

Corso di Laurea in
Ingegneria Industriale

Prova Finale

**Stima dei disturbi armonici nei segnali elettrici di potenza
mediante gli algoritmi MUSIC e ESPRIT**

Relatore

Prof. David Macii

Studente

Andrea Feletto – 192361

Anno Accademico: 2019/2020

Indice

Qualità dei Sistemi Elettrici di Potenza	2
Algoritmi per la stima dei disturbi armonici	3
Stima di Armoniche e Interarmoniche	7
Modello Sinusoidale	7
Modello Armonico	7
Riduzione Dimensionale del Segnale	8
Algoritmo MUSIC	8
Algoritmo ESPRIT	9
Implementazione in Python	10
Riferimenti	14

Qualità dei Sistemi Elettrici di Potenza

Negli anni il numero di studi operati nell'area riguardante la qualità nei sistemi elettrici di potenza è aumentato notevolmente (M. H. J. Bollen 2006). Questo è dovuto principalmente all'impiego di nuove fonti di energia, diverse esigenze del consumatore e alla liberalizzazione del settore energetico.

L'avvento di nuove fonti di energia rinnovabile, come impianti solari ed eolici, porta con se alcune criticità dovute ai disturbi che queste generano quando allacciate alla rete elettrica. L'interconnessione alla rete elettrica di fonti di energia caratterizzate da una capacità produttiva variabile nel tempo è infatti causa di disturbi come il *voltage swell* e il *voltage dip* (R. Dash 2018). Lo standard *IEEE 1159* definisce questi due disturbi (Board 1995) rispettivamente come un aumento e un calo di tensione per un tempo inferiore al minuto.

L'utilizzo di inverter, al fine di convertire la corrente continua generata dai pannelli solari e dalle turbine eoliche in corrente alternata, causa l'inserimento di armoniche e inter-armoniche nella rete, dovute alla natura non lineare di questi dispositivi (J. Yaghoobi 2020).

Un'altra fonte di disturbi armonici e inter-armonici sono i dispositivi non lineari, necessari al funzionamento dei dispositivi alimentati in corrente continua in uso al giorno d'oggi. In ambito civile infatti, a differenza dei contesti industriali, buona parte del fabbisogno energetico domestico è speso in illuminazione, riscaldamento, aria condizionata e dispositivi elettronici, come personal computers e televisori (F. L. Tofoli, s.d.). Nell'ultimo secolo si è quindi osservato un forte peggioramento della qualità della rete, provocato da un uso sempre maggiore di inverter, raddrizzatori di tensione e motori elettrici.

Una distorsione armonica è la presenza nel segnale di componenti armoniche con frequenze multiple della frequenza di rete f_0 , mentre una distorsione inter-armonica è caratterizzata da frequenze che deviano da quelle armoniche. Le problematiche dovute a questi tipi di disturbo sono molteplici.

Una ricerca svolta dall'*Institute of Electrical and Electronics Engineers* ha studiato gli effetti delle armoniche ad alta frequenza sul funzionamento dei trasformatori monofase. È stata individuata una proporzionalità tra le dissipazioni dovute a correnti parassite e il quadrato della frequenza dell'armonica considerata (D. Yildirim 2000). Questo significa che un buon algoritmo di stima delle armoniche deve essere in grado di individuare anche le frequenze più alte, in quanto queste sono responsabili per la maggior parte delle dissipazioni di questo tipo. Lo stesso Istituto ha svolto un ulteriore studio, il quale dimostra che le perdite di carico nei cavi e nei trasformatori di un impianto elettrico, dovute ad un'elevata presenza di armoniche, possono essere sufficientemente alte da giustificare modifiche all'impianto, come l'aumento della sezione dei cavi o l'installazione di condensatori per il rifasamento (F. L. Tofoli, s.d.).

