Analisi – Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Registro didattico A.A. 2011–2012

28 gennaio 2012

Lezione 1-2 (4 ottobre 2011). Numeri naturali, interi, irrazionali, razionali. Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Numeri reali: principio degli intervalli incapsulati e assioma di Archimede.

Lezione 3-4 (5 ottobre 2011). Definizione di modulo in $\mathbb{R}$ e proprietà. Proprietà di monotonia dell'elevamento a potenza. Esempi ed esercizi.

Lezione 4-5 (7 ottobre 2011). Definizione di maggiorante e minorante per un insieme E di numeri reali. Definizione di insieme limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato. Definizione di massimo e minimo di un insieme E di numeri reali. Definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme E di numeri reali e Teorema di esistenza (la dim. verrà fatta dopo i limiti di successioni). Esempi ed esercizi. Enunciato del principio di induzione e applicazioni.

Lezione 7-8 (11 ottobre 2011). Nozione di funzione, grafico di una funzione. Esempi di funzioni reali di variabile reale e relativi grafici: retta $mx + q$, x^2, x^3, $1/x$, $\sqrt{x}$, $|x|$. Operazioni elementari sui grafici: traslazioni, modulo di una funzione, parte positiva e negativa di una funzione. Definizioni di funzione iniettiva e surgettiva. Funzioni pari e dispari, simmetrie dei relativi grafici. Svolgimento di alcuni esercizi.

Lezione 9-10 (12 ottobre 2011). Funzioni iniettive. Funzioni monotone e strettamente monotone. Esempi di funzioni strettamente monotone: rette, $f(x) = x^n$ con $x \in I$, dove $I = [0, +\infty)$ o $I = \mathbb{R}$ a seconda che n sia pari o dispari con dimostrazione. Somma e composizione di funzioni strettamente crescenti o decrescenti. Relazione tra stretta monotonia e iniettività. Composizione di funzioni. Esempi ed esercizi proposti.

Lezione 11-12 (14 ottobre 2011). Funzioni invertibili e funzioni inverse. Grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f. Esercizi su invertibilità di funzioni e calcolo esplicito dell'inversa. Inverse di funzioni trigonometriche:

arcsin, arccos, arctan. Funzione esponenziale a^x (con $a > 0$): costruzione naif e proprietà. Esempi ed esercizi proposti.

Lezione 13-14 (18 ottobre 2011) Funzione logaritmo come inversa dell'esponenziale e proprietà. Successioni: definizione ed esempi. Limite di una successione: definizione ed esempi. Dimostrazione di alcuni teoremi: unicità del limite, limitatezza di una successione convergente.

Lezione 15-16 (19 ottobre 2011) Successioni divergenti: definizione ed esempi. Operazioni con i limiti di successioni, forme indeterminate ed esempi. Teoremi sulle successioni: monotonia del limite, permanenza del segno, teorema dei due carabinieri, teorema di confronto (con dimostrazioni).

Lezione 17-18 (21 ottobre 2011) Teorema di confronto. Limiti notevoli a^n, $\sqrt[n]{a}$ (con dimostrazioni). Continuità della funzione esponenziale (esercizio guidato). Confronto fra infiniti: n^β/a^n e $a^n/n!$ (con $a > 1$). Svolgimento di alcuni esercizi.

Lezione 19-20 (25 ottobre 2011) Limiti notevoli trigonometrici. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (inferiore) per insiemi limitati superiormente (inferiormente): dimostrazione. Successioni monotone: definizioni e Teorema di regolarità. Limite notevole $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e varianti (senza dim.).

Lezione 21-22 (26 ottobre 2011) Calcolo del limite di $n!/n^n$. Derivazione dei limiti notevoli $(\log(1 + a_n))/a_n$ e $(\exp(a_n) - 1)/a_n$ quando $(a_n)_n$ è una successione infinitesima. Limiti del tipo $a_n^{b_n}$. Esempi di serie a termini positivi: serie geometrica, serie armonica. Calcolo delle somme della serie geometrica e serie armonica. Definizione di sottosuccessione, limite di sottosuccessioni di una successione regolare.

Lezione 23-24 (28 ottobre 2011) Dimostrazione del limite notevole $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ e derivazione del $\lim_n \log(n)/n^\beta = 0$ per $\beta > 0$. Teorema di Bolzano–Weierstrass per successioni. Definizione di successione di Cauchy e Criterio di Cauchy.

Lezione 25-26 (4 novembre 2011) Serie numeriche: definizioni e notazioni. Condizione necessaria di convergenza. Paradosso di Zenone (Achille e la tartaruga). Serie a termini non negativi: regolarità e criterio del confronto. Risultati di convergenza e non convergenza per la serie armonica generalizzata. Serie a termini non negativi: criteri del confronto e del confronto asintotico. Esercizi proposti.

Lezione 25-26 (8 novembre 2011) Serie a termini non negativi: criterio della radice e del rapporto. Esempio sul caso critico $\ell = 1$. Svolgimento di alcuni esercizi. Serie di segno qualsiasi: definizione di serie assolutamente convergente e teorema relativo. Serie a termini di segno alterno e Criterio di Leibniz (solo enunciato). Svolgimento di alcuni esercizi sulle serie. Cenni di topologia della retta: definizione di insieme aperto, chiuso, punto interno, punto di accumulazione.

