

# MUSIC vs ESPRIT

Andrea Feletto

## Indice

<b>Qualità dei Sistemi Elettrici di Potenza</b>	<b>2</b>
<b>Algoritmi per la stima dei disturbi armonici</b>	<b>4</b>
<b>Stima di Armoniche e Interarmoniche</b>	<b>7</b>
Modello Sinusoidale . . . . .	7
Modello Armonico . . . . .	8
Riduzione Dimensionale del Segnale . . . . .	8
Algoritmo MUSIC . . . . .	9
Algoritmo ESPRIT . . . . .	9
<b>Riferimenti</b>	<b>11</b>

## Qualità dei Sistemi Elettrici di Potenza

Negli anni il numero di studi operati nell'area riguardante la qualità nei sistemi elettrici di potenza è aumentato notevolmente [1]. Questo è dovuto principalmente all'impiego di nuove fonti di energia, diverse esigenze del consumatore e alla liberalizzazione del settore energetico.

L'avvento di nuove fonti di energia rinnovabile, come impianti solari ed eolici, porta con se alcune criticità dovute ai disturbi che queste generano quando allacciate alla rete elettrica. L'interconnessione alla rete elettrica di fonti di energia caratterizzate da una capacità produttiva variabile nel tempo è infatti causa di disturbi come il *voltage swell* e il *voltage dip* [2].

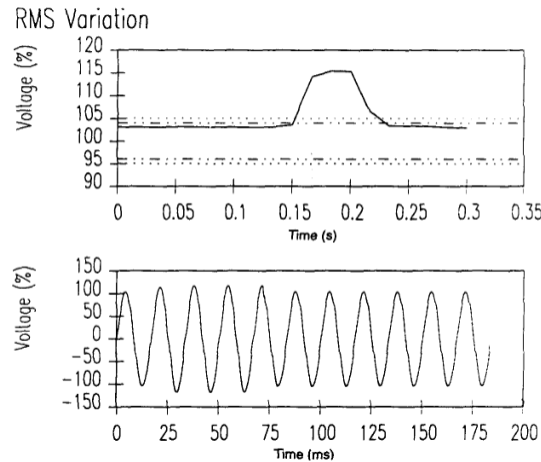


Figura 1: Esempio di *voltage swell*

Lo standard *IEEE 1159* definisce questi due disturbi [3]. Il *voltage swell* è un aumento del valore efficace della tensione. Questo evento può durare da un tempo pari alla metà del periodo dell'armonica principale, fino ad 1 minuto. In fig. 1 si può osservare l'effetto di questo disturbo in una linea monofase.

Il *voltage dip* è invece un calo di tensione compreso tra il 10% e il 90% del valore efficace. La durata, analogamente al *voltage swell* è compresa tra metà periodo e 1 minuto. L'effetto in una linea monofase, dovuto ad un cortocircuito, si può osservare in fig. 2.

L'utilizzo di inverters al fine di convertire la corrente continua generata dai

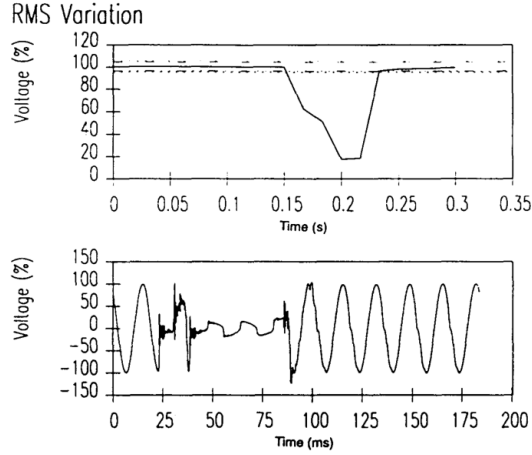


Figura 2: Esempio di *voltage dip*

pannelli solari e dalle turbine eoliche in corrente alternata, causa l'inserimento di armoniche e inter-armoniche nella rete, dovute alla natura non lineare di questi dispositivi [4].

