PROVA SCRITTA DELL'8 LUGLIO 2020

ANALISI MATEMATICA 1

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

DOCENTE: ANDREA DAVINI

NOTE.

- Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente; risposte prive di giustificazione non daranno punteggio. I principali risultati dimostrati a lezione possono essere citati ed utilizzati senza dimostrazione.

Lo studente svolga al più 2 tra i 3 esercizi seguenti.

Esercizio 1. Si consideri la funzione $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ definita come

$$d\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \min\{|z_1 - z_2|, 1\}$$

per ogni $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) [**Punti 9**] Dimostrare che d è una distanza su $\mathbb{R}^3$ e stabilire se è indotta da una norma.

(b) [**Punti 6**] Dimostrare che $(\mathbb{R}^3, d)$ è uno spazio metrico completo.

(c) [**Punti 3**] Dire se l'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d\big((0, 0, 0), (x, y, z)\big) \leq 1\}$$

è un insieme compatto (per successioni) in $(\mathbb{R}^3, d)$. È un insieme chiuso?

Esercizio 2 (Punti 12). Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y' = e^{kt}$$

al variare del parametro k in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 (Punti 6). Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3 + \log(1+n)}\, \mathrm{e}^{nx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$