Lezione 27-28 (9 novembre 2011) Definizione di limite di una funzione in un punto. Continuità delle funzioni seno e coseno. Teorema ponte tra limiti di funzioni e di successioni. Come si dimostra che un limite non esiste: esempio di $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$.

Lezione 29-30 (11 novembre 2011) Teoremi sui limiti di funzioni: unicità del limite, limite della somma, differenza e prodotto di funzioni, teorema di permanenza del segno, limite del rapporto di funzioni, limitatezza locale, monotonia del limite, criterio del confronto, teorema dei due carabinieri. Applicazione al $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x = 1$. Definizione di limite destro e sinistro in un punto e loro relazione con il limite in un punto *tout court*. Limiti all'infinito. Ordini di infinito di funzioni esponenziale, potenza, logaritmo.

Lezione 31-32 (15 novembre 2011) Esistenza del limite destro e sinistro per le funzioni monotone. Applicazione: continuità dell'esponenziale. Definizione di funzione continua. Esempi di funzioni continue: x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x. Teorema di permanenza del segno. Continuità della somma, differenza, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue. Applicazione: continuità di $\tan(x)$ e $\mathrm{cotan}(x)$. Teorema degli zeri, Teorema dei valori intermedi, Teorema di Weierstrass. Applicazione: ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.

Lezione 33-34 (16 novembre 2011) Continuità dell'inversa di una funzione continua definita su un intervallo. Controesempio nel caso in cui la funzione non sia definita su un intervallo. Definizione e continuità delle funzioni $\sqrt[n]{x}$ e $\log(x)$. Definizione di funzione Lipschitziana. Definizione di estensione per continuità di una funzione. Esercizi su limiti e funzioni continue.

Lezione 35-36 (18 novembre 2011) Definizione di derivata e significato geometrico. Calcolo esplicito della derivata delle funzioni x, x^2, x^n, $\sqrt{x}$, e^x, $\log(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$. Regole fondamentali di derivazione: linearità, prodotto, quoziente, composizione di funzioni derivabili. Calcolo della derivata di $\tan(x)$ e $\mathrm{cotan}(x)$.

Lezione 37-38 (22 novembre 2011) Teorema della derivata della funzione inversa (senza dimostrazione). Esempi ed applicazioni: calcolo della derivata di $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$.

Lezione 39-40 (23 novembre 2011) Massimi e minimi relativi: definizione, Teorema di Fermat, Teorema di Rolle, Teorema di Lagrange e loro conseguenze. Cenni sulle funzioni convesse: definizione e criterio di convessità per funzioni derivabili due volte.

Lezione 41-42 (25 novembre 2011) Teorema di de l'Hôpital (con dimostrazione parziale). Esercizi proposti. Calcolo del limite del rapporto incrementale di una funzione per mezzo del Teorema di de l'Hôpital: differenza tra nozione di derivabilità e continuità della derivata in un punto. Esempio: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Esercizi proposti.

Lezione 43-44 (29 novembre 2011) Applicazione dei risultati visti per lo studio di funzioni e grafici qualitativi: esercizi proposti. Simboli di Landau. Formula di Taylor con resto di Peano (con dimostrazione). Polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari: $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\log(1+x)$.

Lezione 45-46 (30 novembre 2011) Uso della formula di Taylor per la risoluzione dei limiti e per il calcolo approssimato del valore di una funzione in un punto: esercizi. Espressione del resto nella forma di Lagrange: teorema.

Lezione 47-48 (2 dicembre 2011) Esercizi di preparazione all'esonero.

Lezione 49-50 (14 dicembre 2011) L'integrale di Riemann. Caso di una funzione f positiva e limitata in un intervallo $[a, b]$: area del sottografico; definizione di somme integrali per difetto $\underline{S}(f, P)$ e per eccesso $\overline{S}(f, P)$ relativamente ad una partizione P dell'intervallo $[a, b]$; relazioni

$$\underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P), \quad \underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, P \cup Q), \quad \overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(f, P \cup Q)$$

per P, Q partizioni dell'intervallo $[a, b]$. Definizione: f si dice *integrabile* in $[a, b]$ se

$$\inf_P \overline{S}(f, P) = \sup_Q \underline{S}(f, Q) := \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Proposizione: f integrabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \text{ partizione } P_\varepsilon \text{ di } [a, b] : \quad \overline{S}(f, P_\varepsilon) - \underline{S}(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Caso di una funzione f limitata in un intervallo $[a, b]$ e di segno qualsiasi. Definizione: f si dice *integrabile* in $[a, b]$ se sono integrabili la sua parte positiva f^+ e la sua parte negativa f^-. Il suo integrale è

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := \int_a^b f^+(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\, \mathrm{d}x.$$

(La parte positiva e negativa di una funzione f sono le due funzioni positive così definite:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \qquad x \in [a, b].$$

Si ricorda che $\quad f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad$ per ogni $x \in [a, b]$.)
Esercizio svolto: $f(x) = x$ èintegrabile in $[a, b]$ e $\int_a^b x \, \mathrm{d}x = (b^2 a^2)/2$.

