LET'S CODE

pass

Sistemas de Dedução

Objetivo

Introduzir métodos de dedução lógica formal.

Explorar a metodologia de demonstrações lógicas através do método da dedução natural de Fitch.

1. Prova linear

1.1 Definição

Uma prova linear de determinada conclusão a partir de um conjunto de premissas é uma sequência de afirmativas que levam à conclusão. Nessa sequência, cada item é (1) uma premissa (tal como p), (2) o resultado de uma regra de inferência nas premissas (tal como Modus Ponens ou Modus Tollens).

1.2 Axiomas

Axiomas são premissas consideradas necessariamente evidentes e verdadeiras sem necessidade de demonstração.

Alguns axiomas da lógica proposicional:

$\to 1 : A \to (B \to A)$

$\to 2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\wedge 1 : A \to (B \to (A \wedge B))$

$\wedge 2 : (A \wedge B) \to A$

$\wedge 3 : (A \wedge B) \to B$

$\vee 1 : A \to (A \vee B)$

$\vee 2 : B \to (A \vee B)$

$\vee 3 : (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

$\neg 1 : (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\neg 2 : \neg\neg A \to A$

1.3 Exemplo

Provar que, dado p, se $p \Rightarrow q$ e $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, então r.

1. p
2. $p \Rightarrow q$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
4. q
5. $q \Rightarrow r$
6. r

Legenda:

1. Premissa
2. Premissa

3. Premissa
4. Modus ponens: 2, 1
5. Modus ponens: 3, 2
6. Modus ponens: 5, 4

1.4 Outro exemplo

Provar que se p ⇒ q e q ⇒ r, p ⇒ r.
1. $p ⇒ q $
2. $q ⇒ r $
3. $p ⇒ (q ⇒ r) $
4. $(p ⇒ q) ⇒ (p ⇒ r) $
5. $p ⇒ r $

Legenda:
1. Premissa
2. Premissa
3. Criação de implicação: 2
4. Distribuição da implicação: 3
5. Modus ponens: 4, 1

2. Prova estruturada

2.1 Definição

Segue a mesma lógica da demonstração linear, mas utiliza-se de hipóteses que tornam a prova mais estruturada e também mais poderosa. As hipóteses geram subprovas, enquanto a demonstração original é chamada de superprova.

2.2 Exemplo

Provar que, dado p, se p ⇒ q e (p ⇒ q) ⇒ (q ⇒ r), então r.
1. $p ⇒ q $
2. $q ⇒ r $
2. | | Assumir $; p $
4. | | $ q $
5. | | $ r $
6. p ⇒ r

Legenda:
1. Premissa
2. Premissa
3. Hipótese
4. Modus ponens: 1, 3
5. Modus ponens: 2, 4
6. Conclusão

2.3 Observações

Importante: Não usar proposições da subprova para aplicar regras de inferência na superprova!

Errado:

1. r (por Modus Ponens: 2, 4)

3. Fitch

3.1 Definição

O método de Fitch é o mais utilizado na literatura para a demonstração formal de proposições lógicas e tem a vantagem de ser extremamente simples.

Ele é, em termos simples, uma prova estruturada com 10 regras de inferência.

3.2 Regras Básicas

	Introdução	Eliminação
Regras para a conjunção ($\wedge$)	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge e_1$ $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge e_2$
Regras para a dupla negação ($\neg\neg$)	$\dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$	$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$
Regras para o condicional ($\rightarrow$)	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow i$	$\dfrac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ \rightarrow e$ ***modus ponens*** método (*modus*) que afirma (*ponens*) o consequente $\dfrac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$ ***modus tollens*** método (*modus*) que nega (*tollens*) o antecedente

