УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Андреа Грбић

ВРЕДНОВАЊЕ АЗИЈСКИХ ОПЦИЈА

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марија Цупарић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 13. 3. 2023.

Садржај

Предговор

Вредновање различитих врста опција је дуго времена важна област финансијске математике. Опције су незаобилазна појава на тржиштима годинама уназад са коријенима из доби античке Грчке, али за неке специјалне врсте одређивање фер цијене и даље представља отворен проблем. Због тога су опције и данас активно предмет истраживања. Оне се користе у циљу остваривања профита и у циљу обезбјеђивања од ризика. Опције омогућују инвеститорима да шпекулишу и на позитивним и на негативним кретањима тржишта, да смање повећан ризик повезан са том шпекулацијом, и да им потенцијално надокнаде губитке. На апстрактном нивоу можемо их схватити као полису осигурања у случају неповољног кретања цијена по инвеститора који тргује акцијама, или нечим другим на тржишту. Ово је посебно важно у тренуцима великих нестабилности на тржиштима које су често праћене економским и геополитичким кризама на свјетском нивоу. С обзиром на разноврсност опција и чињеницу да се ови финансијски деривати могу односити на све чиме се може трговати на тржишту, од обвезница, валута и индекса до робе и природних ресурса попут нафте и природног гаса, инвеститори могу да их прилагоде разним ситуацијама. Међутим, разноврсност и таква флексибилност опција имплицира да у реалности трговина опцијама није једноставна и да захтијева висок ниво знања и искуства да би се осмислила добра тактика.

Како су финансијски инструменти и ситуације у којима се инвеститори могу наћи на тржишту постали све комплекснији, то су и финансијски деривати добили комплекснију структуру, тежи су за анализу и разумијевање ризика који носе. Код егзотичних опција је важно познавати структуру саме опције и њене јединствене карактеристике да би се оне могле адекватно користити на тржишту. Вредновање ових опција је у многим случајевима немогуће директно урадити, што додатно отежава рад са њима. Не постоји експлицитна формула за рачунање цијене азијских опција код којих се просјек цијена финансијског инструмента на који се односе рачуна преко аритметичке средине. Пошто је ова врста опција веома популарна, за њихово вредновање постоји широк спектар литературе заснован на симулацијама, нумеричким апроксимацијама и алгоритмима.

У раду се бавимо одређивањем непознате цијене аритметичке азијске опције са фокусом на Монте-Карло симулације и технике које побољшавају квалитет и тачност тих симулација. Прво поглавље рада бави се историјским развојем опција, особинама класичних ванила опција из којих су изведене азијске опције, као и теоријским основама које су неопходне за рад са опцијама и њихово вредновање, међу којима издвајамо стохастички процес геометријског Брауновог кретања, принцип неутралности од ризика, вјероватносне мјере неутралне од ризика, појам арбитраже и чувени модел Блека[1] и Шолса[2]. Друго поглавље посвећено је егзотичним опцијама, специјално аритметичким азијским опцијама, проблему одређивања цијене тих опција и математичке процјене за цијену које нам омогућују поређење азијских опција са једноставнијим опцијама и боље разумијевање њихове структуре. У трећем поглављу су обрађене Монте-Карло методе, технике редукције дисперзије и њихова примјена у вредновању егзотичних опција, и Ворстова[3] апроксимација за цијену аритметичке азијске опције. Четврта глава даје резултате Монте-Карло симулација и њихову анализу, као и поређење свих имплементираних метода и техника. Резултати су приказани табеларно и при имплементацији истих поређен је утицај варијације вриједности параметара који утичу на цијену аритемтичке азијске опције.

Рад је писан тако да је читалац упознат са основним појмовима теорије вјероватноћа и финансијске математике. Такође, користићемо и неке појмове из стохастичке анализе, а теореме из те области нећемо доказивати јер излазе из опсега рада, али ће читалац бити упућен на одговарајућу литературу из те области. Сви кодови који су неопходни за имплементацију су написани у програмском језику „R" и детаљно су објашњени. Подразумијева се да је читалац упознат са синтаксом овог језика. Пошто је скоро сва литература везана за ову област на енглеском језику, поред сваког уведеног појма на српском језику наведен је и оригинални термин на енглеском језику.

За крај, жељела бих да се захвалим свом ментору, проф. Бојани Милошевић, за то што ме заинтересовала за ову тему и давала корисне сугестије и помоћ без којих овај рад не би био онакав какав јесте. Надам се да ће он бити од користи свима који желе да се баве овом облашћу.

---

[1] Fischer S. Black, 1938-1995, амерички економиста

[2] Myron S. Scholes, 1941-, канадско-амерички економиста

[3] A.C.F. Ton Vorst, 1952-, холандски математичар и финансијски инжењер

Глава 1

Увод

1.1 Кратка историја развоја опција

Једна од битних области финансијске математике је вредновање опција. Иако се ови финансијски деривати користе већ хиљадама година, и даље представљају један од најважнијих грађевинских блокова међународних финансијких тржишта. Прве примјере употребе опција налазимо још у библијским причама, као и добу античке Грчке, гдје су коришћене за шпекулацију рода маслина. Наиме, Талес је једне године предвидио добар род маслина и направио уговор по ком је могао да по ниској цијени изнајми велики број преса за маслине. Пошто се испоставило да је био у праву, Талес је изнајмљивао другима те исте пресе по много вишим цијенама остварујући тако велик профит. Дуго времена су се финансијски деривати односили само на привредна добра, а занимљиво је истаћи да су опције први деривати који су се односили и на финансијске инструменте. Праћење еволуције опција кроз вријеме није једноставно због тога што су оне кроз историју биле поистовјећиване са другим врстама договора попут клађења, као и због уграђивања функционалности опција у форвард уговоре који се односе на куповину и продају робе или финансијких инструмената.

Седамнаести вијек представља прекретницу за развој опција. У том периоду је по први пут дошло до обимне употребе опција, до првог пада тржишта опција и до појаве организованих тржишта куповних и продајних опција које се односе на хартије од вриједности. У ово вријеме су Холанђани развили велико тржиште опција на луковице лала. Продавци и купци лала су се опцијама обезбјеђивали од ризика. Међутим, било је и много шпекулатора који су покушавали да искористе сваку неправилност тржишта, што је у комбинацији са неорганизованошћу тржишта, довело до његовог пада 1636. године. Овај догађај је имао негативне импликације по економију и довео је до лоше репутације опција. Наиме, може се неформално казати да опције имају две супротстављене моћи. Са једне стране су изразито ефикасна средства за смањење ризика, а са друге имају способност да повећају ризик кроз коришћење туђих средстава за куповину, уз наду да ће профит у будућности бити значајно већи од трошкова задужења (енг. *leverage*). Ова дуална природа опција рефлектује конфликтан однос инвеститора према ризику кроз страх од губитка и похлепу за остваривањем великог профита [2].

Опцијама се на организованом тржишту трговало у Лондону на крају седамнаестог вијека. Међутим, активност тржишта је у почетку била слаба због лоше репутације опција која је проузрокована пропашћу тржишта лала. Ово је за посљедицу имало проглашење опција нелегалним у Лондону 1733. године са забраном трговине опцијама која је трајала све до 1830. године. У Америци је трговина опцијама почела крајем осамнаестог вијека након чега је тржиште трговине опцијама наставило да расте. У почетку је тржиште било прилагођено сваком купцу и продавцу робе појединачно, те се до закључења сваког уговора долазило након преговора двеју страна, што је било изразито непрактично.

Друга половина двадесетог вијека, односно 1973. година, представља прекретницу у развоју опција у форми у којој се данас користе. Тада су уведена строга правила и стандарди, као и регулативна комисија која је водила рачуна о спровођењу мјера и радила на смањењу могућности преваре. Уведени су појмови уговорена цијена (енг. *strike price, exercise price*), датум доспијећа (енг. *time to maturity, exercise time, strike time*), трошкови трансакција, итд. Стандардизацијом се смањила потреба да сваки пут обе стране преговарају о условима уговора. Иако је у Америци модерни развој опција текао без већих спутавања, трговина опцијама у Европи у двадесетом вијеку је више пута забрањивана. У данашње вријеме постоји неколико организованих тржишта опцијама међу којима највећа имају средишта у Чикагу, Лондону и Амстердаму.

Као што смо претходно поменули, опције су кроз историју имале лошу репутацију због њихове злоупотребе која је довела до непожељних ситуација. Лоша репутација се у одређеној мјери задржала до данас, јер не постоји једногласан договор о предностима трговине опцијама. Противници тржишта опцијама заступају став да ова тржишта, била организована или не, промовишу непотребну шпекулацију узнемирујући тржишта вриједносних папира на које се опције односе (најчешће тржишта акција) и смањују њихову ликвидност. Они сматрају да тржишта опцијама изазивају повећање волатилности цијена акција дестабилишући их. Неки их сматрају ближим коцкању него финансијском тржишту. Са друге стране, чини се да постоји много више предности тржишта опцијама него њихових мана. Тржишта опцијама омогућују инвеститорима да не посједују удио у акцијама када је њихова цијена ниска, или да купе акције када им цијена расте. Такође, смањују трошкове трансакција, а омогућују и једноставно прилагођавање комбинованог портфолија акција и обвезница уколико инвеститор одлучи да исти измијени у складу са промјенама цијена акција на тржишту. Овиме се постиже да портфолио буде отпорнији на те промјене. Још једна важна особина трговине опцијама јесте могућност кратке продаје (енг. *short selling*) вриједносних папира на које се опција односи, односно инвеститор може позајмити акције од брокера и продати их, остварујући профит у случају пада цијена позајмљених акција. Опције допуштају могућност позајмљивања средстава другима и посуђивања од других по повољнијим условима. Наиме, инвеститор може да креира такав портфолио да позајмљује од других или посуђује другима по каматама које су доступне само за тржиште опцијама. Ове камате су често повољније од оних које би инвеститор могао добити да другим тржиштима [1]. Све наведено упућује да инвеститори склонији ризику могу користити опције за шпекулацију на берзи у циљу прављења профита што и јесте једна од њихових честих примјена у пракси.

Најважнија предност опција се огледа у томе што омогућују обезбјеђење од ризика, што ћемо надаље називати хеџинг (енг. *hedging*), односно смањење ризика од губитка. Понашање цијена акција у будућности је непредвидиво, а мјера непредвидивости је важан параметар који називамо волатилношћу акције. Једна врста опција која се издваја у односу на друге су опције засноване на просјечној цијени вриједносног папира на који се опција односи, најчешће акције, у неком временском интервалу. Стога, оне нису условљене цијеном акције у неком одређеном тренутку. Такве опције се називају азијским опцијама и оне су главна тема овог рада. Како је имплицирана волатилност у просјеку цијена акција мања од волатилности појединачних цијена коришћених за рачунање просјека, то су азијске опције јефтиније и популарније у односу на друге врсте опција. Због њиховог главног својства упросјечавања цијена вриједносних папира на које се односе, азијске опције су мање осјетљиве на екстремне ситуације и кризне периоде на тржишту до којих може доћи у тренутку истека опције, те оне зато смањују ризик тржишне манипулације вриједносног папира. Најважније питање које се поставља у вези са азијским опцијама јесте како одредити њихову фер цијену, тј. премију. Испоставља се да не постоји експлицитан аналитички израз за рачунање цијене азијске опције уколико се за одређивање просјека користи аритметичка средина. Циљ рада је да уз помоћ апроксимација и нумеричких алгоритама одредимо цијену аритметичке азијске опције. Прије него што се директно позабавимо проблемом, потребно је формално увести појмове опција и азијских опција, те извести њихове особине, као и теоријска својства потребна за разумијевање процеса кретања цијена акција на тржишту, што ће бити приказано у сљедећим одјељцима.

1.2 Опције и њихове особине

Дефиниција 1.1. Опција је финансијски уговор којим се стиче право, али не и обавеза да се купи (куповна опција, енг. *call option*) или прода (продајна опција, енг. *put option*) акција, или неки други вриједносни папир, по договореним условима. Услови који треба да буду дефинисани у сваком уговору су:

(1) *уговорена цијена* (цијена по истеку или цијена на доспијећу) вриједносног папира на који се уговор односи и

(2) *уговорено вријеме до тренутка истека опције.*

Опције спадају у такозване финансијске деривате, јер је њихова вриједност изведена из вриједности неких других вриједносних папира, односно вриједносних папира на које се опција односи. Њих називамо подлогом (енг. *underlying asset*). Уведимо ознаке које ћемо користити надаље у раду. Са K означавамо уговорену цијену по којој се може купити или продати вриједносни папир, а уговорено вријеме до истека опције са T. Почетну цијену вриједносног папира на који се опција односи обиљежавамо са S_0, а цијену у тренутку t са S_t. Подлога на коју се односи уговор је најчешће акција, али може бити и било шта чиме се може трговати на берзи попут берзанских индекса, страних валута, других врста уговора, итд. Ми ћемо у наставку сматрати да је поразумијевани вриједносни папир са којим радимо опција. Продајну опцију зваћемо пут опцијом, а куповну опцију зваћемо кол опцијом. Опције се према времену извршења дијеле на:

(1) *европске опције* - могу да се активирају само у уговорено вријеме истека опције T и

(2) *америчке опције* - могу да се активирају у било ком тренутку t, $t \leqslant T$.

Треба напоменути да називи америчка и европска опција нису повезани са државом издавања опција. Опције се могу подијелити и на ванила (енг. *vanilla options*) и егзотичне (енг. *exotic options*) опције. Ванила опције су класичне пут и кол опције чија цијена директно зависи од цијене акције у уговореном тренутку T (европске ванила опције), или од цијене у тренутку активације опције t који је мањи или једнак уговореном времену T (америчке ванила опције). Све опције које нису ванила опције називамо егзотичним опцијама и оне представљају хибрид европских и америчких опција.

Кол опција даје право, али не и обавезу куповине акције по цијени K која је унапријед договорена у уговору, а пут опција даје право, али не и обавезу продаје акције по цијени која је унапријед договорена у уговору. За особу која продаје опцију (енг. *writer*) кажемо да је у *краткој позицији* (енг. *short position*), а за особу која купује кажемо да је у *дугој позицији* (енг. *long position*). У зависности од положаја који особа заузима у склапању уговора преузима мање или више ризика на себе. Купац опције има само ризик цијене коју је платио за опцију, док продавац опције може да има велики губитак, јер мора да прода (ако се ради о кол опцији), или да купи (ако се ради о пут опцији) акцију по условима договореним у уговору у случају да власник опције одлучи да је активира. Стога, купац опције, било да се ради о кол или пут опцији има ограничен потенцијални губитак једнак плаћеној премији са потенцијално неограниченим профитом. Максимални профит који може остварити особа која продаје опцију је ограничен и једнак је премији опције. За овај гарантовани почетни прилив новца инвеститор прихвата неограничен ризик. За продавца кол опције потенцијални губитак је неограничен, а за продавца пут опције потенцијални губитак је ограничен. За опције које доносе профит уколико се активирају кажемо да су *у новцу* (енг. *in the money*), неисплативе опције су *ван новца* (енг. *out of the money*), док за опцију која је на граници исплативости кажемо да је *на новцу* (енг. *at the money*).

Вредновање опција, односно одређивање њихове фер цијене није једноставан задатак, а видјећемо у наставку да постоје случајеви када није могуће експлицитно пронаћи формулу за вредновање неких врста опција. Због непредвидиве промјенљивости тржишта, промјена у кретању цијена акција и каматних стопа проблем је додатно отежан.

Логичким размишљањем можемо закључити да што је већа цијена акције, то је већа вриједност опције на ту акцију. Када је цијена акције много већа од уговорене цијене тада је велика вјероватноћа да ће опција бити активирана. Тренутна вриједност опције ће стога бити приближно једнака цијени акције умањеној за цијену бескупонске обвезнице која има исти датум доспијећа као опција и чија је главница (енг. *face value, par value*) једнака уговореној цијени опције. Са друге стране, уколико је цијена акције много мања од уговорене цијене, онда ће опција највјероватније истећи без активације. У том случају ће јој вриједност бити блиска нули.

Уколико је датум доспијећа опције далеко у будућности, тада је цијена обвезнице чија је главница једнака уговореној цијени опције мала, па ће вриједност опције бити приближно једнака цијени акције. Са друге стране, уколико је датум доспијећа опције у блиској будућности, онда ће вриједност опције бити приближно једнака цијени акције умањеној за износ уговорене цијене, или нули. Наравно, уколико се вриједност акције не мијења, онда вриједност опције опада како се приближава датум доспијећа. Специјално, ако посматрамо европску кол опцију, онда њена цијена опада када K расте.

Волатилност акције је веома важан фактор, који представља мјеру случајности у будућем кретању цијена акција. Овај параметар мјери ризик неке акције и говори нам колико се брзо мијењају цијене акција на тржишту. Можемо га посматрати и као стандардну девијацију вриједности цијена од просјека. Велика волатилност акције значи да је велик ризик инвестирања у ту акцију, јер са порастом волатилности расте вјероватноћа да се цијена акција нагло промијени. Због тога вриједност саме акције опада, јер инвеститори често нису заинтересовани за улагање у акције чије је понашање непредвидиво. Међутим, обрнуто важи када говоримо о опцијама. Наиме, волатилност позитивно утиче на вриједност кол и пут опција. Власник кол опције је на добитку уколико цијена акције порасте, док му је ризик уколико цијена акције опадне ограничен. Слично, власник пут опције остварује профит при великом паду цијене акција и има ограничен ризик у случају њиховог раста. Због тога, вриједности кол и пут опција расту са порастом волатилности. Параметар волатилности σ се у пракси налази тако што се оцјењује статистичким методама на основу претходних вриједности промјена цијене акција и услова да се промјена цијена акција понаша према неком математичком процесу.

Грешке у оцјењивању волатилности доводе до разних грешака у трговини опцијама. Најважнија је грешка у процјени фер цијене опције. Прениске (превисоке) процјене волатилности дају вриједности модела које су прениске (превисоке). За опције које нису дубоко у новцу цијена је изразито осјетљива на мале промјене параметра волатилности, односно такав модел није робустан. Инвеститор који има тачније оцјене волатилности од оцјена самог тржишта би у теорији могао формирати потпуно хеџовану позицију остварајући профит већи од безризичне каматне стопе.

1.3 Брауново кретање

Брауново кретање или Винеров процес заузима централно мјесто у теорији случајних процеса. Оно нам је неопходно да бисмо моделовали непрекиднан процес кретања цијена вриједносних папира са приходом који није фиксан и њихових деривата на берзи. Вриједносни папир са којим радимо су акције, а финансијски деривати су опције. Прије него што уведемо модел кретања цијена акција током времена заснован на процесу Брауновог кретања потребно је да боље разумијемо сам процес Брауновог кретања.

Процес Брауновог кретања открио је шкотски ботаничар Роберт Браун[1], који га је описао 1827. године. Посматрајући под микроскопом кретање честица полена потопљених у течност примијетио је да се честице непрекидно хаотично крећу по цик-цак путањама, али није могао да објасни узрок таквог кретања. Прво физичко објашњење овог феномена дао је Ајнштајн[2] 1905. године користећи пробабилистички модел у ком је објаснио да је такво кретање резултат сударања честица са молекулима средине која га окружује, односно молекулима воде. Мала честица прима случајан број удара случајне јачине из случајних праваца у кратком временском интервалу. Овакво бомбардовање честица молекулима воде дало је објашњење хаотичног кретања честица на начин који је Браун описао. О важности Ајнштајнове теорије свједочи то што је објашњењем феномена Брауновог кретања поставио теоријску основу за доказивање егзистенције атома.

Међутим, још неколико година прије Ајнштајна, математичар Башеље[3] је у својој докторској дисертацији *Theorie de la Speculation* 1900. године предложио модел кретања цијена акција и робе на тржишту, који зовемо моделом Брауновог кретања. Иако се данас Башеље сматра зачетником финансијске математике, значај његовог рада није био препознат у вријеме када је објављен. Башеље је посматрао кретање обвезница француске владе на берзи током година - посматрао их је као трајекторије случајног процеса. Башељеов модел Брауновог кретања се заснива на осцилацијама цијена вриједносних папира на берзи. У својој дисертацији Башеље

[1] Robert Brown, 1773-1858, шкотски ботаничар
[2] Albert Einstein, 1879-1955, њемачки физичар
[3] Louis Bachelier, 1870-1946, француски математичар

износи идеју да су осцилације цијене у малим временским интервалима независне од тренутне цијене акције. Имплицитна претпоставка јесте да су осцилације цијена у будућности независне од претходног стања процеса, а у комбинацији са централном граничном теоремом, Башеље је додатно показао да су прираштаји случајног процеса међусобно независни и нормално расподијељени, односно показао је да се процес Брауновог кретања може добити као гранична вриједност случајног лутања. Међутим, тај закључак је посљедица интуитивне опсервације, док је тачну математичку дефиницију, директну конструкцију и особине процеса Брауновог кретања дао Винер[4] 1934. године и стога се Брауново кретање често назива и Винеров процес.

Простор вјероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ процеса Брауновог кретања се може конструисати на простору $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$, гдје је $C(\mathbb{R}^+)$ колекција свих непрекидних реалновриједносних функција на $\mathbb{R}^+$ почевши од нуле.

Дефиниција 1.2. Стохастички процес $(B_t)_{t\geqslant 0}$ дефинисан на простору вјероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ је Брауново кретање (или Винеров процес) ако

(1) $B_0 = 0$ скоро свуда.

(2) B има независне прираштаје. тј. за $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ и случајне величине $B_0, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ су независне.

(3) За све $0 \leqslant s \leqslant t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, односно $B_t - B_s$ има нормалну расподјелу са математичким очекивањем 0 и дисперзијом $t-s$ (дисперзија је једнака прираштају између временских тренутака t и s).

