come

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(\xi, \eta) \times \overrightarrow{PP_0}$$

OSSERVAZIONE 4.3. *Il teorema di Lagrange presentato nel Capitolo 5 è un risultato più modesto di quello stabilito: la tradizionale tecnica di aggiungere e sottrarre uno stesso valore*

$$[f(x, y) - f(x, y_0)] + [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

esprime i due addendi, funzione ciascuno di una sola variabile, tramite il teorema di Lagrange unidimensionale:

$$f_y(x, \eta)(y - y_0) + f_x(\xi, y_0)(x - x_0)$$

L'espressione ottenuta è molto simile a quella stabilita precedentemente nel Teorema del Valor medio...

l'unica differenza è che le due derivate parziali non sono necessariamente calcolate nello stesso punto.

Il precedente Teorema non richiede del resto che $f(x, y)$ sia differenziabile ma solo che possieda in ogni punto le due derivate parziali.

COROLLARIO 4.4. *Una funzione $f(x, y)$ (continua con le derivate parziali in un convesso D) che abbia le due derivate parziali nulle è costante.*

DIMOSTRAZIONE. É evidente... essa è Lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 0$! □

COROLLARIO 4.5. *Una funzione $f(x, y)$ (continua con le derivate parziali in un convesso D) che abbia le due derivate parziali costanti*

$$f_x(x, y) = a, \quad f_y(x, y) = b$$

è un polinomio di primo grado

$$f(x, y) = ax + by + c$$

⁷Ricordate che tutti gli algoritmi di tipo differenziale funzionano nei punti interni, cioè in insiemi aperti...

DIMOSTRAZIONE.

$$g(x, y) = f(x, y) - ax - by$$

ha le derivate parziali prime nulle... quindi è costante ! □

5. Interpretazione geometrica

Fissati due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ consideriamo la curva C di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = f[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)] \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

C è la sezione della superficie Σ grafico di $f(x, y)$ con il piano verticale determinato dai due punti $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$.

Indichiamo con \vec{v} un vettore tangente alla curva e con $\overrightarrow{P_1 P_2}$ il vettore che congiunge gli estremi

$$\vec{v} = \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ f_x[\dots](x_2 - x_1) + f_y[\dots](y_2 - y_1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \end{cases}$$

Il teorema del valor medio corrisponde, esattamente come osservato in una dimensione, alla presenza di un punto $(x_\theta, y_\theta, f(x_\theta, y_\theta)) \in C$ in cui la retta tangente alla curva è parallela alla corda determinata dai due estremi di C .

OSSERVAZIONE 5.1. *Per una curva C nello spazio di estremi A e B non è sempre vero che ci sia un punto $P \in C$ in cui la tangente sia parallela al segmento AB (si pensi ad una elica, con estremi posti sulla stessa verticale...)*

Questo accade invece per i profili altimetrici precedenti... tenete infatti presente che essi sono curve piane. ⁸

⁸ Una curva piana è una curva interamente contenuta in un piano. Sono curve piane le circonferenze, non sono piane, in generale, le eliche.

CAPITOLO 9

Formula di Taylor

1. Introduzione

Approssimare una funzione vuol dire sostituire l'algoritmo, ritenuto difficile, che la definisce con un altro più semplice e quindi più facile a calcolarsi.

Il prezzo di questa sostituzione sta, naturalmente, nel fatto che così facendo si introduce una distorsione, un errore che si dice

errore di approssimazione.

L'approssimazione è tecnicamente interessante o accettabile se si conosce una stima dell'errore di approssimazione, stima che permetta di valutare se tale errore sia o meno tollerabile in relazione alle precisioni di calcolo richieste.

Considerato che

- i polinomi di primo grado sono calcolabili con grande facilità,
- la maggioranza delle funzioni sono definite da algoritmi assai più complessi

non deve stupire che le più frequenti tecniche di approssimazione facciano ricorso a polinomi di primo grado.

In termini geometrici o di grafico tali approssimazioni sono semplicemente lo scambio del grafico della funzione con il grafico della retta, nel caso unidimensionale, o, nel caso bidimensionale lo scambio del grafico della funzione con il piano tangente.

ESEMPIO 1.1. *Calcolare il valore di*

$$f(x, y) = 1 + \sin(x + y)$$

nel punto $x_0 = 0.01, y_0 = 0.02$.

È innegabile che

- *il punto (x_0, y_0) assegnato sia abbastanza vicino all'origine,*
- *il piano tangente al grafico della $f(x, y)$ nell'origine è*

$$z = 1 + x + y,$$

- *la tentazione di proporre come approssimazione di $f(x_0, y_0)$ proprio il valore $1 + x_0 + y_0$ è forte...*

- forse l'errore di approssimazione che si commetterebbe è tutto sommato accettabile...!

PROBLEMA 1.2. Come stimare il precedente errore di approssimazione

$$|f(x_0, y_0) - \{1 + x_0 + y_0\}|$$

in modo da poter decidere seriamente se esso sia o meno al di sotto della tolleranza che supponiamo sia stata assegnata ?

OSSERVAZIONE 1.3. Ricordate che la prima, piú semplice approssimazione di una funzione $f(x, y)$ è sempre quella fornita da un suo valore

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0)$$

questo è il motivo per cui, quasi sempre le approssimazioni di $f(x, y)$ iniziano con

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + \dots$$

dove i puntini rappresentano correzioni via via piú precise.

Le approssimazioni che studieremo in questo capitolo si chiamano

polinomi di Taylor

polinomi... perché si tratta di polinomi.

2. La formula in una dimensione

Richiamiamo brevemente la costruzione dei polinomi di Taylor $P_k(t)$ associati, in un punto t_0 ad una funzione $f(t)$ indefinitamente derivabile:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ P_2(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}f''(t_0)(t - t_0)^2 \\ \dots &= \dots \\ P_n(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{[n]}(t_0)(t - t_0)^n \end{aligned}$$

Tali polinomi sono determinati da

- la funzione $f(t)$
- il punto t_0
- l'intero n

Il risultato fondamentale che rende interessanti tali polinomi ai fini dell'approssimazione è l'espressione della differenza che intercorre tra la funzione $f(t)$ e ciascuno dei polinomi $P_k(t)$

$$(47) \quad f(t) - P_k(t) = \frac{1}{(k+1)!} f^{[k+1]}(\tau)(t-t_0)^{k+1}$$

L'aspetto interessante della (47) è la possibilità di stimare, di maggiorare, l'errore che intercorre tra il valore fornito da ciascuno dei $P_k(t)$ e il valore *vero* $f(t)$: supposto di conoscere che

$$|f^{[k+1]}(t)| \leq M$$

segue

$$(48) \quad |f(t) - P_k(t)| \leq \frac{M}{(k+1)!} |t-t_0|^{k+1}$$

ESEMPIO 2.1. Si debba calcolare $\sin(0.017)$: serviamoci del primo ($n=1$) polinomio di Taylor relativo alla funzione $\sin(t)$ e a $t_0=0$

$$P_1(t) = \sin(0) + \sin'(0)(t-0) \rightarrow P_1(t) = t$$

Tenuto conto che

$$|\sin''(t)| \leq 1$$

si ha, dalla (48)

$$|\sin(t) - t| \leq \frac{1}{2}t^2 \rightarrow |\sin(0.017) - 0.017| \leq \frac{1}{2}0.017^2 = 0.0001445$$

Qualora l'errore possibile incontrabile, 0.0001445 apparisse troppo grosso si può ricorrere all'approssimazione offerta dai polinomi di Taylor di grado maggiore

$$P_2(t) = t$$

$$P_3(t) = t - \frac{1}{6}t^3$$

$$P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3$$

$$P_5(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5$$

$$\dots \quad \dots$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} |\sin(t) - P_4(t)| &\leq \frac{1}{120}t^5 \rightarrow \left| \sin(0.017) - 0.017 + \frac{1}{6}0.017^3 \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{120}0.017^5 = 1.183 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

forse, quest'ultima, una discreta approssimazione !