Al fine di caratterizzare l'entità dei disturbi armonici e inter-armonici all'interno di un segnale elettrico di potenza, risulta utile il concetto di **Distorsione Armonica Totale**, la quale, note le componenti del segnale, si può calcolare come segue:

$$THD^2 = \frac{\sum_{k=2}^K V_k^2}{V_1^2}$$

Dove V_1 è la tensione di linea e V_k è la tensione della k -esima armonica. Il THD è quindi la percentuale di energia presente nel segnale non dovuta alla componente fondamentale (M. H. J. Bollen 2006).

È importante precisare che i disturbi di tensione sono prodotti dal generatore, mentre i disturbi di corrente sono causati dagli utilizzatori. Tuttavia, se questi ultimi non vengono opportunamente compensati, una volta raggiunta la sorgente provocano ulteriori disturbi di tensione.

La liberalizzazione del mercato dell'energia ha delle notevoli conseguenze nel campo della qualità dei segnali di potenza (J. Arrillaga 2000). La necessità di aumentare i margini di guadagno porta le compagnie operanti nel settore dell'energia a ridurre la manutenzione e lo sviluppo dei sistemi di distribuzione. Ciò comporta un inevitabile peggioramento della qualità. Inoltre, la ridotta cooperazione tra società in concorrenza tra loro impatta negativamente lo sviluppo di tecnologie e standards.

Algoritmi per la stima dei disturbi armonici

Esistono numerosi algoritmi che permettono di stimare frequenza, ampiezza e fase delle componenti sinusoidali di un segnale. Si noti che non esiste un algoritmo adatto ad ogni contesto. Spesso infatti, la precisione sulle misurazioni è correlata alla complessità computazionale.

Il primo metodo basato sullo studio della matrice di covarianza è la *Pisarenko Harmonic Decomposition* (PHD) (K. W. Chan 2003), risalente al 1973 (Pisarenko 1973). La PHD, basandosi sull'autovettore minore della matrice di covarianza, e all'autovettore associato (Sakai 1984), permette di stimare la frequenza di una sinusoide addizionata a rumore bianco gaussiano:

$$\hat{\omega} = \cos^{-1} \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + 8r_1^2}}{4r_1} \right)$$

dove r_k è la covarianza campionaria:

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

Questo algoritmo permette la stima solamente dell'armonica principale e non è quindi utile nello studio dei disturbi armonici.

L'algoritmo più usato è la *Fast Fourier Transform* (FFT) che permette di calcolare la *Discrete Fourier Transform* (DFT) (eq. 1) di un segnale a tempo discreto di lunghezza finita N .

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1)$$

È un algoritmo di tipo *Divide and Conquer* ed ha quindi una complessità asintotica $\mathcal{O}(N \log N)$ (J. W. Cooley 1965). È un algoritmo veloce e di facile implementazione, ma ha molte limitazioni.

La risoluzione dello spettro generato è inversamente proporzionale alla lunghezza del segnale campionato (P. M. Ramos 2009)

$$\Delta f = \frac{1}{t_w}$$

dove t_w è la durata temporale del campionamento. Se il segnale contiene armoniche la cui frequenza cambia nel tempo, t_w deve essere sufficientemente piccolo da permettere una risoluzione temporale che consenta di osservare la variazione delle frequenze. Questo però implica una bassa risoluzione spettrale, la quale implica un notevole errore sulla stima della frequenza.

La FFT soffre inoltre dell'effetto di *spectral leakage* (S. Rapuano 2007). Se la lunghezza del segnale non è tale da includere esclusivamente periodi interi di ogni componente sinusoidale, lo spettro presenta errori di frequenza, ampiezza e fase. Poiché non è possibile conoscere a priori la lunghezza necessaria per non ottenere questo effetto, ogni applicazione reale della FFT presenterà errori di misura dovuti al *leakage*.