	Introdução	Eliminação
Regras para a disjunção ($\lor$)	$\dfrac{\phi}{\phi \lor \psi}\,\lor i_1$ $\dfrac{\psi}{\phi \lor \psi}\,\lor i_2$	$\dfrac{\phi \lor \psi \quad \boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}}{\chi}\,\lor e$
Regras para a contradição ($\bot$)	Não há regra de introdução para $\bot$	$\dfrac{\bot}{\phi}\,\bot e$
Regras para a negação ($\neg$)	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\neg\phi}\,\neg i$	$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\,\neg e$

3.3 Editor online

Fitch Proof Editor (http://proof-editor.herokuapp.com/)

Lógica Predicativa

1. Introdução

Considere o seguinte exemplo:

Todo estudante de computação precisa entender lógica. João é estudante de computação.

Parece bastante "lógico" deduzir como conclusão que João precisa entender lógica. Contudo, apenas com nosso ferramental de lógica proposicional e categórica, não podemos aplicar o que aprendemos para traduzir essas sentenças. Precisamos de novas ferramentas!

1.1 Predicados

Um predicado é uma expressão de uma ou mais variáveis definida em um determinado domínio. É possível construir uma proposição a partir de um predicado com variáveis atribuindo a elas determinados valores ou as quantificando. Dependendo do valor que tais variáveis assumirem, a nossa proposição pode ser verdadeira ou falsa.

Exemplos de predicados:

1) **P(x) denota "x^2 é maior que x".**
2) **E(x, y) denota "x = y"**
3) **X(a, b, c) denota "a + b + c = 0"**
4) **M(x, y) denota "x é casado com y"**

Em 1), se escolhermos x = 1, P(1) se transforma na proposição "1 é maior que 1", que é falsa. Em 2), podemos escolher valores de x e y para tornar o predicado uma proposição, que será verdadeira ou falsa dependendo dos valores.

1.2 Domínio

O domínio de uma variável predicativa é a coleção de todos os valores possíveis que uma variável pode assumir.

Exemplo: Para o predicado P(x) do exemplo anterior, podemos usar o domínio como os números inteiros, os números reais ou qualquer outro conjunto matemático.

Os domínios costumam ser denotados por letras maiúsculas, como N para os números naturais. Para adotar tal domínio para certa variável predicativa, usa-se o símbolo "pertence", denotado por ∈ .

Exemplo: x ∈ N traduz-se para "A variável x pertence ao domínio dos números naturais."

2. Quantificadores

As variáveis de predicados podem ser quantificadas simplesmente atribuindo determinados valores específicos a elas, mas o mais comum é escrever predicados mais generalistas através de quantificadores.

2.1 Quantificador Universal

O quantificador universal determina que as proposições no seu escopo são verdadeiras para todo valor de determinada variável predicativa. É denotado pelo símbolo ∀.

∀ x ∈ D, P(x) é lido como: "Para todo valor de x presente no domínio D, P(x) é verdadeiro."

Exemplo: "Todo homem é mortal" pode ser transformado na forma proposicional ∀ x ∈ D, P(x), onde P(x) é o predicado que denota que x é mortal e o domínio D de x são os seres humanos.

(∀ x ∈ D, P(x)) é verdadeiro exatamente quando P(x) é verdadeiro para todo x ∈ D. Portanto, a proposição (∀ x ∈ D, P(x)) é falsa quando existe pelo menos um x de D para o qual P(x) é falso.

Formalmente, para D = {x1, . . . , xn}, temos a equivalência:
(∀ x ∈ D, P(x)) ≡ (P(x1) Λ P(x2) Λ . . . Λ P(xn)).

Já que (∀ x ∈ D, P(x)) toma valores-verdade, essa proposição pode ser negada, de modo que:

¬ (∀ x ∈ D, P(x)) ≡ ∃x ∈ D, ¬ P(x)

Exemplo: A negação da proposição "Todo homem é mortal" é "Existe um homem que não é mortal.