3. La formula di Taylor in due variabili

Un ragionamento analogo a quello del precedente Teorema del valor medio o di Lagrange permette di riconoscere una stima dell'errore che si può commettere approssimando una funzione $f(x, y)$ con il suo piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Supponiamo $f \in C^2(A)$, A convesso e siano

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P = (x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$$

il valore della funzione $f(P)$ può essere approssimato, approssimazione del piano tangente, con

$$f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0),$$

ovvero

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Quanto pesa il resto cioè l'errore di approssimazione

$$R = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k \quad ?$$

Consideriamo la funzione di una variabile t

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk) \quad t \in [0, 1].$$

funzione composta della f e della rappresentazione parametrica del segmento $\overline{P_0P}$.

I valori della $F(t)$ per $t \in [0, 1]$ sono i valori della f sui punti del segmento da (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Dato che f è di classe C^2 , il Teorema di derivazione delle funzioni composte garantisce che $F \in C^2([0, 1])$.

La funzione $F(t)$ sarà quindi sviluppabile in formula di Taylor di punto iniziale $t_0 = 0$ e ordine $n = 2$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\theta)t^2$$

con $\theta \in [0, t]$ opportuno.

Scelto $t = 1$ si ha quindi

$$(49) \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta).$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k), \\ F(0) = f(x_0, y_0), \\ F'(0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k. \end{cases}$$

e tenuto conto della formula di derivazione delle funzioni composte, indicato con $P_t = (x_0 + th, y_0 + tk)$, segue

$$\begin{cases} F(t) = f(P_t), \\ F'(t) = f_x(P_t)h + f_y(P_t)k, \\ F''(t) = f_{xx}(P_t)h^2 + 2f_{xy}(P_t)hk + f_{yy}(P_t)k^2 \end{cases}$$

grazie al fatto che, per il Teorema di Schwarz, $f_{xy} = f_{yx}$ nel caso di $f \in C^2$, vedi pagina 164.

Calcolando in $t = \theta$ e sostituendo in (49) otteniamo

$$(50) \quad \begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k \\ &+ \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_\theta)h^2 + 2f_{xy}(P_\theta)hk + f_{yy}(P_\theta)k^2 \}, \end{aligned}$$

dove $P_\theta = (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$.

Quanto osservato é riassunto nel seguente

TEOREMA 3.1 (Formula di Taylor di ordine 1). *Sia $f(x, y)$ di classe C^2 in A aperto di R^2 : sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e sia $C(P_0, r)$ un cerchio di centro P_0 e raggio r tutto contenuto in A :*

$\forall P = (x_0 + h, y_0 + k) \in C(P_0, r)$ riesce

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k)$$

con

$$R(h, k) = \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x_\theta, y_\theta)h^2 + 2f_{xy}(x_\theta, y_\theta)hk + f_{yy}(x_\theta, y_\theta)k^2 \}$$

essendo (x_θ, y_θ) un punto opportuno del segmento di estremi (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Si noti che l'errore di approssimazione R é presumibilmente

- tanto piú piccolo quanto piú $(x_0 + h, y_0 + k)$ é vicino a (x_0, y_0)
- tanto piú grande quanto piú $(x_0 + h, y_0 + k)$ é lontano da (x_0, y_0)

In altri termini la formula di Taylor di primo ordine

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

fornisce approssimazioni *locali* di $f(x_0 + h, y_0 + k)$, buone su punti vicini a quello iniziale, h e k piccoli.

PROPOSIZIONE 3.2. *Se le derivate seconde della funzione f verificano, tutte e tre la maggiorazione*

$$|f_{xx}| \leq M, \quad |f_{xy}| \leq M, \quad |f_{yy}| \leq M,$$

l'errore di approssimazione relativo alla precedente formula di Taylor di ordine 1, soddisfa la maggiorazione

$$|R| \leq \frac{1}{2}M \{ h^2 + 2|h||k| + k^2 \} \leq M(h^2 + k^2)$$

In altri termini l'errore che si può commettere servendosi per valutare $f(x_0 + h, y_0 + k)$ della approssimazione di Taylor di primo ordine non supera

$$M(\sqrt{h^2 + k^2})^2$$

un multiplo del quadrato della distanza tra $(x_0 + h, y_0 + k)$ e (x_0, y_0) .

ESEMPIO 3.3. *Supponiamo ad esempio che non si accettino errori superiori ad $1/10$ e che riesca $M = 10$: l'algoritmo di approssimazione di Taylor di primo ordine, ovvero l'approssimazione col piano tangente, sarebbe stato accettabile, tenuto conto della precedente Proposizione, se*

$$\frac{1}{2}10(|h| + |k|)^2 < 1/10 \quad \rightarrow \quad |h| + |k| < \frac{\sqrt{2}}{10}$$

cosa che accade certamente se il punto P appartiene al cerchio di centro P_0 e raggio $\sqrt{2}/20$.

Nel caso del precedente Esempio 1.1, $f(x, y) = 1 + \sin(x + y)$, la stima per le derivate seconde richiesta nella precedente Proposizione 3.2 è ben nota: $M = 1$.

Quindi

$$|f(x_0, y_0) - (1 + x_0 + y_0)| \leq \frac{1}{2}(|x_0| + |y_0|)^2$$

Nel caso del punto P_0 assegnato l'errore di approssimazione creato dall'algoritmo del piano tangente sarebbe stato non superiore a

$$\frac{1}{2}(0.01 + 0.02)^2 = 0.00045$$

Se tale quantità rientra nelle tolleranze accettate l'approssimazione del piano tangente è stata un buon investimento: un calcolo rapidissimo e un risultato accettabilmente vicino al vero !

3.1. Una notazione vettoriale. Posto:

$$\begin{aligned}
 (x_0, y_0) &= P_0, \\
 (x_0 + h, y_0 + k) &= P_0 + v, \\
 f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k &= \nabla f(P_0) \cdot v, \\
 \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= Hf(P_0)v \\
 f_{xx}(P_0)h^2 + f_{xy}(P_0)hk + f_{yx}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 &= Hf(P_0)v \cdot v
 \end{aligned}$$

la espressione di Taylor di primo ordine, indicata nel Teorema 3.1 si scrive, in modo vettoriale, al modo seguente

$$(51) \quad f(P_0 + v) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot v + \frac{1}{2}Hf(P_0)v \cdot v.$$

Notate la struttura della (51):

- un termine costante $f(P_0)$,
- un termine lineare in $v \nabla f(P_0) \cdot v$,
- un termine quadratico in v

$$\frac{1}{2}Hf(P_0)v \cdot v$$

Si noti al analogia tra la (51) e la formula che si incontrava nel caso unidimensionale

$$\begin{aligned}
 F(t) &= F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(\theta)(t - t_0)^2 \\
 f(P) &= f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot PP_0 + \frac{1}{2}Hf(P_0) \cdot PP_0 \times PP_0
 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.4. La formula (51) vale anche nel caso di funzioni di $n \geq 3$ variabili!