(4) Процес B има непрекидне трајекторије са вјероватноћом 1, односно B је непрекидан као функција од t, тј.

$$P\{B \in C(\mathbb{R}^+)\} = 1.$$

Специјално, за $t \in \mathbb{R}^+$ случајна величина $B_t \simeq \mathcal{N}(0, t)$, односно има нормалну расподјелу са очекивањем 0 и дисперзијом $t > 0$. Конструкција Брауновог кретања, односно доказ да математички објекат дефинисан својствима $(1)-(4)$ постоји, веома је сложена, а није од пресудног значаја за рад. Стога, у наставку наводимо нека једноставна својства Брауновог кретања која слиједе директно из дефиниције.

Процес B_t из претходне дефиниције креће од нуле. Уколико нам је потребно да процес креће од неке тачке x, онда посматрамо процес $x + B_t$. Из услова (2) слиједи

[4] Norbert Wiener, 1894-1964, амерички математичар

да су прираштаји процеса B стационарни, што значи да за свако $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $h > 0$, расподјела случајних величина $B_{t_1+h} - B_{t_0+h}, \ldots B_{t_n+h} - B_{t_{n-1}+h}$ не зависи од h. Ово својство се још назива и својство временске хомогености Брауновог кретања. Из својства независности и стационарности прираштаја Брауновог кретања слиједи и да је он процес Маркова. Неформално говорећи, ово значи да уколико је дато тренутно стање процеса, будуће стање процеса не зависи од прошлих стања.

Винеров процес који задовољава услов (3) назива се још и стандардан или стандардизован Винеров процес. У општем случају, услов (3) може да се замијени сљедећим условом

(3') За све $0 \leqslant s \leqslant t,\ B_t - B_s \sim \mathcal{N}(\mu(t-s),\, \sigma^2(t-s))$,

и тада се процес $(B_t)_{t \geqslant 0}$ назива Брауново кретање или Винеров процес са параметром помјераја μ и дисперзијом σ^2. Уколико је $(X_t)_{t \geqslant 0}$ Брауново кретање са параметром помјераја μ и дисперзијом σ^2, а $(B_t)_{t \geqslant 0}$ стандардно Брауново кретање, тада је

$$X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Напоменимо још да се Брауново кретање може посматрати као случајно лутање у бесконачно малим временским тренуцима дужине Δt, чији су прираштаји

$$\Delta B_t := B_{t+\Delta t} - B_t \simeq \mathcal{N}(0,\, \Delta t)$$

у временском интервалу $[t, t + \Delta t]$ апроксимирани Бернулијевом случајном величином

$$\Delta B_t = \pm\sqrt{\Delta t}$$

са једнаким вјероватноћама $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. За више детаља о оваквој конструкцији читалац се упућује на [4].

Теорема 1.3. Нека је $(B_t)_{t \geqslant 0}$ Брауново кретање са параметром помјераја μ и дисперзијом σ^2, тј. $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t,\, \sigma^2 t)$. Тада је коваријација

$$cov(B_t, B_s) = \sigma^2 min\{s, t\}.$$

Доказ. Видјети [5]. □

Теорема 1.4. [Транслаторна инваријантност Брауновог кретања]
За фиксно $t_0 \geqslant 0$, стохастички процес $\widetilde{B}_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ је такође процес Брауновог

кретања.

Доказ. Једноставно се показује да процес $\widetilde{B}_t$ задовољава својства (1) – (4) Брауновог кретања. За свако $s < t$ важи

$$\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s = B_{t+t_0} - B_{s+t_0}. \tag{1.1}$$

Из услова (3) дефиниције Брауновог кретања за B_t слиједи да случајна величина $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$ има нормалну расподјелу са очекивањем 0 и дисперзијом $(t+t_0)-(s+t_0) = t-s$, одакле добијамо да $\widetilde{B}_t$ задовољава својство (3). Да бисмо испитали својство (2) за $\widetilde{B}_t$ претпоставимо да је $t_0 > 0$. Тада, за свако $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ важи $0 < t_0 < t_1 + t_0 < \cdots < t_n + t_0$. На основу услова (3) за процес B_t слиједи да су $B_{t_k+t_0} - B_{t_{k-1}+t_0}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ независне случајне величине. Стога, на основу једнакости (1.1) добијамо да су случајне величине $\widetilde{B}_{t_k} - \widetilde{B}_{t_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ независне, па $\widetilde{B}_t$ задовољава својство (2) Брауновог кретања. □

Својство транслаторне инваријантности Брауновог кретања нам говори да Брауново кретање у сваком тренутку креће испочетка као нов процес Брауновог кретања.

Нека је надаље T интервал у $\mathbb{R}$, или скуп позитивних цијелих бројева.

Дефиниција 1.5. Филтрација на T је неопадајућа фамилија $\{\mathcal{F}_t \ : \ t \in T\}$ σ-алгебри, односно $\{\mathcal{F}_t\}$ је колекција свих могућих догађаја генерисаних са $\{X_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ до тренутка t. Стохастички процес X_t, $t \in T$, је адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t \ : \ t \in T\}$ ако је за свако t, случајна величина X_t $\mathcal{F}_t$ мјерљива.
Случајна величина X_t је $\mathcal{F}_t$ мјерљива ако све што знамо о X_t зависи само од информација доступних до тренутка t. Фамилија $\{\mathcal{F}_t \ : \ t \in T\}$ може се посматрати као неопадајући проток информација генерисаних процесом (X_t).

Напомена 1.6. Услов адаптираности случајног процеса X_t у односу на филтрацију $\mathcal{F}_t$ можемо записати као $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$.

Напомена 1.7. σ-алгебра $\mathcal{F}$ је комплетна ако из $A \in \mathcal{F}$ и $P(A) = 0$ слиједи $B \in \mathcal{F}$ за сваки подскуп $B \in A$. Надаље претпостављамо да су све σ-алгебре $\mathcal{F}_t$ комплетне.

Примјер 1.8. Вријеме доспијећа европске опције T је $\mathcal{F}_t$ мјерљиво за све $t \in T$, јер је вријеме доспијећа дефинисано опцијом у тренутку $t = 0$. Вријеме доспијећа америчке опције τ након тренутка t није $\mathcal{F}_t$ мјерљиво, јер се односи на догађај у будућности.

Дефиниција 1.9. Нека је $(X_t)_{t\in T}$ стохастички процес адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$ и $\mathbb{E}\,|X_t| < \infty$ за све $t \in T$. Тада је (X_t) мартингал у осносу на $\{\mathcal{F}_t\}$ ако за свако $s \leqslant t$ у T важи

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \text{ скоро сигурно.} \tag{1.2}$$

Интуитивно, стохастички процес $(X_t)_{t\in T}$ је мартингал уколико је условно очекивање случајне величине X_t при услову да су нам доступне све информације до тренутка s једнако баш X_s.

Примјер 1.10. Да бисмо још боље приближили појам мартингала интуицији, претходну дефиницију можемо посматрати у случају процеса са дискретним временом $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T = \mathbb{N}$. Тада услов (1.2) дефиниције гласи

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}. \tag{1.3}$$

Нека је X_i исход $i-$те рунде неке фер игре, док је X_n богатство играча у тренутку n. Услов (1.3) нам говори да очекивано богатство играча у тренутку n, који има све информације о исходу игре у претходних $n-1$ корака, износи X_{n-1}. Другим ријечима, не постоји сигуран начин зараде за играча уколико је игра фер.

Напомена 1.11. Сваки случајни процес који је мартингал је адаптиран у односу на своју природну филтрацију. За процес са непрекидним временом природна филтрација је $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s \ : \ s \leqslant t\}$, док је за онај са дискретним временом $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_n\} = \sigma\{X_0, \ldots, X_n\}$. Уколико филтрација није експлицитно наведена, онда подразумијевамо да радимо са природном филтрацијом.

Примјер 1.12. Појам мартингала је уопштење низа парцијалних сума које произилазе из низа X_n независних и једнако расподијељених случајних величина са очекивањем нула у смислу да се сваки мартингал у дискретном времену може записати као процес дефинисан парцијалним сумама некорелисаних случајних величина са очекивањем нула. Нека је $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $X_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је низ S_n мартингал. Да бисмо се увјерили да је процес $\{S_n\}$ мартингал покажимо да за њега важе све претпоставке дефиниције 1.9.

1. На основу неједнакости троугла важи $\mathbb{E}\,|S_n| = \mathbb{E}\,|X_0 + \cdots + X_n| \leqslant n\,\mathbb{E}\,|X_1| < \infty$.

2. Процес S_n је адаптиран у односу на филтрацију $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$, јер је $\sigma(S_n) \subset \sigma(X_n)$. Тачније, важи $\sigma(S_n) = \sigma(X_n)$.

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}|\sigma(S_n)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n+1} X_k|X_0, X_1, \ldots, X_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} X_k|X_0, X_1, \ldots, X_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_0, X_1, \ldots, X_n\right] \\
&= \mathbb{E}[f(X_0, X_1, \ldots, X_n)|X_0, X_1, \ldots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_0, X_1, \ldots, X_n] \\
&= f(X_0, X_1, \ldots, X_n) + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_0, X_1, \ldots, X_n] \\
&= \sum_{k=0}^{n} X_k + \mathbb{E}\left(X_{n+1}\right) = S_n + 0 = S_n.
\end{aligned}$$

Дакле, процес $\{S_n\}$ је мартингал у односу на своју природну филтрацију уколико је $\mathbb{E}(X_n) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Примјер 1.13. Претпоставимо да је $T = \mathbb{N}$. Нека X_n представља цијену акције на дан n. У овом контексту можемо неформално казати да је очекивана вриједност цијене акције сутра, при свим доступним информацијама које имамо данас, једнака данашњој цијени акције. Очекивано је да цијене акција на берзи приближно имају ово својство - на скали од једног дана. На примјер, ако цијена акције данас износи 50 долара и очекује се да ће сутра цијена износити 60 долара, онда би инвеститор једноставно могао остварити профит тако што данас купи акцију, а сутра је прода. Међутим, ако би ово била јавна информација, онда би и други инвеститори хтјели да купе акцију по цијени од 50 долара. Власници акција би тада одбијали да продају акцију по цијени од 50 долара и цијена би брзо достигла вриједност 60 долара данас. Детаљнију примјену теорије мартингала у финансијама видјећемо у наставку у одјељцима који се односе на вјероватносне мјере неутралне од ризика и коришћење мартингала за вредновање опција.

Теорема 1.14. Брауново кретање $(B_t)_{t \geqslant 0}$ је мартингал.

Доказ. Нека је $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s \ : \ s \leqslant t\}$. Тада за свако $s \leqslant t$ важи

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s].$$

Како је $B_t - B_s$ независно од $\mathcal{F}_s$, слиједи да је $\mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s]$. Знамо да је $\mathbb{E}(B_t) = 0$, па из линеарности математичког очекивања слиједи да је $\mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = 0$. Са друге стране, $\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$, јер је случајна величина B_s мјерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}_s$. Дакле, $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$ за свако $s \leqslant t$, па закључујемо да је B_t мартингал. У ствари, Брауново кретање је најједноставнији стохастички мартингалски процес са временским параметром у неком интервалу (процес са непрекидним временом). □

1.4 Моделовање кретања цијена вриједносних папира преко геометријског Брауновог кретања

Башеље је моделовао процес кретања цијена вриједносних папира на берзи помоћу Брауновог крерања. Тачније, у његовом моделу је процес кретања цијена вриједносних папира (S_t) моделован као $S_t := B_t$, гдје је B_t Брауново кретање са параметром помјераја μ и дисперзијом σ^2. Са S_0 обиљежавамо цијену акције у почетном тренутку, а S_t је цијена акције након временског интервала дужине t. Он је претпостављао да за све ненегативне вриједности y и t, колекција цијена S_y, $y \geqslant 0$, задовољава услов да случајна величина $S_{t+y} - S_y$ не зависи од тога какве су биле цијене вриједносних папира до тренутка y, као и услов да случајна величина $S_{t+y} - S_y$ има нормалну $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Башељеов модел има један очигледан недостатак - цијена вриједносног папира има нормалну расподјелу, па може бити негативна. Није могуће да цијена акције буде негативна, иако се у пракси може десити да цијена робе или ресурса на коју се акција односи постане негативна. На примјер, у мају 2020. године је дошло до негативних цијена нафте, јер су цијене фјучерс уговора на нафту постале негативне [4]. Још један недостатак се огледа у томе да се у моделу претпоставља да разлика, односно промјена, у цијени вриједносног папира на интервалу исте дужине има исту расподјелу, без обзира на то колика је та цијена била на почетку интервала. Оваква претпоставка није оправдана. Модел који превазилази недостатке Башељеовог модела је модел геометријског Брауновог кретања. Наиме, економиста Пол Самуелсен[5] је око 1965. године поново открио идеје Башељеа које су му послужиле као основа за нови модел кретања цијена вриједносних папира који се данас користи као модел многих финансијских процеса.

Дефиниција 1.15. Стохастички процес $(S_t)_{t\geqslant 0}$ је геометријско Брауново кретање са параметром помјераја μ и параметром волатилности $\sigma > 0$ ако задовољава

[5] Paul Samuelson, 1915-2009, амерички економиста

стохастичку диференцијалну једначину

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{1.4}$$

гдје је $(B_t)_{t\geqslant 0}$ стандардно Брауново кретање. Једначину (1.4) можемо другачије записати као

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

одакле видимо да промјена цијене акције, односно добит од акције током времена зависи од два фактора: константне добити μdt и случајне добити σdB_t параметризоване параметром волатилности σ. Параметар помјераја μ представља брзину којом се мијења очекивана вриједност процеса. Он описује дугорочно понашање процеса, односно да ли он тежи ка стању мировања, експлодира или осцилује. У контексту цијена акција, оне зависе од параметра помјераја μ који нам говори о томе колико ће инвеститор профитирати од учешћа у ризичној инвестицији.

Да би се ова једначина ријешила потребно је познавати методе стохастичке анализе што је изван оквира овог рада. Стога, рјешење једначине наводимо као теорему без доказа. За доказ читаоца упућујемо на [4].

Теорема 1.16. Рјешење стохастичке диференцијалне једначине (1.4) је дато са

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

□

У наставку наводимо две алтернативне дефиниције геометријског Брауновог кретања одакле ћемо извести својства процеса и расподјелу случајне величине S_t.

Дефиниција 1.17. Стохастички процес $(S_t)_{t\geqslant 0}$ је геометријско Брауново кретање са параметром помјераја μ и параметром волатилности $\sigma > 0$ уколико за свако $y,\ t \geqslant 0$ важи:

1. случајна величина $\frac{S_{t+y}}{S_t}$ не зависи од цијена које су биле до тренутка y,

2. случајна величина $\ln\left(\frac{S_{t+y}}{S_y}\right)$ је случајна величина која има $\mathcal{N}(\mu t,\, \sigma^2 t)$ расподјелу.

У поређењу са Башељеовим моделом гдје се разлика цијена акција у неком временском интервалу директно моделује Брауновим кретањем, у овом моделу је разлика логаритама будуће цијене и садашње цијене процес Брауновог кретања.

Овиме су ријешени недостаци Башељеовог модела - цијене акција никада нису негативне и умјесто разлике цијена акција посматра се њихов количник. Занима нас како да одредимо математичко очекивање и дисперзију за цијене акција у неком будућем тренутку t. То можемо да урадимо уколико су познати почетна цијена акције S_0, параметри помјераја μ и волатилности σ (који се у пракси добијају статистичким методама). Прво нам је потребно да уведемо дефиницију лог-нормалне расподјеле.

Дефиниција 1.18. Случајна величина Y има лог-нормалну расподјелу са параметрима μ и σ^2 ако је $Y = e^X$, гдје је X случајна величина која има нормалну расподјелу са очекивањем μ и дисперзијом σ^2. Једноставно се може показати да лог-нормална расподјела има сљедеће математичко очекивање и дисперзију:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\\ D(Y) &= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1),\end{aligned}$$

за детаље видјети [5].

Дефиниција 1.19. Ако је $(B_t)_{t\geqslant 0}$ Брауново кретање, тада је стохастички процес $(S_t)_{t\geqslant 0}$ дефинисан као

$$S_t = e^{B_t}$$

геометријско Брауново кретање.

У наставку ћемо претпостављати да процес промјене цијена вриједносног папира током времена $(S_t)_{t\geqslant 0}$ представља процес геометријског Брауновог кретања са параметрима μ и σ^2. Уколико нам је позната цијена вриједносног папира S_0 у почетном тренутку $t = 0$ на основу претходних резултата можемо одредити математичко очекивање и дисперзију цијене у произвољном тренутку $t > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t) &= \mathbb{E}\left(\frac{S_t}{S_0}S_0\right) = S_0\,\mathbb{E}\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\\ &= S_0\,\mathbb{E}\left(e^{\ln\frac{S_t}{S_0}}\right) = S_0 e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}} = S_0 e^{t(\mu+\frac{\sigma^2}{2})},\end{aligned}$$

гдје смо искористили чињеницу да случајна величина $e^{\ln\frac{S_t}{S_0}}$ има нормалну расподјелу са параметрима μt и $\sigma^2 t$. Надаље,

$$\begin{aligned}D(S_t) &= D\left(\frac{S_t}{S_0}S_0\right) = S_0^2 D\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\\ &= S_0^2 D\left(e^{\ln\frac{S_t}{S_0}}\right) = S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t}\left(e^{\sigma^2 t}-1\right) = S_0^2 e^{t(2\mu+\sigma^2)}(e^{\sigma^2 t}-1).\end{aligned}$$

Теорема 1.20. Геометријско Брауново кретање је процес Маркова.

Доказ. Нека је $h > 0$. Треба показати да уколико нам је познато тренутно стање процеса S_t, будуће стање процеса S_{t+h} не зависи од догађаја до тренутка t, односно не зависи од $\{S_u \ : \ 0 \leqslant u < t\}$.

$$\begin{aligned} S_{t+h} &= e^{B_{t+h}} \\ &= e^{B_t + B_{t+h} - B_t} \\ &= e^{B_t} e^{B_{t+h} - B_t} \\ &= S_t e^{B_{t+h} - B_t}, \end{aligned}$$

одакле закључујемо да ако је S_t познато, онда будуће стање процеса S_{t+h} зависи само од будућег прираштаја Брауновог кретања $B_{t+h} - B_t$. Знамо да су прираштаји Брауновог кретања независни, па будуће стање S_{t+h} не зависи од претходних стања. Овиме смо показали да важи својство Маркова за геометријско Брауново кретање.

□

Лема 1.21. [Лема о дисконтовању] Посматрајмо процес кретања цијена акција $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ задат преко геометријског Брауновог кретања са помјерајем μ и волатилношћу σ, односно

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \qquad t \geqslant 0.$$

Тада процес дисконтованих цијена акција

$$(\tilde{S}_t)_{t \in \mathbb{R}^+} = (e^{-rt} S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$$

задовољава једначину

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t.$$

□

Примјер 1.22. Геометријско Брауново кретање без помјераја ($\mu = 0$)

$$S_t := S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}$$

је мартингал.

Заиста, имамо да важи

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s] \\
&= S_0 e^{-\sigma^2 t/2}\, \mathbb{E}[e^{\sigma B_t}|\mathcal{F}_s] \\
&= S_0 e^{-\sigma^2 t/2}\, \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)+\sigma B_s}|\mathcal{F}_s] \\
&= S_0 e^{-\sigma^2 t/2+\sigma B_s}\, \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s] \\
&= S_0 e^{-\sigma^2 t/2+\sigma B_s}\, \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}] \\
&= S_0 e^{-\sigma^2 t/2+\sigma B_s} e^{\mathbb{E}[(B_t-B_s)\sigma]+\frac{1}{2}D[(B_t-B_s)\sigma]} \\
&= S_0 e^{-\sigma^2 t/2+\sigma B_s} e^{(t-s)\sigma^2/2} \\
&= S_0 e^{\sigma B_s - \sigma^2 s/2} \\
&= X_s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t,
\end{aligned}
$$

па из дефиниције закључујемо да је процес $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ мартингал.

1.5 Принцип неутралности од ризика, одсуство арбитраже, комплетност тржишта и вјероватносна мјера неутрална од ризика

Основне ознаке и дефиниције

Подразумијевамо да радимо са моделом тржишта у непрекидном времену, односно $t \in \mathbb{R}^+$. Посматрамо укупно $d+1$ финансијских средстава у тренутку $t \in \mathbb{R}^+$ нумерисаних са $0, 1, \ldots, d$. Цијене тих средстава означавамо случајним вектором

$$S_t = (S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(d)}),$$

који формира стохастички процес $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Претпостављамо да је $S_t^{(0)}$ неко безризично финансијско средство са каматном стопом r, односно имамо

$$S_t^{(0)} = S_0^{(0)} e^{rt}, \qquad t \geqslant 0.$$

Дефиниција 1.23. [Процес дисконтованих цијена]
Вектор дисконтованих цијена

$$X_t := (\tilde{S}_t^{(0)}, \tilde{S}_t^{(1)}, \ldots, \tilde{S}_t^{(d)}), \qquad t \geqslant 0,$$

је дефинисан са

$$\tilde{S}_t^{(k)} = e^{-rt} S_t^{(k)}, \qquad t \geqslant 0,\ k = 0, 1, \ldots, d.$$

Дефиниција 1.24. Портфолио стратегија (енг. *portfolio strategy*) је стохастички процес $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, гдје $\xi_t^{(k)}$ означава количину (може бити фракциона) средства k у портфолију у тренутку $t \geqslant 0$.
Вриједност портфолио стратегије $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ у тренутку $t \geqslant 0$ је дефинисана скаларним производом

$$V_t = \xi_t \cdot S_t = \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} S_t^{(k)}, \qquad t \geqslant 0.$$

Дисконтована вриједност портфолија је дефинисана са

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t :&= e^{-rt} V_t \\
&= e^{-rt} \xi_t \cdot S_t \\
&= e^{-rt} \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} S_t^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} \tilde{S}_t^{(k)} \\
&= \xi_t \cdot X_t, \qquad t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ефекат дисконтовања од временског тренутка t до временског тренутка 0 се огледа у дијељењу свих цијена са e^{rt} како бисмо све цијене могли поредити у тренутку $t = 0$.

