

# Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA

## Misure Quantistiche Generalizzate

Relatore:

**Prof. Giuseppe Vallone**

Correlatore:

**Giulio Foletto**

Laureando:

**Andrea Grossutti**

Matricola 1138611

23 Settembre 2019

Anno Accademico 2018–2019



# Abstract

Il tema della *Misura Quantistica*, oltre ad essere centrale nella Meccanica Quantistica e ad aver suscitato nei decenni diversi dibattiti sull'interpretazione dei fenomeni ad esso connessi, è diventato di enorme interesse dal punto di vista ingegneristico da quando si è visto che la fisica dei quanti può allargare notevolmente gli orizzonti della Teoria dell'Informazione [1] [2]. Le possibilità offerte da nuovi strumenti come il *Teletrasporto Quantistico*, la *Crittografia Quantistica*, le *simulazioni* utilizzate dalla Scienza della Materia e gli *algoritmi quantistici* utilizzati dall'Informatica che possono esser effettuati con il *Computer Quantistico*, dipendono dalle nostre capacità di manipolare particelle quantistiche come fotoni e atomi.

I vincoli imposti dalle misure quantistiche *proiettive*, la versione standard delle misure quantistiche, sono molto stringenti, e si è cercato un modo di aggirare tali vincoli utilizzando misure più generali. Tali studi hanno portato ad enormi risultati, ampliando notevolmente le conoscenze teoriche e le applicazioni ingegneristiche legate alla Meccanica Quantistica. Tuttavia una buona parte di questi studi è relativamente recente (gli argomenti illustrati in questa tesi sono principalmente contenuti in articoli scientifici pubblicati dopo il 1988, in seguito alla pubblicazione di [3], anche se i formalismi utilizzati sono precedenti a tale anno) e quindi ad oggi il tema delle misure generalizzate non vanta la stessa organicità di argomenti più datati.

Si è cercato in questo lavoro, senza ambizione di completezza, di riproporre un collegamento tra il formalismo delle misure generalizzate proposto da Kraus [4] e quello storicamente proposto da von Neumann [5] in relazione anche agli sviluppi recenti nell'ambito. Sono illustrate ed analizzate alcune applicazioni delle misure generalizzate, lasciando citati numerosi articoli di approfondimento, in quanto non era possibile contenere l'enorme mole di lavoro prodotto dalla comunità scientifica negli ultimi anni riguardo al tema in questo breve scritto.

Infine è presentato e descritto in tutte le sue parti un modello di interferometro che permette di realizzare un'ampia famiglia di misure generalizzate in ottica quantistica mediante la manipolazione di fotoni. In laboratorio è stata ottenuta una legge di calibrazione di due interferometri costruiti secondo tale modello, che sono poi stati utilizzati per verificare che l'entanglement (altro comportamento unicamente descrivibile con la Meccanica Quantistica e sfruttato enormemente in quasi tutte le tecnologie quantistiche) sia preservato in seguito a misure generalizzate, cosa impossibile con misure proiettive, mostrando nuovamente come la generalizzazione delle misure quantistiche sia di ampio interesse.



# Indice

	Pagina
<b>1 La Misura in Meccanica Quantistica</b>	<b>1</b>
1.1 Descrizione dei sistemi quantistici . . . . .	1
1.1.1 Sistemi isolati . . . . .	1
1.1.2 Sistemi composti . . . . .	3
1.1.3 Sistemi aperti . . . . .	3
1.2 Misure quantistiche generalizzate . . . . .	5
1.3 Misure descritte con il formalismo di von Neumann . . . . .	6
1.3.1 Descrizione statistica . . . . .	8
1.3.2 Misure proiettive nel formalismo di von Neumann . . . . .	8
1.3.3 Effetto delle misure non ideali del puntatore . . . . .	9
1.4 Misure deboli . . . . .	10
1.4.1 Post-selezione e valori deboli . . . . .	10
1.4.2 Misure deboli con puntatori a qubit . . . . .	12
1.5 Valori modulari . . . . .	13
1.6 Applicazioni delle misure generalizzate . . . . .	14
1.6.1 Misura di osservabili non commutative . . . . .	14
1.6.2 Amplificazione mediante valori deboli . . . . .	14
1.6.3 Tomografia debole diretta . . . . .	15
Analisi dell'accuratezza della tomografia debole . . . . .	17
1.6.4 Tomografia forte diretta . . . . .	17
Analisi della precisione della DST e confronto con la DWT . . . . .	18
<b>2 Interferometro per misure generalizzate</b>	<b>19</b>
2.1 Descrizione del modello . . . . .	19
Polarizing Beam Splitters . . . . .	20
Half Wave Plates . . . . .	20
Interferometro . . . . .	20
2.1.1 Descrizione del modello con l'aggiunta di due lamine . . . . .	21
2.1.2 Tomografia dello stato uscente . . . . .	22
2.1.3 Interferometri in serie . . . . .	22
2.2 Caratterizzazione sperimentale dell'interferometro . . . . .	23
2.2.1 Risultati della caratterizzazione . . . . .	23
2.2.2 Correzione del posizionamento delle lamine . . . . .	25
<b>3 Entanglement e misure a forza arbitraria</b>	<b>27</b>
3.1 Breve introduzione al paradosso EPR e alla disuguaglianza CHSH . . . . .	27
3.2 Descrizione del protocollo . . . . .	28
3.3 Elaborazione dei dati sperimentali . . . . .	29
<b>Conclusioni</b>	<b>31</b>
<b>Appendice</b>	<b>33</b>