Chiaramente in tali casi P_0 sarà un punto di \mathbb{R}^n , v , il vettore incremento in \mathbb{R}^n , ecc..

4. Formule di Taylor di ordine superiore

Il procedimento con cui è stata costruita la formula di Taylor di ordine 1 era fondato sulla capacità di sviluppare in formula di Taylor la funzione

$$F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt), \quad t \in [0, 1]$$

Tenuto conto che, se la f ha derivate parziali continue fino ad un certo ordine m riesce anche $F(t) \in C^m([0, 1])$ si possono considerare per la

$F(t)$ formule di ordine superiore:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F^{[3]}(\tau)t^3$$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F^{[3]}(0)t^3 + \frac{1}{4!}F^{[4]}(\tau)t^4$$

ecc.

Da tali formule si ricavano le corrispondenti per la f con le stesse osservazioni usate nel primo ordine.

Elenchiamo, trascurando l'espressione del resto, i polinomi di Taylor associati ad f nel punto iniziale $P_0 = (x_0, y_0)$:

- **Ordine 1**

$$f(P_0) + f_x(P_0)f + f_y(P_0)k$$

- **Ordine 2**

$$f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 \}$$

- **Ordine 3**

$$\begin{aligned} & f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 \} + \\ & + \frac{1}{3!} \{ f_{xxx}(P_0)h^3 + 3f_{xxy}(P_0)h^2k + 3f_{xyy}(P_0)hk^2 + f_{yyy}(P_0)k^3 \} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 4.1. Il calcolo dei polinomi omogenei di grado k corrispondenti a $F^{[k]}(0)$ si ottiene abbastanza agevolmente osservando un'analogia formale molto importante

$$F'(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0)$$

$$F''(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[2]} f(x_0, y_0)$$

$$F'''(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[3]} f(x_0, y_0)$$

$$F^{[k]}(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[k]} f(x_0, y_0)$$

sviluppando le potenze indicate come ordinarie potenze di un binomio e applicando il risultato formale ottenuto alla funzione f nel punto (x_0, y_0)

5. Formule di Taylor quasi gratuite...

Ricordate che la formula di Taylor produce... i polinomi di Taylor: polinomi che forniscono buone approssimazioni di una funzione nelle vicinanze di un punto.

In molti casi tali polinomi approssimanti possono essere ottenuti con poco sforzo...

Non è raro trovarsi infatti a lavorare con funzioni di due variabili quali

$$(52) \quad \sin(x - y), \quad e^{3x+5y}, \quad \log(1 + x + y), \quad \text{ecc.}$$

ottenute componendo funzioni note di una variabile

$$\sin(t), \quad e^t, \quad \log(1 + t), \quad \text{ecc.}$$

Dal momento che i polinomi di Taylor per tali funzioni di una variabile sono molto noti si può agevolmente servirsi di essi per ricavare i polinomi di Taylor per le funzioni di due variabili (52).

Ad esempio,

$$\begin{aligned} \sin(t) &\cong t - \frac{1}{3!}t^3 \Rightarrow \sin(x - y) \cong (x - y) - \frac{1}{3!}(x - y)^3 \\ e^t &\cong 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e^{3x+5y} \cong 1 + (3x + 5y) + \frac{1}{2}(3x + 5y)^2 \\ \log(1 + t) &\cong t - \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \log(1 + x + y) \cong x + y - \frac{1}{2}(x + y)^2 \end{aligned}$$

5.1. La formula di Taylor per... i polinomi.

Sia

$$P(x, y) = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2 + 7x^3$$

un polinomio di terzo grado qualsiasi,

- $1 + 2x + 3y$ rappresenta il suo sviluppo di Taylor di ordine $n = 1$ e punto iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- $1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2$ rappresenta il suo sviluppo di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Si osservi che i polinomi sono già tradizionalmente presentati con il loro sviluppo di Taylor di punto iniziale $(0, 0)$.

5.2. I valori di $P(x, y)$ vicino al punto $(1, 1)$.

Sia $P(x, y)$ il polinomio precedente, usiamo la formula di Taylor con punto iniziale $(1, 1)$:

$$P(x, y) \simeq P(1, 1) + P_x(1, 1)(x - 1) + P_y(1, 1)(y - 1) = 28 + 36(x - 1) + 20(y - 1)$$

Quanto vale (circa) $P(1.001, 1.002)$?: risposta

$$P(1.001, 1.002) \simeq 28 + 0.036 + 0.040 = 28.076$$

6. Riflettiamo sulla formula di Taylor

Le formule di Taylor (il plurale si riferisce al fatto che, almeno tenuto conto dell'ordine, ce ne sono più d'una) esprimono una funzione $f(x, y)$ come somma di un polinomio e di un resto (in qualche caso noto o comunque maggiorabile con quantità note).

La loro costruzione fa uso

- di un punto (x_0, y_0) *comodo*
- di un intero n , l'ordine della formula, quasi sempre $n = 1$ o $n = 2$,
- dei valori della funzione e delle sue derivate fino all'ordine n nel punto *comodo* (x_0, y_0)
- di alcune informazioni sul resto che legittimino la sua eventuale cancellazione... informazioni in genere dedotte dalla conoscenza di una maggiorazione delle derivate che in esso figurano.

6.1. Osservazione fondamentale.

L'attributo di *comodo* dato al punto iniziale (x_0, y_0) significa che in tale punto sono perfettamente calcolabili

$$f(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad f_{xx}(x_0, y_0), \quad \text{ecc.}$$

valori tutti che intervengono nella costruzione dell'approssimazione di Taylor.

In assenza di un punto *comodo*, sul quale cioè la funzione e le sue derivate siano calcolabili agevolmente, non si costruisce alcuna formula di Taylor esplicita.

ESEMPIO 6.1. La funzione $f(x, y) = \sqrt{1+x+y}$ è abbastanza difficile: tuttavia possiede evidenti punti comodi nel senso precedentemente illustrato:

$$(0, 0), \quad (1, 2), \quad (312, 312), \quad \text{ecc.}$$

infatti in tali punti sia la funzione che le sue derivate sono facilissime a calcolarsi...

Quindi la formula di Taylor permette di stimare bene la funzione ad esempio nei punti

$$(0.01, -0.02), \quad (0.9876, 2.345), \quad (311, 313), \quad \text{ecc.}$$

6.2. A cosa serve la formula ?

- **Uso numerico:** si stima il valore numerico $f(x, y)$ tramite il valore $P(x, y)$ del polinomio di Taylor e la maggiorazione del resto $|R| \leq \epsilon$ tramite la quale si ottiene l'informazione

$$P(x, y) - \epsilon \leq f(x, y) \leq P(x, y) + \epsilon$$

- **Uso qualitativo:** emerge particolarmente nel caso di formule di ordine 2 e consente di raffrontare la posizione del grafico di $f(x, y)$ rispetto al piano tangente nel punto iniziale (x_0, y_0) ,
 - la forma della cupola,
 - la forma del fondo coppa,
 - la forma della sella,
 - altre forme...

Le configurazioni dei primi tre casi (cupola, coppa, sella) riguardano la decisione se un punto critico, cioè un punto a piano tangente orizzontale, sia o meno un punto di massimo o di minimo.