Арбитража

Један од неизоставних принципа који примјењујемо приликом вредновања финансијких деривата се односи на одсуство арбитраже. Под арбитражом се подразумијева куповина робе, валута, или хартија од вриједности на једном тржишту у циљу продаје истих на другом тржишту и профитирања од разлика у цијени. Другим ријечима, арбитража је могућност прављења чистог профита без ризика. Жаргонски речено, она представља могућност да се „побиједи" тржиште. Надаље претпостављамо да радимо са допустивом портфолио стратегијом (енг. *admissible portfolio strategy*) која подразумијева да је укупна вриједност портфолија V_t ненегативна за све $t \in [0, T]$. Уведимо сада формалну математичку дефиницију арбитраже.

Дефиниција 1.25. Портфолио стратегија $(\xi_t^{(k)})_{t\in[0,T]}, k = 0, 1, \ldots, d$ са вриједношћу

$$V_t = \xi_t \cdot S_t = \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} S_t^{(k)}, \qquad t \geqslant 0,$$

представља могућност арбитраже уколико су сви сљедећи услови испуњени:

(*i*) $V_0 \leqslant 0$ у тренутку $t = 0$ [на почетку крећемо од портфолија без трошкова, или смо у дугу],

(*ii*) $V_T \geqslant 0$ у тренутку T [на крају посматраног временског интервала вриједност портфолија је ненегативна],

(*iii*) $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$ у тренутку $t = T$ [правимо профит са не-нула вјероватноћом].

Услов (*ii*) имплицира да инвеститор не жели да има губитке, (*iii*) значи да инвеститор жели да у неком тренутку у току посматраног интервала има позитивну добит, док услов (*i*) означава да он креће без капитала или да је чак у дуговима.

Валуација неутрална од ризика

У финансијској математици често се сусрећемо са појмом валуације неутралне од ризика (енг. *Risk Neutral Valuation*). Испоставља се да је овај принцип од кључног значаја за одређивање фер цијене опције, односно премије. По овом принципу цијена опције данас је садашња вриједност очекиване будуће добити, односно она је дисконтована очекивана вриједност добити опције при безризичној каматној стопи. Прије него што уведемо математичку формулацију покушаћемо да читаоцу интуитивно приближимо овај појам.

Принцип неутралности од ризика почива на идеји да када вреднујемо опције можемо сматрати да је свијет из ког посматрамо ситуацију неутралан у односу на ризик, односно да су сви инвеститори равнодушни према ризику који доносе промјене цијена акција током времена. У вези са тим јавља се термин премије за ризик (енг. *risk premium*) која представља накнаду која се додјељује инвеститору за улагање у ризично средство, односно за преузимање већег инвестиционог ризика. Ова мјера ризика одражава инвеститоров однос према ризику, односно његову толеранцију додатног ризика у инвестицији. У свијету неутралном од ризика не постоји премија за ризик, односно инвеститори не траже премију за ризик и сваки ток новца се дисконтује по безризичној каматној стопи r.

Посматрајмо акцију чија је цијена у тренутку $t = 0$ једнака S_0. Претпоставимо да смо умјесто у акцију новац уложили у банку по фиксној безризичној каматној стопи r. Означимо са Δt прираштај времена на чијем крају долази до промјене цијене акција. Инвестирањем у банку бисмо након времена Δt на нашем банковном рачуну имали износ $S_0 e^{\Delta t}$. Инвестирање у акцију је неутрално од ризика ако је очекивана вриједност акције баш једнака износу који бисмо добили да смо умјесто у акцију новац уложили у банку.

Надаље уводимо појам вјероватносних мјера које су неутралне од ризика (енг. *Risk-Neutral Probability Measures*) које су познате и под називом мартингалске мјере у непрекидном времену. Оне су нам неопходне да бисмо формализовали валуацију деривата неутралну од ризика.

Вјероватносне мјере неутралне од ризика

Вјероватносна мјера неутрална од ризика, у ознаци $\mathbb{P}^*$, је мјера при којој је добит ризичног финансијског средства током временског интервала $[u, t]$ једнака добити безризичног средства која је дата са

$$S_t^{(0)} = e^{(t-u)r} S_u^{(0)}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant t.$$

Присјетимо се да је Брауново кретање мартингал у односу на природну филтрацију $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ генерисану тим кретањем, односно

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u \ : \ 0 \leqslant u \leqslant t), \qquad t \geqslant 0.$$

Дефиниција 1.26. Вјероватносна мјера $\mathbb{P}^*$ на Ω је неутрална од ризика уколико важи

$$\mathbb{E}^*[S_t^{(k)} | \mathcal{F}_u] = e^{(t-u)r} S_u^{(k)}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant t, \ k = 1, 2, \ldots, d, \tag{1.6}$$

гдје је $\mathbb{E}^*$ очекивање при мјери $\mathbb{P}^*$. Када говоримо о финансијама у непрекидном времену, мартингалско својство нам је од кључног значаја. Оно служи за карактеризацију вјероватноће неутралне од ризика, извођење парцијалних диференцијалних једначина за вредновање деривата као што је Блек-Шолсова једначина коју ћемо видјети у наставку и за израчунавање условних очекивања.

Теорема 1.27. Вјероватносна мјера $\mathbb{P}^*$ је неутрална од ризика ако и само ако је процес дисконтованих цијена ризичног финансијског средства $(\tilde{S}_t^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_+}$ мартингал у односу на $\mathbb{P}^*$, $k = 1, 2, \ldots, d$.

Доказ. Уколико је $\mathbb{P}^*$ вјероватносна мјера неутрална од ризика, онда из дефиниције слиједи

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left[\tilde{S}_t^{(k)}|\mathcal{F}_u\right] &= \mathbb{E}^*\left[e^{-rt}S_t^{(k)}|\mathcal{F}_u\right] \\
&= e^{-rt}\,\mathbb{E}^*\left[S_t^{(k)}|\mathcal{F}_u\right] \\
&= e^{-rt}e^{(t-u)r}S_u^{(k)} \\
&= e^{-ru}S_u^{(k)} \\
&= \tilde{S}_u^{(k)}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant t,
\end{aligned}$$

одакле добијамо да је процес $(\tilde{S}_t^{(k)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ мартингал у односу на $\mathbb{P}^*$, $k = 1, 2, \ldots, d$. Са друге стране, уколико је $(\tilde{S}_t^{(k)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ мартингал у односу на $\mathbb{P}^*$, онда је

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left[S_t^{(k)}|\mathcal{F}_u\right] &= \mathbb{E}^*\left[e^{rt}\tilde{S}_t^{(k)}|\mathcal{F}_u\right] \\
&= e^{rt}\,\mathbb{E}^*\left[\tilde{S}_t^{(k)}|\mathcal{F}_u\right] \\
&= e^{rt}\tilde{S}_u^{(k)} \\
&= e^{(t-u)r}S_u^{(k)}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant t,\ k = 1, 2, \ldots, d,
\end{aligned}$$

одакле по дефиницији 1.26 добијамо да је вјероватносна мјера $\mathbb{P}^*$ неутрална од ризика. □

Надаље се бавимо само оним вјероватносним мјерама $\mathbb{P}^*$ које су еквивалентне мјери $\mathbb{P}$ у смислу да дијеле исте догађаје вјероватноће нула.

Дефиниција 1.28. Вјероватносна мјера $\mathbb{P}^*$ дефинисана на $(\Omega, \mathcal{F})$ је еквивалентна вјероватносној мјери $\mathbb{P}$ уколико важи

$$\mathbb{P}^*(A) = 0 \text{ ако и само ако } \mathbb{P}(A) = 0, \text{ за све } A \in \mathcal{F}. \tag{1.7}$$

У вези са вјероватносним мјерама неутралним од ризика поставља се питање када и под којим условима оне постоје. Одговор на то питање даје нам прва фундаментална теорема о вредновању финансијских инструмената коју у наставку наводимо без доказа. За детаље о доказу ове теореме читаоца упућујемо на [6] и [7].

Теорема 1.29. [Прва фундаментална теорема о вредновању финансијских инструмената]
На тржишту нема могућности за абитражу ако и само ако постоји бар једна вјероватносна мјера неутрална од ризика $\mathbb{P}^*$. □

Примјер 1.30. Посматрајмо процес кретања акција $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ задат геометријским Брауновим кретањем са помјерајем μ и волатилношћу σ, односно

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \qquad t \geqslant 0.$$

На основу леме о дисконтовању 1.21 важи да дисконтовани процес кретања цијена акција $(\tilde{S}_t)_{t\in\mathbb{R}^+} = (e^{-rt}S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ задовољава једначину

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t,$$

и процес дисконтованих цијена

$$\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t = S_0 e^{(\mu-r)t+\sigma B_t - \sigma^2 t/2}$$

је мартингал при мјери $\mathbb{P}$ када је $\mu = r$. Тачније, ако важи $\mu = r$, онда је процес дисконтованих цијена $(\tilde{S}_t)_{t\in\mathbb{R}^+} = (S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}^+}$ мартингал при мјери $\mathbb{P} = \mathbb{P}^*$ која је неутрална од ризика.

Када знамо да при одсуству арбитраже постоји нека вјероватносна мјера неутрална од ризика надаље се природно намеће питање јединствености те мјере. Одговор на то питање даје друга фундаментална теорема о вредновању финансијских инструмената. Прије него што наведемо теорему потребно је да се упознамо са појмовима самофинансирајућег портфолија (енг. *self-financing portfolio*) и комплетности тржишта (енг. *market completeness*).

Самофинансирајући портфолио

Самофинансирајући портфолио можемо интуитивно разумјети као портфолио у ком се подразумијева да уколико нема неочекиваних прилива и одлива новца, куповина новог финансијског средства може да се оствари продајом већ постојећег средства у портфолију. Посматрајмо прво случај дискретног времена. Почетна цијена портфолија на почетку временског интервала $(t-1, t]$ је

$$\xi_t \cdot S_{t-1} = \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} S_{t-1}^{(k)}, \tag{1.8}$$

гдје је $t-1$ тренутак „отварања” тржишта, односно берзе. Када се тржиште „затвара” на крају временског интервала $(t-1, t]$, вриједност портфолија на затварању је

$$\xi_t \cdot S_t = \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} S_t^{(k)}, \tag{1.9}$$

$t = 1, 2, \ldots, N$. Након нове алокације средстава портфлија ξ_{t+1} добијамо и нову вриједност портфолија на отварању тржишта

$$\xi_{t+1} \cdot S_t = \sum_{k=0}^{d} \xi_{t+1}^{(k)} S_t^{(k)} \tag{1.10}$$

на почетку сљедећег трговинског периода $(t, t+1], t = 0, 1, \ldots, N-1$. Напоменимо да се овдје претпоставља да цијена акције S_t остаје константна „преко ноћи", односно у периоду од краја интервала $(t-1, t]$ до почетка интервала $(t, t+1]$, $t = 1, 2, ..., N-1$. Портфолио је самофинансирајући ако се вриједности (1.9) и (1.10) поклапају. Другим ријечима, самофинансирајући услов имплицира да нема ни прилива ни одлива новца у портфолију у току периода између два дана на тржишту. На почетку новог трговинског периода инвеститор треба поново да инвестира укупну вриједност портфолија добијену на крају трговинског периода, односно интервала $(t-1, t]$.

Вратимо се сада случају непрекидног времена. Дефиниција самофинансирајућег портфолија је тада аналогна као у дискретном времену. Означимо са $\xi_t^{(k)}$ вриједност која је уложена у тренутку t у временском интервалу $[t, t+\Delta t)$ у акцију $S_t^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, d$ и нека су

$$\xi_t = (\xi_t^{(k)}),\ k = 0, 1, \ldots, d, \qquad S_t = (S_t^{(k)}),\ k = 0, 1, \ldots, d$$

одговарајући придружени процеси вриједности портфолија и цијена акција. Вриједност портфолија у тренутку $t \geqslant 0$ је дата са

$$V_t = \xi_t \cdot S_t = \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} S_t^{(k)}.$$

Дефиниција 1.31. Портфолио стратегија је самофинансирајућа ако вриједност портфолија остаје непромијењена након ажурирања портфолија са ξ_t на $\xi_{t+\Delta t}$, односно

$$\xi_t \cdot S_{t+\Delta t} = \sum_{k=0}^{d} \xi_t^{(k)} \cdot S_{t+\Delta t}^{(k)} = \sum_{k=0}^{d} \xi_{t+\Delta t}^{(k)} \cdot S_{t+\Delta t}^{(k)} = \xi_{t+\Delta t} \cdot S_{t+\Delta t}. \tag{1.11}$$

Комплетност тржишта

Захтјев да је тржиште комплетно се заснива на идеји да се сва могућа предвиђања о будућим стањима тржишта могу конструисати на основу садашњих финансијских инструмената без трошкова трансакција. Ово је јака претпоставка и представља идеализацију стварног свијета. У оваквом тржишту не постоје трошкови трансакција, инвеститорима је доступна потпуна информација о тренутним цијенама робе и финансијских инструмената и постоји цијена за свако могуће средство у свакој држави свијета. Примјер модела комплетног тржишта је Блек-Шолсов модел тржишта са којим ћемо се упознати у сљедећем одјељку и у овом моделу тржишта ћемо вредновати опције.

Надаље уводимо термин контингенског захтјева (енг. *contingent claim*). Придјев „контингенски" у овом контексту значи

1. подложан случајности,

2. дешава се или постоји само при одређеним околностима, зависи од нечега.

Примјери контингенских захтјева су опције и форвард уговори.

Дефиниција 1.32. Контингенски захтјев је финансијски дериват чија је вриједност $C : \Omega \to \mathbb{R}$ случајна величина која зависи од реализација случајних догађаја. У нашем случају, случајна величина C је вриједност опције у тренутку $t = 0$.

Примјер 1.33. Европска кол опција са временом доспијећа $T = 1$ и уговореном цијеном K на акцију i је контингенски захтјев са вриједношћу C, гдје је

$$C = (S_1^{(i)} - K)^+ := \begin{cases} S_1^{(i)} - K,\ S_1^{(i)} \geqslant K, \\ 0,\ S_1^{(i)} < K. \end{cases}$$

Вриједност захтјева C је „контингенска" јер његова вриједност зависи од разних услова на тржишту, на примјер од $S_1^{(i)} > K$ и изведена је из вриједности акција на које се опција односи. Контингенски захтјев се из истог разлога назива и финансијски дериват што је термин који смо већ помињали.

Дефиниција 1.34. Контингенски захтјев са вриједношћу C је достижан уколико постоји самофинансирајућа портфолио стратегија $(\xi_t^{(k)})_{t\in[0,T],\ k=0,1,\ldots,d}$ са вриједношћу V_t таква да у тренутку доспијећа T једнакост

$$V_T = \xi_T \cdot S_T = \sum_{k=0}^{d} \xi_T^{(k)} S_t^{(k)} = C \tag{1.12}$$

важи скоро сигурно.

Примјер 1.35. Посматрајмо случај претходне дефиниције у дискретном времену, односно када је $t = 0, 1, \ldots, N$ и $T = N$ тренутак доспијећа захтјева, а контингенски захтјев о којем је ријеч европска кол опција чија је вриједност C дата у претходном примјеру 1.33. Тада се услов из претходне дефиниције своди на

$$C = \xi_N \cdot S_N = \sum_{k=0}^{d} \xi_N^{(k)} S_N^{(k)}, \qquad \mathbb{P} - \text{скоро сигурно.} \tag{1.13}$$

Када портфолио $(\xi_t)_{t=0,1,\dots,N}$ достиже вриједност посматраног контигенског захтјева, односно европске кол опције C, у тренутку доспијећа N, тј. ако важи (1.12), тада кажемо да $(\xi_t)_{t=0,1,\dots,N}$ хеџује, односно обезбјеђује од ризика вриједност захтјева C. Када самофинансирајући портфолио $(\xi_t)_{t=0,1,\dots,N}$ хеџује вриједност захтјева C, онда је цијена посматраног захтјева при одсуству арбитраже $\pi_t(C)$ у тренутку t дата са

$$\pi_t(C) = \xi_t \cdot S_t, \qquad t = 0, 1, \dots, N.$$

Присјетимо се да се цијене без арбитраже могу користити да би се финансијским дериватима додијелила фер цијена на тржишту. Примијетимо да у тренутку $t = N$ важи

$$\pi_N(C) = \xi_N \cdot S_N = C,$$

односно пошто је N вријеме доспијећа, цијена захтјева $\pi_N(C)$ је једнака његовој вриједности C.

Из претходног примјера закључујемо да уколико је захтјев са вриједношћу C достижан, тада је његова цијена у тренутку $t \in [0, T]$ једнака вриједности V_t самофинансирајућег портфолија који хеџује C.

Дефиниција 1.36. Модел тржишта је комплетан ако је у њему сваки контингенски захтјев достижан.

Сада имамо сву потребну математичку подлогу да наведемо другу фундаменталну теорему о вредновању финансијских инструмената чији доказ читалац може прочитати у [6] и у [7].

Теорема 1.37. [Друга фундаментална теорема о вредновању финансијских инструмената]
Модел тржишта без могућности за арбитражу је комплетан ако и само ако у њему постоји јединствена еквивалентна вјероватносна мјера $\mathbb{P}^*$ неутрална од ризика.

□

1.6 Блек-Шолс модел

Цијена европске кол опције може експлицитно да се одреди што не важи за све врсте опција. Јединствено рјешење проблема вредновања европске кол опције дато је чувеном Блек-Шолсовом формулом која представља један од најзначајнијих математичких концепата модерне финансијске математике. Сматра се да је ова формула најбољи начин утврђивања фер цијене опције.

Блек-Шолсова формула је објављена 1973. године у заједничком раду економиста Фишера Блека[6] и Роберта Шолса[7], а први комплетан доказ формуле дао је Роберт Мертон[8], који је и сковао термин Блек-Шолсовог модела. Формула је довела до наглог скока трговине опцијама и пружила потребни математички кредибилитет активностима одбора за трговину опцијама у Чикагу и другим тржиштима опција широм свијета. Мертон и Шолс су за свој рад добили Нобелову награду за економију 1997. године, док је Блек преминуо 1995. године, па није доживио ово велико признање, али је његов допринос поменут. Познавање претпоставки Блек-Шолсовог модела је од кључног значаја за његову исправну примјену. Многе од претпоставки модела које наводимо у наставку не важе у стварном свијету, па слијепа примјена Блек-Шолсове формуле у пракси може довести до нетачних резултата.

Претпоставке основног Блек-Шолсовог модела су:

1. Безризична каматна стопа. Позната је вриједност каматне стопе, све подлијеже истој каматној стопи, односно иста је каматна стопа за оне који улажу и оне који се задужују. Каматна стопа је константна.

2. Процес кретања цијена акција је случајно лутање са дисперзијом која је пропорционална квадрату цијена акција. Стога је расподјела цијена акција у коначном интервалу лог-нормална, односно цијене акција прате геометријско Брауново кретање са константним помјерајем и волатилности кретања. Уколико помјерај и волатилност зависе од времена, онда може да се изведе одговарајућа Блек-Шолсова формула све док волатилност није случајна.

3. Нема исплате дивиденди у току трајања опције.

4. Опција мора бити европска, односно може да се активира искључиво у тренутку доспијећа опције.

[6] Fischer S. Black, 1938-1995, амерички економиста
[7] Myron S. Scholes, 1941-, канадско-амерички економиста
[8] Robert C. Merton, 1944-, амерички економиста

5. Нема могућности за арбитражу, односно прављења сигурног профита без ризика.

6. Претпоставка о идеалној банци. Позајмице и улози у банку имају исту каматну стопу и увијек можемо купити или продати акцију или опцију коју желимо по тржишној цијени. Нема трошкова трансакција и наплате услуга банке. Валуација неутрална од ризика.

7. Дозвољена је кратка продаја. Продавац који не посједује акцију ће прихватити цијену акције коју одређује купац и прихватиће да се нагоди на неки одређени датум у будућности тако што ће му платити износ цијене коју акција има на тај одређени датум.

Надаље претпостављамо да важе све претпоставке Блек-Шолсовог модела.

Блек-Шолсова једначина

Блек-Шолсова једначина је стохастичка парцијална диференцијална једначина која се користи за вредновање европских ванила опција под условом да важе претпоставке о самофинансирајућем портфолију и одсуству арбитраже. Наводимо једначину у случају европске кол или пут опције на акције без исплате дивиденди:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S^2} - rV = 0, \tag{1.14}$$

гдје је $V = V(S,t)$ функција цијене опције која зависи од цијене акције S и времена t, r је безризична каматна стопа, σ је волатилност акције. Кретање цијена акција се моделује геометријским Брауновим кретањем. Да бисмо боље разумјели саму једначину и дали њену интерпретацију потребно је да је запишемо на сљедећи начин:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S^2} = rV - rS\frac{\partial V}{\partial S}. \tag{1.15}$$

Лијева страна једначине представља збир промјене вриједности опције V кроз вријеме t и конвексности вриједности опције у односу на цијену опције S. Десна страна једначине представља безризичну добит од дуге позиције у уговору и кратке позиције која се састоји од $\frac{\partial V}{\partial S}$ дионица акција. Оно што нас занима јесте како се мијења цијена опције $V(S,t)$ у зависности од промјене параметара од којих та цијена зависи. У вези са тим, у једначини (1.15) препознајемо такозвана *грчка* *слова* (енг. *Greek Letters, Greeks*), која мјере различите димензије ризика за дату позицију опције и користе се у циљу обезбјеђења портфолија од ризика. Позиција опције може бити дуга (енг. *long position*) што значи да је инвеститор купио опцију и да је посједује, или кратка (енг. *short position*) што значи да је инвеститор продао опцију. У Блек-Шолсовој једначини се појављују грчка слова делта (Δ), гама (Γ) и тета (Θ).

Дефиниција 1.38.