<b>A</b>	<b>Materiali Supplementari - Capitolo 2</b>	<b>33</b>
A.1	Dimostrazione dell'equazione (2.3)	33
A.2	Dettagli sulla caratterizzazione degli interferometri	34
A.2.1	Confronto tra comportamento reale e modello teorico	34
A.2.2	Descrizione dell'apparato e del protocollo per la raccolta dei dati sperimentali	35
A.2.3	Analisi dei dati raccolti	36
A.2.4	Applicazione del modello di regressione lineare	36
A.2.5	Posizionamento errato delle lamine	38
	Determinazione di $\delta_1$	39
	Determinazione di $\delta_2$	39
	Caratterizzazione degli interferometri assumendo $\delta_1$ e $\delta_2$ calcolati	40
A.3	Tabelle contenenti i dati sperimentali raccolti	42
A.4	Listing dei codici sorgente <i>Python</i> utilizzati	48
	<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>







# Capitolo 1

## La Misura in Meccanica Quantistica

Questo capitolo è composto da una prima parte (sezioni 1.1 - 1.5) in cui si presenta il tema delle misure generalizzate da un punto di vista teorico, seguito da una seconda parte (sezione 1.6) in cui vengono presentate alcune delle applicazioni delle misure generalizzate.

In particolare nella sezione 1.1 viene brevemente presentato il formalismo standard della Meccanica Quantistica e delle misure proiettive, arrivando a descrivere nella sezione 1.2 le misure generalizzate secondo il formalismo sviluppato da Kraus. Nella sezione 1.3 sarà invece presentato il formalismo di von Neumann, che permette la descrizione di un'ampia varietà di misure generalizzate (nonché quelle proiettive), mostrando poi come le misure di von Neumann possano esser descritte dal formalismo di Kraus. L'obiettivo della trattazione non sarà quello di confrontare i due formalismi per determinare il migliore tra i due, ma di mostrare i vantaggi di ognuno e di connetterli tra loro, in modo da fornire una prospettiva più ampia sulle misure generalizzate in Meccanica Quantistica.

Nella sezione 1.4 verrà analizzata una particolare classe di misure, le Misure Deboli, in cui il sistema misurato interagisce solo debolmente con l'apparato di misura, ottenendo così risultati impossibili da ottenere con le misure proiettive. Infine nella sezione 1.5 viene presentata un'ulteriore classe di misure, le Misure Modulari, che vengono eseguite su qubit,<sup>1</sup> e presentano proprietà simili a quelle delle Misure Deboli ma non richiedono che l'accoppiamento tra sistema e apparato di misura sia debole.

### 1.1 Descrizione dei sistemi quantistici

<sup>2</sup> Riportiamo qui una breve descrizione dei sistemi quantistici, in modo da richiamare i concetti che verranno poi utilizzati per la trattazione delle misure quantistiche.