7. Forme quadratiche

Il secondo gruppo di addendi che costituiscono il polinomio di Taylor di ordine 2 è costituito da un polinomio omogeneo di secondo grado: esso viene detto *forma quadratica*¹

$$a h^2 + 2 b h k + c k^2$$

Le forme quadratiche prendono

- sempre valore 0 nell'origine, $h = 0, k = 0$
- valori diversi fuori dell'origine che possono essere:
 - sempre positivi
 - sempre negativi
 - sempre positivi o nulli
 - sempre negativi o nulli
 - di segno variabile

Le forme che fuori dell'origine prendono valori solo positivi oppure solo negativi si dicono forme *definite*, rispettivamente *definite positive* o *definite negative*.

ESEMPIO 7.1. $x^2 + 3y^2$ è *definita positiva*.

Le forme che fuori dell'origine prendono valori solo positivi o nulli oppure solo negativi o nulli si dicono forme semidefinite, rispettivamente *semidefinite positive* o *semidefinite negative*.

¹Il contenuto di questo paragrafo è noto dai corsi di Algebra e di Geometria.

ESEMPIO 7.2. $-x^2$ é semidefinita negativa.

Le forme che fuori dell'origine prendono valori di segno variabile si dicono forme *non definite*.

ESEMPIO 7.3. $x^2 - 3y^2$ é non definita.

7.1. Forme definite: come riconoscerle. Il modo piú semplice per riconoscere se una forma quadratica in due o piú variabili sia definita positiva consiste nello scriverla come somma (algebrica) di quadrati²:

- se i coefficienti dei vari quadrati sono tutti positivi la forma é definita positiva
- se i coefficienti dei vari quadrati sono tutti negativi la forma é definita negativa
- se i coefficienti dei vari quadrati sono parte positivi e parte negativi la forma é non definita.
- se i coefficienti dei vari quadrati sono tutti positivi o nulli la forma é semidefinita positiva
- se i coefficienti dei vari quadrati sono tutti negativi o nulli la forma é semidefinita negativa

Chiariamo con un esempio:

ESEMPIO 7.4.

$$3x^2 + 24xy + y^2 = 3(x^2 + 8xy + 16y^2) - 48y^2 + y^2 = 3(x + 4y)^2 - 47y^2$$

Chi dubitava che la forma $3x^2 + 24xy + y^2$ fosse definita o meno non ha piú dubbi quando se la vede presentata come

$$3(x + 4y)^2 - 47y^2$$

Sui punti $(x, 0)$ prende valori positivi, sui punti $x + 4y = 0$ prende valori negativi: infatti il primo quadrato scompare mentre il secondo, con il suo coefficiente -47 fornisce un valore negativo.

Il metodo suggerito nell'esempio precedente si chiama *metodo di Lagrange* e consente di ridurre una forma quadratica a somma di quadrati con pochissimo sforzo.

Il seguente Teorema fornisce del resto la condizione necessaria e sufficiente perché una forma sia definita positiva

²Sembra una richiesta curiosa ma é facile riconoscere che é sempre possibile raggruppare i termini in modo da ridursi ad una somma algebrica di quadrati.

TEOREMA 7.5. Condizione necessaria e sufficiente perché

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 > 0 \quad \forall (h, k) \neq (0, 0)$$

è che riesca

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0$$

DIMOSTRAZIONE. :

Necessitá

- scelto $(h, k) = (1, 0)$ si ha $Q(1, 0) = a$ e quindi $a > 0$
- scelto $(h, k) = (-b/a, 1)$ si ha $Q(-b/a, 1) = \frac{ac-b^2}{a} > 0$ e quindi $ac - b^2 > 0$

Sufficienza

Essendo $a > 0$ possiamo trasformare l'espressione di $Q(h, k)$ al modo seguente

$$Q(h, k) = a(h^2 + 2h\frac{b}{a}k + \frac{b^2}{a^2}k^2) + (c - \frac{b^2}{a^2})k^2 = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2$$

La somma di due quadrati con coefficienti positivi è positiva !

□

OSSERVAZIONE 7.6. Provate a scrivere

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = k^2 \left\{ a\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2b\frac{h}{k} + c \right\}$$

Le ipotesi del precedente Teorema corrispondono a che la parabola

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

sia sempre positiva

- coefficiente $a > 0$,
- discriminante $b^2 - ac < 0$.

La stessa condizione necessaria e sufficiente del Teorema 7.5 è espressa anche dal seguente

COROLLARIO 7.7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica costruita con i tre coefficienti della forma quadratica $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$: la forma è definita positiva se e solo se

$$\text{Tr}(A) = a + c > 0, \quad \det(A) = ac - b^2 > 0$$

DIMOSTRAZIONE. Le due condizioni

$$a + c > 0, \quad ac - b^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0$$

sono infatti perfettamente equivalenti (provare per credere...) .

□

OSSERVAZIONE 7.8. Le due condizioni indicate nel teorema possono essere enunciate (e ricordate) infine servendosi della filastrocca dei minori principali (che é molto utile in casi di dimensione maggiore). La forma

$$ah^2 + 2bhk + ck^2$$

é definita positiva se,

costruita la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ad essa associata

- é positivo il determinante del minore di ordine 1 formato dalla prima riga e dalla prima colonna, cioè $a > 0$
- é positivo il determinante del minore di ordine due formato dalle (prime) due righe e dalle (prime) due colonne, cioè $ac - b^2 > 0$

In dimensione 3 si avrebbe che la forma

$$ax^2 + 2bxy + 2cxz + 2dyz + ey^2 + fz^2$$

é definita positiva se,

costruita la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

ad essa associata

- é positivo il determinante del minore di ordine 1 formato dalla prima riga e dalla prima colonna, cioè $a > 0$
- é positivo il determinante del minore di ordine due formato dalle (prime) due righe e dalle (prime) due colonne, cioè $ae - b^2 > 0$
- é positivo il determinante del minore di ordine tre formato dalle (prime) tre righe e dalle (prime) tre colonne, cioè

$$2bcd - ad^2 - c^2e - b^2f + aef > 0$$

8. La riduzione a forma canonica

Una forma quadratica, ad esempio in due variabili,

$$ah^2 + 2bhk + ck^2$$

si dice di forma canonica se manca il termine rettangolare $2b h k$ ovvero se contiene solo termini quadratici.

In tre variabili

$$ax^2 + 3y^2 - 5z^2$$

é forma canonica,

$$x^2 + 3xy + y^2 + z^2$$

non lo é.

Una forma quadratica canonica mostra assai bene il suo essere *definita*, *semidefinita* o *indefinita*: basta guardare i segni dei coefficienti dei soli termini quadrati

- tutti positivi forma definita positiva
- tutti negativi forma definita negativa
- tutti non negativi forma semidefinita positiva,
- di segni diversi forma non definita.

La sorpresa interessante é che ogni forma quadratica puó ridursi a forma canonica con una rotazione opportuna degli assi.

DEFINIZIONE 8.1. Una matrice $n \times n$ si dice ortogonale se

$$A \cdot A^* = I$$

essendo I la matrice unitaria.

OSSERVAZIONE 8.2. Una matrice ortogonale soddisfa naturalmente anche la proprietá

$$A^{-1} = A^*$$

Le trasformazioni lineari di R^n in R^n determinate da una matrice ortogonale sono isometrie: infatti detto $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ un punto e $A \cdot x$ il suo trasformato riesce

$$(Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (x, x)$$

TEOREMA 8.3. Sia A la matrice simmetrica associata alla forma quadratica Q , detto $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ riesce

$$Q(x) = (Ax, x)$$

esiste una matrice P ortogonale, $P^{-1} = P^*$, tale che

$$P^* \cdot A \cdot P = D$$

essendo D la matrice diagonale formata dagli autovalori di A .