2.2 Quantificador Existencial

O quantificador existencial estabelece que as proposições no seu escopo são verdadeiras para alguns valores de determinada variável. É denotado pelo símbolo ∃.
∃x ∈ D, P(x) é lido como: "Para certo valor de x no domínio D, P(x) é verdadeiro."

Exemplo: "Algumas pessoas são desonestas" pode ser transformado na forma proposicional ∃ x ∈ D, P(x), onde P(x) é o predicado que denota que x é desonesto e o domínio D de x são os seres humanos.

(∃x ∈ D, P(x)) é verdadeiro exatamente quando P(x) é verdadeiro para pelo menos um x ∈ D. Portanto, a proposição (∃x ∈ D, P(x)) é falsa quando P(x) é falso para todo x de D. Formalmente, para D = {x1, . . . , xn}, temos a equivalência:

(∃x ∈ D, P(x)) ≡ (P(x1) V P(x2) V . . . V P(xn)).

Já que (∃x ∈ D, P(x)) toma valores-verdade, essa proposição pode ser negada, de modo que:

¬ (∃x ∈ D, P(x)) ≡ ∀ x ∈ D, ¬ P(x)

Exemplo: A negação da proposição "Algumas pessoas são desonestas" é: "Todas as pessoas não são desonestas".

2.3 Quantificadores aninhados

Podemos fazer uma proposição utilizando mais de um quantificador e mais de uma variável predicativa.

Por exemplo, se considerarmos os domínios C={coelhos} e T={tartarugas} de modo que $x \in C$ e $y \in T$, podemos criar o predicado V(x,y)="x é mais rápido que y" para criar algumas proposições comparando a velocidade de coelhos e tartarugas.

$\forall x \in C, \forall y \in T, V(x, y)$ é lido como: "Para todo x no universo dos coelhos C e todo y no universo das tartarugas T, V(x,y) é verdadeiro." Em outras palavras, "Todo coelho é mais rápido que toda tartaruga."

$\forall x \in C, \exists y \in T, V(x, y)$ é lido como: "Para todo x no universo dos coelhos C e algum y no universo das tartarugas T, V(x,y) é verdadeiro." Em outras palavras, "Todo coelho é mais rápido que alguma tartaruga."

$\exists x \in C, \forall y \in T, V(x, y)$ é lido como: "Para algum x no universo dos coelhos C e para todo y no universo das tartarugas T, V(x,y) é verdadeiro." Em outras palavras, "Existe um coelho que é mais rápido que todas as tartarugas."

$\exists x \in C, \exists y \in T, V(x, y)$ é lido como: "Para algum x no universo dos coelhos C e para algum y no universo das tartarugas T, V(x,y) é verdadeiro." Em outras palavras, "Existe um coelho que é mais rápido que alguma tartaruga."

Falácias Lógicas Formais

Objetivo

Explorar diferentes tipos de falácias lógicas formais e como contorná-las.

Introdução

Uma falácia lógica é definida como um argumento incoerente, sem fundamento, inválido ou falho na tentativa de provar logicamente o que alega.

Argumentos que se destinam à persuasão podem parecer convincentes para grande parte do público apesar de conterem falácias, mas não deixam de ser falsos por causa disso.

Falácias formais são erros em lógica dedutíveis a partir dos nossos conhecimentos de lógica formal vistos no começo do curso. São, portanto, falhas na forma ou estruturação de argumentos, ao contrário de falácias informais, que podem ter formato lógico coerente, mas premissas falsas ou adulteradas. Todas as falácias formais são do tipo Non-sequitur (não se segue que).

1. Falácias proposicionais

Falácias proposicionais são erros lógicos que concernem a proposições lógicas formuladas com a estrutura incorreta.

1.1 Afirmação da disjunção

Consiste em concluir que uma das proposições de uma disjunção é falsa se a outra é verdadeira:

1. $P \lor Q$
2. P
3. $\vdash \neg Q$

Exemplo:
Para estar na capa da revista Caras, uma pessoa precisa ser uma celebridade ou ser extremamente bonita.
A pessoa na capa deste mês foi uma celebridade. Portanto, essa celebridade não é extremamente bonita.