#### 1.1.1 Sistemi isolati

**Assioma 1.** Uno stato puro  $|\psi\rangle$  è la descrizione completa di un sistema fisico. In meccanica quantistica, uno stato puro è un raggio vettore in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Considereremo sempre, salvo diversa indicazione, gli stati puri descritti da vettori normalizzati, ove vale cioè  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . La notazione  $\langle a|b\rangle$  indica il prodotto interno definito in  $\mathcal{H}$  tra i vettori indicati. Nel caso di spazi di Hilbert a dimensione finita indica il prodotto matriciale tra il vettore  $|b\rangle$  e il trasposto coniugato del vettore  $|a\rangle$ , indicato con  $|a\rangle^\dagger \equiv \langle a|$ . Rimandiamo a testi più approfonditi, come [7], la definizione di  $\langle a|$  nel caso di  $\mathcal{H}$  abbia dimensione infinita.

**Definizione 1.** Si definisce Stato Misto un sistema  $S$ , descritto da una funzione d'onda  $|\psi\rangle$  non nota, scelta in un insieme di  $N$  possibili stati puri  $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1\dots N}$ . La probabilità classica che  $|\psi\rangle$  corrisponda ad una certa  $|\psi_i\rangle$  è  $\tilde{p}_i$  (con  $\tilde{p}_i > 0$  e  $\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i = 1$ ).

Uno stato misto viene descritto da una Matrice Densità  $\rho$  definita come

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Un qubit è un sistema quantistico i cui stati puri sono descritti da raggi vettori in uno spazio di Hilbert di dimensione 2. Si veda la trattazione successiva per comprendere quanto affermato. Nella Teoria dell'Informazione Quantistica i qubit rivestono un ruolo analogo a quello dei bit nella Teoria dell'Informazione classica.

<sup>2</sup>La trattazione delle prime sezioni di questo capitolo sono fedeli alle lezioni del professor Preskill, disponibili online [6]. La parte riguardante la descrizione degli stati è contenuta nel Capitolo 2, mentre quella riguardante la descrizione delle misure in MQ nel Capitolo 3. Assieme a tale risorsa sono stati utilizzati [7], le note [8], e la prima parte di [9].

Si noti che uno stato puro corrisponde al caso in cui esista un certo  $k$  tale che  $p_k = 1$  e in tal caso  $\rho = \hat{\Pi}_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ . Per tale proprietà, sia  $\rho_p$  la matrice densità di uno stato puro e  $\rho_m$  la matrice densità di uno stato non puro, vale  $\text{Tr } \rho_p^2 = 1$  e  $\text{Tr } \rho_m^2 < 1$

**Proposizione 1.1.1.** *La matrice densità ha le seguenti proprietà*

- $\rho$  è hermitiana
- $\text{Tr } \rho = 1$
- $\rho$  è un operatore non-negativo:  $\forall |\chi\rangle$  vale  $\langle\chi|\rho|\chi\rangle \geq 0$

**Assioma 2.** *Un'osservabile è una proprietà di un sistema fisico che in principio è possibile misurare. In meccanica quantistica, un'osservabile è un operatore autoaggiunto.*

Consideriamo ora un'osservabile  $\hat{C}$  descritta in termini dei suoi proiettori:<sup>3</sup>  $\hat{C} = \sum_j c_j \hat{\Pi}_j$ , ove  $\hat{\Pi}_j = |c_j\rangle\langle c_j|$  sono i proiettori sugli autospazi definiti dalla base di autovettori  $\{|c_j\rangle\}_j$  di  $\hat{C}$ .

**Assioma 3.** *Una misura è un processo in cui l'informazione su uno stato di un sistema fisico è acquisita da un osservatore. In meccanica quantistica, la misura ideale o proiettiva di un'osservabile  $\hat{C}$  predispone un autostato di  $\hat{C}$ , e l'osservatore acquisisce il corrispondente autovalore. Se lo stato quantistico appena prima della misura è  $|\psi\rangle$ , allora la probabilità di ottenere l'esito  $c_i$  e lo stato del sistema dopo la misura se si ottiene tale esito sono*

$$p_j = \|\hat{\Pi}_j |\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\hat{\Pi}_j|\psi\rangle \quad |\psi'_j\rangle = \frac{\hat{\Pi}_j |\psi\rangle}{\|\hat{\Pi}_j |\psi\rangle\|} \quad (1.2)$$