Posto $x = Py$ riesce quindi

$$\begin{aligned} Q(x) &= (Ax, x) = (APy, Py) = (P^*APy, y) = \\ &= (Dy, y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_m y_n^2 \end{aligned}$$

essendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$ gli autovalori di A

Accenniamo, brevemente a come determinare la matrice P

- si determinano gli autovalori di A determinando le radici dell'equazione algebrica di grado n

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- per ciascun autovalore λ_k si determinano tutti gli autovettori relativi, avendo cura che essi costituiscano una base ortogonale dell'autospazio E_{λ_k}
- gli n versori corrispondenti sono le n colonne di P

ESEMPIO 8.4. (*due variabili*)

Consideriamo, posto $x = \{h, k\}$ la forma quadratica

$$Q(x) = 2h^2 + 8hk + 8k^2$$

la matrice simmetrica ad essa associata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 10$$

I corrispondenti autovettori sono

$$\{-2, 1\}, \quad \{1, 2\}$$

i versori associati sono

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\{-2, 1\}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\{1, 2\}$$

La matrice P è quindi

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice ortogonale, infatti

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P^*$$

Riesce

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Indicato con $y = \{\alpha, \beta\}$ riesce del resto

$$Q(y) = 10\beta^2$$

forma semidefinita positiva.

OSSERVAZIONE 8.5. La matrice P del precedente esempio rappresenta l'isometria data dalla simmetria rispetto alla retta

$$y = (2 + \sqrt{5})x$$

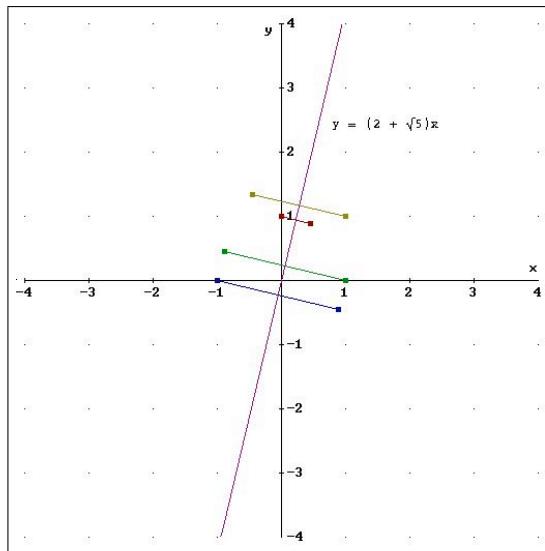


FIGURA 1. La simmetria determinata da P

ESEMPIO 8.6. (tre variabili)

Posto $x = \{a, b, c\}$ consideriamo la forma quadratica, in tre variabili,

$$Q(x) = 2a^2 + 4ab + 3b^2 + 6ac + 4bc + 2c^2$$

La matrice simmetrica ad essa associata è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono

$$0 = -7 + \lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3, \rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 7$$

i corrispondenti autovettori sono

$$\{-1, 0, 1\}, \quad \{1, -2, 1\}, \quad \{1, 1, 1\}$$

Essi sono tra loro certamente ortogonali: costruiamo i versori associati

$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

Consideriamo la matrice che ha tali versori come colonne:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

P é la matrice cercata: infatti

- si tratta di una matrice ortogonale

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = P^*$$

- riesce

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- Scelto $x = Py$ con $y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ riesce

$$Q(Py) = -\alpha^2 + \beta^2 + 7\gamma^2$$

forma non definita.

CAPITOLO 10

Massimi e minimi relativi

1. Introduzione

Se (x_M, y_M) è un punto di massimo per la funzione reale $u = f(x, y)$ definita in E riesce

$$f(x, y) \leq f(x_M, y_M), \quad \forall (x, y) \in E$$

Analogamente se (x_m, y_m) è un punto di minimo riesce

$$f(x, y) \geq f(x_m, y_m), \quad \forall (x, y) \in E.$$

Si dicono invece

punti di massimo relativo

quei punti $(x_*, y_*) \in E$ per i quali la diseguaglianza

$$f(x, y) \leq f(x_*, y_*)$$

sia verificata non necessariamente da tutti i punti di E ma solo da quelli $(x, y) \in E \cap D$ essendo D un conveniente disco di centro (x_*, y_*) . Analoga definizione per i punti di minimo relativo.

ESEMPIO 1.1. Sia

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in R^2$$

l'origine è un punto di massimo relativo: tuttavia basta allontanarsi poco dall'origine, arrivare per esempio in $(1, 1)$ per incontrare, (Vedi Figura 1.1), valori $f(1.05, 1.05) \simeq 0.4$ maggiori del valore $f(0, 0) = 0$ preso nell'origine.

1.1. I punti critici. I grafici delle funzioni $f(x, y)$ differenziabili hanno piano tangente in ogni punto.

È evidente che se una funzione ha in un punto (x_0, y_0) interno al suo insieme di definizione un massimo o un minimo relativo in tale punto il piano dovrà essere orizzontale.

Quindi in tale punto le due derivate parziali dovranno essere nulle

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

I punti in cui entrambe le derivate parziali prime di una funzione si annullano si chiamano *punti critici*.

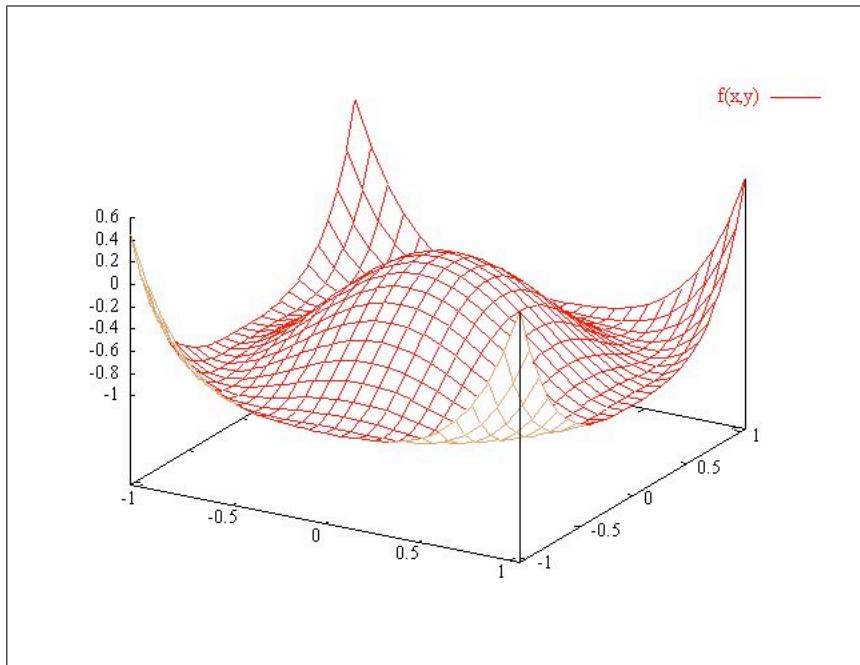


FIGURA 1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in R^2$

[NOTA:]

L'osservazione che il piano tangente in un punto di massimo o di minimo relativo sia necessariamente orizzontale cade se tale punto sta sulla frontiera dell'insieme di definizione.