L'*Interpolated Fast Fourier Transform* (IFFT) è un algoritmo sviluppato al fine di ottenere misurazioni precise di frequenza, ampiezza e fase da segnali affetti da *spectral leakage* (J. Schoukens 1992). L'algoritmo è basato sull'applicazione al segnale di una funzione finestra opportunamente scelta (D. C. Rife 1970). Due funzioni finestra spesso utilizzate sono la *Hanning window* (eq. 2) e la *Rife-Vincent window*.

$$w[n] = \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (2)$$

Uno studio pubblicato dalla IEEE (J. Schoukens 1992) ha confrontato le prestazioni di queste due funzioni finestra. La *Hanning window* è risultata la scelta più adeguata per segnali con un basso rapporto segnale/rumore (SNR) e dei quali non si hanno informazioni sulle frequenze contenute.

Questo algoritmo è poco adatto all'analisi di segnali contenenti armoniche o inter-armoniche vicine alla frequenza di rete e con ampiezza simile. Queste possono infatti distorcere l'interpolazione dello spettro risultante (P. M. Ramos 2009).

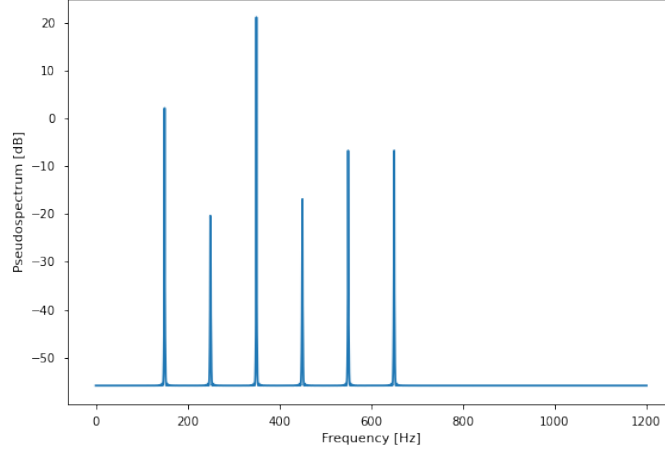


Figura 1: Pseudospettro generato da MUSIC

Multiple Signal Classification (MUSIC) è un algoritmo basato sull'analisi della matrice di autocorrelazione, in particolare sulla sua decomposizione in autovettori (Schmidt 1986). MUSIC prevede di ricavare uno pseudo-spettro (fig. 1) stimando il sottospazio del rumore, e di ottenere le informazioni sulle frequenze dai massimi locali. Al fine di stimare la matrice di correlazione R , una matrice \mathbf{V} viene costruita mediante scorrimento di una finestra rettangolare larga M sul segnale campionato di lunghezza N .

$$R = \frac{1}{N} \mathbf{V}^t \mathbf{V}$$

La scelta di M influenza la precisione della misurazione. In particolare M deve essere tale da far sì che una finestra includa solamente periodi interi della componente principale (Bollen 2008).

Gli autovettori \mathbf{s}_i della matrice di autocorrelazione R formano il sottospazio del segnale e il sottospazio del rumore. Quest'ultimo è formato dagli autovettori associati agli $M - K$ autovalori minori. Le frequenze sono quindi stimate individuando i picchi dello pseudo-spettro dato dal sottospazio del rumore:

$$P_{music}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{i=K+1}^M |\mathbf{e}^H \mathbf{s}_i|^2}$$

dove \mathbf{e}^H è il vettore di *steering* trasposto e coniugato.

Il metodo ESPRIT, a differenza di MUSIC, sfrutta il sottospazio del segnale (M. H. J. Bollen 2006). L'algoritmo permette di individuare la matrice diagonale di rotazione Φ (R. Roy 1989), i cui elementi sono gli esponenziali complessi di fase pari alle pulsazioni delle K componenti sinusoidali del segnale.

$$\Phi = \text{diag}\{e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_K}\}$$

Una matrice Ψ , i cui autovettori coincidono con gli elementi sulla diagonale di Φ , viene stimata grazie alla decomposizione ai valori singolari (SVD) della matrice \mathbf{V} usata in MUSIC. ESPRIT permette anche la stima del decadimento (se presente) delle sinusoidi modellando opportunamente i gli esponenziali complessi:

$$\Phi = \text{diag} \{e^{-\beta_1 + j\omega_1}, \dots, e^{-\beta_K + j\omega_K}\}$$

dove β_k è il decadimento della k -esima armonica.