Se lo stato iniziale prima della misura è descritto da una matrice densità  $\rho$ , allora dopo la misura lo stato sarà<sup>4</sup>

$$\rho' = \sum_i \tilde{p}_i \sum_j p_j \frac{\hat{\Pi}_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{\Pi}_j^\dagger}{\|\hat{\Pi}_j |\psi_i\rangle\|^2} = \sum_i \tilde{p}_i \sum_j \hat{\Pi}_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{\Pi}_j^\dagger = \sum_j \hat{\Pi}_j \rho \hat{\Pi}_j^\dagger \quad (1.3)$$

**Definizione 2.** *Si definisce valor medio di  $\hat{C}$  nello stato puro  $|\psi_k\rangle$  il valore atteso della misura di  $\hat{C}$ :*

$$\langle\hat{C}\rangle_{\psi_k} \equiv \sum_j c_j p_j = \sum_j c_j \langle\psi_k|\hat{\Pi}_j|\psi_k\rangle = \langle\psi_k|\hat{C}|\psi_k\rangle \quad (1.4)$$

Nel caso di uno stato misto, non sapendo in quale stato iniziale  $|\psi_i\rangle$  si trovi il sistema, è necessario considerare tutte le  $N$  possibilità  $\{|\psi_i\rangle\}$ , pesate con le rispettive probabilità  $\tilde{p}_i$ .

**Definizione 3.** *Si definisce valor medio di  $\hat{C}$  nello stato misto  $\rho$  la media pesata rispetto alle probabilità  $\tilde{p}_i$  dei valori attesi corrispondenti ai possibili stati puri:*<sup>5</sup>

$$\langle\hat{C}\rangle_\rho \equiv \sum_i \tilde{p}_i \langle\hat{C}\rangle_{\psi_i} = \sum_{i,j} \tilde{p}_i c_j \underbrace{\langle\psi_i|\psi_i\rangle}_{=1} \langle\psi_i|\hat{\Pi}_j|\psi_i\rangle = \text{Tr}(\rho \hat{C}) \quad (1.5)$$

**Assioma 4.** *La dinamica descrive come uno stato evolve nel tempo. In meccanica quantistica, l'evoluzione temporale di un sistema chiuso è descritta da un operatore unitario*

$$|\psi_i(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \quad (1.6)$$

ove  $\hat{U}$  è definito come<sup>6</sup>

$$\hat{U}(t) \equiv e^{-i\hat{H}t} \quad (1.7)$$

in cui  $\hat{H}$  è l'hamiltoniana del sistema.

Per gli stati misti vale:

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| = \hat{U} \rho \hat{U}^\dagger \quad (1.8)$$

<sup>3</sup>Per la notazione si assume sempre che  $\hat{C}$  abbia spettro discreto. Le stesse considerazioni valgono analogamente per lo spettro continuo sostituendo le sommatorie con integrali adottando la rappresentazione di Dirac degli stati.

<sup>4</sup>Tale matrice densità descrive tutti i possibili esiti della misura, considerando anche l'indeterminazione sullo stato iniziale

<sup>5</sup>Si noti che l'indice  $j$  è riferito alla decomposizione dell'operatore  $\hat{C}$  nei suoi proiettori

<sup>6</sup>Per alleggerire la notazione imporrò sempre  $\hbar = 1$ .

### 1.1.2 Sistemi composti

Altra nozione importante per affrontare il problema della misura è quella di sistema composto. Affinché un sistema quantistico possa essere misurato, esso deve interagire con l'esterno, ed è quindi necessario considerarlo insieme ad un altro sistema ambiente o misuratore.

**Assioma 5.** Quando un sistema quantistico consiste di  $N$  sistemi distinguibili con spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , il sistema totale ha come spazio di Hilbert il prodotto tensore degli spazi di Hilbert dei costituenti, cioè:

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (1.9)$$

e le osservabili  $\hat{C}^{(i)}$  del sottosistema  $i$ -esimo nel sistema totale sono date da:

$$\mathbb{1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{(i-1)} \otimes \hat{C}^{(i)} \otimes \mathbb{1}^{(i+1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{(N)} \quad (1.10)$$

In notazione di Dirac, se  $|\psi^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}_1$  e  $|\phi^{(2)}\rangle \in \mathcal{H}_2$ , lo stato prodotto tensore è denotato "implicitamente" con

$$|\psi^{(1)}\phi^{(2)}\rangle \equiv |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle \quad (1.11)$$

Consideriamo il sistema corrispondente allo spazio  $\mathcal{H}_{12}$  come isolato, in modo da poter usare le considerazioni fatte nel paragrafo precedente. Un generico stato puro  $|\Psi\rangle$  in  $\mathcal{H}_{12}$  si scrive come

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,m} \alpha_{im} |\psi_i\rangle |\phi_m\rangle \quad \text{ove vale:} \quad \sum_{i,m} |\alpha_{im}|^2 = 1 \quad (1.12)$$

dove  $\{|\psi_i\rangle\}$  e  $\{|\phi_m\rangle\}$  son basi ortonormali rispettivamente di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ .

Tale stato puro è descritto dalla matrice densità:

$$\rho_{12} = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{i,m} \sum_{j,n} \alpha_{im} \alpha_{jn}^* |\psi_i\rangle |\phi_m\rangle \langle \psi_j| \langle \phi_n| \quad (1.13)$$

Quando tratteremo due sistemi che evolvono come un unico sistema composto diremo spesso che tali sistemi sono *accoppiati*.

### 1.1.3 Sistemi aperti

Analizziamo ora cosa succede ai singoli sistemi quando non sono isolati. Quando limitiamo la nostra attenzione a solo una parte di un sistema più ampio, stiamo considerando sistemi aperti, ove non vale quanto detto nel paragrafo precedente per i sistemi isolati.

Consideriamo un'osservabile  $\hat{C}$  del sistema 1:  $\hat{C} = \hat{C}^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)}$ . Il suo valore atteso nello stato puro  $\rho_{12}$  si ottiene dalla formula (1.5), usando una base ortonormale del sistema composto, come  $\{|\Psi_{\kappa\gamma}\rangle\}_{\kappa,\gamma} \equiv \{|\psi_\kappa, \phi_\gamma\rangle\}_{\kappa,\gamma}$  (la traccia non dipende dalla scelta della base, che è arbitraria). Utilizzando  $\rho_{12}$  definita in (1.13) si ha:

$$\langle \hat{C} \rangle_{\rho_{12}} = \text{Tr}(\rho_{12} \hat{C}) = \sum_{\kappa,\gamma} \langle \Psi_{\kappa\gamma} | \rho_{12} \hat{C} | \Psi_{\kappa\gamma} \rangle = \sum_{i,j,m} \alpha_{im} \alpha_{jm}^* \langle \psi_j | \hat{C}^{(1)} | \psi_i \rangle \quad (1.14)$$

**Definizione 4.** Definiamo la matrice densità ridotta (del sistema 1) come la matrice con elementi di matrice:

$$(\rho_1)_{ij} = (\text{Tr}_{(2)} \rho_{12})_{ij} \equiv \sum_m \langle \phi_m | \rho_{12} | \phi_m \rangle = \sum_m \alpha_{im} \alpha_{jm}^* |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \quad (1.15)$$

dove  $\text{Tr}_{(2)}$  indica la traccia parziale, ossia la traccia calcolata usando una base del sistema 2 anziché una del sistema composto.

Con tale definizione si ottiene allora da (1.14) che il valor medio di un'osservabile del sistema 1 usando la matrice ridotta coincide con il valor medio della stessa osservabile estesa nel sistema composto:

**Lemma 1.1.1.** Il valor medio di  $\hat{C}^{(1)}$  nel sistema 1 vale

$$\langle \hat{C} \rangle^{(1)} = \text{Tr}(\rho_1 \hat{C}^{(1)}) \quad (1.16)$$

Abbiamo quindi visto che preso un sistema composto descritto da uno stato puro  $|\Psi\rangle$  e dalla matrice densità  $\rho_{12}$ , se consideriamo l'azione di uno dei sottosistemi, esso agisce come uno stato misto descritto dalla matrice densità ridotta  $\rho_1$ . La traccia parziale consiste infatti col sommare sulle variabili che non interessano (in tal caso quelle del sistema 2). Si osservi che la matrice ridotta non ha le stesse caratteristiche del sistema complessivo. Ad esempio può essere che  $\rho_{12}$  descriva uno stato puro, ma non è detto che ciò valga anche per  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