Pensate alla funzione

$$f(x, y) = x + 2y, \quad (x, y) \in Q$$

essendo Q il quadrato $(0, 0), (1, 1)$: nei vertici $(0, 0), (1, 1)$ di Q si hanno sicuramente punti di minimo o di massimo relativi senza evidentemente che il grafico di $f(x, y)$ (un piano...) abbia in tali punti piano tangente orizzontale...!

L'osservazione precedente sul piano tangente suggerisce un algoritmo per cercare *i punti di massimo o di minimo relativi che cadano all'interno*:

- si cercano i punti critici
- tra essi si selezionano quelli che sono anche di massimo o di minimo relativo

- la selezione accennata non é sempre facile e si basa sulla formula di Taylor.

2. La selezione: condizioni sufficienti

La decisione sulla qualitá di un punto critico di essere o meno un punto di massimo o di minimo relativo viene presa servendosi della formula di Taylor di ordine $n = 1$.

Sia (x_0, y_0) un punto critico, si ha, posto $x = x_0 + h, y = y_0 + k$,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \\ &= \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \} \end{aligned}$$

avendo tenuto conto che la prima parte, quella lineare manca in conseguenza del fatto che $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Tenuto conto che il segno del primo membro é quello della forma quadratica in parentesi graffe a secondo membro si riconosce che

- se la forma quadratica é definita positiva (x_0, y_0) é punto di minimo relativo
- se la forma quadratica é definita negativa (x_0, y_0) é punto di massimo relativo
- se la forma quadratica non é definita (x_0, y_0) non é né di massimo né di minimo ma é punto di sella.

Tenuto conto del Teorema 7.5,

- IL CASO DEL MINIMO:

forma quadratica definita positiva

$$(53) \quad \begin{cases} f_{xx}(x_\theta, y_\theta) > 0, \\ f_{xx}(x_\theta, y_\theta)f_{yy}(x_\theta, y_\theta) - f_{xy}(x_\theta, y_\theta)^2 > 0 \end{cases}$$

la superficie grafico si trova al di sopra del piano tangente: del resto le (53) si riferiscono ad un punto (x_θ, y_θ) ignoto ma sono certamente soddisfatte, per continuità e quindi permanenza del segno, se

- le analoghe relazioni

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \\ f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0 \end{cases}$$

valgono nel punto (x_0, y_0)

- lavoriamo in un intorno del punto (x_0, y_0) tanto piccolo da garantire che i segni di f_{xx} e di $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ si mantengano.

• **IL CASO DEL MASSIMO:**

forma quadratica definita negativa

$$(54) \quad \begin{cases} f_{xx}(x_\theta, y_\theta) < 0, \\ f_{xx}(x_\theta, y_\theta)f_{yy}(x_\theta, y_\theta) - f_{xy}(x_\theta, y_\theta)^2 > 0 \end{cases}$$

la superficie grafico si trova al di sotto del piano tangente: del resto le (54) sono certamente soddisfatte, per continuità e quindi permanenza del segno, se

- le analoghe relazioni

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \\ f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0 \end{cases}$$

valgono nel punto (x_0, y_0)

- lavoriamo in un intorno del punto (x_0, y_0) tanto piccolo da garantire che i segni di f_{xx} e di $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ si mantengano.

• **IL CASO DELLA SELLA:**

forma quadratica non definita

$$(55) \quad f_{xx}(x_\theta, y_\theta)f_{yy}(x_\theta, y_\theta) - f_{xy}(x_\theta, y_\theta)^2 < 0$$

la superficie grafico si trova in parte sopra e in parte sotto il piano tangente: del resto la (55) è certamente soddisfatta, per continuità e quindi permanenza del segno, se

- l'analoga relazione

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0$$

vale nel punto (x_0, y_0)

- lavoriamo in un intorno del punto (x_0, y_0) tanto piccolo da garantire che il segno di $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ si mantenga.

3. Massimo e minimo in insiemi chiusi e limitati

Passiamo ora dall'analisi locale (cioè nell'intorno di un punto fissato) all'analisi globale : la ricerca del minimo e del massimo di una funzione data in un assegnato insieme C .

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- L'insieme $C = A \cup \partial A$ sia chiuso e limitato,
- la funzione f sia continua in C ,
- f sia differenziabile all'interno A di C escluso al più un numero finito di punti o di archi di curve regolari,
- la frontiera ∂A di C sia formata da un numero finito di archi di curve regolari.

Tali condizioni includono le ipotesi del Teorema di Weierstrass e quindi garantiscono l'esistenza del minimo e del massimo.

I punti $P_{\min}, P_{\max} \in C$ in cui saranno raggiunti il minimo e il massimo possono cadere

- all'interno A di C
- oppure sulla frontiera ∂A di C

quest'ultima possibilità giustifica la condizione posta sulla frontiera di essere fatta di archi regolari: al difuori di tale situazione sarebbe estremamente difficile poter studiare la funzione assegnata f sulla frontiera ∂A .

OSSERVAZIONE 3.1. *Gli insiemi chiusi e limitati $C = A \cup \partial A$ ottenuti come chiusura di un aperto limitato A la cui frontiera ∂A sia formata da un numero finito di curve regolari si chiamano DOMINI REGOLARI.*

Si noti che non sempre un insieme del piano rappresenta la chiusura di un aperto: una sorprendente curiosità, in negativo, può essere un cerchio dal quale esca un segmento.

Un tale insieme non è chiusura di alcun aperto !

3.1. L'algoritmo di ricerca di minimo e massimo nel caso unidimensionale.

Ricordiamo come la ricerca di massimo e minimo di $f(x)$, $x \in I = [a, b]$ si facesse:

- cercando i punti interni ad (a, b) in cui la derivata prima si annullava, i punti critici,
- calcolando i valori della funzione sui punti critici trovati,
- calcolando i valori della funzione negli eventuali punti in cui non sia derivabile,
- calcolando i valori della funzione sulla frontiera di I , i due punti $x = a$ e $x = b$,
- assumendo come minimo in I il minore dei valori (delle tre origini elencate) così trovati e come massimo il maggiore.

3.2. Il caso bidimensionale.

La ricerca del minimo e del massimo e dei punti in cui tali valori sono raggiunti si esegue nel caso bidimensionale in modo analogo.

- si cercano i punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

critici di f che cadono all'interno di A ,

- si calcolano i valori $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots$ in ciascuno di tali punti critici,
- si calcolano i valori di f sui punti in cui non è differenziabile,
- si calcolano il valore massimo e il valore minimo di f sulla frontiera ∂A .

Il minore tra i valori (delle tre origini elencate) calcolati dà il minimo assoluto di f su C , il maggiore sempre tra i valori calcolati dà il massimo assoluto di f su C .

3.3. Il minimo e il massimo sulla frontiera. Lo studio della funzione sui punti della frontiera ∂A è sostanzialmente lo studio di una (o più) funzione di una variabile reale.

Supponiamo, per semplicità, che la frontiera ∂A sia composta da una sola curva regolare di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

Studiare la funzione assegnata $f(x, y)$ sulla frontiera significa studiare la funzione composta

$$F(t) = f[x(t), y(t)], \quad t \in [a, b]$$

Cercare il massimo e il minimo di f sulla frontiera significa cercare il massimo e il minimo di F sull'intervallo $[a, b]$.

Nel caso, più complesso ma anche più frequente in cui la frontiera ∂A sia composta da più archi di curve regolari si dovrà eseguire la ricerca del massimo e del minimo di f su ciascuno di tali archi.