Spesso la componente principale del segnale ha un'ampiezza uno o due ordini di grandezza superiore a quella delle componenti armoniche. In questi casi è quindi necessario applicare un filtro passa-alto al segnale prima di stimarne i disturbi armonici. La sproporzione nel contenuto energetico comporta infatti un aumento dell'errore di stima (M. H. J. Bollen 2006).

Una diversa rappresentazione matematica del segnale è quella in spazio di stato. Nel caso di un segnale stazionario, questo può essere rappresentato da due equazioni (M. H. J. Bollen 2006):

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n] = A \mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n] \\ \mathbf{z}[n] = C \mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n] \end{cases}$$

dove \mathbf{x} è il vettore di stato, A la matrice di transizione, \mathbf{w} il vettore del rumore, \mathbf{z} il vettore delle misurazioni, C la matrice di misurazione e \mathbf{v} il vettore del rumore dovuto alla misurazione.

Sfruttando questa rappresentazione è possibile stimare il contenuto armonico (e altri tipi di disturbi) applicando il filtro di Kalman. L'algoritmo si basa sulla minimizzazione dell'errore \mathbf{e} nella stima del vettore di stato \mathbf{x} (I. M. Moreno 2020).

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]$$

L'applicazione del filtro prevede la conoscenza a priori delle pulsazioni ω_k delle quali si vuole conoscere ampiezza e fase. Se è possibile assumere la sola presenza di armoniche, è sufficiente stimare un valore di K sufficientemente alto da verificare l'assunzione che i rumori \mathbf{w} e \mathbf{v} siano gaussiani a media nulla. Nel caso di presenza di inter-armoniche non è realisticamente possibile assumere i valori delle pulsazioni, il che rende il filtro di Kalman inadatto a misurazioni di questo tipo.

Stima di Armoniche e Interarmoniche

Modello Sinusoidale

Ogni segnale a tempo discreto $v[n]$ ottenuto da una rete elettrica può essere espresso come la sovrapposizione di K componenti sinusoidali, più una componente di rumore.

$$v[n] = s[n] + w[n] = \sum_{k=1}^K s_k[n] + w[n]$$

Le componenti sinusoidali sono caratterizzate dall'ampiezza $a_k \geq 0$, dalla fase $\phi_k \in [-\pi, \pi]$ e dalla pulsazione ω_k .

$$s_k[n] = a_k \cos(n\omega_k + \phi_k)$$

Le componenti $s_k[n]$ sono chiamate **armoniche** quando la loro pulsazione è un multiplo della pulsazione fondamentale ω_0 , altrimenti sono dette **interarmoniche**.

La \tilde{k} -esima armonica ha pulsazione $\omega_k = 2\tilde{k}\pi f_0$. Si noti che le frequenze sono normalizzate rispetto alla frequenza di campionamento secondo la relazione $f_k = \tilde{f}_k/f_s$, dove \tilde{f}_k è la frequenza in Hz e f_s è la frequenza di campionamento. Pertanto, se viene rispettato il Teorema del Campionamento di Nyquist-Shannon:

$$f_c > 2 \max\{f_k\}$$

ne deriva che $\omega_k \in [-\pi, \pi]$.

La 0-esima armonica, avendo pulsazione nulla, è detta componente di corrente continua e il suo valore di tensione è $V_{DC} = a_0 \cos(\phi_0)$. L'armonica fondamentale è detta invece componente di potenza ed ha pulsazione $\omega_0 = \tau \tilde{f}_0/f_c$ e ampiezza $a_0 = \sqrt{2} V_{rms}$, dove \tilde{f}_0 è la frequenza della rete e V_{rms} è la tensione efficace di fase.

