MUSIC vs ESPRIT

Andrea Feletto

Indice

Richiami di Algebra Lineare e Statistica

Data una trasformazione lineare A, il vettore non nullo x_i è [1] **autovettore** di A se e solo se esiste uno scalare λ_i, detto **autovalore** di A corrispondente a x_i, tale che sia rispettata l'equazione:

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

La trasformazione A, quando applicata ad un suo autovettore, ha quindi lo stesso comportamento dell'autovalore corrispondente.

La **speranza matematica** $\mathbf{E}[X]$ di una *variabile aleatoria* discreta X associata ad una *funzione di probabilità* $p_X(x)$ e ad uno *spazio campionario* Ω, è definita [2] come la somma dei valori che X può assumere, ponderati per la probabilità che si manifestino:

$$E\{X\} = \sum_{x \in \Omega} x \, p_X(x)$$

Nel caso di una serie a valori reali $x[n]$ equiprobabili la speranza coincide con la media dei valori:

$$E\{x[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]$$

La **covarianza campionaria** tra le serie $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è definita come il valore atteso del prodotto puntuale tra gli scarti delle due serie:

$$cov\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = E\{(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}) \circ (\mathbf{y} - E\{\mathbf{y}\})\}$$

dove l'operatore $\circ$ indica il *prodotto puntuale*. Si noti che la somma di uno scalare ad un vettore è da considerarsi come applicata ad ogni elemento del vettore. Quando le due serie coincidono, questo operatore prende il nome di **varianza**, la cui radice quadrata è la **deviazione standard** σ_x.

Poiché la covarianza è influenzata da traslazioni e dilatazioni delle serie, essa viene normalizzata rispetto alle deviazioni standard delle due serie, ottenendo la **correlazione campionaria**:

$$corr\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \frac{cov\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Data una successione di N misurazioni n-dimensionali $\mathbf{x}_i = \left[x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}\right]$, sia

$\mathbf{x}^{(k)}$ il vettore delle k-esime componenti delle misurazioni $\mathbf{x}_i$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left[x_0^{(k)}, \dots, x_{N-1}^{(k)}\right]$$

Si definisce [3] quindi la **matrice di correlazione campionaria**, i cui elementi rappresentano la *correlazione* tra le rispettive misurazioni:

$$\mathbf{R}_{kl} = corr\left\{\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(l)}\right\}$$

Stima di Armoniche e Interarmoniche

Modello Sinusoidale

Ogni segnale a tempo discreto $v[n]$ ottenuto da una rete elettrica può essere espresso come la sovrapposizione di K componenti sinusoidali, più una componente di rumore.

$$v[n] = s[n] + w[n] = \sum_{k=1}^{K} s_k[n] + w[n]$$

Le componenti sinusoidali sono caratterizzate dall'ampiezza $a_k \geq 0$, dalla fase $\phi_k \in [-\pi, \pi]$ e dalla pulsazione ω_k.

$$s_k[n] = a_k\, cos\left(n\omega_k + \phi_k\right)$$

Le componenti $s_k[n]$ sono chiamate **armoniche** quando la loro pulsazione è un multiplo della pulsazione fondamentale ω_0, altrimenti sono dette **interarmoniche**.

La $\tilde{k}$-esima armonica ha pulsazione $\omega_k = 2\tilde{k}\pi f_0$. Si noti che le frequenze sono normalizzate rispetto alla frequenza di campionamento secondo la relazione $f_k = \tilde{f}_k / f_s$, dove $\tilde{f}_k$ è la frequenza in Hz e f_s è la frequenza di campionamento. Pertanto, se viene rispettato il Teorema del Campionamento di Nyquist-Shannon:

$$f_c > 2\, max\{f_k\}$$

ne deriva che $\omega_k \in [-\pi, \pi]$.

La 0-esima armonica, avendo pulsazione nulla, è detta componente di corrente continua e il suo valore di tensione è $V_{DC} = a_0\, cos(\phi_0)$. L'armonica fondamentale è detta invece componente di potenza ed ha pulsazione $\omega_0 = \tau \tilde{f}_0 / f_c$ e ampiezza

$a_0 = \sqrt{2}\, V_{rms}$, dove $\tilde{f}_0$ è la frequenza della rete e V_{rms} è la tensione efficace di fase.

Modello Armonico

Il segnale $v[n]$ può essere espresso anche sotto forma di esponenziali complessi. La k-esima componente ha quindi la seguente forma:

$$v_k[n] = A_k e^{j\phi_k} e^{jn\omega_k}$$

Due campioni successivi della componente $v_k[n]$ sono legati da uno sfasamento pari alla sua pulsazione ω_k.

$$v_k[n+1] = v_k[n] e^{j\omega_k} = A_k e^{j\phi_k} e^{j(n+1)\omega_k}$$

Riduzione Dimensionale del Segnale

Dato un segnale $v[n]$ di lunghezza $L = N + M - 1$, si definisce il vettore dei campionamenti $\mathbf{v}[n]$ come la finestra di ampiezza M da $v[n]$ a $v[n + M - 1]$. Il vettore $\mathbf{v}[n]$ è quindi un campionamento M-dimensionale del segnale.