ESEMPIO 3.2. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ nel dominio definito da

$$T = \{x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

Soluzione.

- Il dominio C è un triangolo, chiuso e, naturalmente limitato,
- la funzione, un polinomio, è continua in tutto il piano,
- la funzione è anche di classe C^2 in tutto il piano,
- non esistono punti in cui f non sia differenziabile,
- la frontiera di C è fatta da tre segmenti.

1) Punti critici:

$$f_x(x, y) = 2x - y + 1 = 0, \quad f_y(x, y) = 2y - x + 1 = 0.$$

risolvendo si trova il solo $(-1, -1) \in C$: in esso si ha il valore

$$f(-1, -1) = -1$$

2) Dato che la funzione è derivabile ovunque (è di classe C^∞ !), non ci sono valori provenienti da punti di non differenziabilità.

3) La frontiera: indicati con $O = (0, 0)$, $A = (0, -3)$ e $B = (-3, 0)$, i tre vertici si ha

$$\partial T = \overline{OB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AO}.$$

Studio la funzione sui tre segmenti separatamente.

Segmento \overline{OA} . La funzione lungo questo segmento è data da $f(0, y) = y^2 + y$ per $y \in [-3, 0]$. Dal grafico della parabola, si deduce che ci sono tre punti candidati $(0, -3)$, $(0, -\frac{1}{2})$ e $(0, 0)$.

I valori di f sono

$$f(0, -3) = 6, f(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, f(0, 0) = 0$$

Segmento \overline{OB} . Questa parte è analoga alla precedente (si potrebbe usare la simmetria della funzione) Dato che $f(x, 0) = x^2 + x$ per $x \in [-3, 0]$, i nuovi candidati hanno coordinate $(-3, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ e il punto $(0, 0)$ già conteggiato nel segmento precedente.

I valori di f sono

$$f(-3, 0) = 6, f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}, f(0, 0) = 0$$

Segmento \overline{AB} . Una possibile parametrizzazione di questo segmento si ottiene notando che si tratta di un grafico, quindi basta esplicitare una variabile in funzione dell'altra. Ad esempio, ponendo $y = -x - 3$, si ottiene

$$h(x) := f(x, -x - 3) = \dots = 3(x^2 + 3x + 2).$$

I punti candidati sono gli estremi $A = (-3, 0)$ e $B = (0, -3)$, già conteggiati in precedenza, e il punto corrispondente al vertice della parabola, di coordinate $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

I valori di f sono

$$f(-3, 0) = 6, f(0, -3) = 6, f(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$$

Riassumendo i candidati minimi o massimi sono i valori

$$\begin{aligned} &f(-1, -1), \quad f(0, 0), \quad f(0, -3), \quad f(-3, 0), \\ &f(0, -1/2), \quad f(-1/2, 0), \quad f(-3/2, -3/2). \end{aligned}$$

Dato che

$$\begin{aligned} &f(-1, -1) = -1, \quad f(0, 0) = 0, \quad f(0, -3) = f(-3, 0) = 6 \\ &f(0, -1/2) = f(-1/2, 0) = -\frac{1}{4}, \quad f(-3/2, -3/2) = -\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

si deduce che

$$\begin{aligned} \min_T f(x, y) &= f(-1, -1) = -1, \\ \max_T f(x, y) &= f(0, -3) = f(-3, 0) = 6. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.3. Calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x, y) = |x - y|$ nel quadrato di vertici l'origine e il punto $(1, 1)$.

Soluzione:

La funzione assegnata è differenziabile in tutto il piano privato della retta $x - y = 0$. Fuori di tale retta, cioè nei due semipiani aperti da essa determinati, f coincide con $x - y$ in uno e con $y - x$ nell'altro: le derivate parziali sono costanti e non si annullano mai,

Non ci sono punti critici né in tutto il piano né, tanto meno nell'interno del quadrato assegnato.

Ci sono, all'interno del quadrato punti in cui f non è differenziabile: su tali punti f prende un solo valore, lo 0.

Sui quattro segmenti che formano la frontiera si ha:

- $x = 0, 0 \leq y \leq 1 : \rightarrow f(0, y) = y$, minimo valore 0, massimo valore 1,
- $x = 1, 0 \leq y \leq 1 : \rightarrow f(1, y) = 1 - y$, minimo valore 0, massimo valore 1,
- $y = 0, 0 \leq x \leq 1 : \rightarrow f(x, 0) = x$, minimo valore 0, massimo valore 1,
- $y = 1, 0 \leq x \leq 1 : \rightarrow f(x, 1) = 1 - x$, minimo valore 0, massimo valore 1,

I valori calcolati sono pertanto due soli, 1 e 0: è ovvio quale sia il minimo e quale il massimo.

4. Estremo superiore ed inferiore

Nel caso in cui il dominio non sia chiuso e/o limitato, o la funzione non sia continua, il teorema di Weierstrass non si applica e quindi massimo e minimo potrebbero non esistere.

La domanda da porsi è quindi quanto valgano estremo superiore/inferiore. Nel caso in cui questi (o solo uno dei due) esistano finiti, ci si chiede se si tratta di massimo/minimo.

ESEMPIO 4.1. Ottimizzazione di confezioni. *Qual'è la scatola (a forma di parallelepipedo) che utilizza meno cartone possibile a parità di volume contenuto?*

Se x , y e z sono le dimensioni della scatola, la superficie della scatola è $2(xy + yz + zx)$. Quindi il problema è

$$\inf \{xy + yz + zx : x, y, z > 0, xyz = V\} \quad V = \text{volume fissato.}$$

Questo è un problema di “minimo vincolato”, cioè si sta cercando di minimizzare una funzione di tre variabili con un vincolo tra le tre variabili: $xyz = V$. In questo caso, possiamo ricondurci ad un problema bidimensionale esplicitando la variabile z dal vincolo. Imponendo

$z = \frac{V}{xy}$, il problema diviene

$$\inf_{x,y>0} S(x,y) \quad \text{dove } S(x,y) = V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + xy.$$

La funzione S è chiaramente continua dove è definita, ma l'insieme $x, y > 0$ è aperto e illimitato.

Cerchiamo i punti critici di S :

$$S_x(x,y) = -\frac{V}{x^2} + y, \quad S_y(x,y) = -\frac{V}{y^2} + x.$$

Da $S_x = 0$, si deduce $y = \frac{V}{x^2}$ e sostituendo in $S_y = 0$,

$$x - \frac{x^4}{V} = 0 \iff 1 - \frac{x^3}{V} = 0 \iff x = \sqrt[3]{V}.$$

La funzione ha quindi un unico punto critico di coordinate $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$. Prima di dedicarci allo studio della frontiera, facciamoci un'idea sul genere di punto che abbiamo trovato. Le derivate secondo di S sono

$$S_{xx}(x,y) = \frac{2V}{x^3}, \quad S_{xy}(x,y) = 1, \quad S_{yy}(x,y) = \frac{2V}{y^3},$$

quindi

$$Hf(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che il determinante e la traccia sono positivi possiamo concludere che il punto è di minimo relativo. Questo non risponde al problema, ma quanto meno ci fa ben sperare.

È abbastanza evidente che i limiti di $S(x,y)$ sia per $x \rightarrow 0$, sia per $y \rightarrow 0$, sia per $(x,y) \rightarrow \infty$ sono $+\infty$. Quindi si riconosce che il valore relativo al punto $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ è il minimo, mentre non c'è estremo superiore finito e quindi non c'è massimo.