- *Делта* (Δ) представља интензитет промјене цијене опције V у односу на промјену тренутне цијене S одговарајуће акције

$$\Delta(V) = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

- *Гама* (Γ) представља интензитет промјене вриједности Δ у односу на промјену тренутне цијене S одговарајуће акције. Другим ријечима, гама је конвексност вриједности опције у односу на тренутну цијену акције

$$\Gamma(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

- *Тета* (Θ) представља интензитет промјене вриједности цијене опције V у односу на вријеме t

$$\Theta(V) = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

- *Ро* (ρ) представља интензитет промјене вриједности цијене опције V у односу на безризичну каматну стопу r

$$\rho(V) = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

- *Вега* (ν) представља интензитет промјене вриједности цијене опције V у односу на волатилност акције σ

$$\nu(V) = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Сада једначину (1.15) можемо записати на сљедећи начин:

$$\Theta(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma(V) = rV - rS\Delta(V), \tag{1.16}$$

одакле увиђамо да се безризична добит комбинованог портофлија акција и опција на десној страни једначине у бесконачно малом временском интервалу може изразити као збир тете и гаме. У овом запажању се огледа принцип вредновања неутралан од ризика. Наиме, вриједност тете је најчешће негативна пошто вриједност опције опада како се вријеме приближава времену доспијећа опције, а вриједност гаме је најчешће позитивна што рефлектује добит коју портфолио прима од посједовања опције. Губитак од тете и добитак од гаме се због тога поништавају што доводи до добити у портфолију по безризичној каматној стопи. Стога, Блек-Шолсова једначина задовољава принцип валуације неутралан од ризика.

Још један начин да закључимо да у Блек-Шолсовој једначини важи принцип неутралности од ризика је директним посматрањем једначине (1.14). Наиме, на први поглед увиђамо да Блек-Шолсова једначина не зависи од помјераја μ, односно не зависи од очекиване добити акције. Једначина не садржи ниједан параметар који рефлектује инвеститоров однос према ризику и преференције, односно једначина зависи само од параметара који су независни од ризика.

Блек-Шолсова формула

Блек-Шолсова једначина са одговарајућим граничним условима се може извести за различите финансијске деривате и у општем случају се рјешава методама нумеричке анализе. Једначина има аналитичко рјешење дато Блек-Шолсовом формулом у случају када се она односи на европску кол или пут опцију. Блек-Шолсова једначина и одговарајући гранични услови за европску кол опцију гласе

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial C}{\partial S^2} - rC = 0, \\ C(0,t) = 0, \text{ за све t}, \\ C(S,t) \to S - K \text{ када } S \to \infty, \\ C(S,T) = (S-K)^+, \end{cases} \tag{1.17}$$

гдје је $C = C(S,t)$ функција цијене европске кол опције.

Теорема 1.39. [Блек-Шолс формула]
Цијена европске кол опције у тренутку $0 < t < T$ са уговореном цијеном K,

временом до истека опције T, безризичном каматном стопом r износи

$$C(S_t, t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{1.18}$$

гдје је

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \text{ и}$$

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2} du$$

је функција расподјеле стандардне нормалне случајне величине.

Доказ. Погледати [5] за елементарни доказ без употребе теорије стохастичке интеграције, или [4] који је користи. □

Овом теоремом, под претпоставком да важи принцип неутралности од ризика, дата је експлицитна формула за цијену европске кол опције без дивиденди која је једнака садашњој вриједности очекиване добити у времену t.

1.7 Вредновање опција мартингалским приступом

У „мартингалском" приступу вредновања финансијских деривата цијене опција су изражене као очекиване вриједности дисконтоване добити опције. Овај приступ се заснива на конструкцији вјероватносне мјере неутралне од ризика. У примјеру 1.30 видјели смо да је дисконтовани процес кретања цијена акција задат геометријским Брауновим кретањем мартингал при вјероватносној мјери неутралној од ризика када је параметар помјераја процеса μ једнак безризичној каматној стопи r. Посматрајмо шта се дешава у случају када је $\mu \neq r$. Означимо са $(\bar{B}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ Брауново кретање са помјерајем μ, односно

$$\bar{B}_t := \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.19}$$

гдје је коефицијент дрифта $\nu := \frac{\mu - r}{\sigma}$ тржишна цијена ризика (енг. *Market Price of Risk* (MPoR)). Тржишна цијена ризика представља разлику између добити μ

која се очекује од инвестирања у ризично средство S_t и безризичне каматне стопе r мјерену у јединицама волатилности σ.

Можемо конструисати вјероватносну мјеру неутралну од ризика $\mathbb{P}^*$ при којој је процес $(\bar{B}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ стандардно Брауново кретање. За детаљно доказивање претходне тврдње погледати [4]. Нама је она од кључне важности за одређивање цијене опције јер нас доводи до принципа валуације неутралне од ризика. Наиме, присјетимо се да из теореме 1.27 важи да на тржишту нема арбитраже ако и само ако постоји нека еквивалентна мјера неутрална од ризика $\mathbb{P}^*$ при којој је процес дисконтованих цијена

$$\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t, \qquad t \geqslant 0$$

мартингал при мјери $\mathbb{P}^*$. Додатно, из теореме 1.37 имамо да уколико је вјероватносна мјера неутрална од ризика, онда је тржиште комплетно. Једначину геометријског Брауновог кретања $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ које по Блек-Шолсовом моделу користимо за моделовање цијена акција

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \qquad t \geqslant 0$$

можемо другачије записати користећи (1.19) као

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\bar{B}_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.20}$$

чије је рјешење дато са

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2} = S_0 e^{rt + \sigma \bar{B}_t - \sigma^2 t/2}, \qquad t \geqslant 0.$$

Користећи лему о дисконтовању 1.21 имамо

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t \\ &= \sigma \tilde{S}_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t \right) \\ &= \sigma \tilde{S}_t d\bar{B}_t, \qquad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

одакле слиједи да је процес дисконтованих цијена

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t :&= e^{-rt} S_t \\ &= S_0 e^{(\mu - r)r + \sigma B_t - \sigma^2 t/2} \\ &= S_0 e^{\sigma \bar{B}_t - \sigma^2 t/2}, \qquad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

мартингал при вјероватносној мјери $\mathbb{P}^*$ која је дефинисана са

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}B_T - \frac{(\mu-r)}{2\sigma^2}T}. \tag{1.22}$$

Мјера $\mathbb{P}^*$ дефинисана са (1.22) је тражена вјероватносна мјера неутрална од ризика при којој процес Брауновог кретања са дрифтом $(\bar{B}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ постаје стандардно Брауново кретање $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Примијетимо да је вјероватносна мјера неутрална од ризика, или мартингалска мјера $\mathbb{P}^*$ еквивалентна мјери $\mathbb{P}$ чију егзистенцију и јединственост обезбјеђују теореме 1.29 и 1.37. V_t вриједност самофинансирајућег портфолија $(\xi_t)_{t\in[0,T]}$ који хеџује достижну вриједност C контингенског захтјева називамо цијеном захтјева без арбитраже и означавамо са $\pi_t(C), t \in [0,T]$. Сљедећа теорема нам даје начин да при самофинансирајућем портфолију вреднујемо контингенски захтјев користећи својство мартингала процеса кретања цијена акција.

Теорема 1.40. Нека је $(\xi_t,\nu_t)_{t\in[0,T]}$ портфолио стратегија која се састоји из безризичног финансијског средства чију цијену моделујемо процесом $(A_t)_{t\in[0,T]}$ и ризичног финансијског средства (акције) чију цијену моделујемо геометријским Брауновим кретањем $(S_t)_{t\in[0,T]}$ са вриједношћу

$$V_t = \nu_t A_t + \xi_t S_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Нека је C вриједност контингенског захтјева тако да важи

(1) $(\xi_t,\nu_t)_{t\in[0,T]}$ је самофинансирајући портфолио и

(2) $(\xi_t,\nu_t)_{t\in[0,T]}$ хеџује вриједност контингенског захтјева, односно важи $V_T = C$.

Тада, фер цијена захтјева без арбитраже износи

$$\pi_t(C) = V_t = e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_t], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

гдје је са $\mathbb{E}^*$ означено очекивање при вјероватносној мјери неутралној од ризика $\mathbb{P}^*$.

Доказ. Видјети [4]. □

Примјер 1.41. Претпоставимо да желимо да одредимо цијену европске кол опције чија вриједност износи $C = (S_T - K)^+$. Већ смо се упознали са Блек-Шолсовом парцијалном диференцијалном једначином која описује процес кретања цијене опције кроз вријеме у Блек-Шолсовом моделу при претпоставкама одсуства арбитраже и самофинансирајућег портфолија. Такође, видјели смо да је рјешење ове једначине експлицитно дато са Блек-Шолсовом једначином у случају европске ванила кол опције. Показали смо да се и мартингалско својство процеса кретања акција може користити за вредновање опција чиме добијамо валуацију неутралну од ризика. Испоставља се да су цијена добијена примјеном Блек-Шолсове једначине и цијена добијена примјеном мартингалског својства у ствари исте у свијету неутралном од ризика.

Наиме, како је процес $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ уједно и процес Маркова, то се вриједност портфолија у тренутку $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[\phi(S_T)|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[\phi(S_T)|S_t], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

може записати као функција која зависи од две промјенљиве t и S_t

$$V_t = g(t,S_t) = e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[\phi(S_T)|S_t], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.23}$$

Са ϕ смо означили функцију добити европске кол опције, тј. $\phi(x) = (x-K)^+$. Сада можемо формулисати теорему која нам даје поменуту везу између Блек-Шолсове једначине и цијене добијене примјеном мартингалског својства.

Теорема 1.42. Нека је $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ геометријско Брауново кретање

$$(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+} = (S_0 e^{\sigma\bar{B}_t + (r-\sigma^2/2)t})_{t\in\mathbb{R}^+},$$

гдје је $(\bar{B}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ стандардно Брауново кретање при мјери неутралној од ризика $\mathbb{P}^*$. Тада је цијена европске кол опције у тренутку $t \in [0,T]$ са функцијом добити $\phi(x) = (x-K)^+$, уговореном цијеном K и временом доспијећа T дата са

$$\begin{aligned} g(t,S_t) &= e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t\right] \qquad (1.24)\\ &= S_t\Phi(d_1) - Ke^{-(T-t)r}\Phi(d_2), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

гдје је

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

и Φ је функција расподјеле стандардне нормалне случајне величине. $\square$

Упоређивањем са Блек-Шолсовом формулом датој у теореми 1.39 закључујемо да су она и претходна формула добијена мартингалским приступом исте формуле. Највећи значај примјене мартингалског својства процеса кретања цијена акција видјећемо у вредновању азијских опција о којима говоримо у идућем одјељку. Наиме, испоставиће се да у оквиру Блек-Шолсовог модела тржишта не можемо наћи експлицитну формулу за цијену азијских опција каква је Блек-Шолсова формула за цијену европских опција. Њену цијену ћемо теоријски одређивати мартингалским својством, односно валуацијом неутралном од ризика као дисконтовану очекивану вриједност добити опције при безризичној каматној стопи. Како ту очекивану вриједност нећемо моћи експлицитно одредити прибјегаваћемо нумеричким апроксимацијама.

Глава 2

Егзотичне опције

Егзотичне опције можемо посматрати као опције друге генерације, јер су изведене из опција прве генерације, односно класичних ванила опција. Азијским опцијама се по први пут трговало у Токију 1987. године и постале су посебно популарне у трговини робом. Прве азијске опције односиле су се на цијене сирове нафте. Егзотичне опције су карактеристичне по томе што смањују ризик тржишне манипулације вриједносног папира у тренутку истека опције. Такође, оне нису условљене цијеном вриједносног папира у неком одређеном тренутку, већ просјеком цијена до тог тренутка, што их генерално чини јефтинијим у односу на ванила опције.

Нагли развој финансијског тржишта и пораст неизвјесности за његове учеснике довели су до потребе за новим финансијским инструментима који могу да испрате специфичне захтјеве и потребе учесника на тржишту. С обзиром да се ситуација на тржишту у данашње вријеме може изненада промијенити, са чиме директно расте и ниво инвестиционог ризика, сви који послују на тржишту морају брзо реаговати на тржишне промјене и имати могућност да прилагоде своју инвестициону стратегију на вријеме. Због њиховог својства да им је дизајн прилагођен специфичним потребама инвеститора, његовој толеранцији на ризик и жељеном профиту, егзотичне опције се називају и опцијама *специјалне намјене* (енг. *custom options*). Оваква прилагодљивост и нелинеарност финансијског тржишта изискују сложенију структуру уговора и више параметара, а због неодређености при њиховом дефинисању, тешко их је и класификовати. Једну од класификација коју је дао Цанг[1] [8] је сљедећа:

(1) *опције које зависе од кретања цијена акција у току периода важења опције*

[1] Peter G. Zhang

(енг. *path dependent options*) - азијске (енг. *Asian options*), баријерне опције (енг. *barrier options*), ретроспективне опције (енг. *lookback options*),

(2) опције које се односе на више финансијских инструмената истовремено (енг. *correlation options, multiasset options*) и

(3) друге егзотичне опције.

Ми ћемо детаљно описати прву групу егзотичних опција са фокусом на азијске опције. Подјела азијских опција се врши према избору функције просјека која се примјењује на цијене акција чије се кретање прати у току периода важења уговора. У складу са тим основна подјела азијских опција је на аритметичке и геометријске азијске опције.

Аритметичке азијске опције

Дефиниција 2.1. Нека је дат процес кретања цијена акција кроз вријеме $S_{t,t\in[0,T]}$. Добит азијске кол опције на $S_{t,t\in[0,T]}$ са уговореним временом T и уговореном цијеном K је

$$C = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)^+ . \tag{2.1}$$

Слично, добит азијске пут опције на $S_{t,t\in[0,T]}$ са уговореним временом T и уговореном цијеном K је

$$P = \left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)^+ . \tag{2.2}$$

Напомена 2.2. Уколико процес кретања цијена акција дискретизујемо тако што временски интервал $[0, T]$ подијелимо на $n \in \mathbb{N}$ временских интервала једнаке дужине $t_k - t_{k-1}, k = 1, \dots, n$, тада интеграл у (2.1) можемо апроксимирати сумом након чега се израз за добит азијске кол опције у дискретном случају своди на:

$$C = \left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} S_{t_k}(t_k - t_{k-1}) - K\right)^+ . \tag{2.3}$$

Из претходног долази до изражаја зависност од просјека цијена акција акумулираног током временског интервала $[0, T]$ у одређивању добити азијских опција. У овом случају је имплицирано да је одабран аритметички просјек. Аналогно, добит азијске пут опције у дискретном случају је:

$$P = \left(K - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} S_{t_k}(t_k - t_{k-1}) \right)^{+}. \tag{2.4}$$

Све особине азијских опција које ћемо у наставку извести у случају непрекидног времена могу аналогно да се покажу и у случају дискретног времена апроксимацијом интеграла одговарајућом сумом.

Видјели смо да вриједност европске ванила опције зависи само од цијене акције у уговорено вријеме и од уговорене цијене, без обзира на то како се мијењала цијена акције током важења уговора. Због тога ванила опције имају велику волатилност. Насупрот томе, због дизајна азијских опција који обухвата упросјечавање цијена акција током важења уговора, оне су мање волатилне и отпорније на промјене тржишта. Стога су азијске опције јефтиније од класичних ванила опција, али због њихове специфичности и прилагодљивости конкретном инвеститору већина стандардних метода вредновања опција нису адекватне.

Опцијама „*у ӣросјеку*" зовемо оне опције чија добит може да се запише у облику

$$C = \Phi(\Lambda_T, S_T),$$

гдје је

$$\Lambda_T = S_0 \int_0^T e^{\sigma B_u + ru - \sigma^2 u/2} du = \int_0^T S_u du, \qquad T \geqslant 0.$$

На примјер, када је $\Phi(y, x) = (y/T - K)^+$, тада говоримо о азијској кол опцији чија је добит

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^{+} = \left(\frac{\Lambda_T}{T} - K \right)^{+}. \tag{2.5}$$

Азијска кол опција је она опција која зависи од путање (енг. *path dependent option*), гдје једна путања представља промјену цијене вриједносног папира на који се опција односи у неком временском интервалу. Њена цијена у тренутку $t \in [0, T]$ користећи мартингалски приступ вредновања је дата са

$$e^{(T-t)r}\, \mathbb{E}^* \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^{+} \middle| \mathscr{F}_t \right], \tag{2.6}$$

гдје се очекивање узима у односу на мјеру неутралну од ризика $\mathbb{P}^*$. За вредновање ових опција користимо процјену неутралну од ризика. Знамо да мјера која је неутрална од ризика дефинише тржиште у ком нема арбитраже. Користећи својство временске хомогености процеса $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ добијамо да је цијена опције са добити $C = \Phi(\Lambda_T, S_T)$ дата са

$$\begin{aligned} e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[\Phi(\Lambda_T, S_T)|\mathscr{F}_t] &= e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\Phi\left(\Lambda_t + \int_t^T S_u du, S_T\right)\Big|\mathscr{F}_t\right] \\ &= e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\Phi\left(y + x\int_t^T \frac{S_u}{S_t}du, x\frac{S_T}{S_t}\right)\right]_{y=\Lambda_t, x=S_t} \\ &= e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\Phi\left(y + x\int_0^{T-t} \frac{S_u}{S_0}du, x\frac{S_{T-t}}{S_0}\right)\right]_{y=\Lambda_t, x=S_t}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Користећи својство Маркова процеса $(S_t, \Lambda_T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ можемо записати цијену опције као функцију која зависи од (t, S_t, Λ_T)

$$\begin{aligned} f(t, S_t, \Lambda_T) &= e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[\Phi(\Lambda_t, S_t)|\mathscr{F}_t] \\ &= e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*[\Phi(\Lambda_t, S_t)|S_t, \Lambda_t], \end{aligned}$$

гдје је функција $f(t, x, y)$ дата са

$$f(t, x, y) = e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\Phi\left(y + x\int_0^{T-t} \frac{S_u}{S_0}du, x\frac{S_{T-t}}{S_0}\right)\right].$$

Видјећемо у наставку да не постоји рјешење у експлицитном облику за цијену аритметичке азијске опције.

Геометријске азијске опције

Полазимо од дискретизованог процеса цијена акција неутралног од ризика који смо објаснили у претходној напомени. Замјена аритметичке средине

$$\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} S_{t_k}(t_k - t_{k-1}) \simeq \frac{1}{T}\int_0^T S_u du$$

са геометријском средином

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} S_{t_k}^{(t_k-t_{k-1})/T} &= \exp\left(\log\left(\prod_{k=1}^{n} S_{t_k}^{(t_k-t_{k-1})/T}\right)\right)\\ &= \exp\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\log S_{t_k}^{(t_k-t_{k-1})}\\ &= \exp\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\log S_{t_k}\right)\\ &\simeq \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_u du\right)\end{aligned}$$

води до експлицитног рјешења за цијену азијске опције користећи Блек Шолсову формулу. Цијена геометријске азијске опције у тренутку $t \in [0,T]$ користећи мартингалски приступ вредновања је дата са

$$e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[e^{\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_t dt - K\right)^+}\middle|\mathscr{F}_t\right],$$

гдје се очекивање узима у односу на мјеру неутралну од ризика $\mathbb{P}^*$.

2.1 Проблем одређивања цијене аритметичке азијске опције

Одређивање цијене азијских опција је познат проблем у финансијској математици. Тај проблем није једноставан, не само због тога што је вредновање компликованије у поређењу са ванила опцијама, већ и зато што када одређујемо цијену морамо узети у обзир просјек који се акумулирао до тог тренутка.

Претпостављамо да важе све претпоставке Блек-Шолсовог модела, цијене акција прате геометријско Брауново кретање, односно цијена акције S_t у тренутку t је случајна величина која има лог-нормалну расподјелу са параметрима помјераја μ и волатилности σ. Уколико се просјек цијена акција рачуна преко геометријске средине, онда се проблем значајно поједностављује и у том случају можемо наћи експлицитну формулу за рачунање цијене азијске опције. Та формула као што ћемо видјети касније представља модификацију Блек-Шолсове формуле, а заснована је на чињеници да производ лог-нормалних случајних величина има лог-нормалну расподјелу. Са друге стране, збир лог-нормалних случајних величина нема лог-нормалну расподјелу. Штавише, сума лог-нормалних случајних величина нема ниједну познату расподјелу, те се за њено одређивање морају користити апроксимације. То имплицира да није могуће одредити експлицитну формулу за вредновање азијских опција у случају када се просјек рачуна као аритметичка средина цијена акција. У том случају прибјегавамо различитим апроксимацијама и нумеричким методама. Практични значај тих апроксимација највише зависи од њихове тачности.

Можемо подијелити методе за вредновање аритметичких азијских опција на две велике класе. Прва класа се заснива на методама за проналажење апроксимације расподјеле просјека лог-нормалних случајних величина, а друга се заснива на примјенама Монте-Карло метода, тачније Монте-Карло симулација за нумеричко одређивање цијене опције и других апроксимација попут Ворстове[2] апроксимације. Заједничко свим методама јесте да се за вредновање користе неизоставни принципи неутралности од ризика и одсуства арбитраже. Ми се у раду опредјељујемо за другу класу чија ће теоријска својства и примјене бити приказане у сљедећој глави. Прије тога ћемо у наставку извести ограничења за цијену аритметичке азијске опције која нам откривају важне особине ове врсте азијских опција.

2.2 Процјене цијене аритметичке азијске опције

У претходном одјељку смо показали да не можемо експлицитно одредити цијену азијске опције када се за рачунање просјека цијена акција користи аритметичка средина због чега прибјегавамо нумеричким апроксимацијама. Да би нумеричке апроксимације биле прецизније од користи нам је да одредимо горње и доње границе за цијену азијске опције. Прво ћемо показати у ком су односу европска кол опција и азијска кол опција. Наиме, цијена азијске кол опције може се ограничити одозго са цијеном одговарајуће европске кол опције користећи својство конвексности.