Un'altra fonte di disturbi armonici e inter-armonici sono i dispositivi non lineari, necessari al funzionamento dei dispositivi alimentati in corrente continua in uso al giorno d'oggi. In ambito civile infatti, a differenza dei contesti industriali, buona parte del fabbisogno energetico domestico è speso in illuminazione, riscaldamento, aria condizionata e dispositivi elettronici, come personal computers e televisori [5]. Nell'ultimo secolo si è quindi osservato un forte peggioramento della qualità della rete, provocato da un uso sempre maggiore di inverter, raddrizzatori di tensione e motori elettrici.

Una distorsione armonica è la presenza nel segnale di componenti armoniche con frequenze multiple della frequenza di rete  $f_0$ , mentre una distorsione inter-armonica è caratterizzata da frequenze che deviano da quelle armoniche. Le problematiche dovute a questi tipi di disturbo sono molteplici.

Una ricerca svolta dall'*Institute of Electrical and Electronics Engineers* ha studiato gli effetti delle armoniche ad alta frequenza sul funzionamento dei trasformatori monofase. È stata individuata una proporzionalità tra le dissipazioni dovute a correnti parassite e il quadrato della frequenza dell'armonica considerata [6]. Questo significa che un buon algoritmo di stima delle armoniche deve essere in grado di individuare anche alte frequenze. Lo stesso Istituto ha svol-

to un ulteriore studio, il quale dimostra che le perdite di carico nei cavi e nei trasformatori di un impianto elettrico, dovute ad un'elevata presenza di armoniche, possono essere sufficientemente alte da giustificare modifiche all'impianto, come l'aumento della sezione dei cavi o l'installazione di condensatori per il rifasamento [5].

Al fine di caratterizzare l'entità dei disturbi armonici e inter-armonici all'interno di un segnale elettrico di potenza, risulta utile l'utilizzo della **Distorsione Armonica Totale**.

$$THD^2 = \frac{\sum_{k=2}^K V_k^2}{V_1^2}$$

Dove  $V_1$  è la tensione di linea e  $V_k$  è la tensione della  $k$ -esima armonica. Il THD è quindi la percentuale di energia presente nel segnale non dovuta alla componente fondamentale [1].

La liberalizzazione del mercato dell'energia ha delle notevoli conseguenze nel campo della qualità dei segnali di potenza [7]. La necessità di aumentare i margini di guadagno porta le compagnie operanti nel settore dell'energia a ridurre la manutenzione e lo sviluppo dei sistemi di distribuzione. Ciò comporta un inevitabile peggioramento della qualità. Inoltre, la ridotta cooperazione tra società in concorrenza tra loro impatta negativamente lo sviluppo di tecnologie e standards.

## Algoritmi per la stima dei disturbi armonici

Esistono numerosi algoritmi che permettono di stimare frequenza, ampiezza e fase delle componenti sinusoidali di un segnale. Si noti che non esiste un algoritmo adatto ad ogni contesto. Spesso infatti, la precisione sulle misurazioni è correlata alla complessità computazionale.

Il primo metodo basato sullo studio della matrice di covarianza delle osservazioni è la *Pisarenko Harmonic Decomposition* (PHD) [8], risalente al 1973 [9]. La PHD, basandosi sull'autovettore minore della matrice di covarianza, e all'autovettore associato [10], permette di stimare la frequenza di una sinusoide addizionata a rumore bianco gaussiano:

$$\hat{\omega} = \cos^{-1} \left( \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + 8r_1^2}}{4r_1} \right)$$

dove  $r_k$  è la covarianza campionaria:

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

Questo algoritmo permette la stima solamente dell'armonica principale e non è quindi utile nello studio dei disturbi armonici.