Modello Armonico

Il segnale $v[n]$ può essere espresso anche sotto forma di esponenziali complessi. La k -esima componente ha quindi la seguente forma:

$$v_k[n] = A_k e^{j\phi_k} e^{jn\omega_k}$$

Due campioni successivi della componente $v_k[n]$ sono legati da uno sfasamento pari alla sua pulsazione ω_k .

$$v_k[n+1] = v_k[n] e^{j\omega_k} = A_k e^{j\phi_k} e^{j(n+1)\omega_k}$$

Riduzione Dimensionale del Segnale

Dato un segnale $v[n]$ di lunghezza $L = N + M - 1$, si definisce il vettore dei campionamenti $\mathbf{v}[n]$ come la finestra di ampiezza M da $v[n]$ a $v[n + M - 1]$. Il vettore $\mathbf{v}[n]$ è quindi un campionamento M -dimensionale del segnale.

Si costruisce (M. H. J. Bollen 2006) la matrice \mathbf{V} , di dimensioni $N \times M$, ponendo sulle righe i vettori di campionamento $\mathbf{v}[n]$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^t[0] \\ \vdots \\ \mathbf{v}^t[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v[0] & \dots & v[M-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v[N-1] & \dots & v[N+M-2] \end{bmatrix}$$

ottenendo quindi una sequenza di N misurazioni M -dimensionali.

Assumendo che il rumore $w[n]$, e di conseguenza il segnale $v[n]$, abbia media nulla, si osserva che migliore è la scelta di M , tale che ogni vettore di campionamento $\mathbf{v}[n]$ includa periodi interi di ogni armonica, più la media di $\mathbf{v}[n]$ tende ad annullarsi.

Ciò permette di stimare la matrice di correlazione campionaria \mathbf{R}_{kl}

$$\hat{\mathbf{R}}_{kl} = E\{\mathbf{v}^{(k)} \circ \mathbf{v}^{(l)}\} = \frac{1}{N} \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(l)}$$

, dove $\mathbf{v}^{(k)}$ è la k -esima colonna di \mathbf{V} . Riscrivendo l'equazione in forma matriciale si ottiene:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{V}^t \mathbf{V}$$

Algoritmo MUSIC

Per il principio della sovrapposizione degli effetti la matrice di correlazione del segnale \mathbf{R} può essere espressa come somma della matrici di correlazione \mathbf{R}_s e \mathbf{R}_n dovute rispettivamente alle componenti armoniche e al rumore.

Assumendo che il rumore sia di natura gaussiana con varianza σ_w^2 , la sua matrice di correlazione vale:

$$\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 I$$

dove I è la matrice identità di dimensione $M \times M$ e σ_w^2 coincide con la potenza del rumore.

Algoritmo ESPRIT

Isolando le componenti di segnale e di rumore, utilizzando una notazione analoga a quella del vettore dei campionamenti, si ha:

$$\mathbf{v}[n] = \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k[n] + \mathbf{w}[n] \quad (3)$$

Studiando il contributo $\mathbf{s}_k[n]$ della k -esima componente armonica e applicando le proprietà del modello armonico, è possibile esprimere ogni elemento $\mathbf{s}_{k,i}[n]$ in funzione di $s_k[n]$:

$$\mathbf{s}_{k,i}[n] = s_k[n + i] = s_k[n]e^{ji\omega_k}$$

E riscrivendo $\mathbf{s}_k[n]$ in forma vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{s}_k[n] = s_k[n] \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_k} \\ \vdots \\ e^{j(M-1)\omega_k} \end{bmatrix} = s_k[n] \mathbf{e}_k$$

dove \mathbf{e}_k è detto *vettore steering*, il quale è formato dagli sfasamenti successivi associati alla pulsazione ω_k .