Лема 2.3. Нека је $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Борелова фунцкија која је конвексна и X случајна величина са коначним очекивањем. Тада важи

$$h(\mathbb{E}\, X) \leqslant \mathbb{E}\, h(X).$$

[2] Ton Vorst, 1952-, холандски математичар и финансијски инжењер

Напомена 2.4. Уколико је функција h конкавна, онда је неједнакост обратна, односно тада важи

$$\mathbb{E}\, h(X) \leqslant h(\mathbb{E}\, X).$$

Теорема 2.5. Нека је $r \geqslant 0$ и нека је ϕ конвексна неопадајућа функција добити. Тада важи

$$e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)\right] \leqslant e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\phi\left(S_T - K\right)\right].$$

Доказ. Користећи Јенсенову неједнакост за униформну мјеру са функцијом густине вјероватноћа $\frac{1}{T}\mathbb{1}_{[0,T]}$, уколико за вјероватносну мјеру одаберемо $\mathbb{P}^*$ добијамо да важи

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\phi\left(\int_0^T S_u \frac{du}{T} - K\right)\right] &= e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\phi\left(\int_0^T \left(S_u - K\right)\frac{du}{T}\right)\right] \\
&\leqslant e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\int_0^T \phi\left(S_u - K\right)\frac{du}{T}\right)\right] \\
&= e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\int_0^T \phi(e^{-(T-u)r}\,\mathbb{E}^*[S_T|\mathscr{F}_u] - K\right)\frac{du}{T}\right] \\
&= e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\int_0^T \phi(\mathbb{E}^*[e^{-(T-u)r}S_T - K|\mathscr{F}_u])\right)\frac{du}{T}\right] \\
&\leqslant e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\int_0^T \mathbb{E}^*[\phi(e^{-(T-u)r}S_t - K)|\mathscr{F}_u]\frac{du}{T}\right] \qquad (2.8) \\
&\leqslant e^{-rT}\int_0^T \mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[\phi(S_T - K)|\mathscr{F}_u]]\frac{du}{T} \qquad (2.9) \\
&= e^{-rT}\int_0^T \mathbb{E}^*[\phi(S_T - K)]\frac{du}{T} \\
&= e^{-rT}\,\mathbb{E}^*[\phi(S_T - K)],
\end{aligned}$$

гдје смо за (2.8) и (2.9) користили претпоставке да је $r \geqslant 0$ и да је ϕ неопадајућа функција. $\square$

Посљедица 2.6. Специјално, уколико дефинишемо $\phi : x \mapsto (x-K)^+$ из претходне теореме добијамо да цијена азијске опције има горње ограничење које је једнако цијени одговарајуће европске кол опције, односно

$$e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+\right] \leqslant \mathbb{E}^*[(S_T-K)^+].$$

Цијену европске кол опције једноставно добијамо директном примјеном Блек-Шолсове формуле.

Сљедећа теорема даје однос између аритметичке и геометријске азијске опције, прецизније, у њој показујемо да се аритметичка азијска опција може ограничити одоздо са цијеном одговарајуће геометријске опције.

Теорема 2.7. Нека је ϕ неопадајућа функција добити. Тада важи

$$e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\phi\left(\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_u du\right) - K\right)\right] \leqslant e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)\right].$$

Доказ. Користећи Јенсенову неједнакост за униформну мјеру са функцијом густине вјероватноћа $\frac{1}{T}\mathbb{1}_{[0,T]}$ на $[0,T]$ примијењену на функцију $\log(x)$, што је конкавна фукнција, добијамо да важи:

$$\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_u du\right) \leqslant \exp\left(\log\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du\right)\right) = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du,$$

одакле слиједи тврђење.

За доказ теореме у дискретном случају погледати [9]. $\square$

Теорема 2.8. Нека је $t \in [0,T]$. У случају азијске кол опције важи сљедећа условна граница за њену цијену

$$\begin{aligned} &e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+ \middle| \mathscr{F}_t\right] \\ &\leqslant e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^t S_u du + \frac{T-t}{T}S_T - K\right)^+ \middle| \mathscr{F}_t\right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Доказ. Нека је функција $f(t,x,y)$ дефинисана са

$$f(t,S_t,\Lambda_t) = \mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+ \middle| \mathscr{F}_t\right].$$

Из теореме 2.5 слиједи

$$\begin{aligned}
f(t,x,y) &= \mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\left(y + x\int\limits_0^{T-t}\frac{S_u}{S_0}du\right) - K\right)^+\right]\\
&= \mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\left(y + \frac{x}{S_0}\Lambda_{T-t}\right) - K\right)^+\right]\\
&= \mathbb{E}^*\left[\left(\frac{y}{T} - K + \frac{x}{TS_0}\Lambda_{T-t}\right)^+\right]\\
&= \frac{(T-t)x}{TS_0}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{yS_0}{(T-t)x} - \frac{KTS_0}{(T-t)x} + \frac{\Lambda_{T-t}}{T-t}\right)^+\right]\\
&\leqslant \frac{T-t}{TS_0}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{y}{T} - K + \frac{(T-t)xS_{T-t}}{TS_0}\right)^+\right] \qquad x, y > 0,
\end{aligned}$$

одакле слиједи (2.10). □

Сљедећа теорема даје границу за цијену азијске кол опције када посматрамо дешавања у неком тренутку у далекој будућности.

Теорема 2.9. Цијена азијске кол опције задовољава неједнакост

$$e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T S_u du - K\right)^+ \middle| \mathscr{F}_t\right] \leqslant \frac{e^{(T-t)r}}{T}\int\limits_0^t S_u du + S_t\frac{1-e^{-(T-t)r}}{rT},$$

$t \in [0,T]$, и тежи ка нули скоро сигурно када T тежи ка бесконачности:

$$\lim_{T\to\infty}\left(e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T S_u du - K\right)^+ \middle| \mathscr{F}_t\right]\right) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Доказ. Користећи неједнакост $(x-K)^+ \leqslant x$, за $K \geqslant 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T S_u du - K\right)^+ \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&\leqslant e^{(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T S_u du \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&= e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^t S_u du \middle| \mathscr{F}_t\right] + e^{-(T-t)r}\,\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{T}\int\limits_t^T S_u du \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&= e^{-(T-t)r}\frac{1}{T}\int\limits_0^t \mathbb{E}^*[S_u|\mathscr{F}_t]du + \frac{1}{T}e^{-(T-t)r}\int\limits_t^T \mathbb{E}^*[S_u|\mathscr{F}_t]du \\
&= e^{-(T-t)r}\frac{1}{T}\int\limits_0^t S_u du + \frac{1}{T}e^{-(T-t)r}\int\limits_t^T e^{(u-t)r}S_t du \\
&= \frac{1}{T}e^{-(T-t)r}\int\limits_0^t S_u du + \frac{S_t}{T}\int\limits_t^T e^{(T-u)r}S_t du \\
&= \frac{1}{T}e^{-(T-t)r}\int\limits_0^t S_u du + S_t\frac{1-e^{-(T-t)r}}{rT}.
\end{aligned}$$

□

Глава 3

Монте-Карло методе и Ворстова апроксимација

Термин „Монте-Карло” најчешће се везује за процес моделовања и симулирања система који је под утицајем случајности: генерише се одређен број случајних сценарија, а потом се израчунају релевантне статистике са циљем да се, на примјер, процијени ефикасност неке политике доношења одлуке или вредновања средстава [10]. Ове методе се увелико примјењују у инжињерству, осигурању, транспорту нафте и гаса и, као у нашем случају, у финансијама. Симулације омогућују анализирање ризика тако што креирају много различитих модела процеса са различитим случајним вриједностима извучених из једне или скупа расподјела вјероватноћа. У случају процеса цијена акција и предвиђања њихових промјена суштински креирамо много различитих путања кретања промјена акције кроз вријеме и одређујемо како би могла изгледати просјечна путања.

Посматрајмо сљедеће интуитивно разумијевање Монте-Карло метода засновано на аналогији између вјероватноће и димензије простора [11], односно запремине ако претпоставимо да говоримо о тродимензионом простору. Математички појам мјере формализује појам вјероватноће тако што повезује неки догађај са скупом могућих исхода дефинишући вјероватноћу догађаја као запремину или мјеру у односу на скуп свих могућих исхода. Монте-Карло методе инверзно користе овај индентитет, односно у њима се рачуна запремина скупа тако што се запремина интерпретира као вјероватноћа. У најједноставнијем случају ово значи да на случајан начин извлачимо догађаје из скупа свих могућих исхода и релативну фреквенцију догађаја који припадају одређеном скупу тумачимо као процјену запремине скупа. Закон великих бројева обезбјеђује да ова оцјена конвергира ка стварној вриједности како се повећава број извлачења, док централна гранична теорема даје информацију о величини грешке након коначног број извлачења.

Једноставно можемо да са запремине пређемо на интеграле. На примјер, посматрајмо проблем апроксимације интеграла функције f на јединичном интервалу $[0, 1]$. Интеграл

$$\theta = \int_0^1 f(x)dx$$

можемо записати као очекивање $\mathbb{E}[f(U)]$, гдје је U униформно расподијељена случајна величина на интервалу $[0, 1]$. Нека је $U_1, U_2, \ldots, U_n$ прост случајан узорак из $\mathcal{U}[0, 1]$ расподјеле. Израчунавање вриједности функције f у n одабраних тачака и упросјечавање резултата даје Монте-Карло оцјену интеграла

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i).$$

Како је $\hat{\theta}_n$ узорачка средина независних и једнако расподијељених случајних величина $f(U_1), \ldots, f(U_n)$, при услову да је функција f интеграбилна на интервалу [0,1], по закону великих бројева важи

$$\hat{\theta}_n \to \theta \text{ са вјероватноћом 1 када } n \to \infty.$$

Уколико је f квадратно интеграбилна на $[0, 1]$ и ако означимо

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \theta)^2\, dx,$$

онда је грешка $\hat{\theta}_n - \theta$ у оцјени Монте-Карло методом приближно нормално расподијељена са очекивањем 0 и стандардном девијацијом $\sigma_f/\sqrt{n}$. Квалитет ове оцјене се побољшава како n расте. Ако је параметар σ_f непознат, онда се он може оцијенити користећи узорачку девијацију

$$s_f = \hat{\sigma_f} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(f(U_i) - \hat{\theta}_n\right)^2}.$$

Стога, на основу вриједности функције $f(U_1), \ldots, f(U_n)$ добијамо не само оцјену интеграла θ, већ и мјеру грешке те оцјене. При претпоставци да радимо са простим случајним узорком из стандардне нормалне расподјеле можемо конструисати $100(1-\alpha)\%$ интервал повјерења, гдје је α праг значајности на сљедећи начин:

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}},\ \hat{\theta}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}\right],$$

гдје је $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ одговарајући квантил нормалне расподјеле и $n \to \infty$. Међутим, како је стандардна девијација σ_f често непозната, те се апроксимира са s_f, то се $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ може замијенити са одговорајућим квантилом Студентове расподјеле [11].

Израз за стандардну грешку $\sigma_f/\sqrt{n}$ је кључна особина Монте-Карло метода, јер нам говори да је временска сложеност конвергенције Монте-Карло метода $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$. Да би се ова грешка двоструко смањила, потребно је повећати број елемената узорка четири пута, а повећање прецизности за једно децимално мјесто захтијева увећање броја елемената узорка стотину пута.

Највећи значај Монте-Карло метода се огледа у чињеници да конвергенција $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ није ограничена само на интеграле на јединичном интервалу. Заиста, сви претходни кораци могу да се примијене за апроксимацију интеграла на интервалу $[0,1]^d$, или на $\mathbb{R}^d$ за свако d. Дакле, Монте-Карло методе могу да се примијене на узорку $X_1, \ldots, X_n$ из било које расподјеле. Наравно, када промијенимо димензију d тиме се мијења функција f, а онда и σ_f. Међутим, стандардна грешка Монте-Карло оцјене на основу n извлачења из интервала $[0,1]^d$, или из $\mathbb{R}^d$ ће и даље имати облик $\sigma_f/\sqrt{n}$, односно грешка је независна од димензије проблема. Заиста, $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ конвергенција важи за свако d, па су Монте-Карло методе посебно корисне и ефикасне за рачунање интеграла у вишим димензијама.

Монте-Карло методе су кључни алат у финансијској математици за рјешавање проблема вредновања аритметичких азијских опција. У прва два поглавља рада смо видјели да се при условима одсуства арбитраже и валуације неутралне од ризика цијена опције може изразити преко математичког очекивања. Подсјетимо се да је теоријска цијена аритметичке азијске опције у тренутку $t \in [0,T]$ користећи мартингалски приступ вредновања дата са

$$\theta_A = e^{(T-t)r}\, \mathbb{E}^* \left[\left(\frac{1}{T} \int\limits_0^T S_t dt - K \right)^+ \middle| \mathscr{F}_t \right],$$

гдје се очекивање узима у односу на мјеру неутралну од ризика $\mathbb{P}^*$. Дакле, вредновање финансијких деривата се своди на рачунање очекивања у чему могу да нам помогну Монте-Карло методе. У многим случајевима, уколико бисмо записали тражено математичко очекивање преко интеграла, испоставило би се да је димензија велика или чак бесконачна. Управо у оваквим ситуацијама Монте-Карло методе постају атрактивне. Да бисмо вредновали опције помоћу ових метода потребно је да симулирамо путање стохастичког процеса којим моделујемо кретање цијена акција, каматних стопа, параметара модела и других фактора који утичу на цијене акција. Умјесто да на случајан начин извлачимо тачке из $[0,1]$ или $[0,1]^d$, сада бирамо узорке путања из простора путања процеса геометријског Брауновог кретања. Важно је напоменути да бирамо тачке које прате процес неутралан од ризика. Поменути простор може бити бесконачан, а најчешће ће бити димензије која је једнака броју временских корака коришћених у симулацији. Уопштени алгоритам вредновања опција одређених математичким очекивањем користећи Монте-Карло методе је:

1. Симулирати трајекторије кретања цијена акција при мјери неутралној од ризика у одређеном временском интервалу.

2. Оцијенити дисконтоване токове новца опције за сваку трајекторију кретања промјена цијена акције, односно цијену опције како је одређено структуром опције са којом радимо.

3. Упросјечити дисконтоване токове новца опције.

Претходним алгоритмом рачунамо вишедимензионе интеграле, тачније рачунамо математичко очекивање дисконтованих добити на простору симулираних трајекторија. Чињеница да је грешка Монте-Карло методе независна од димензије проблема даје овој методи значајну предност у односу на класичне методе нумеричке интегације. Једина рестрикција јесте да је функција f квадратно интеграбилна што није претјерано јак услов.

Напомена 3.1. Базна Монте-Карло метода је у пракси позната под називом наивни Монте-Карло (енг. *Naive Monte-Carlo*).

3.1 Симулирање геометријског Брауновог кретања

За генерисање цијена акција потребно је да симулирамо геометријско Брауново кретање $(S_t)_{t\geqslant 0}$, које је дефинисано у теореми 1.16 изразом (1.5):

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Како је $(B_t)_{t\geqslant 0}$ стандардно Брауново кретање, из особина нормалне расподјеле можемо B_t записати као $B_t = Z\sqrt{t}$, гдје је $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Стога се претходни израз може еквивалентно записати као

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Пошто цијене акција имају лог-нормалну расподјелу, то уз помоћ геометријског Брауновог кретања можемо генерисати путање које представљају промјене цијена акција током времена. У нашем случају S_t означава цијену акције у тренутку $t \in [0, T]$, а S_0 је цијена акције у тренутку $t = 0$, односно почетна цијена акције. С обзиром на то да претпостављамо да се налазимо у свијету неутралном од ризика, узимамо да је параметар μ једнак безризичној каматној стопи r. Тада, из (3.1) слиједи

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Геометријско Брауново кретање је непрекидан стохастички процес, па да бисмо га генерисали неопходно је да извршимо дискретизацију временског интервала $[0, T]$. Симулирамо кретање цијена акција у временским тренуцима $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$, односно интервал $[0, T]$ дијелимо на периоде једнаке дужине $\delta t = t_i - t_{i-1}$. Поступак дискретизације је приказан сљедећим изразом

$$S_{t_i} = S_0 e^{\sigma\sqrt{t_i}Z+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i}, \qquad t_i \geqslant 0. \tag{3.3}$$

За генерисање путања користимо формулу

$$S_{t+\delta} = S_t e^{\sigma\sqrt{\delta t}Z+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t}. \tag{3.4}$$

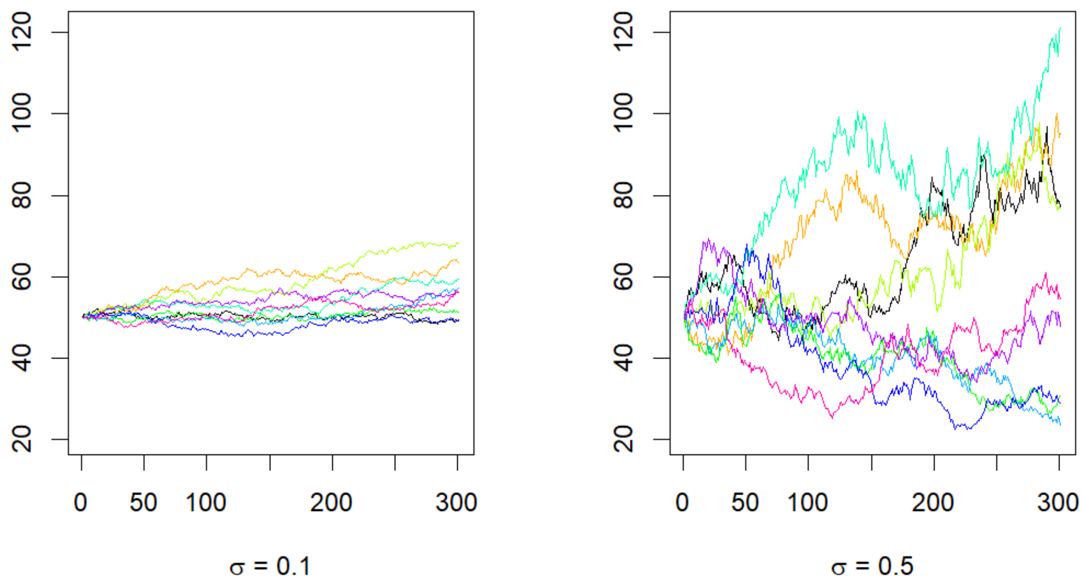
Да бисмо при имплементацији избјегли коришћење угњежђених „for” петљи које смањују ефикасност, згодно је да претходни израз логаритмујемо након чега добијамо

$$\log S_{t+\delta} - \log S_t = \sigma\sqrt{\delta t}Z + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t. \tag{3.5}$$

У овом облику генеришемо логаритме прираштаја, односно разлике логаритама цијена акција које имају нормалну расподјелу, а потом функцијом „$cumsum$” рачунамо кумулативну суму лог-прираштаја дуж сваке путање. На слици 3.1 је дат примјер имплементације кода за генерисање трајекторија пратећи претходно описан алгоритам у ком је приказан утицај волатилности на кретање цијена акција.

Напомена 3.2. Програмски језик „R” у ком су имплементирани сви кодови коришћени у раду је векторски оријентисан језик, па се у њему све операције над векторима брзо извршавају. Стога, треба избјегавати петље, јер њихово коришћење успорава извршавање програма, а брзина којом се кодови извршавају нам је од значаја, јер радимо са великим бројем података, односно великим бројем симулација елемената простора трајекторија геометријског Брауновог кретања.

Напомена 3.3. Да не бисмо садржај рада оптерећивали кодовима они се могу наћи на [12]. Због боље прегледности све имплементиране методе и потребне функције су раздвојене у посебне „R” скрипте.



Слика 3.1: Кретање цијена акција генерисаних геометријским Брауновим кретањем са волатилношћу $\sigma = 10\%$ и $\sigma = 50\%$.

3.2 Технике редукције дисперзије

Уколико бисмо жељели да унаприједимо квалитет Монте-Карло оцјене, односно да смањимо грешку $\sigma_f/\sqrt{n}$, прва идеја би била да повећамо број симулација n. Међутим, иако повећањем броја симулација оцјена у теоријском смислу постаје боља, због релативно споре конвергенције $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$, брзина којом се оцјена побољшава се све више смањује. Ово значи да за постизање жељеног квалитета оцјене морамо значајно повећати број симулација, што је рачунски и временски веома захтјевно. Такође, ширина интервала повјерења се, при претпоставци да се ради о простом случајном узорку, смањује по закону квадратног корјена укључујући $\sqrt{n}$ што нам није povoљно. Дакле, повећање броја симулација постаје све мање ефикасно, па се због тога прибјегава другим методама које се комбинују са основном Монте-Карло методом. Једна од идеја јесте да се смањи дисперзија случајне величине X_i. Тако долазимо до метода редукције дисперзије чији је циљ да унаприједе ефикасност Монте-Карло метода. Постоји више врста ових техника, а ми ћемо се бавити двема: антитетичко узорковање (енг. *Antithetic Sampling*) и контролне промјенљиве (енг. *Control Variates*).

На први поглед се идеја смањења дисперзије $D(X_i)$ чини као варање, јер на неки начин мијењамо оцјену $\hat{\theta}_A$ и потенцијално уводимо пристрасност у оцјену. Ми се бавимо оним методама које повећавају ефикасност без додавања пристрасности. Поента метода редукције дисперзије јесте да при задатој тачности смањимо рачунску захтјевност која је потребна да се та тачност досегне. Неке од техника редукције дисперзије су само технички трикови који побољшавају узорковање и оне могу чак и да се аутоматизују софтверским алатима. Друге технике су засноване на општим принципима, али захтијевају висок ниво прилагођавања да би радиле. У неким случајевима оне замјењују дио процеса нумеричке интеграције са дјелимично аналитичком интеграцијом. Међутим, иако су софистицираније стратегије ефективније, оне захтијевају много доменског знања које нам често није доступно. Упознаћемо се за почетак са техником антитетичког узорковања.

3.3 Антитетичко узорковање

Метода антитетичког узорковања за смањење дисперзије је једноставна за примјену и не захтијева додатно доменско знање о системима које симулирамо. То за нас значи да не користимо никакве додатне информације и особине аритметичких азијских или њима сродних опција, већ само директно модификујемо наивни Монте-Карло метод користећи технички трик који ћемо објаснити у наставку.