L'algoritmo più usato è la *Fast Fourier Transform* (FFT) che permette di calcolare la *Discrete Fourier Transform* (DFT) (eq. 1) di un segnale a tempo discreto di lunghezza finita  $N$ .

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1)$$

È un algoritmo di tipo *Divide and Conquer* ed ha quindi una complessità asintotica  $\mathcal{O}(N \log N)$  [11]. È un algoritmo veloce e di facile implementazione, ma ha molte limitazioni.

La risoluzione dello spettro generato è inversamente proporzionale alla lunghezza del segnale campionato

$$\Delta f = \frac{1}{t_w}$$

dove  $t_w$  è la durata temporale del campionamento [12]. Se il segnale contiene armoniche la cui frequenza cambia nel tempo,  $t_w$  deve essere sufficientemente piccolo da permettere una risoluzione temporale che consenta di osservare la variazione delle frequenze. Questo però implica una bassa risoluzione spettrale, la quale implica un notevole errore sulla stima della frequenza.

La FFT soffre inoltre dell'effetto di *spectral leakage* [13]. Se la lunghezza del segnale non è tale da includere esclusivamente periodi interi di ogni componente sinusoidale, lo spettro presenta errori di frequenza, ampiezza e fase. Poiché non è possibile conoscere a priori la lunghezza necessaria per non ottenere questo effetto, ogni applicazione reale della FFT presenterà errori di misura dovuti al *leakage*.

L'*Interpolated Fast Fourier Transform* (IFFT) è un algoritmo sviluppato al fine di ottenere misurazioni precise di frequenza, ampiezza e fase da segnali affetti da *spectral leakage* [14]. L'algoritmo è basato sull'applicazione al segnale di una funzione finestra opportunamente scelta [15]. Due funzioni finestra spesso

utilizzate sono la *Hanning window* (eq. 2) e la *Rife-Vincent window*.

$$w[n] = \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (2)$$

Uno studio pubblicato dalla IEEE [14] ha confrontato le prestazioni di queste due funzioni finestra. La *Hanning window* è risultata la scelta più adeguata per segnali con un basso rapporto segnale/rumore (SNR) e dei quali non si hanno informazioni sulle frequenze contenute.

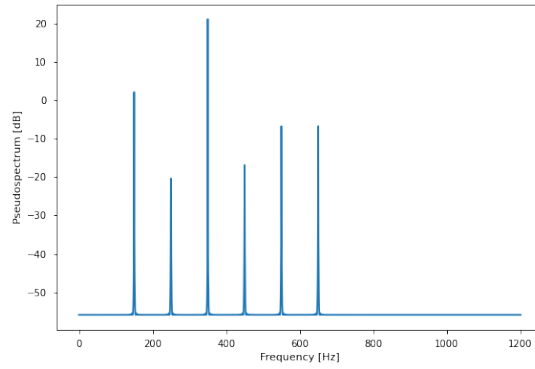


Figura 3: Pseudospettro generato da MUSIC

*Multiple Signal Classification* (MUSIC) è un algoritmo basato sull'analisi della matrice di autocorrelazione, in particolare sulla sua decomposizione in autovettori [16]. MUSIC prevede di ricavare uno pseudo-spettro (fig. 3) stimando il sottospazio del rumore, e di ottenere le informazioni sulle frequenze dai massimi locali. Al fine di stimare la matrice di correlazione  $R$ , una matrice  $\mathbf{V}$  viene costruita mediante scorrimento di una finestra larga  $M$  sul segnale campionato di lunghezza  $N$ .

$$R = \frac{1}{N} \mathbf{V}^t \mathbf{V}$$

Il metodo ESPRIT, a differenza di MUSIC, sfrutta il sottospazio del rumore [1]. L'algoritmo permette di individuare [17] la matrice diagonale di rotazione  $\Phi$ , i cui elementi sono gli esponenziali complessi le cui fasi sono le pulsazioni delle  $K$  componenti sinusoidali del segnale.