Nel caso in cui $(x,y) = (\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$, si deduce da $xyz = V$, che anche $z = \sqrt[3]{V}$ e quindi la scatola ottimale è un cubo.

CAPITOLO 11

Il teorema di Schwarz

1. Quante sono le derivate parziali seconde, terze,... ?

Il procedimento di derivazione parziali applicato ad una funzione $f(x, y)$ di due variabili raddoppia il numero di derivate ogni volta:

- Due derivate parziali prime
- Quattro derivate parziali seconde
- Otto derivate parziali terze
- ecc.

Data una funzione di due variabili $f(x, y)$, sufficientemente regolare, esistono quattro derivate parziali seconde: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

Gli esempi visti in precedenza, ([2], pag. 36) suggeriscono che possa valere l'identità $f_{xy} = f_{yx}$, cioè che derivare prima rispetto alla x e poi rispetto alla y , sia lo stesso che procedere in ordine inverso, ossia derivare prima rispetto alla y e poi rispetto alla x .

Sfortunatamente, e sorprendentemente, questo non è sempre vero!

Prima di enunciare e dimostrare il *Teorema di Schwarz*, che garantisce la possibilità di invertire l'ordine di derivazione *nel caso in cui le derivate seconde siano funzioni continue*, analizziamo più da vicino il tipo di fenomeno che può accadere.

1.1. Una questione di invertibilità.

Partiamo da un esempio, leggermente diverso. Sia $g(h, k)$ una funzione di due variabili. E' sempre vero che vale l'identità

$$(56) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} g(h, k) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} g(h, k) \quad ?$$

Da un punto di vista geometrico, questo corrisponde a chiedere se avvicinarsi a zero prima secondo la direzione delle ordinate e poi secondo quella delle ascisse, sia lo stesso che procedere nell'ordine inverso.

Nel caso in cui la funzione g sia una funzione continua in $(0, 0)$, le due strade portano allo stesso risultato.

Nel caso in cui la funzione g non sia continua non è detto: ad esempio, sia

$$g(h, k) = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2},$$

che è definita e continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = -1, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = 1$$

quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = \lim_{h \rightarrow 0} +1 = +1,$$

mentre

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Le due sequenze di limiti danno risultati diversi!

Questo esempio suggerisce che non sempre è possibile invertire l'ordine in cui si compiono due operazioni (in questo caso due limiti).

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente alla permutabilità dei due limiti:

TEOREMA 1.1. *La funzione $g(h, k)$ sia definita in un disco di centro l'origine $(0, 0)$: se esiste finito il limite*

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} g(h, k) = L$$

allora riesce anche

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} g(h, k) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} g(h, k) = L.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta ricordare il significato di stabilizzazione che corrisponde all'esistenza del limite: l'ipotesi del teorema dice....

$$(h, k) \approx (0, 0) \Rightarrow g(h, k) \approx L$$

quindi comunque ci avviciniamo all'origine ci troveremo avanti a valori $g(h, k) \approx L$. \square

2. Le derivate seconde miste

Per semplicità consideriamo il calcolo di f_{xy} e f_{yx} nel punto $(0, 0)$. Per definizione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} - \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \right) \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hk} [f(h, k) - f(0, k)] - [f(h, 0) - f(0, 0)]
\end{aligned}$$

L'altra derivata mista, invece, è data dal procedimento inverso

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} - \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} \right) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} ([f(h, k) - f(h, 0)] - [f(0, k) - f(0, 0)]).
\end{aligned}$$

Indicando l'espressione a numeratore con

$$A(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0),$$

possiamo dire che le due derivate miste coincidono se e solo se vale l'identità

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk}.$$

2.1. Un contrempio.

Consideriamo, ad esempio, la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

allora

$$A(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0) = f(h, k) = \frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2}.$$

Dato che

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = -1 \neq 1 = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = f_{yx}(0, 0),$$

questa funzione ha derivate miste diverse in $(0, 0)$!

Quindi non è sempre possibile scambiare l'ordine di derivazione.

*Questo fatto sconfortante
ha comunque una parte rinfancante,¹*

¹ Giudiizio attribuito al prof. Corrado Mascia.

lo scambio dell'ordine di derivazione è possibile sotto ipotesi *ragionevoli!* Come si intuisce dal cenno fatto al principio, Teorema 1.1, l'ipotesi che garantisce di poter invertire l'ordine dei limiti, cioè l'ordine di derivazione parziale, è un'ipotesi di *continuità delle derivate seconde miste*.

3. Il teorema

TEOREMA 3.1 (Teorema di Schwarz). *Sia f una funzione derivabile due volte in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Se le funzioni f_{xy} e f_{yx} sono continue in (x_0, y_0) , allora vale l'uguaglianza*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità, dimostriamo il Teorema supponendo $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Posto

$$A(h, k) = (f(h, k) - f(h, 0)) - (f(0, k) - f(0, 0))$$

come si è visto, basta dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk}.$$

e, per ottenere questo basta riconoscere, tenuto conto del Teorema 1.1, che esiste il

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{A(h, k)}{hk}$$

Supponiamo $h, k > 0$ (le altre possibilità si trattano allo stesso modo). Posto

$$\phi(x) := f(x, k) - f(x, 0)$$

$A(h, k)$ può essere riscritta nella forma

$$A(h, k) = \phi(h) - \phi(0) = \phi'(\eta) h$$

da cui tenuto conto che

$$\phi'(x) := f_x(x, k) - f_x(x, 0)$$

si ha

$$A(h, k) = [f_x(\eta, k) - f_x(\eta, 0)] h$$

avendo calcolato i due addendi fra parentesi tondi mediante il Teorema di Lagrange, unidimensionale.

Applicando ora il Teorema di Lagrange, ancora unidimensionale, alla $f_x(\eta, k) - f_x(\eta, 0)$, funzione della sola k , otteniamo

$$A(h, k) = f_{xy}(\eta, \theta) hk \quad \eta \in (0, h), \quad \theta \in (0, k).$$

Quindi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{A(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(\eta, \theta).$$

Dato che, per ipotesi, la funzione f_{xy} è continua, riesce

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(\eta, \theta) = f_{xy}(0, 0)$$

il limite cercato quindi esiste e vale $f_{xy}(0, 0)$.

Il Teorema 1.1 garantisce quindi la invertibilità dei due limiti

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = f_{yx}(0, 0)$$

e quindi l'uguaglianza

$$f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0).$$

□

4. Un problema

Le due funzioni $3x + 5y + 7$ e $2x - 4y + 13$ sono le derivate parziali prime di qualche polinomio ?

No !

Se infatti esistesse un polinomio $P(x, y)$ tale che

$$(57) \quad \begin{cases} P_x &= 3x + 5y + 7 \\ P_y &= 2x - 4y + 13 \end{cases}$$

Allora dovrebbe riuscire anche, per il teorema di Schwarz,

$$P_{xy} = P_{yx}$$

Ma, dalla relazione 57 discende

$$P_{xy} = (3x + 5y + 7)_y = 5, \quad P_{yx} = (2x - 4y + 13)_x = 2$$

due valori diversi.

L'unica conclusione che se ne può trarre è che un polinomio che soddisfi il sistema 57 non esiste !

È la prima volta che scopriamo che non è sempre lecito assegnare due funzioni e pretendere che esse siano le due derivate parziali prime di una stessa funzione !