La definizione di traccia parziale è estremamente comoda per trattare stati misti con il formalismo degli stati puri. Consideriamo uno stato misto descritto da  $\rho_1 = \sum_i \tilde{p}_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ . Possiamo allora considerare uno stato puro in uno spazio più ampio

$$\rho_{12} = |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad |\Psi\rangle = \sum_{ab} \alpha_{ab} |\psi_a\rangle |\phi_b\rangle \quad (1.17)$$

imponendo ai coefficienti  $\alpha_{ab}$  di soddisfare la relazione

$$\text{Tr}_{(2)} \rho_{12} = \rho_1 \quad (1.18)$$

Allora possiamo considerare solo lo stato puro  $|\Psi\rangle$  nello spazio  $\mathcal{H}_{12}$  con l'attenzione di ridefinire ogni operatore  $\hat{C}$  di  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_{12}$  come  $\hat{C} \otimes \mathbb{1}$ . Condizione sufficiente affinché (1.18) possa essere soddisfatta è  $\dim \mathcal{H}_1 \leq \dim \mathcal{H}_2$ . Tale procedimento è noto come *purificazione* dello stato misto.

Nei prossimi capitoli considereremo spesso solo stati puri senza perdita di generalità, in quanto come si è visto ogni stato misto può esser considerato come puro in uno spazio più ampio.

Possiamo analizzare ora come evolve il singolo sistema quando accoppiato ad un sistema esterno ad esso, cercando una formula analoga a (1.8), in modo da poter considerare solo il sistema 1. Si osservi innanzitutto che se  $\rho_{12}$  rappresenta uno stato in cui i sottosistemi interagiscono, non è possibile ricostruire l'evoluzione temporale del primo partendo solo dalle informazioni parziali di  $\rho_1$ . Supponiamo allora al tempo  $t = 0$  che  $\rho_{12}(0)$  sia separabile nella forma

$$\rho_{12}(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0) = \rho_1 \otimes |\phi\rangle \langle \phi| \quad (1.19)$$

In tal caso, se  $\rho_{12}$  evolve in  $\mathcal{H}_{12}$  secondo l'operatore  $\hat{U}$ , allora  $\rho_1$  evolve come

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_{(2)}(\hat{U}(\rho_1 \otimes |\phi\rangle \langle \phi|)\hat{U}^\dagger) = \sum_m \langle \phi_m | \hat{U} | \phi \rangle \rho_1 \langle \phi | \hat{U}^\dagger | \phi_m \rangle = \sum_m \hat{E}_m \rho_1 \hat{E}_m^\dagger \quad (1.20)$$

ove gli operatori  $\hat{E}_m$  ( $m = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_2$ ) consistono nella riduzione di  $\hat{U} \in \mathcal{H}_{12}$  in  $\mathcal{H}_1$  assumendo che  $\hat{U}$  agisca come se lo stato fosse  $\rho_1 \otimes |\phi_m\rangle \langle \phi_m|$ :

$$\hat{E}_m \equiv \langle \phi_m | \hat{U} | \phi \rangle \quad (1.21)$$

Gli operatori  $\hat{E}_m$  hanno inoltre la proprietà:

$$\sum_{m=1}^{\dim \mathcal{H}_2} \hat{E}_m^\dagger \hat{E}_m = \sum_m \langle \phi | \hat{U}^\dagger | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \hat{U} | \phi \rangle = \langle \phi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle = \mathbb{1} \quad (1.22)$$

Si può generalizzare quanto detto finora sull'evoluzione di un sistema aperto al caso generale in cui  $\rho_{12}$  non sia separabile nella forma  $\rho_1 \otimes \rho_2$ :<sup>7</sup>

**Teorema 1.1.1.** Kraus Representation Theorem *Sia  $\zeta$  una mappa tra stati  $\zeta : \rho \rightarrow \rho'$  in generale non normalizzati<sup>8</sup> in un certo spazio  $\mathcal{H}$ <sup>9</sup> con le seguenti proprietà:*

- *lineare*
- $\forall \rho$  *hermitiana*,  $\zeta \rho = \rho'$  *è hermitiana*
- $\forall \rho$  *non-negativa*,  $\zeta \rho = \rho'$  *è non-negativa*

<sup>7</sup>Articolo originale: [4], articolo più divulgativo: [10]

<sup>8</sup>Si noti che in generale non è detto che una evoluzione preservi la traccia, ad esempio nel caso in cui durante l'evoluzione venga eseguita una misura e vengono considerati solo gli stati corrispondenti a determinati esiti, tale procedura è detta *post-selezione*, oppure nel caso in cui uno stato quantistico possa esser perso nell'ambiente. In tal caso le probabilità di ottenere gli esiti considerati non è detto sommino ad 1. È tuttavia sempre possibile rinormalizzare la matrice densità.