$$\Phi = \text{diag}\{e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_K}\}$$

Una matrice  $\Psi$ , i cui autovettori coincidono con gli elementi sulla diagonale

di  $\Phi$ , viene stimata grazie alla decomposizione ai valori singolari (SVD) della matrice  $\mathbf{V}$  usata in MUSIC. ESPRIT permette anche la stima del decadimento (se presente) delle sinusoidi modellando opportunamente i gli esponenziali complessi:

$$\Phi = \text{diag} \{e^{-\beta_1 + j\omega_1}, \dots, e^{-\beta_K + j\omega_K}\}$$

dove  $\beta_k$  è il decadimento della  $k$ -esima armonica.

Una possibile rappresentazione matematica del segnale è quella in spazio di stato. Nel caso di un segnale stazionario, questo può essere rappresentato da due equazioni [1]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n] = A \mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n] \\ \mathbf{z}[n] = C \mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \end{cases}$$

dove  $\mathbf{x}$  è il vettore di stato,  $A$  la matrice di transizione,  $\mathbf{w}$  il vettore del rumore,  $\mathbf{z}$  il vettore delle misurazioni,  $C$  la matrice di misurazione e  $\mathbf{v}$  il vettore del rumore dovuto alla misurazione.

Sfruttando questa rappresentazione è possibile stimare il contenuto armonico (e altri tipi di disturbi) applicando il filtro di Kalman. L'algoritmo si basa sulla minimizzazione dell'errore e nella stima del vettore di stato  $\mathbf{x}$  [18].

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]$$

## Stima di Armoniche e Interarmoniche

### Modello Sinusoidale

Ogni segnale a tempo discreto  $v[n]$  ottenuto da una rete elettrica può essere espresso come la sovrapposizione di  $K$  componenti sinusoidali, più una componente di rumore.

$$v[n] = s[n] + w[n] = \sum_{k=1}^K s_k[n] + w[n]$$

Le componenti sinusoidali sono caratterizzate dall'ampiezza  $a_k \geq 0$ , dalla fase  $\phi_k \in [-\pi, \pi]$  e dalla pulsazione  $\omega_k$ .

$$s_k[n] = a_k \cos(n\omega_k + \phi_k)$$

Le componenti  $s_k[n]$  sono chiamate **armoniche** quando la loro pulsazione è un multiplo della pulsazione fondamentale  $\omega_0$ , altrimenti sono dette **interarmiche**.

La  $\tilde{k}$ -esima armonica ha pulsazione  $\omega_k = 2\tilde{k}\pi f_0$ . Si noti che le frequenze sono normalizzate rispetto alla frequenza di campionamento secondo la relazione  $f_k = \tilde{f}_k/f_s$ , dove  $\tilde{f}_k$  è la frequenza in Hz e  $f_s$  è la frequenza di campionamento. Pertanto, se viene rispettato il Teorema del Campionamento di Nyquist-Shannon:

$$f_c > 2 \max\{f_k\}$$

ne deriva che  $\omega_k \in [-\pi, \pi]$ .

La 0-esima armonica, avendo pulsazione nulla, è detta componente di corrente continua e il suo valore di tensione è  $V_{DC} = a_0 \cos(\phi_0)$ . L'armonica fondamentale è detta invece componente di potenza ed ha pulsazione  $\omega_0 = \tau \tilde{f}_0/f_c$  e ampiezza  $a_0 = \sqrt{2} V_{rms}$ , dove  $\tilde{f}_0$  è la frequenza della rete e  $V_{rms}$  è la tensione efficace di fase.