Si costruisce [4] la matrice $\mathbf{V}$, di dimensioni $N \times M$, ponendo sulle righe i vettori di campionamento $\mathbf{v}[n]$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^t[0] \\ \vdots \\ \mathbf{v}^t[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v[0] & ... & v[M-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v[N-1] & ... & v[N+M-2] \end{bmatrix}$$

ottenendo quindi una sequenza di N misurazioni M-dimensionali.

Assumendo che il rumore $w[n]$, e di conseguenza il segnale $v[n]$, abbia media nulla, si osserva che migliore è la scelta di M, tale che ogni vettore di campionamento $\mathbf{v}[n]$ includa periodi interi di ogni armonica, più la media di $\mathbf{v}[n]$ tende ad annullarsi.

Ciò permette di stimare la matrice di correlazione campionaria $\mathbf{R}_{kl}$

$$\hat{\mathbf{R}}_{kl} = E\left\{\mathbf{v}^{(k)} \circ \mathbf{v}^{(l)}\right\} = \frac{1}{N}\, \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(l)}$$

, dove $\mathbf{v}^{(k)}$ è la k-esima colonna di $\mathbf{V}$. Riscrivendo l'equazione in forma matriciale si ottiene:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N}\,\mathbf{V}^t\,\mathbf{V}$$

Algoritmo MUSIC

Per il principio della sovrapposizione degli effetti la matrice di correlazione del segnale $\mathbf{R}$ può essere espressa come somma della matrici di correlazione $\mathbf{R}_s$ e $\mathbf{R}_n$ dovute rispettivamente alle componenti armoniche e al rumore.

Assumendo che il rumore sia di natura gaussiana con varianza σ_w^2, la sua matrice di correlazione vale:

$$\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 I$$

dove I è la matrice identità di dimensione $M \times M$ e σ_w^2 coincide con la potenza del rumore.

Algoritmo ESPRIT

Isolando le componenti di segnale e di rumore, utilizzando una notazione analoga a quella del vettore dei campionamenti, si ha:

$$\mathbf{v}[n] = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{s}_k[n] + \mathbf{w}[n] \tag{1}$$

Studiando il contributo $\mathbf{s}_k[n]$ della k-esima componente armonica e applicando le proprietà del modello armonico, è possibile esprimere ogni elemento $\mathbf{s}_{k,i}[n]$ in funzione di $s_k[n]$:

$$\mathbf{s}_{k,i}[n] = s_k[n+i] = s_k[n]e^{ji\omega_k}$$

E riscrivendo $\mathbf{s}_k[n]$ in forma vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{s}_k[n] = s_k[n] \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_k} \\ \vdots \\ e^{j(M-1)\omega_k} \end{bmatrix} = s_k[n]\,\mathbf{e}_k$$

dove $\mathbf{e}_k$ è detto *vettore steering*, il quale è formato dagli sfasamenti successivi associati alla pulsazione ω_k.

È quindi possibile riscrivere l'equazione {eq. 1} come trasformazione lineare del vettore delle ampiezze complesse $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{E}\Phi^n \mathbf{A} + \mathbf{w}[n]$$

dove $\mathbf{E}$ è una matrice $M \times K$ le cui k-esima colonna è il vettore steering associato alla pulsazione ω_k

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K]$$

, Φ è una matrice diagonale i cui elementi sono gli esponenziali complessi associati alle K diverse pulsazioni

$$= diag\left\{e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_K}\right\}$$

mentre A è il vettore delle ampiezze complesse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 e^{j\phi_1} \\ \vdots \\ A_K e^{j\phi_K} \end{bmatrix}$$

Riferimenti

[1] P.R. Halmos, Finite-dimensional vector spaces, 2nd ed., Springer, 1958. https://www.springer.com/gp/book/9780387900933.

[2] J.N.T. Dimitri P. Bertsekas, Introduction to probability, 1st ed., Athena Scientific, 2008. http://www.mit.edu/~dimitrib/probbook.html.

[3] S.J.B. K. F. Riley M. P. Hobson, Mathematical methods for physics and engineering, 3rd ed., Cambridge University Press, 2012. https://www.cambridge.org/core/books/mathematical-methods-for-physics-and-engineering/FC466374D5B94E86D969100070CA6483.

[4] I.Y.H.G. Math H. J. Bollen, Signal processing of power quality disturbances, Wiley-IEEE Press, 2006. https://ieeexplore.ieee.org/servlet/opac?bknumber=5224658.