У наивној Монте-Карло методи генеришемо узорак независних случајних величина. Међутим, увођење корелације на паметан начин може да нам буде од користи. Посматрајмо низ парова једнако расподијељених случајних величина

$(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}), i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_1^{(n)} \\ X_2^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Дозвољена је корелација унутар сваког пара, али су опсервације „хоризонтално” независне. Уколико одаберемо било који елемент неког пара, онда је тај елемент независан од елемената свих осталих парова. Формалније, случајне величине $X_j^{(i_1)}, X_k^{(i_2)}$ су независне без обзира на начин одабира $j, k = 1, 2$ ако је $i_1 \neq i_2$. Слиједи да је низ упросјечених опсервација парова

$$X^{(i)} = \frac{X_1^{(i)} + X_2^{(i)}}{2}$$

низ независних случајних величина и може се користити за конструкцију интервала повјерења на уобичајен начин. Важно је нагласити да не бисмо могли конструисати интервал повјерења без упросјечавања унутар парова, јер не захтијевамо „вертикалну” независност, односно могућа је корелација унутар сваког пара.

Надаље, посматрајмо узорачку средину $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$. Занима нас да одредимо њену дисперзију. Дисперзија узорачке средине $\overline{X_n}$ је дата са

$$\begin{aligned} D(\overline{X_n}) &= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}\right) \\ &= \frac{D(X^{(i)})}{n} \qquad (3.6) \\ &= \frac{1}{n} D\left(\frac{X_1^{(i)} + X_2^{(i)}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4n}\left(DX_1^{(i)} + DX_2^{(i)} + 2cov(X_1^i, X_2^i)\right) \qquad (3.7) \\ &= \frac{1}{4n}\left(2DX + 2\rho(X_1, X_2)DX\right) \\ &= \frac{DX}{2n}\left(1 + \rho(X_1, X_2)\right), \qquad (3.8) \end{aligned}$$

гдје смо у (3.6) користили независност случајних величина $X^{(i)}$, а у (3.7) смо узели у обзир коваријацију унутар парова. Финална једначина (3.8) до које долазимо показује потенцијалну улогу корелације. Да бисмо смањили дисперзију узорачке средине $\overline{X_n}$ потребно је да унутар сваког пара имамо негативно корелисане репликације случајних величина. Наравно, не можемо казати да се дисперзија смањила за фактор $2n$, јер смо двоструко повећали обим узорка. Стога, морамо поредити једначину (3.8) са дисперзијом $\frac{D(X_i)}{2n}$ узорачке средине простог случајног узорка обима $2n$.

Надаље се поставља питање како да обезбиједимо негативну корелацију унутар парова. Свака опсервација $X_{1,2}^{(i)}$ је добијена генерисањем много случајних величина и све оне зависе од низа униформних псеудослучајних бројева[1]. Стога, једна од идеја која се намеће јесте да индукујемо јаку негативну корелацију међу улазним низовима случајних бројева. Ово можемо једноставно постићи користећи случајни низ $\{U_i\}$ за прву репликацију у сваком пару и $\{1 - U_i\}$ за другу репликацију. На овај начин постижемо да су улазни случајни низови негативно корелисани, па се надамо да ће такве бити и наше опсервације унутар парова. Антитетичко узорковање је једноставно за примјену, али у неким случајевима може произвести супротан ефекат од жељеног и заправо повећати дисперзију. Из тога што су низови $\{U_i\}$ и $\{1 - U_i\}$ негативно корелисани не слиједи да су и $X_1^{(i)}$ и $X_2^{(i)}$ негативно корелисани у општем случају. Да бисмо осигурали да негативна корелација међу улазним низовима случајних бројева имплицира негативну корелацију међу излазним опсервацијама унутар парова неопходно је да међу њима важи монотона веза.

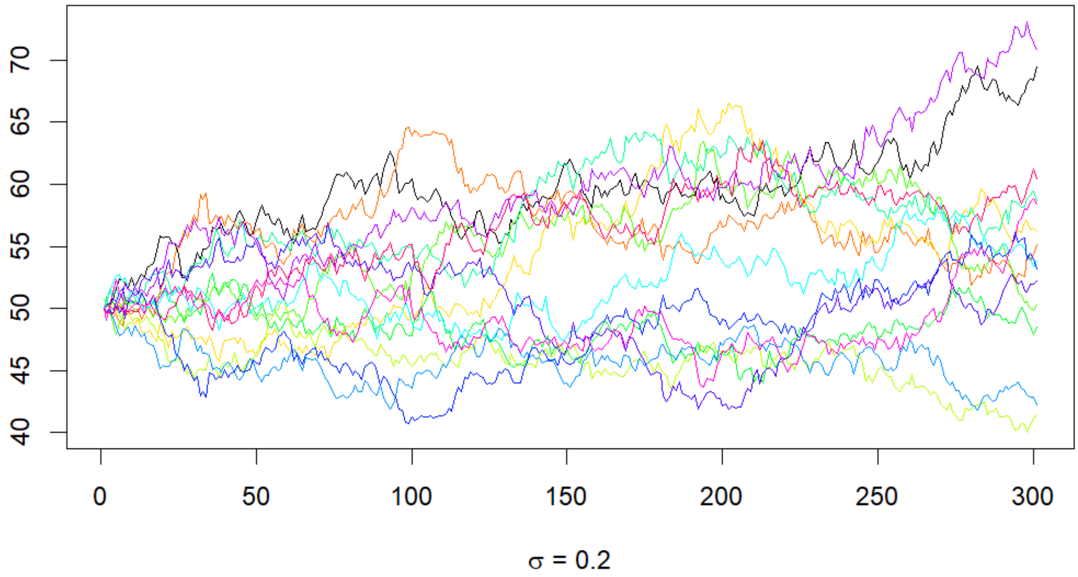
Теорема 3.4. Ако је функција h којом се генерише $X = h(U_1, \ldots, U_k)$ монотона по свим аргументима, онда су $X_1 = h(U_1, \ldots, U_k)$ и $X_2 = h(1-U_1, \ldots, 1-U_k)$, гдје су U_i независне и једнако расподијељене случајне величине са униформном расподјелом на $(0, 1)$ негативно корелисане, односно $cov(X_1, X_2) < 0$. $\square$

Такође, важан је и механизам који користимо за генерисање случајних величина. Метод инверзне трансформације је заснован на функцији расподјеле што је монотона функција. Дакле, постоји монотона веза између улазних низова случајних бројева и њима генерисаних случајних величина. Како је наш циљ одређивање цијене аритметичке азијске опције, метод антитетичког узорковања ћемо илустровати на примјеру нормалне расподјеле.

Нека је $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и $\widetilde{Z} = 2\mu - Z$. Тада важи $\widetilde{Z} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и овако дефинисане случајне величине Z и $\widetilde{Z}$ су негативно корелисане. Како ми на вектор цијена акција примјењујемо функцију аритметичке средине, која је монотона по аргументима S_i, закључујемо да можемо постићи смањење дисперзије коришћењем антитетичког узорковања при рјешавању нашег проблема. Када користимо анти-

[1] У Монте-Карло методама n елемената узорка нису заиста случајни, већ су генерисани неким детерминистичким алгоритмом, па се зато зову псеудослучајним бројевима.

тетичко узорковање за генерисање трајекторија геометријског Брауновог кретања, тада генерисани парови трајекторија цијена акција изгледају као слике у огледалу.



Слика 3.2: Кретање цијена акција генерисаних геометријским Брауновим кретањем са волатилношћу $\sigma = 20\%$ користећи методу антитетичког узорковања.

3.4 Контролне промјенљиве

Метода контролних промјенљивих је међу најпримјењенијим, једноставним за коришћење и најефективнијим методама за редукцију дисперзије [13]. Прву примјену ове технике у вредновању опција дао је Бојл[2] 1977. године у свом раду [14]. Основна идеја јесте да искористимо доменско знање које може да нам помогне при рјешавању проблема. Најдиректнији начин имплементације контролних промјенљивих замјењује израчунавање непознатог математичког очекивања са израчунавањем разлике непознате вриједности и неког другог математичког очекивања чија је вриједност позната. Специфична илустрација у случају азијских опција може се наћи у анализи Кемне[3] и Ворста у [9]. Увешћемо прво методу у њеном

[2] Phelim P. Boyle, 1941-, ирски економиста
[3] Angelien G.Z. Kemna, 1941-, холандска економисткиња

општем облику, а потом ћемо објаснити и њену примјену у вредновању азијских опција.

Претпоставимо да желимо да нађемо оцјену непознатог параметра $\theta = \mathbb{E}(X)$ и нека постоји још нека случајна величина Y са познатим очекивањем ν која је корелисана са X. Овакву ситуацију имамо када користимо Монте-Карло симулације за вредновање опција за које аналитичка формула није позната: θ је непозната цијена опције, а ν је, на примјер, цијена одговарајуће ванила европске опције. Случајна величина Y се назива контролна промјенљива и она представља додатно, доменско знање. Корелација између X и Y се може искористити користећи контролну оцјену

$$X_c = X + c(Y - \nu), \tag{3.9}$$

гдје је c непознати параметар који је потребно одредити. Интуитивно, претпоставимо да смо урадили симулацију и добили да је наша оцјена за $\mathbb{E}(Y) = \nu$ превелика:

$$\hat{\nu} > \nu.$$

У том случају можемо адекватно да повећамо или смањимо нашу оцјену $\hat{\theta}$ у зависности од знака корелације између X и Y. На примјер, ако је корелација позитивна и $\hat{\nu} > \nu$, онда бисмо требали смањити $\hat{\theta}$, јер ако су симулиране вриједности за Y веће од њиховог просјека, онда можемо очекивати да ће такве бити и симулиране вриједности за X. У супротном, уколико је корелација негативна, тада примјењујемо обрнуту логику. О контролној оцјени X_c дефинисаној са (3.9) можемо извести сљедеће особине:

$$\mathbb{E}(X_c) = \mathbb{E}(X) + c(\mathbb{E}(Y) - \nu) = \theta + c(\nu - \nu) = \theta \tag{3.10}$$

$$D(X_c) = D(X) + c^2 D(Y) + 2c\ cov(X, Y). \tag{3.11}$$

Из прве једначине закључујемо да је контролна оцјена непристрасна оцјена параметра θ за сваки избор параметра c. Друга једначина нам сугерише да за погодно изабрано c можемо смањити дисперзију оцјене. Посматрајући (3.10) као функцију по c једноставно се показује да је оптимална вриједност параметра c, односно она вриједност која минимизује дисперзију

$$c^* = -\frac{cov(X, Y)}{D(Y)}. \tag{3.12}$$

Замјеном (3.12) у (3.11) добијамо

$$\begin{aligned} D(X_c^*) &= D(X) + \frac{cov^2(X,Y)}{D^2(Y)} D(Y) - 2\frac{cov(X,Y)}{D(Y)} cov(X,Y) \\ &= D(X) + \frac{cov^2(X,Y)}{D(Y)} - 2\frac{cov^2(X,Y)}{D(Y)}, \end{aligned}$$

одакле слиједи

$$\frac{D(X_c^*)}{D(X)} = 1 - \rho^2(X,Y),$$

гдје је ρ коефицијент корелације случајних величина X и Y. Закључујемо да знак параметра c зависи од знака корелације случајних величина X и Y што потврђује претходно разматрану интуитивну анализу. Оцјена заснована на c^* неће повећати дисперзију и загарантовано ће смањити дисперзију уколико су X и Y корелисане.

Занимљиво је примијетити да израз за оптимални параметар c (3.12) личи на оцјену методом најмањих квадрата параметра β_1 у моделу линеарне регресије

$$X = \beta_0 + \beta_1 Y + \epsilon, \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma^2), \tag{3.13}$$

су у односу на стандардну нотацију модела замијењене улоге X и Y. Заиста, важи да је $c^* = -\hat{\beta}_1$ у моделу (3.13)[15]. Дакле, закључујемо да се оцјена методом најмањих квадрата параметра $\hat{\beta}_1$ поклапа са вриједношћу параметра c^* која минимизује дисперзију контролне оцјене. Познато је да је метода најмањих квадрата једноставна техника оцјењивања параметара линеарног регресионог модела, али њихово оцјењивање овом методом није валидно уколико нису испуњени услови Гаус-Маркова који обезбјеђују лијепе особине оцјене као што су непристрастност и постојаност. Такође, ова метода је веома осјетљива на присуство аутлајера: само један аутлајер може имати произвољно велик утицај на оцјену најмањих квадрата. Робусна линеарна регресија је мање осјетљива на присуство аутлајера, а када шум ϵ има нормалну расподјелу, тада је ефикасност робусне линеарне регресије у поређењу са стандардном линеарном регресијом 90-95% [15]. Стога, одлучујемо се да користимо робусну линеарну регресију умјесто обичне линеарне регресије за одређивање оптималног параметра c^*.

У пракси се параметар c мора оцијенити, јер $cov(X,Y)$, а могуће и $D(Y)$ нису познате. Постоји више начина да оцијенимо c. Један од начина који и ми примјењујемо јесте да урадимо такозване пилот симулације, односно помоћне симулације и да помоћу њих нађемо оцјену за c^*. Могли бисмо упасти у замку коришћења ових симулација и за избор параметра c^* и оцјењивање θ истовремено да бисмо уштедили вријеме потребно за израчунавање што нам је важно за ефикасност Монте-Карло метода. Међутим, овиме бисмо увели пристрасност у оцјену за θ, јер се у овом случају c^* не може посматрати као број, већ као случајна величина која зависи од X. Ово поништава аргументе којима долазимо до (3.10) и (3.11). Стога, сем уколико не користимо одговарајуће статистичке технике попут џекнајф оцјене, неопходно је да одбацимо пилот симулације при оцјењивању параметра θ.

Напомена 3.5. За примјену робусне регресије при имплементацији методе у „R"-у користимо функцију „*rlm*" из пакета „*MASS*".

У сљедећем примјеру илустроваћемо примјену методе контролних промјенљивих у контексту вредновања аритметичких азијских опција.

Примјер 3.6. Нека је C_A цијена аритметичке азијске опције. Нека је C_G цијена опције која јој је еквивалентна у сваком аспекту са разликом да се просјек цијена акција на које се опција односи рачуна преко геометријске средине, умјесто аритметичке. Већина опција које су засноване на просјеку цијена подлоге на коју се односе користе аритметичку средину, па је C_A од већег практичног значаја [13]. Међутим, док се C_A не може аналитички одредити, за C_G постоји експлицитна формула. Можемо ли некако знање о C_G искористити да бисмо израчунали C_A? Одговор на ово питање је потврдан уз коришћење методе контролних промјенљивих. Запишимо $C_A = E(\hat{C}_A)$ и $C_G = E(\hat{C}_G)$, гдје су $\hat{C}_A$ и $\hat{C}_G$ дисконтоване добити опције за једну симулирану трајекторију геометријског Брауновог кретања. Тада је

$$C_A = C_G + E[\hat{C}_A - \hat{C}_G],$$

што директно добијамо из начина на који смо дефинисали C_A и C_G. Другим ријечима, непозната цијена C_A може да се запише као позната вриједност C_G плус очекивана вриједност разлике између $\hat{C}_A$ и $\hat{C}_G$. Непристрасна оцјена за C_A методом контролних промјенљивих је дата са

$$\hat{C}_A^{CV} = \hat{C}_A + (\hat{C}_G - C_G). \tag{3.14}$$

У оригиналном раду Бојла [14] C_G представља цијену европске ванила опције без исплате дивиденди, а C_A је цијена одговарајуће опције са исплатама дивиденди. Израз (3.14) има сљедећу интерпретацију: оцјена $\hat{C}_A^{CV}$ прилагођава директну оцјену $\hat{C}_A$ према разлици између познате вриједности C_G и оцијењене вриједности $\hat{C}_G$, док се позната грешка $(\hat{C}_G - C_G)$ користи као контролна промјенљива у оцјењивању C_A. Уколико нам већина рачунске захтјевности оде на генерисање трајекторија геометријског Брауновог кретања, онда је додатни посао који је потребан за израчунавање $\hat{C}_G$ и $\hat{C}_A$ занемарљив. Како је дисперзија оцјене $\hat{C}_A^{CV}$ дата са

$$D(\hat{C}_A^{CV}) = D(\hat{C}_A) + D(\hat{C}_G) + 2cov(\hat{C}_A, \hat{C}_G),$$

закључујемо да је метода ефикасна уколико је коваријација између $\hat{C}_A$ и $\hat{C}_G$ велика. Резултати Кемне и Ворста из заједничког рада [9] показују да тај услов важи у овом примјеру гдје у однос стављамо аритметичку и њој одговарајућу геометријску опцију. Можемо примијетити да оцјена (3.14) није оптимална оцјена, па стога посматрамо фамилију непристрасних оцјена индексирану са c:

$$\hat{C}_A^{CV} = \hat{C}_A + c(C_G - \hat{C}_G)$$

на основу које, користећи израз за оптимално c^*(3.12), добијамо оцјену са најмањом дисперзијом коју означавамо са $\hat{C}_A^*$. У зависности од случаја, c^* може, а и не мора бити блиска јединици, што је његова имплицитна вриједност у (3.14). Користећи оцјену $\hat{C}_A^*$ можемо остварити веће смањење дисперзије. Заиста, иницијална оцјена методом контролних промјенљивих $\hat{C}_A^{CV}$ може да повећа или смањи дисперзију[4], док оцјена $\hat{C}_A^*$ гарантује смањење дисперзије све док су $\hat{C}_A$ и $\hat{C}_G$ корелисане.

Метода контролних промјенљивих може се уопштити на више контролних промјенљивих у циљу постизања већег смањења дисперзије. Тако долазимо до комбиноване методе контролних промјенљивих. Идеја је да коришћење комбинованог доменског знања може додатно унаприједити оцјену непознатог параметра θ. Нека су $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ случајне величине дефинисане на истом простору вјероватноћа. Претпостављамо да је очекивање $E(Y_i) = \nu_i$ познато за све $i = 1, \ldots, m$. Тада се линеарна комбинација $\sum_{i=1}^m c_i (Y_i - \nu_i)$ може користити као контролна промјенљива, односно оцјена

$$X_m = X + \sum_{i=1}^{m} c_i (Y_i - \nu_i) \tag{3.15}$$

[4]Претпоставимо да желимо да одредимо цијену специјалне врсте егзотичне пут опције која се неће активирати уколико цијена акције падне испод неког унапријед одређеног прага. Тај праг је у тренутку склапања уговора испод почетне цијене акције. Уколико цијена акције не падне испод наведеног прага у току трајања опције, онда она постаје обична пут опција коју инвеститор може, а и не мора да активира. Оваква опција спада у баријерне егзотичне опције (енг. *barrier options*) чија је активација условљена одређеним правилом које је повезано са унапријед одређеним прагом који цијена акције може да достигне. Пут опција о којој говоримо је негативно корелисана са одговарајућом контролном ванила опцијом. Уколико се не користи оптимална вриједност параметра c то би повећало дисперзију оцјене цијене наше баријерне опције и погоршало саму оцјену.

је непристрасна оцјена параметра $\theta = E(X)$. Ради једноставнијег записа можемо посматрати матрични облик

$$X_m = X + \mathbf{c}^T(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\nu}),$$

гдје је $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^T$ и $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)^T$. Дисперзија оцјене дате са (3.15) је:

$$D(X_m) = D(X) + \mathbf{c}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}\mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T\boldsymbol{\Sigma}_{X\mathbf{Y}},$$

гдје је $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}$ коваријациона матрица за $\mathbf{Y}$, а $\boldsymbol{\Sigma}_{X\mathbf{Y}} = (cov(X, Y_1), \ldots, cov(X, Y_m))^T$ коваријациона матрица случајне величине X са случајним величинама $Y_1, \ldots, Y_m$. Аналогно претходно описаном случају када је $m = 1$ може се једноставно показати да је оптимални вектор параметара $\boldsymbol{c}^*$ који минимизује $D(X_m)$ дефинисан са

$$\boldsymbol{c}^* = -\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{X\mathbf{Y}}. \tag{3.16}$$

Такође, уопштењем случаја $m = 1$ слиједи да се координате вектора оптималног параметра $\boldsymbol{c}^*$ добијају као оцјене методом најмањих квадрата параметара $\beta_1, \ldots, \beta_m$ у моделу линеарне регресије

$$X = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \cdots + \beta_m Y_m + \epsilon, \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{3.17}$$

гдје су у односу на стандардну нотацију замијењене улоге X и Y. Дакле, да бисмо постигли редукцију дисперзије оцјене (3.15) потребно је да важи $c_i^* = -\hat{\beta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Из истих разлога као у случају коришћења једне контролне промјенљиве, и у уопштеној верзији методе одлучујемо се за коришћење робусне линеарне регресије умјесто стандардне.

3.5 Ворстова апроксимација

У претходним поглављима рада упознали смо се са проблемом одређивања цијене азијске опције када се просјек рачуна преко аритметичке средине цијена акција. У пракси се стога јавила потреба за одређивањем што приближније апроксимације за цијену таквих опција. Главне особине такве апроксимације су да има високу тачност и да је једноставна за израчунавање. Аналитичка апроксимација за цијену аритметичке азијске опције о којој говоримо у наставку назива се Ворстова апроксимација и носи име по математичару Тону Ворсту који ју је извео у свом раду [16] 1992. године. Он је директно користио експлицитну формулу за одређивање цијене дискретних геометријских азијских опција за процјењивање аритметичких азијских опција, али кориговану у складу са тим. Као основа за формулу послужила му је позната неједнакост између аритметичке и геометријске средине:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot, \ldots, \cdot x_n}.$$

Формула је Блек-Шолсовог типа са коригованом уговореном цијеном опције заснована на претпоставци да је расподјела просјека цијена акција приближно нормална. У раду је показано да је посматрано у односу на имплицирану волатилност (енг. *Implied Volatility*) грешка Ворстове апроксимација довољно тачна. Такође, изведена је горња граница за грешку апроксимације.