## Modello Armonico

Il segnale  $v[n]$  può essere espresso anche sotto forma di esponenziali complessi. La  $k$ -esima componente ha quindi la seguente forma:

$$v_k[n] = A_k e^{j\phi_k} e^{jn\omega_k}$$

Due campioni successivi della componente  $v_k[n]$  sono legati da uno sfasamento pari alla sua pulsazione  $\omega_k$ .

$$v_k[n+1] = v_k[n] e^{j\omega_k} = A_k e^{j\phi_k} e^{j(n+1)\omega_k}$$

## Riduzione Dimensionale del Segnale

Dato un segnale  $v[n]$  di lunghezza  $L = N + M - 1$ , si definisce il vettore dei campionamenti  $\mathbf{v}[n]$  come la finestra di ampiezza  $M$  da  $v[n]$  a  $v[n+M-1]$ . Il vettore  $\mathbf{v}[n]$  è quindi un campionamento  $M$ -dimensionale del segnale.

Si costruisce [1] la matrice  $\mathbf{V}$ , di dimensioni  $N \times M$ , ponendo sulle righe i vettori



di campionamento  $\mathbf{v}[n]$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^t[0] \\ \vdots \\ \mathbf{v}^t[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v[0] & \dots & v[M-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v[N-1] & \dots & v[N+M-2] \end{bmatrix}$$

ottenendo quindi una sequenza di  $N$  misurazioni  $M$ -dimensionali.

Assumendo che il rumore  $w[n]$ , e di conseguenza il segnale  $v[n]$ , abbia media nulla, si osserva che migliore è la scelta di  $M$ , tale che ogni vettore di campionamento  $\mathbf{v}[n]$  includa periodi interi di ogni armonica, più la media di  $\mathbf{v}[n]$  tende ad annullarsi.

Ciò permette di stimare la matrice di correlazione campionaria  $\mathbf{R}_{kl}$

$$\hat{\mathbf{R}}_{kl} = E\{\mathbf{v}^{(k)} \circ \mathbf{v}^{(l)}\} = \frac{1}{N} \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(l)}$$

, dove  $\mathbf{v}^{(k)}$  è la  $k$ -esima colonna di  $\mathbf{V}$ . Riscrivendo l'equazione in forma matriciale si ottiene:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{V}^t \mathbf{V}$$

### Algoritmo MUSIC

Per il principio della sovrapposizione degli effetti la matrice di correlazione del segnale  $\mathbf{R}$  può essere espressa come somma della matrici di correlazione  $\mathbf{R}_s$  e  $\mathbf{R}_n$  dovute rispettivamente alle componenti armoniche e al rumore.

Assumendo che il rumore sia di natura gaussiana con varianza  $\sigma_w^2$ , la sua matrice di correlazione vale:

$$\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 I$$

dove  $I$  è la matrice identità di dimensione  $M \times M$  e  $\sigma_w^2$  coincide con la potenza del rumore.

### Algoritmo ESPRIT

Isolando le componenti di segnale e di rumore, utilizzando una notazione analoga a quella del vettore dei campionamenti, si ha:

$$\mathbf{v}[n] = \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k[n] + \mathbf{w}[n] \quad (3)$$

Studiando il contributo  $\mathbf{s}_k[n]$  della  $k$ -esima componente armonica e applicando le proprietà del modello armonico, è possibile esprimere ogni elemento  $\mathbf{s}_{k,i}[n]$  in funzione di  $s_k[n]$ :

$$\mathbf{s}_{k,i}[n] = s_k[n + i] = s_k[n]e^{ji\omega_k}$$

E riscrivendo  $\mathbf{s}_k[n]$  in forma vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{s}_k[n] = s_k[n] \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_k} \\ \vdots \\ e^{j(M-1)\omega_k} \end{bmatrix} = s_k[n] \mathbf{e}_k$$

dove  $\mathbf{e}_k$  è detto *vettore steering*, il quale è formato dagli sfasamenti successivi associati alla pulsazione  $\omega_k$ .