<sup>9</sup>Tale mappa viene anche detta *superoperatore* poichè mappa operatori in altri operatori e ha la proprietà di linearità

Allora  $\zeta$  si può scrivere in rappresentazione di Kraus come

$$\rho' = \sum_k \hat{E}_k \rho \hat{E}_k^\dagger \quad (1.23)$$

ove  $\{\hat{E}_k\}_k$  è un insieme di operatori tali che  $\sum_k \hat{E}_k \hat{E}_k^\dagger \leq \mathbb{1}$  (ossia  $\mathbb{1} - \sum_k \hat{E}_k \hat{E}_k^\dagger$  è semidefinita positiva). Nel caso in cui valga  $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\rho')$  allora deve valere  $\sum_k \hat{E}_k \hat{E}_k^\dagger = \mathbb{1}$ .

Poichè le proprietà richieste dalle ipotesi del teorema sono le stesse richieste nelle evoluzioni di matrici densità,<sup>10</sup> secondo tale teorema quindi è sempre possibile scrivere

$$\rho_1(t) = \sum_m \hat{E}_m \rho_1 \hat{E}_m^\dagger \quad (1.24)$$

con opportuni operatori  $\{\hat{E}_m\}_m$  detti *Operatori di Kraus*.

## 1.2 Misure quantistiche generalizzate

<sup>11</sup> Illustriamo ora il concetto di misura nel senso più generale, rispetto a quanto detto nell'assioma 3, avvalendoci del formalismo degli stati sviluppato da Kraus [4]. Il formalismo di Kraus è assolutamente generale, ha però lo svantaggio di utilizzare strumenti matematici più astratti rispetto a quelli adottati dal formalismo di von Neumann, e può quindi esser visto come più scomodo per derivare alcune proprietà dei sistemi fisici.

Una misura induce sempre un certo effetto sugli stati, quindi possiamo assumere sensatamente che nel caso più generale l'effetto della misura sia descritto da (1.24). Consideriamo nuovamente un sistema composto  $\rho_{12} = \rho_1 \otimes |\phi\rangle\langle\phi|$ , e lo facciamo evolvere secondo l'operatore unitario

$$\hat{U} \equiv \sum_{m=1}^{\dim \mathcal{H}_2} \left( \hat{E}_m \otimes |\phi_m\rangle\langle\phi| \right) \quad (1.25)$$

(si può facilmente dimostrare che tale operatore è unitario) dove  $\{|\phi_m\rangle\}$  è una qualsiasi base ortonormale di  $\mathcal{H}_2$ . Supponiamo di eseguire al termine dell'accoppiamento una misura proiettiva sul sistema 2 secondo il proiettore  $\hat{\Pi}'_k = \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_k = \mathbb{1} \otimes |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ . La probabilità di ottenere  $k$  dalla misura è

$$\begin{aligned} p_k &= \text{Tr} \left( \rho_{12}(t) \hat{\Pi}'_k \right) \stackrel{(1.25)}{=} \text{Tr} \left( \sum_i \hat{E}_i \rho_1 \hat{E}_i^\dagger \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_k| \right) = \sum_{imn} \langle\psi_m| \hat{E}_i \rho_1 \hat{E}_i^\dagger |\psi_m\rangle \langle\phi_n|\phi_i\rangle \langle\phi_k|\phi_n\rangle \\ &= \sum_m \langle\psi_m| \hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger |\psi_m\rangle = \text{Tr} \left( \hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger \right) \stackrel{(a)}{=} \text{Tr} \left( \rho_1 \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \right) = \left\langle \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \right\rangle_{\rho_1} \end{aligned} \quad (1.26)$$

dove in (a) abbiamo usato la ciclicità della traccia. Nel caso la misura abbia proprio risultato  $k$  lo stato dopo la misura si ottiene proiettando rispetto  $\hat{\Pi}'_k$  e successivamente normalizzando la matrice densità:

$$\rho_k = \frac{1}{\mathcal{N}} \text{Tr}_{(2)} \left( \hat{\Pi}'_k \rho_{12} \hat{\Pi}'_k^\dagger \right) = \frac{1}{\mathcal{N}} \text{Tr}_{(2)} \left( \hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger \otimes |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \right) = \frac{\hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger}{\text{Tr} \left( \hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger \right)} = \frac{\hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger}{\left\langle \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \right\rangle_{\rho_1}} \quad (1.27)$$