Напомена 3.7. Поменули смо у првом поглављу рада да се параметар волатилности σ у пракси налази тако што се оцјењује статистичким путем на основу претходних вриједности промјена цијена акција и услова да промјена цијена акција прати геометријско Брауново кретање. Може се десити да се реална цијена опције на берзи разликује од оне која се добије када се у формулу за цијену опције уврсти оцјена за волатилност, добијена на основу предисторије процеса. Тако долазимо до појма имплициране волатилности која је дефинисана као она вриједност σ која се добије из Блек-Шолсове формуле, када се из формуле и познате цијене опције нађе σ. Појам имплициране волатилности је веома важан у финансијама о чему свједочи чињеница да професионални брокери и инвеститори често изражавају опције у односу на њихову имплицирану волатилност, умјесто у односу на цијену. Идући примјер приближава читаоцу овај појам на интуитиван начин.

Примјер 3.8. Претпоставимо да је почетна цијена акције на тржишту 50 долара и на основу кол или пут опције на ту акцију добијена је вриједност имплициране волатилности од 20%. Имплицирана волатилност нам даје представу о опсегу цијена које та акција може узети у будућности. Наиме, вриједност имплициране волатилности можемо разумјети као годишњу стандардну девијацију, односно колико очекујемо да вриједност посматране акције у току периода од једне године варира. На основу почетне цијене акције и вриједности имплициране волатилности можемо закључити да је имплицирана стандардна девијација $50 \cdot 0.2 = 10$ долара. То значи да уколико замислимо график нормалне расподјеле, онда знамо је вјероватноћа да након годину дана цијена акције буде у интервалу од 40 до 60 долара једнака 0.68, а вјероватноћа да цијена акције буде испод 40 или изнад 60 долара једнака је 0.16. Познавање ових вриједности нам је важно, јер уколико инвеститор, на примјер, купује кол опцију, он мора имати информацију да ће цијена акције довољно порасти да би му се посједовање опције исплатило. Инвеститор може да одреди колико је разумно да се цијена акције промијени у току годину дана, односно колика је вјероватноћа да акција досегне циљану цијену управо на основу имплициране волатилности акције. Такође, наведени интервали за цијене и одговарајуће вјероватноће могу да му помогну да одреди адекватну уговорену цијену опције K. У пракси ће се ријетко десити да нам је потребно баш очекивано кретање акција у периоду од једне године, чешће се ради о доста краћим временским интервалима, али принцип остаје исти с тим да се рачуна имплицирана волатилност за жељени период.

Да би оцијенио тачност апроксимације цијене аритметичке азијске кол опције, Ворст је примјењивао методологију коју је предложио Фиглевски[5] у раду [17] 1989. године. Фиглевски је посматрао одступања тржишних и теоријских цијена стандардне кол опције које су потребне да би инвеститор остварио арбитражни профит. У вези са одсупањима потребним за остваривање арбитражног профита грешка апрокцимације је веома мала, а њена тачност је велика. Најважнији закључак Ворстовог рада јесте да је цијена опција заснованих на просјеку цијена акција дата аналитичком апроксимацијом веома блиска вриједности која се добија користећи Монте-Карло симулације. У већини релевантних случајева разлика је испод 1%.

У наставку наводимо претпоставке које је Ворст користио за извођење апроксимације. Основна претпоставка јесте да радимо са „савршеним" тржиштем које је непрекидно отворено и у ком нема трошкова трансакција. Процес кретања цијена акција $(S_t)_{t\geqslant 0}$ задат је стандардно једначином (1.4), односно прати геометријско Брауново кретање. Додатно, важна претпоставка јесте да је у питању процес неутралан од ризика. Приликом извођења апроксимације посматра се специјалан случај аритметичке азијске кол опције гдје нема опсервација промјена цијена акција прије периода упросјечавања. Ове опције називамо опцијама које „почињу унапријед" (енг. *forward-starting options*), а општи случај једноставно слиједи из овог.

[5] Stephen Figlewski, амерички економиста

Извођење Ворстове апроксимације за цијену аритметичке азијске опције

Нека су $t_0, t_1, \ldots, t_n = T$ временски тренуци у којима се врши упросјечавање цијена акција који не морају бити еквидистантни. Тада је добит аритметичке азијске кол опције са уговореном цијеном K дата са

$$C_1 = (A(T) - K)^+,$$

гдје је

$$A(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_{t_k}.$$

Како је просјек $A(T)$ детерминистичка функција која зависи само од цијена акција, безризично хеџовање опције може се остварити елиминисањем ризика индукованог цијенама акција комбинујући акције и опције у портфолију (за више детаља погледати [18]). Стога, примјењујући валуацију неутралну од ризика, цијена опције је математичко очекивање добити опције у односу на еквивалентну мјеру за коју је дисконтовани процес цијена акција мартингал, односно

$$C^A = e^{(T-t)r}\, \mathbb{E}^*[(A(T) - K)^+ \,|\mathscr{F}_t], \tag{3.18}$$

гдје $\mathbb{E}^*$ означава очекивање у односу на еквивалентну мартингалску мјеру.

Да бисмо извели Ворстову апроксимацију прво је потребно да посматрамо геометријску средину цијена $G(T)$

$$G(T) = \left(\prod_{k=1}^{n} S_{t_k} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Циљ нам је да објаснимо кораке које је Ворст пратио да би дошао до експлицитне формуле за цијену геометријске азијске опције. Знамо да је добит геометријске азијске опције у тренутку доспијећа T са уговореном цијеном K дата са

$$C_2 = (G(T) - K)^+.$$

Означимо са C^G цијену геометријске азијске кол опције. Тада је

$$C^G = e^{(T-t)r}\, \mathbb{E}^*[(G(T) - K)^+ \,|\mathscr{F}_t]. \tag{3.19}$$

Сљедећи корак је одређивање математичког очекивања и дисперзије за $\ln G(T)$ у чему нам је од кључног значаја чињеница да производ лог-нормалних случајних величина има поново лог-нормалну расподјелу чије смо математичко очекивање и дисперзију увели у дефиницији 1.18.

Теорема 3.9. Математичко очекивање M и дисперзија V геометријске средине цијена акција које прате геометријско Брауново кретање су редом дати сљедећим формулама

$$M = \mathbb{E}^*[\ln(G(T))] = \ln(S_t) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(r - \sigma^2/2\right)(t_k - t)\,, \tag{3.20}$$

$$V = D[\ln(G(T))] = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\min\left(t_i - t, t_j - t\right). \tag{3.21}$$

Доказ. Из дефиниције геометријског Брауновог кретања знамо да случајне величине $\frac{S_{t_i}}{S_t}, i = 1, \ldots, n$ имају лог-нормалну расподјелу, тачније, у свијету неутралном од ризика важи

$$\ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i - t)\,,\, \sigma^2(t_i - t)\right),\ i = 1, \ldots, n.$$

Слиједи да случајни вектор

$$\boldsymbol{X} = \left[\ln\left(\frac{S_{t_1}}{S_t}\right), \ln\left(\frac{S_{t_2}}{S_t}\right), \ldots, \ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_t}\right)\right]^T$$

има вишедимензиону нормалну расподјелу $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$ са вектором очекивања

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t) \\ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t) \\ \vdots \\ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_n - t) \end{bmatrix}$$

и матрицом коваријације

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} t_1 - t & t_1 - t & \cdots & t_1 - t \\ t_1 - t & t_2 - t & \cdots & t_2 - t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 - t & t_2 - t & \ldots & t_n - t \end{bmatrix}.$$

Надаље,

$$\ln(G(T)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(S_{t_k}\right),$$

па важи

$$\mathbb{E}^*[\ln(G(T))] = \ln(S_t) + \frac{1}{n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(t_k - t),$$

$$D[\ln(G(T))] = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\min(t_i - t, t_j - t).$$

Сада, из формуле за очекивање случајне величине са лог-нормалном расподјелом, која је наведена у дефиницији 1.18, слиједи да је

$$\mathbb{E}^*(G(T)) = e^{M+V/2}.$$

Овиме је теорема доказана, а додатно, из нормалности случајних величина $\ln(S_{t_k})$ и вриједности њиховог очекивања и дисперзије слиједи $\mathbb{E}^*(S_{t_k}) = e^{r(t_k-t)}S_t$. Надаље, користећи линеарност математичког очекивања директно се показује да је

$$\mathbb{E}^*(A(T)) = \frac{S_t}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{r(t_k-t)}.$$

□

У претходној теореми смо посматрали случај када временски тренуци $t_1, \ldots, t_n$ у којима се врши упросјечавање цијена акција нису нужно еквидистантни. Међутим, у симулацијама процеса кретања цијена акција ћемо најчешће посматрати еквидистантне временске интервале, па је згодно показати на шта се своди претходна теорема у овом специјалном случају. Наиме, тада се изрази за M и V значајно поједностављују.

Нека су $t_1, \ldots, t_n$ једнако распоређени кроз вријеме. Тада постоји неко $h > 0$ тако да је $h = t_{k+1} - t_k$ за све $k = 1, \ldots, n$. Стога, важи да је $h = (T - t_1)/(n-1)$. На примјер, можемо посматрати случај када се за рачунање просјека узима вриједност цијене акције сваке недјеље, или сваког мјесеца. У случају седмичног просјека $h = 1/52$[6], а у случају мјесечног је $h = 1/12$. У идеалном случају би сваки мјесец имао једнак број дана што није тачно, међутим, формула је само апроксимација, па су мале разлике у броју дана по мјесецима занемарљиве. Такође, у случају седмичног упросјечавања требало би узети у обзир и празнике, али ни ово не доводи до великих разлика, па се може занемарити. Додатно, уколико бисмо посматрали просјек добијен на основу дневних промјена цијена акција, тада би h било реципрочна вриједност броја трговинских дана[7]. Међутим, због викенда нису сви трговински дани једнако распоређени кроз вријеме, па ово не би био добар примјер. Уколико занемаримо наведена одступања, једнакости (3.20) и (3.21) добијају сљедећу компактну форму:

$$M = \ln(S_t) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t) + (T - t_1)/2, \tag{3.22}$$

$$V = \sigma^2\left((t_1 - t) + \frac{(T - t_1)(2n-1)}{6n}\right). \tag{3.23}$$

[6]Мисли се на сваку седмицу у години када је берза отворена (*trading weeks*).

[7]Број дана када је берза отворена у току године (*trading days*).

Надаље, Ворст је показао да је цијена геометријске азијске опције дефинисане једначином (3.19) дата сљедећом формулом:

$$C^G = e^{-r(T-t)} \left(e^{M+V/2} \Phi \left(\frac{M - \ln(K) + V}{\sqrt{V}} \right) - K\Phi \left(\frac{M - \ln(K)}{\sqrt{V}} \right) \right), \tag{3.24}$$

гдје је $\Phi(x)$ функција расподјеле случајне величине са стандардном нормалном расподјелом. Претходна формула даје експлицитан израз за цијену азијске опције у случају када се просјек цијена акција рачуна преко геометријске средине.

У циљу вредновања аритметичких азијских кол опција можемо искористити информацију да је геометријска средина увијек мања или једнака аритметичкој средини, односно $G(T) \leqslant A(T)$ за све могуће исходе процеса кретања цијена акција S_t. Стога, C^G је доња граница за непознату цијену C^A, тј. важи:

$$C^G \leqslant C^A.$$

Такође,

$$(A(T) - K)^+ \leqslant (G(T) - K)^+ + A(T) - G(T),$$

одакле слиједи да је

$$C^A \leqslant C^G + e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^*(A(T)) - \mathbb{E}^*(G(T)), \tag{3.25}$$

гдје су $\mathbb{E}^*(A(T))$ и $\mathbb{E}^*(G(T))$ скраћени записи за $\mathbb{E}^*[A(T)|\mathcal{F}_t]$ и $\mathbb{E}^*[G(T)|\mathcal{F}_t]$ редом. У доказу теореме 3.9 показали смо да важи

$$\mathbb{E}^*(A(T)) = \frac{S_t}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{r(t_k - t)}, \tag{3.26}$$

$$\mathbb{E}^*(G(T)) = e^{M+V/2}, \tag{3.27}$$

одакле закључујемо да је неједнакошћу (3.25) дата горња граница за цијену аритметичке азијске опције C^A. Наведена горња граница се конструише као корекција теоријске цијене разлике између математичког очекивања аритметичког и геометријског просјека цијена акција при мјери неутралној од ризика. Апроксимација коју је Ворст предложио у [16] има за циљ да коригује уговорену цијену опције K за вриједност разлике између тих двају очекивања. Дакле, Ворстова апроксимација је дата са

$$C \approx e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^*[(G(T) - (K - \mathbb{E}^*(A(T)) + \mathbb{E}^*(G(T))))^+|\mathcal{F}_t], \tag{3.28}$$

што се према једначини (3.24) своди на

$$C \approx \widetilde{C} = e^{-r(T-t)} \left(e^{M+V/2} \Phi \left(\frac{M - \ln(K') + V}{\sqrt{V}} \right) - K' \Phi \left(\frac{M - \ln(K')}{\sqrt{V}} \right) \right), \qquad (3.29)$$

гдје је

$$K' = K - (\mathbb{E}^*(A(T)) - \mathbb{E}^*(G(T))).$$

Грубо речено, једначина (3.28) коригује цијену за разлику очекивања само уколико се опција у тренутку активације налази у новцу.

Надаље, директно из једначине (3.28) слиједи да вриједност $\widetilde{C}$ такође лежи између горње и доње границе, односно

$$|C - \widetilde{C}| \leqslant e^{-r(T-t)}(\mathbb{E}^*(A(T)) - \mathbb{E}^*(G(T))).$$

Потребно је напоменути да вриједност горње границе углавом зависи од волатилности и дужине периода упросјечавања цијена акција.

3.6 Избор контролних промјенљивих

Познато нам је из одјељка 3.4 да нам је за примјену методе контролних промјенљивих у циљу смањења дисперзије потребна одговарајућа контролна промјенљива, односно случајна величина чије очекивање знамо, а која је корелисана са добити опције. У оквиру Блек-Шолсовог модела смо се у раду опредијелили за сљедеће три контролне случајне величине:

(1) аритметичка средина цијена акција. Њено очекивање у односу на мјеру неутралну од ризика је

$$\mathbb{E}^*(A(T)) = \mathbb{E}^*[A(T)|\mathcal{F}_t] = \frac{S_t}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{r(t_k - t)}.$$

Ова контролна случајна величина рефлектује важно својство зависности од путања добити аритметичке азијске опције, али не и њену нелинеарност.

(2) Европска кол опција чија је цијена експлицитно дата Блек-Шолсовом формулом (теорема 1.39). За разлику од претходне, ова контролна случајна величина рефлектује нелинеарност добити, али занемарује путање процеса геометријског Брауновог кретања по ком се крећу промјене цијена акција кроз вријеме.

(3) Геометријска азијска опција чија је цијена експлицитно дата формулом (3.24). Ова контролна случајна величина је најсофистициранији избор међу набројаним и садржи дубоко знање о опцији, упркос томе што је просјек геометријски, а не аритметички.

Напомена 3.10. У Монте-Карло симулацијама ћемо једноставности ради посматрати случај еквидистантних тачака дискретизованог процеса кретања цијена акција неутралног од ризика. Видјели смо у претходној секцији рада да се у овом специјалном случају формуле за $M = \mathbb{E}^*[\ln(G(T))]$ и $D[\ln(G(T))]$ поједностављују (формуле (3.22) и (3.23) редом), па се и формула (3.24) за цијену геометријске азијске опције имплементирана у кодовима такође поједностављује.

Напомена 3.11. У случају еквидистантних временских интервала израз за математичко очекивање аритеметичке средине цијена акција дат у (1) своди се на једноставнији облик. Наиме, присјетимо се формуле за суму првих n чланова геометијског реда:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}, \alpha \neq 1. \tag{3.30}$$

Симулирамо кретање цијена акција у временским тренуцима $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$, $t_0 = 0, t_n = T$, односно интервал $[0, T]$ дијелимо на периоде једнаке дужине $\delta t = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. У уговореном тренутку доспијећа опције T се помоћу цијена акумулираних у посматраним временским тренуцима рачуна одговарајући просјек цијена акција. Надаље, користећи $t_k = t_1 + (k-1)\delta t, k = 1, \ldots, n$, $\delta t = \frac{T}{n}$ и чињеницу да важи $\mathbb{E}^*(S_t) = S_0 e^{rt}$, примјеном формуле (3.30) добијамо сљедећи израз за математичко очекивање аритметичке средине цијена акција при валуацији неутралној од ризика у случају еквидистантних временских интервала:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(A(T)) = \mathbb{E}^*[A(T)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}^*\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_{t_k}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^*(S_{t_k}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^*(S_{k\delta t}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_0 e^{rk\delta t} \\
&= \frac{S_0}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[e^{r\delta t}\right]^k = \frac{S_0}{n}\frac{e^{r\delta t}(1-e^{rn\delta t})}{1-e^{r\delta t}}.
\end{aligned}$$

Претходна формула коришћена је при Монте-Карло симулацијама у примјени методе контролних промјенљивих за смањење дисперзије. За крај, потребно је напоменути да смо при имплементацији уопштене методе контролних промјенљивих користили комбинацију све три горе наведене контролне промјенљиве.

Глава 4

Резултати и анализа

У овом поглављу рада приказани су резултати добијени на основу симулација примјеном Монте-Карло метода за редукцију дисперзије, као и вриједности Ворстове апроксимације и одговарајућа ограничења. Сви кодови којима су резултати генерисани и детаљна објашњења истих могу се наћи на [12]. Прије него што пређемо на анализу објаснићемо начин на који се рачуна грешка Монте-Карло оцјене чије су вриједности приказане у табелама у наставку. Нека је $\hat{\theta}_N$ Монте-Карло оцјена за цијену аритемтичке азијске опције добијена на основу N симулација и нека је $\hat{\sigma}_N$ стандардна девијација низа оцјена. Можемо конструисати $\beta\%$ интервал повјерења, гдје је $\beta = 1 - \alpha$ ниво повјерења, на сљедећи начин

$$[\hat{\theta}_N - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \hat{\theta}_N + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}],$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ је одговарајући квантил Студентове расподјеле. Нека је $[\hat{U_N}, \hat{V_N}]$ скраћени запис за Студентов интервал повјерења. Тада се грешка Монте-Карло оцјене у процентима рачуна по сљедећој формули

$$err_{MK}\% = \frac{\hat{V_N} - \hat{U_N}}{\hat{\theta}_N} \cdot 100. \tag{4.1}$$

Примјеном уграђене функције $t.test$ у „R-у” креирамо објекат који садржи резултате t-теста за дати низ оцјена, а потом на тако креиран објекат примјењујемо методу „$conf.int$” која нам даје лијеви и десни крај интервала повјерења. Након тога једноставно можемо имплементирати формулу (4.1) за грешку Монте-Карло оцјене. Сада можемо прећи на преглед резултата и анализу ефикасности имплементираних метода.

Табела 4.1 даје уопштени преглед ефикасности сваке од имплементираних метода. На први поглед видимо да су вриједности за саму оцјену цијене опције сличне независно од избора методе. Међутим, када погледамо вриједности стандардне девијације и грешке оцјене видимо да постоји значајна разлика међу методама. Као што је и очекивано на основу теоријских својстава, најлошије резултате даје „наивна" Монте-Карло метода. Иако је коришћен велик број симулација N и број корака n, стандардна девијација добијена овом методом је чак 17.38. Таква оцјена није поуздана и као таква нам није од практичног значаја.

Метода	**Тачкаста оцјена**	**Стандардна девијација**	**Грешка у %**
„Наивни" Монте-Карло	22.11	17.38	1.54
Антитетичко узорковање	22.25	12.21	1.08
Контролна случајна величина (1)	21.92	1.96	0.17
Контролна случајна величина (2)	21.94	8.64	0.77
Контролна случајна величина (3)	21.96	0.64	0.057
Комбинација (1), (2) и (3)	21.96	0.54	0.049

Табела 4.1: Резултати симулација за почетне параметре $S_0 = 100$, $K = 80$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $\beta = 0.95$, $N = 10^4$, $n = 100$.[1]

Коришћењем антитетичког узорковања успјели смо да побољшамо квалитет оцјене, али то повећање није велико. Стандардна девијација у односу на базну Монте-Карло оцјену јесте смањена за 29.34%, али у поређењу са методом контролних промјењљивих је то умањење недовољно да бисмо сматрали ову методу поузданом. Њена главна предност је то што је једноставна за имплементацију и не захтијева додатно знање о опцији, али то са друге стране смањује могућност да се оцјена цијене опције учини тачнијом. Разлог недовољног успјеха антитетичког узорковања се огледа у томе што је за наш проблем много значајнија информација о унутрашњој структури опције, него само промјена начина узорковања која је више математички трик.

Надаље, у табели 4.1 такође видимо да највеће смањење дисперзије Монте-Карло оцјене даје комбинована метода контролних промјењљивих. Добре резултате дају и појединачне контролне промјењљиве, али њих ћемо касније детаљно анализирати и упоредити. Апропо оцјене добијене комбиновањем свих контролних промјењљивих из одјељка 3.6, она смањује дисперзију „наивне" Монте-Карло оцјене за 96.89%, што је велико побољшање. Присјетимо се да је оцјена комбинованом

[1] N - Број Монте-Карло симулација, n - број временских интервала којима дискретизујемо процес геометријског Брауновог кретања, односно број корака, β - ниво повјерења за конструкцију интервала повјерења. Остале ознаке параметара су уведене раније у раду. Вриједности у свим табелама су заокружене на две значајне цифре.