1.2 Negação do antecedente

A negação do antecedente, também chamada de falácia da inversa, consiste em inferir a inversa a partir de uma proposição de causa-consequência. Em outras palavras:

Se A, então B.
A é falso.
Portanto, B também é falso.

1. $A \rightarrow B$
2. $\vdash \neg A \rightarrow \neg B$

Exemplo:
"Se cada homem tivesse um conjunto bem definido de regras de conduta com as quais ele regulasse sua vida, ele não seria melhor do que uma máquina. Mas tais regras não existem, portanto homens não podem ser máquinas." - Turing, Alan (1950), "Computing Machinery and Intelligence

1.3 Afirmação do consequente

A afirmação do consequente, também chamada de falácia da recíproca, consiste em concluir a recíproca a partir de uma proposição de causa-consequência. Em outras palavras:

Se A, então B.
B é verdadeiro.
Portanto, A é verdadeiro.

1. $A \rightarrow B$
2. $\vdash B \rightarrow A$

Exemplo:
"- Então você deve dizer o que pensa – disse a Lebre de Março.
– Eu já faço isso – Alice se apressou em responder. – Ou pelo menos, pelo menos eu acho o que eu digo... É o mesmo, não é?
– O mesmo? De maneira nenhuma! – disse o Chapeleiro. – Nesse caso, seria o mesmo dizer: vejo o que como, e como o que vejo!"

2. Falácias categóricas

2.1 Ilícita negativa

A ilícita negativa é uma falácia formal cometida quando um silogismo categórico possui conclusão positiva e uma ou mais premissas negativas.

Em termos matemáticos:

A ∩ B = \empty e B ∩ C = \empty, então A ⊂ C.

Exemplo: Nós não assistimos esse tipo de filme. Pessoas que assistem esse tipo de filme não apreciam bons filmes. Portanto, nós apreciamos bons filmes.

2.2 Composição/Divisão

Você implica que uma parte de algo deve ser aplicada a todas, ou outras, partes daquilo.

Muitas vezes, quando algo é verdadeiro em parte, isso também se aplica ao todo, mas é crucial saber se existe evidência de que este é mesmo o caso.

Já que observamos consistência nas coisas, o nosso pensamento pode se tornar enviesado de modo que presumimos consistência e padrões onde eles não existem.

Exemplo: Daniel era uma criança precoce com uma predileção por pensamento lógico. Ele sabia que átomos são invisíveis, então logo concluiu que ele, por ser feito de átomos, também era invisível. Nunca foi vitorioso em uma partida de esconde-esconde.

2.2.1 Composição

É o fato de concluir que uma propriedade das partes deve ser aplicada ao todo. Em outras palavras, concluir que, se tudo que é da categoria A é também da categoria B, tudo que é da categoria B é também da categoria A:

1. $x \in A \to x \in B$
2. $\vdash x \in B \to x \in A$

Exemplo: Todas as peças deste caminhão são leves; logo, o caminhão é leve.

2.2.2 Divisão

Supor que uma propriedade do todo pode ser aplicada a cada parte.

Exemplo: Você deve ser rico, pois estuda num colégio de ricos.

2.3 Acidente ou dicto simpliciter

Generalizar do seguinte modo:

- X é verdadeiro sob a condição Y.
- X acontece na condição Z.
- Logo, X é verdadeiro na condição Z.

Exemplo 1:

É permitido aos soldados matar em tempos de guerra. O soldado Julio matou em tempos de paz.
Logo, é permitido ao soldado Julio matar também em tempos de paz.

Exemplo 2:

Matheus não fuma para não desenvolver câncer de pulmão.
Ricardo não fuma e desenvolveu câncer de pulmão.
Logo, não fumar também provoca câncer de pulmão.