È quindi possibile riscrivere l'equazione {eq. 3} come trasformazione lineare del vettore delle ampiezze complesse \mathbf{A} :

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{E}\Phi^n \mathbf{A} + \mathbf{w}[n]$$

dove \mathbf{E} è una matrice $M \times K$ le cui k -esima colonna è il vettore steering associato alla pulsazione ω_k

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K]$$

, Φ è una matrice diagonale i cui elementi sono gli esponenziali complessi associati alle K diverse pulsazioni

$$\Phi = \text{diag} \{e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_K}\}$$

mentre \mathbf{A} è il vettore delle ampiezze complesse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 e^{j\phi_1} \\ \vdots \\ A_K e^{j\phi_K} \end{bmatrix}$$

Implementazione in Python

Diverse librerie sono state utilizzate per l'implementazione e la visualizzazione degli algoritmi MUSIC e ESPRIT. La lettura e la memorizzazione di dati tabulari è gestita da *pandas*. *numpy* permette invece la memorizzazione di array contigui in memoria, garantendo ottime prestazioni di calcolo nonostante il livello di astrazione. Le routines per i calcoli di algebra lineare e per la localizzazione di massimi locali sono fornite dalla libreria *scipy*. Per la visualizzazione è stata usata *matplotlib*.

Per garantire la riproducibilità delle stime, il generatore di numeri pseudo-casuali incluso in *numpy* è stato inizializzato con un seme scelto arbitrariamente.

```
from math import tau

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy as sp
import scipy.linalg as LA
import scipy.signal as ss

from utils import *

plt.style.use('seaborn-notebook')
np.random.seed(293710966)
```

Come primo esempio si sceglie un segnale contenente solo le prime 6 armoniche dispari della frequenza di rete $f_0 = 50$ Hz. Il segnale viene campionato a $f_c = 2400$ Hz consentendo la stima di armoniche fino a 1200 Hz. La frequenza di campionamento scelta è sufficiente poiché l'armonica più alta ha frequenza $f_{13} = 650$ Hz.

$$x(n) = \sum_{k=2}^7 a_{2k-1} \cos \left(2\pi n(2k-1) \frac{f_0}{f_s} + \phi_{2k-1} \right) + w(n)$$

Il campionamento inizia al tempo $t_0 = 0$ e termina una volta raccolti 2^{12} campioni. I campionamenti sono memorizzati come *IEEE 754 double-precision floating-point numbers* i quali occupano 64 bit di memoria. La memorizzazione del segnale richiede quindi 32 KiB di memoria.

```
magnitudes = pd.read_csv('./harmonic-voltage-magnitude.csv',
    index_col='number')['typical']
phases = np.radians(pd.read_csv('./phases.csv',
    index_col='number'))['3.8']

power_freq = 50
sampling_freq = 2400
```

```

harmonic_numbers = np.arange(3, 14, 2)
no_of_harmonics = harmonic_numbers.max()

time = np.arange(4096.)

noise = np.random.normal(0, 0.1, time.size)
signal = noise.copy()

for n in harmonic_numbers:
    amp = magnitudes[n]
    phase = phases[n]
    omega = tau * n * power_freq / sampling_freq
    signal += amp * np.cos(omega * time + phase)

```

Al fine di scegliere opportunamente la larghezza della finestra di campionamento, si calcola la lunghezza del periodo T_0 della frequenza di rete.

$$T_0 = \frac{f_s}{f_0}$$

La larghezza M della finestra viene quindi calcolata pari a 10 volte il periodo T_0

```

power_period = np.around(sampling_freq / power_freq).astype(int)
time_window = power_period * 10
data_size = signal.size - time_window + 1

windows = [signal[i : i + time_window] for i in range(data_size)]
data_matrix = np.vstack(windows)

```

Poiché la matrice di autocorrelazione stimata \hat{R} è reale simmetrica, gli autovettori e autovalori vengono calcolati con un algoritmo fornito da *scipy* in grado di sfruttare questa proprietà.