Lezione 51-52 (15 dicembre 2011) Esercizio svolto: $f(x) = c$ èintegrabile in $[a, b]$ e $\int_a^b c\mathrm{d}x = c(ba)$. Esistenza di funzioni non integrabili: la funzione di Dirichlet non èintegrabile in $[1, 2]$ (con dimostrazione). Proprietàdegli integrali : linearità, additività, monotonia, modulo. Classi di funzioni integrabili: monotone (con dimostrazione), lipschitziane (con dimostrazione), continue (senza dimostrazione). Teorema della media integrale.

Lezione 53-54 (16 dicembre 2011) Funzioni definite da integrali. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Esempio: studio di $f(x) = \int_0^x \cos(t^3) \, \mathrm{d}t$. Funzioni primitive, integrali indefiniti e definiti. Tabella delle primitive elementari. Formule di integrazione per parti, esempi:

$$\int \log x \, \mathrm{d}x, \quad \int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$$
$$\int x^{13} \log x \, \mathrm{d}x, \quad \int (\log x)^3 \, \mathrm{d}x$$

Lezione 55-56 (20 dicembre 2011) Integrazione delle funzioni razionali (vedi Nota per gli studenti sotto Materiale didattico). Integrazione per sostituzione, esempi:

$$\int \cos(5x) \, \mathrm{d}x, \quad \int x \cos(x^2) \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\log x}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{d}x, \quad \int \tan(x) \, \mathrm{d}x, \quad \int \cos(x) \sin^3(x) \, \mathrm{d}x.$$

Lezione 57-58 (21 dicembre 2011) Alcune sostituzioni speciali: sostituzione $t = \tan(x/2)$ per integrali del tipo

$$\int F(\cos x, \sin x) \, \mathrm{d}x.$$

Esercizi proposti. Ulteriori esempi ed esercizi sull'integrazione per parti:

$$\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x, \quad \int \sin^3(x) \, \mathrm{d}x, \quad \int \sin^k(x) \, \mathrm{d}x.$$

Lezione 59-60 (10 gennaio 2012) Cenni sui numeri complessi: definizione di $\mathbb{C}$; operazioni tra numeri complessi (somma, differenza, moltiplicazione, divisione); coniugato e modulo di un numero complesso; rappresentazione polare. Esponenziale di un numero complesso: $\mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a \, (\cos(b) + i \sin(b))$.

Funzioni a valori complessi definite su un intervallo (a,b): continuità, derivabilità. Calcolo della derivata di $e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lezione 61-62 (11 gennaio 2012) Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula di rappresentazione delle soluzioni. Esempi ed esercizi. Problema di Cauchy: Teorema di esistenza e unicitàdella soluzione ed esercizi.

Lezione 63-64 (13 gennaio 2012) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: risultati preliminari. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione omogenea: determinazione di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, oscillatore armonico, oscillatore armonico smorzato. Esercizi. Equazione non omogenea: espressione della soluzione, ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza.

Lezione 65-66 (17 gennaio 2012) Equazione non omogenea: espressione della soluzione, ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Esercizi. Oscillatore armonico con forza esterna periodica agente: casi risonante e non–risonante. Lo spazio euclideo N–dimensionale $\mathbb{R}^N$: struttura di spazio vettoriale reale; norma e distanza euclidee, proprietà; intorni sferici (palle aperte, chiuse); insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemmi limitati; nozione di successione convergente in $\mathbb{R}^N$; definizione di sottosuccessione e Teorema di Bolzano.

Lezione 67-68 (18 gennaio 2012) Curve in $\mathbb{R}^N$: curve continue, curve regolari e regolari a tratti, vettore velocità, retta tangente ad una curva. Esempi di curve: segmento, grafico di una funzione, cicloide.

Lezione 71-72 (20 gennaio 2012) Curve regolari e riparametrizzazioni. Lunghezza $\ell(\gamma)$ di una curva continua γ:

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \, : \, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b, \, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teorema: ogni curva γ di classe C^1 ha lunghezza finita e

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Cenni sulla dimostrazione. Invarianza della lunghezza rispetto alla riparametrizzazione. Calcolo della lunghezza di curve: esempi ed esercizi.

Lezione 73-74 (24 gennaio 2012) Integrali curvilinei. Lavoro di una forza lungo una curva. Esempi.

Lezione 75-76 (25 gennaio 2012) Funzioni di due variabili. Limiti di funzioni di due variabili; continuità; derivate parziali e derivate direzionali.

Lezione 77-78 (27 gennaio 2012) Funzioni differenziabili e gradiente di una funzione: relazione con le derivate direzionali e derivate parziali; esistenza del piano tangente;* differenziabilità implica continuità.* Teorema del differenziale totale (dimostrazione facoltativa).

(*) questi due argomenti non sono stati svolti a lezione ma sono di fondamentale importanza e inclusi nel programma.