методом контролних промјенљивих за цијену аритметичке азијске опције дата са

$$X_3 = X + \sum_{i=1}^{3} c_i \left(Y_i - \nu_i\right), \tag{4.2}$$

гдје су Y_i, $i = 1, 2, 3$, одабране контролне промјенљиве и $\mathbb{E}(Y_i) = \nu_i$ су познате вриједности. Раније смо у одјељку 3.4 показали да је то непристрасна оцјена параметра $\theta = \mathbb{E}(X)$. Надаље, показали смо и да се оптимални параметри c_1, c_2, c_3 за ову методу добијају као оцјене параметара одговарајућег линеарног модела

$$X = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \beta_3 Y_3 + \epsilon, \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{4.3}$$

гдје су у односу на стандардну нотацију замијењене улоге X и Y. Дакле, да бисмо постигли редукцију дисперзије оцјене (4.2) потребно је да важи $c_i^* = -\hat{\beta}_i$, $i = 1, 2, 3$. Ово смо при имплементацији у „R-у" постигли тако што смо креирали модел робусне линеарне регресије помоћу функције „rlm", а потом смо примјеном методе „$coefficients$" на модел добили вриједности за одговарајуће коефицијенте модела. Тако добијене коефицијенте смо користили у конструкцији оцјене (4.2) комбиноване методе контролних промјенљивих. Основна предност ове методе лежи у томе што смо при њеној имплементацији користили случајне величине које су све корелисане са нашом непознатом цијеном аритметичке азијске опције. Одговарајући коефицијенти робусне линеарне регресије нам омогућују да креирамо линеарну комбинацију свих контролних промјенљивих која нам даје најмању грешку. Рефлектујући истовремено и нелинеарност добити аритметичке азијске опције и зависност њене структуре од путања кретања промјене цијена акција у посматраном временском интервалу, таква линеарна комбинација даје оптималну контролну случајну промјенљиву за редукцију дисперзије Монте-Карло оцјене.

У табелама 4.2 и 4.3 је приказано како премија аритметичке азијске кол опције зависи, редом, од уговорене цијене K и волатилности σ при услову да су остали параметри константни. Повећањем уговорене цијене очекивано опада цијена опције, стандардна девијација такође благо опада, док грешка Монте-Карло оцјене коју рачунамо стављањем у однос оцјену добијену одговарајућом методом и дужину интервала повјерења добијеног примјеном Студентовог теста умјерено расте. Како власник кол опције има право, али не и обавезу да на крају посматраног периода купи акцију по уговореној цијени, што нижа уговорена цијена повећава вјероватноћу да опција заврши „у новцу" и да он оствари профит, јер може купити акцију по нижој цијени. Уколико је уговорена цијена блиска тржишној цијени акције, или је виша, онда кол опција на такву акцију губи на вриједности, јер ако опција заврши „ван новца”, онда би инвеститор активацијом опције купио акције по вишој цијени него на тржишту.

Са друге стране, повећањем волатилности расте и цијена опције. Износ потенцијалног профита за инвеститора који улаже у волатилне акције је већи, а да би се одржао баланс, расте и ризик повезан са таквом инвестицијом. Све то утиче на пораст премије опције. Посљедично, порастом случајности у будућем кретању акција расте и стандардна девијација Монте-Карло оцјене за све посматране методе.

Метода	$K = 30$			$K = 40$			$K = 45$			$K = 50$		
	Оцјена	**Ст. дев.**	**Грешка**	**Оцјена**	**Ст. дев.**	**Грешка**	**Оцјена**	**Ст. дев.**	**Грешка**	**Оцјена**	**Ст. дев.**	**Грешка**
Наивни Монте-Карло	20.30	8.75	0.85	11.03	8.40	1.49	7.05	7.55	2.07	4.05	6.20	3.00
Антитетичко узорковање	20.25	6.11	0.59	10.97	5.86	1.05	7.00	5.27	1.47	3.99	4.23	2.12
Контролна сл. вел. (1)	20.25	0.037	0.0035	10.96	0.98	0.17	6.99	1.86	0.52	4.00	2.51	1.23
Контролна сл. вел. (2)	20.23	4.36	0.42	10.97	4.32	0.77	7.00	3.94	1.10	4.01	3.32	1.63
Контролна сл. вел. (3)	20.25	0.36	0.035	10.98	0.32	0.057	7.01	0.29	0.080	4.00	0.25	0.12
Комбинација (1), (2) и (3)	20.25	0.037	0.0035	10.98	0.28	0.051	7.01	0.25	0.070	4.01	0.22	0.11

Табела 4.2: Зависност цијене аритметичке азијске опције од уговорене цијене K за различите методе са почетним параметрима $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $\beta = 0.95$, $N = 10^4$, $n = 100$. Грешка је изражена у %. Ст. дев. је скраћеница за стандардну девијацију оцјене.

Метода	**σ= 0.2**			**σ= 0.3**			**σ= 0.4**			**σ= 0.6**		
	Оцјена	**Ст. дев.**	**Грешка**	**Оцјена**	**Ст. дев.**	**Грешка**	**Оцјена**	**Ст. дев.**	**Грешка**	**Оцјена**	**Ст. дев.**	**Грешка**
Наивни Монте-Карло	3.01	4.17	3.84	4.13	6.27	4.20	5.27	8.52	4.49	7.49	13.58	5.02
Антитетичко узорковање	3.03	2.95	2.70	4.17	4.44	2.96	5.31	6.06	3.17	7.56	9.72	3.56
Контролна сл. вел. (1)	3.11	1.78	1.59	4.28	2.64	1.61	5.47	3.51	1.78	7.82	5.24	1.86
Контролна сл. вел. (2)	3.04	2.19	2.00	4.18	3.35	2.22	5.33	4.62	2.40	7.62	7.58	2.76
Контролна сл. вел. (3)	3.08	0.13	0.12	4.24	0.29	0.19	5.41	0.55	0.28	7.73	1.43	0.51
Комбинација (1), (2) и (3)	3.08	0.11	0.0098	4.24	0.24	0.16	5.40	0.45	0.23	7.72	1.13	0.40

Табела 4.3: Зависност цијене аритметичке азијске опције од волатилности акција σ за различите методе са почетним параметрима $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.05$, $T = 1$, $\beta = 0.95$, $N = 5000$, $n = 12$. Грешка је изражена у %.

Надаље, желимо да одредимо која од три одабране контролне промјенљиве је најбољи избор за вредновање аритметичких азијских опција. Како је вријеме потребно за израчунавање један од кључних фактора који утичу на избор Монте-Карло методе, то у пракси није увијек погодно користити много контролних промјенљивих. Такође, већ смо се упознали са чињеницом да упркос томе што повећањем броја симулација у теорији Монте-Карло оцјена постаје боља, брзина којом се оцјена побољшава се смањује због релативно споре конвергенције. Стога, желимо да одредимо која од три одабране контролне промјенљиве је оптимална при раду са аритметичким азијским опцијама, у смислу да даје најмању грешку за што мањи број израчунавања. Додатно, у реалном сценарију може се десити да нам није доступно сво неопходно доменско знање везано за неку од контролних промјенљивих, или више њих. У таквом случају метода комбиновања различитих контролних промјенљивих постаје непримјењива.

Анализирајући табелу 4.3 можемо закључити да је међу трима посматраним најефикаснија контролна промјенљива одговарајућа геометријска азијска опција. За сваки избор параметра волатилности σ стандардна девијација низа оцјена и грешка коначне оцјене за цијену аритметичке азијске опције су најмање међу одабраним контролним промјенљивим. Такође, иако стандардна девијација и грешка оцјене расту са порастом волатилности, у случају ове контролне промјенљиве тај раст је релативно стабилан, те грешка ни у једном случају не прелази 1%. Сличан тренд видимо и у табели 4.2 гдје у зависности од пораста уговорене цијене K расте и грешка оцјене, а за геометријску азијску опцију као контролну промјенљиву је грешка најнижа. Једини изузетак јесте случај када је $K = 30$, јер се тада као бољи избор намеће прва контролна промјенљива, односно просјек цијена акција. Стога, да бисмо се увјерили у тачност претпоставке да је најефикаснија контролна промјенљива управо одговарајућа геометријска азијска опција потребно је спровести додатну анализу. Њу радимо одређивањем појединачних корелација између низа оцјена добијеног „наивном" Монте-Карло методом и низова оцјена добијених методом контролних промјенљивих. Идеја је да се симулацијама генеришу четири низа оцјена за цијену аритметичке азијске опције. Први низ се добија као просјечна вриједност цијена акција за ту симулацију, а остала три као добит опције у зависности од избора контролне промјенљиве који смо објаснили у одјељку 3.6. Тражимо ону корелацију између трију добијених која има највећу вриједност, јер смо у анализи методе контролних промјенљивих утврдили да што је већа корелација између контролне и циљне случајне величине, то ће дисперзија оцјене више да се смањи.

Резултати приказани у претходној табели потврђују да је геометријска азијска опција најбољи избор контролне промјенљиве у случају вредновања њој еквивалненте аритметичке азијске опције (разликују се само у функцији просјека цијена акција). За ову контролну случајну величину је вриједност поменуте корелације 0.99 што имплицира да у теорији очекујемо да она доводи до већег смањења дисперзије, док практични резултати то јасно потврђују. Стандардна девијација „наивне" Монте-Карло оцјене за вриједности параметара коришћених у табели 4.4

Контролна промјенљива	Корелација са „наивном” М-К оцјеном	Ст. дев.	Грешка у %
Просјек цијена акција	0.95	6.98	4.02
Европска опција	0.92	9.09	5.35
Геометријска азијска опција	0.99	1.09	0.63

Табела 4.4: Корелација између низа оцјена добијеног „наивном” Монте-Карло методом и низа добијеног на основу одговарајуће контролне промјенљиве. Почетни параметри: $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.4$, $n = 12$, $N = 1000$.

износи 17.54, док је грешка оцјене 10.48%. То нам говори да су, у односу на базну методу, све посматране контролне промјенљиве смањиле дисперзију Монте-Карло оцјене. Као најлошији избор се показала одговарајућа европска ванила опција. Овакав резултат није изненађујући, јер цијена европске опције зависи само од цијене акције у тренутку истека уговора T, а не и од свих цијена посматраних у интервалу $[0, T]$. Употребом ове контролне промјенљиве се у потпуности занемарује основно својство зависности азијских опција од путања процеса геометријског Брауновог кретања по ком се крећу промјене цијена акција. Како европска опција рефлектује једино нелинеарност добити аритметичке азијске опције, али не даје довољно информација о самој структури и особинама опције, то редукција дисперзије која се постиже овом контролном промјенљивом нема довољно велик практични значај.

На другом мјесту по ефикасности се налази прва контролна промјенљива, односно просјек цијена акција у посматраном интервалу. Њоме се постиже веће од двоструког смањења (пад од 60.21%) стандардне девијације и грешке у односу на „наивну” Монте-Карло оцјену. Међутим, у поређењу са геометријском азијском опцијом ова контролна промјенљива је значајно лошији избор. Главна особина просјека цијена акција као контролне промјенљиве јесте да она рефлектује зависност добити азијске опције од путања случајног процеса, али не узима у обзир нелинеарност те добити. Са друге стране, у геометријској азијској опцији су садржана сва важна својства азијских опција међу којима су најважнија нелинеарност добити и зависност од путања. Стога, та контролна промјенљива представља најсофистициранији избор за ову методу редукције дисперзије. Такође, важно је напоменути да се висока корелација између низа оцјена добијеног „наивном” Монте-Карло методом и низа добијеног на основу геометријске азијске опције постиже и за мали број симулација, што је са становишта брзине израчунавања пресудно за одабир ове контролне промјенљиве за вредновање аритемтичких азијских опција.

Надаље, желимо да илуструјемо резултате које добијамо Ворстовом апроксимацијом на одабраној контролној промјенљивој, односно геометријској азијској опцији. У табели 4.5 су дате доња (3.24) и горња граница (3.25) за цијену аритметичке азијске опције, Ворстова апроксимација (3.29) и оцјена добијена на основу методе контролних промјенљивих када се за контролну промјенљиву узме одговарајућа геометријска азијска опција. Све симулације у овој табели су добијене

r	K	σ	**Доња граница**	**Горња граница**	**Ворстова апр.**	**Монте Карло оцјена**	**Ст. дев.**
0.05	80	0.1	21.38	21.47	21.47	21.47	0.079
0.05	90	0.1	11.89	11.98	11.98	11.98	0.073
0.05	100	0.1	3.60	3.70	3.66	3.67	0.061
0.05	80	0.3	21.30	22.04	22.00	21.93	0.56
0.05	90	0.3	13.46	14.20	14.01	14.00	0.53
0.05	100	0.3	7.56	8.30	7.94	7.99	0.44
0.05	80	0.5	24.02	22.50	24.52	24.12	2.15
0.05	90	0.5	16.17	18.19	17.40	17.60	1.92
0.05	100	0.5	11.23	13.26	12.17	12.49	1.75
0.07	80	0.1	21.92	22.02	22.02	22.02	0.090
0.07	90	0.1	12.61	12.71	12.71	12.71	0.081
0.07	100	0.1	4.22	4.32	4.29	4.30	0.075
0.07	80	0.3	21.78	22.52	22.46	22.44	0.63
0.07	90	0.3	13.96	14.70	14.52	14.54	0.62
0.07	100	0.3	7.97	8.72	8.37	8.47	0.51
0.07	80	0.5	22.84	24.85	24.38	24.44	1.71
0.07	90	0.5	16.52	18.53	17.77	17.92	1.41
0.07	100	0.5	11.55	13.57	12.51	12.82	1.58
0.1	80	0.1	22.70	22.82	22.82	22.82	0.094
0.1	90	0.1	13.66	13.78	13.78	13.78	0.085
0.1	100	0.1	5.20	5.32	5.29	5.30	0.076
0.1	80	0.3	22.47	23.22	23.17	23.16	0.66
0.1	90	0.3	14.70	15.45	15.29	15.28	0.54
0.1	100	0.3	8.61	9.36	9.04	9.13	0.51
0.1	80	0.5	23.34	25.34	24.90	25.04	2.16
0.1	90	0.5	17.04	19.04	18.33	18.56	2.01
0.1	100	0.5	12.04	14.04	13.03	13.39	1.83

Табела 4.5: Ворстова апроксимација и одговарајућа Монте-Карло оцјена за цијену аритметичке азијске опције методом контролних промјенљивих; $S_0 = 0$, $T = 1$, $n = 100$, $N = 1000$.

на основу хиљаду понављања. На први поглед увиђамо да су вриједности стандардне девијације Монте-Карло оцјене користећи геометријску азијску опцију веома ниске. Разлог томе је велика редукција дисперзије у случају ове контролне промјенљиве о чему смо раније говорили. Стога, закључујемо да резултате које добијамо симулацијама можемо сматрати довољно тачним и поузданим за вредновање аритметичких азијских опција. Као што је и очекивано из табеле 4.5 видимо да повећањем вриједности безризичне каматне стопе r и волатилности σ расте и цијена опције.

Највећи утицај на овакво понашање цијена опција има управо волатилност, јер што је кретање цијена акција хаотичније, то је улагање у такве акције ризичније, па њихова вриједност опада, али вриједност опције на такве акције расте. Ово је важно, јер нам говори о томе да инвеститори могу да користе флуктуације цијена акција на тржишту и опције на њих у своју корист да би остварили профит. Још важније, Ворстова формула за апроксимацију цијене је веома блиска Монте-Карло оцјени коју смо добили симулацијом. Када је волатилност мања или једнака 20%, онда се у неким случајевима чак и поклапају вриједност апроксимације и Монте-Карло оцјене, а иначе је разлика мања од 0.1%, па закључујемо да је Монте-Карло оцјена добијена редукцијом дисперзије поуздана. О томе свједоче и ниске вриједности стандардне девијације оцјене које су у случају $\sigma \leqslant 0.2$ испод један. За веће вриједности волатилности тачност апроксимације опада, али је грешка мања од 1%.

У реалном сценарију није очекивано да волатилност акција буде превисока. Мјера волатилности акција која се користи у свијету финансија јесте индекс волатилности „VIX" (енг. *CBOE Volatility Index*) који рачуна и објављује Одбор за размјену опција у Чикагу (енг. *Chicago Board Options Exchange*). Овај индекс мјери волатилност тржишта акција, или степен непредвидивости и ризик од губитка који је везан за неко тржиште или валуту. Тачније, овај индекс генерише пројекцију волатилности у току сљедећих тридесет дана од дана посматрања. На основу званичних историјских података објављењних од стране поменутог одбора (подаци се могу наћи на [19]) просјечна вриједност индекса волатилности у посљедњих пет година износи 21.34%. Високе вриједности волатилности акција се дешавају рјеђе и најчешће су проузроковане свјетским економским и геополитичким кризама када су тржишта акцијама веома нестабилна и може доћи до њиховог пада. Због тога што су аритметичке азијске опције засноване на просјеку цијена акција, а не на цијени у неком одређеном тренутку, оне својом природом смањују волатилност и за такве опције волатилност је најчешће испод 0.2 [16]. Само код аритметичких азијских опција које се односе на робу и природне ресурсе волатилност може да премаши 0.5 и у том случају није једноставно одредити тачну волатилност што доводи до већих грешака при вредновању таквих опција [16]. На основу свега изнесеног можемо закључити да је метода контролних промјенљивих најбоља за редукцију дисперзије у проблему одређивања фер цијене аритметичке азијске опције. То доказују велико смањење стандардне девијације оцјене, као и чињеница да се добра тачност оцјене постиже за мали број симулација што је генерално једна од највећих предности ове методе.

Закључак

У овом мастер раду смо показали како Монте-Карло симулације могу да се користе у проблему вредновања азијских опција. Излагање је било хронолошки, од увођења потребне теоријске основе до презентовања резултата са циљем да на методичан начин представимо значај егзотичних опција и проблем вредновања аритметичких азијских опција, па да дођемо до нумеричког рјешења истог. Показали смо да различите модификације „наивне" Монте-Карло методе постижу значајне резултате у побољшању тачности оцјене, али да постоји велика разлика у њиховој ефикасности, као и у комплексности и додатном познавању структуре и својстава опције да би могле да се користе.

Важно је напоменути да се методе и технике обрађене у овом мастер раду могу примијенити и на друге проблеме у теорији финансија и на друге опције чија добит зависи од путања стохастичког процеса попут ретроспективних опција. Од Бојловог[2] увођења Монте-Карло метода у теорију вредновања финансијских деривата 1977. године и рада Ворста[3] и Кемне[4] у развоју и надградњи његових идеја до данас је урађен велик напредак у овој области. Предмет даљег истраживања могле би бити неке софистицираније Монте-Карло методе попут хибрида антитетичког узорковања и контролних промјенљивих описане у [15]. Такође, могли бисмо посматрати другу грану метода вредновања азијских опција која је заснована на нумеричкој апроксимацији саме расподјеле аритметичког просјека лог-нормалних случајних величина као што је описано у раду Левија[5] [20], или Вејкмана[6] и Турнбула[7] [21].

[2] Phelim P. Boyle, 1941-, ирски економиста
[3] A.C.F. Ton Vorst, 1952-, холандски математичар и финансијски инжењер
[4] Angelien G. Z. Kemna, 1941-, холандска економисткиња
[5] Edmond Levy
[6] Lee Macdonald Wakeman
[7] Stuart M. Turnbull

Библиографија

[1] Eleuterio Vallelado González. Options evolution: the introduction of organized markets in the U.S.A. pages 97–108, 1992.

[2] Phelim Boyle and Feidhlim Boyle. *Derivatives: the tools that changed finance.* Risk Books, London, 2001.

[3] Geoffrey Poitras. The Early History of Option Contracts, in Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models: Exposition and Appraisal. pages 487–518, 2009.

[4] Nicholas Privault. Notes on stochastic finance. `https://personal.ntu.edu.sg/nprivault/indext.html`, 2021.

[5] Слободанка Јанковић, Бојана Милошевић. *Елементи финансијске математике.* Математички факултет, Универзитет у Београду, 2017.

[6] J.Michael Harrison and Stanley R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3):215–260, 1981.

[7] Albert N. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory.* Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1999.

[8] Peter G. Zhang. *Exotic Options: A Guide to Second Generation Options.* World Scientific. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[9] Angelien Gertruda Zinnia Kemna and Antonius Cornelis Franciscus Ton Vorst. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking & Finance*, 14(1):113–129, 1990.

[10] Paolo Brandimarte. *Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management and Economics.* Wiley Handbooks in Financial Engineering and Econometrics. Wiley, 2014.

[11] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2004.

[12] Vrednovanje azijskih opcija. `https://github.com/andreagrbic/master_rad_matf`, January 2023.

[13] Phelim Boyle, Mark Broadie, and Paul Glasserman. Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8):1267–1321, 1997. Computational financial modelling.

[14] Phelim P. Boyle. Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3):323–338, 1977.

[15] Farshid Mehrdoust. A new hybrid monte carlo simulation for asian options pricing. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85:507–516, 08 2013.

[16] Ton Vorst. Prices and hedge ratios of average exchange rate options. *International Review of Financial Analysis*, 1(3):179–193, 1992.

[17] Stephen Figlewski. Options Arbitrage in Imperfect Markets. *The Journal of Finance*, 44(5):1289–1311, 1989.

[18] Jonathan E. Ingersoll Jr. *Theory of Financial Decision Making*. Studies in Financial Economics. Rowman & Littlefield Publishers, 1987.

[19] Historical Data for Cboe VIX® Index and Other Volatility Indices. `https://www.cboe.com/tradable_products/vix/vix_historical_data/`, January 2023.

[20] Edmond Levy. Pricing European average rate currency options. *Journal of International Money and Finance*, 11(5):474–491, 1992.

[21] Stuart M. Turnbull and Lee MacDonald Wakeman. A Quick Algorithm for Pricing European Average Options. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3):377–389, 1992.

Биографија аутора

Андреа Грбић рођена је 29. августа 1997. године у Бањој Луци. До своје седме године живјела је у Стокхолму, гдје је у Основној школи „Käppala skola, Lidingö” завршила прва два разреда. Потом се сели у Бања Луку гдје паралелно завршава Основну школу „Иво Андрић” и Музичку школу „Владо Милошевић” на одсјеку за клавир. 2013. године уписује гимназију у Бањој Луци, а након завршена прва два разреда средње школе са одличним успјехом сели се у Стокхолм гдје похађа трогодишњи програм међународне матуре „The International Baccalaureate® (IB) Diploma Programme” у „Kungsholmens” гимназији. Ту 2016. године стиче билингуалну диплому средње школе из енглеског и српског језика. Исте године се сели у Београд и уписује Математички факултет Универзитета у Београду на модулу статистика, актуарска и финансијска математика. Основне студије завршава 2021. године и исте године уписује мастер студије на истом студијском програму и модулу. Области интересовања су јој вјероватноћа и статистика, финансијска математика, као и машинско учење.

Поред српског говори енглески и шведски језик.