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \mathbf{V}^t \mathbf{V}$$

```

correlation = data_matrix.conj().T @ data_matrix / data_matrix.shape[0]

signal_space_index = (time_window - no_of_harmonics, time_window - 1)
noise_space_index = (0, time_window - no_of_harmonics - 1)

signal_pca = LA.eigh(correlation, subset_by_index=signal_space_index)
noise_pca = LA.eigh(correlation, subset_by_index=noise_space_index)

signal_eigvecs = signal_pca[1].T
noise_eigvecs = noise_pca[1].T

```

L'algoritmo MUSIC fornisce l'equazione dello pseudo-spettro in funzione della pulsazione normalizzata. L'intervallo in cui ha senso valutare lo spettro è $\omega \in [0, \pi]$, in accordo con la teoria di Nyquist-Shannon.

A differenza della DFT, la risoluzione spettrale può essere scelta arbitrariamente. Bisogna però tenere in considerazione che una bassa risoluzione comporta un'errore sulla stima della frequenza, mentre un'alta risoluzione richiede maggior tempo di calcolo. In questo caso si è scelta una risoluzione $\Delta f = 1$ Hz.

```
omegas = np.linspace(0, np.pi, sampling_freq // 2)
freqs = omegas * sampling_freq / tau
```

Viene definita la matrice di *steering*, le cui righe sono i vettori di *steering* calcolati per ogni pulsazione ω dello pseudo-spettro

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{e}_k^t$$

dove \mathbf{e}_k è il vettore di *steering* con pulsazione $\omega = k\Delta\omega$.

```
steering_matrix = np.exp(1j * np.outer(omegas, np.arange(time_window)))
pseudo_power = 1 / np.sum(
    np.abs(noise_eigvecs @ steering_matrix.conj().T) ** 2,
    axis=0
)
```

I massimi locali dello pseudo-spettro vengono individuati grazie alla routine *find_peaks* fornita da *scipy*. I dati ricavati vengono memorizzati in un *DataFrame* gestito dalla libreria *pandas* in modo da poter estrarre i K picchi di maggior potenza.

```
peaks_idx, _ = ss.find_peaks(pseudo_power)

peaks = pd.DataFrame()
peaks['omega'] = omegas[peaks_idx]
peaks['freq'] = freqs[peaks_idx]
peaks['power'] = pseudo_power[peaks_idx]
peaks = peaks.sort_values('power').tail(harmonic_numbers.size).sort_values('omega')

est_freqs = peaks.freq.values
est_omegas = peaks.omega.values
real_freqs = power_freq * harmonic_numbers
err_freqs = (est_freqs - real_freqs) / real_freqs
```

Le ampiezze vengono stimate utilizzando gli autovettori appartenenti al sottospazio del segnale. Poiché la dimensione del sottospazio del segnale è maggiore del numero di frequenze stimate, si usano gli autovettori ordinatamente associati ai numeri armonici delle frequenze stimate.

```

est_steering_matrix = np.exp(1j * np.outer(est_omegas, np.arange(time_window)))
est_noise_power = noise_pca[0].mean()

b = signal_pca[0][harmonic_numbers - 1] - est_noise_power
A = np.abs(
    signal_eigvecs[harmonic_numbers - 1] @ est_steering_matrix.conj().T
) ** 2

est_powers = LA.solve(A, b)

est_amplitudes = np.sqrt(2 * est_powers)
real_amplitudes = magnitudes[harmonic_numbers].values
err_amplitudes = (est_amplitudes - real_amplitudes) / real_amplitudes

```

Nella seguente tabella sono presentati i risultati delle stime di frequenza e ampiezza.

k	Frequenza [Hz]			Ampiezza [V]		
	Reale	Stimata	Errore	Reale	Stimata	Errore
3	150	150.13	0.08 %	1.5	1.498	0.11 %
5	250	250.21	0.08 %	4.0	4.025	0.63 %
7	350	350.29	0.08 %	4.0	4.012	0.31 %
9	450	450.38	0.08 %	0.8	0.804	0.53 %
11	550	550.46	0.08 %	2.5	2.533	1.33 %
13	650	649.54	0.07 %	2.0	2.025	1.26 %