È quindi possibile riscrivere l'equazione {eq. 3} come trasformazione lineare del vettore delle ampiezze complesse  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{E}\Phi^n\mathbf{A} + \mathbf{w}[n]$$

dove  $\mathbf{E}$  è una matrice  $M \times K$  le cui  $k$ -esima colonna è il vettore steering associato alla pulsazione  $\omega_k$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K]$$

,  $\Phi$  è una matrice diagonale i cui elementi sono gli esponenziali complessi associati alle  $K$  diverse pulsazioni

$$\Phi = \text{diag} \{e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_K}\}$$

mentre  $\mathbf{A}$  è il vettore delle ampiezze complesse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 e^{j\phi_1} \\ \vdots \\ A_K e^{j\phi_K} \end{bmatrix}$$

## Riferimenti

- [1] I.Y.H.G. M. H. J. Bollen, Signal processing of power quality disturbances, Wiley-IEEE Press, 2006. <https://ieeexplore.ieee.org/servlet/opac?bknumber=5224658>.
- [2] S.C.S. R. Dash, Effective power quality improvement using dynamic active compensation system with renewable grid interfaced sources, Ain Shams Engineering Journal. 9 (2018) 2897–2905. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.asej.2017.09.007>.
- [3] I.S. Board, IEEE 1159-1995 - IEEE recommended practice for monitoring electric power quality, (1995).
- [4] D.M. J. Yaghoobi A. Alduraibi, Impact of high-frequency harmonics (0–9 kHz) generated by grid-connected inverters on distribution transformers, Electrical Power and Energy Systems. 122 (2020) 106–177. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106177>.
- [5] A. de O. F. L. Tofoli S. M. R. Sanhueza, On the study of losses in cables and transformers in nonsinusoidal conditions, IEEE Transaction on Power Delivery. 21 (n.d.) 971–978. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TPWRD.2006.870986>.
- [6] E.F.F. D. Yildirim, Measured transformer derating and comparison with harmonic loss factor  $F_{HL}$  approach, IEEE Transactions on Power Delivery. 15 (2000) 186–191. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/61.847249>.
- [7] N.R.W. J. Arrillaga M. H. J. Bollen, Power quality following deregulation, Proceedings of the IEEE. 88 (2000) 246–261. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/6.387140>.
- [8] H.C.S. K. W. Chan, An exact analysis of pisarenko’s single-tone frequency estimation algorithm, Signal Processing. 83 (2003) 685–690. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-1684\(02\)00493-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-1684(02)00493-0).
- [9] V.F. Pisarenko, The retrieval of harmonics from a covariance function, Geophysical Journal International. 33 (1973) 347–366. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1973.tb03424.x>.

- [10] H. Sakai, Statistical analysis of pisarenko's method for sinusoidal frequency estimation, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 32 (1984) 95–101. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TASSP.1984.1164273>.
- [11] J.W.T. J. W. Cooley, An algorithm for the machine calculation of complex fourier series, *Mathematics of Computation*. 19 (1965) 297–301.
- [12] A.C.S. P. M. Ramos, Comparison of frequency estimation algorithms for power quality assessment, *Measurement*. 42 (2009) 1312–1317. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.measurement.2008.04.013>.
- [13] F.J.H. S. Rapuano, An introduction to fft and time domain windows, *IEEE Instrumentation and Measurement Magazine*. 10 (2007) 32–44. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/MIM.2007.4428580>.
- [14] H.V. hamme J. Schoukens P. Pintelon, The interpolated fast fourier transform: A comparative study, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 41 (1992) 226–232. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/19.137352>.
- [15] G.A.V. D. C. Rife, Use of the discrete fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones, *The Bell System Technical Journal*. 49 (1970) 197–228. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1970.tb01766.x>.
- [16] R.O. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 34 (1986) 276–280. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830>.
- [17] T.K. R. Roy, ESPRIT - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 37 (1989) 984–995. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/29.32276>.
- [18] R.C.M. I. M. Moreno A. Medina, Enhanced harmonic state estimation in unbalanced three-phase electrical grids based on the kalman filter and physical scale-down implementation, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*. 123 (2020) 106243. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106243>.