Riferimenti

- Board, IEEE Standards. 1995. «IEEE 1159-1995 - IEEE Recommended Practice for Monitoring Electric Power Quality».
- Bollen, I. Y. H. Gu; M. H. J. 2008. «Estimating interharmonics by using sliding-window ESPRIT». *IEEE Transactions on Power Delivery* 23: 13–23. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TPWRD.2007.911130>.
- D. C. Rife, G. A. Vincent. 1970. «Use of the discrete fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones». *The Bell System Technical Journal* 49: 197–228. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1970.tb01766.x>.
- D. Yildirim, E. F. Fuchs. 2000. «Measured transformer derating and comparison with harmonic loss factor F_{HL} approach». *IEEE Transactions on Power Delivery* 15: 186–91. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/61.847249>.
- F. L. Tofoli, A. de Oliveira, S. M. R. Sanhueza. s.d. «On the Study of Losses in Cables and Transformers in Nonsinusoidal Conditions». *IEEE Transaction on Power Delivery* 21: 971–78. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TPWRD.2006.870986>.
- I. M. Moreno, R. C. Magaña, A. Medina. 2020. «Enhanced harmonic state estimation in unbalanced three-phase electrical grids based on the Kalman filter and physical scale-down implementation». *International Journal of Electrical Power and Energy Systems* 123: 106243. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106243>.
- J. Arrillaga, N. R. Watson, M. H. J. Bollen. 2000. «Power Quality Following Deregulation». *Proceedings of the IEEE* 88: 246–61. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/6.387140>.
- J. Schoukens, H. Van hamme, P. Pintelon. 1992. «The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study». *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 41: 226–32. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/19.137352>.
- J. W. Cooley, J. W. Tukey. 1965. «An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series». *Mathematics of Computation* 19: 297–301.
- J. Yaghoobi, D. Martin, A. Alduraibi. 2020. «Impact of high-frequency harmonics (0–9 kHz) generated by grid-connected inverters on distribution transformers». *Electrical Power and Energy Systems* 122: 106–77. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106177>.
- K. W. Chan, H. C. So. 2003. «An exact analysis of Pisarenko’s single-tone frequency estimation algorithm». *Signal Processing* 83: 685–90. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-1684\(02\)00493-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-1684(02)00493-0).

- M. H. J. Bollen, I. Y. H. Gu. 2006. *Signal Processing of Power Quality Disturbances*. Wiley-IEEE Press. <https://ieeexplore.ieee.org/servlet/opac?bknumber=5224658>.
- P. M. Ramos, A. C. Serra. 2009. «Comparison of Frequency Estimation Algorithms for Power Quality Assessment». *Measurement* 42: 1312–17. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.measurement.2008.04.013>.
- Pisarenko, V. F. 1973. «The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function». *Geophysical Journal International* 33: 347–66. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1973.tb03424.x>.
- R. Dash, S. C. Swain. 2018. «Effective Power quality improvement using Dynamic Activatecompensation system with Renewable grid interfaced sources». *Ain Shams Engineering Journal* 9: 2897–2905. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.asej.2017.09.007>.
- R. Roy, T. Kailath. 1989. «ESPRIT - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques». *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 37: 984–95. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/29.32276>.
- S. Rapuano, F. J. Harris. 2007. «An Introduction to FFT and Time Domain Windows». *IEEE Instrumentation and Measurement Magazine* 10: 32–44. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/MIM.2007.4428580>.
- Sakai, H. 1984. «Statistical analysis of Pisarenko’s method for sinusoidal frequency estimation». *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 32: 95–101. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TASSP.1984.1164273>.
- Schmidt, R. O. 1986. «Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 34: 276–80. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830>.