Lo stato misto finale considerando tutti i possibili esiti è allora

$$\rho' = \sum_k p_k \rho_k = \sum_k \left\langle \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \right\rangle_{\rho_1} \frac{\hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger}{\left\langle \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \right\rangle_{\rho_1}} = \sum_k \hat{E}_k \rho_1 \hat{E}_k^\dagger \quad (1.28)$$

Analizziamo quanto ottenuto finora. Sia  $\mathcal{M}$  una mappa tra matrici densità che descrive l'evoluzione del sistema aperto  $\rho_1$  nello spazio  $\mathcal{H}_1$  durante la misura con le stesse ipotesi della mappa  $\zeta$  nell'enunciato del

<sup>10</sup>1: Si assume sempre che valga la linearità nell'evoluzione degli stati. 2: Tutte le matrici densità devono avere traccia unitaria. 3: Tutte le matrici densità sono non negative.

<sup>11</sup>Per la trattazione teorica degli argomenti affrontati in questo paragrafo, si fa riferimento innanzitutto a [8] e [11], insieme a [6], [12], [13], [14], [15] e all'introduzione di [9].

Teorema 1.1.1. Si può allora dimostrare <sup>12</sup> che esiste un secondo spazio  $\mathcal{H}_2$  ed uno stato puro  $\rho_2 = |\phi\rangle\langle\phi|$ ,  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$  tale che l'evoluzione del sistema  $\rho_1 \otimes \rho_2$  in  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  sia unitaria, ossia

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_{(2)} \rho_{12}(t) \quad \rho_{12}(t) = \hat{U}(\rho_1 \otimes \rho_2) \hat{U}^\dagger \quad (1.29)$$

È quindi possibile descrivere l'effetto di una misura generalizzata di  $\hat{C}$  come:

1. *Ampliamento del sistema 1* tramite l'accoppiamento con un certo sistema 2 esterno.
2. *Evoluzione unitaria* del sistema composto.
3. *Misura proiettiva* sul sottosistema 2 come descritto dall'assioma 3.

È così possibile enunciare una versione generalizzata dell'assioma della misura:

**Assioma 6.** *Le misure in meccanica quantistica sono descritte da un insieme  $\{\hat{M}_m\}_m$  di operatori di misura<sup>13</sup> che agiscono sullo spazio degli stati del sistema che viene misurato. L'indice  $m$  si riferisce ai possibili esiti della misura che si possono ottenere dall'esperimento. La probabilità che l'esito della misura sia quello corrispondente ad un certo indice  $m$  e lo stato finale corrispondente a tale esito sono*

$$p_m = \left\langle \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \right\rangle_\rho \quad (1.30a)$$

$$\rho_m = \frac{\hat{M}_m \rho \hat{M}_m^\dagger}{\left\langle \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \right\rangle_\rho} \quad (1.30b)$$

Si ha quindi che se consideriamo tutti i possibili esiti della misura, lo stato finale del sistema è

$$\rho' = \sum_m \hat{M}_m \rho \hat{M}_m^\dagger \quad (1.31)$$

Gli operatori di misura devono soddisfare l'equazione di completezza <sup>14</sup>

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \mathbb{1} \quad (1.32)$$

Si noti come le misure proiettive sono un caso particolare di tale caso generale e si ottengono ponendo  $\hat{M}_i = \hat{\Pi}_i$  ove  $\hat{\Pi}_i$  è il proiettore nell'autospazio generato dall'autovettore  $|c_i\rangle$  di  $\hat{C}$ .

### 1.3 Misure descritte con il formalismo di von Neumann

<sup>15</sup> Consideriamo ora il formalismo delle misure quantistiche descritto da von Neumann in [5]. Tale formalismo permette di trattare un'ampia classe di misure generalizzate di notevole interesse. Nonostante sia meno generale di quello sviluppato da Kraus, ha il vantaggio di essere un formalismo più vicino alla fisica che non alla fisica matematica, e permette di comprendere meglio cosa succede durante il processo di misura.

Si supponga che per misurare l'osservabile  $\hat{C}$  del sistema 1 venga creato un accoppiamento con un apparato misuratore (anche detto “puntatore” o “ancilla”) indicato come sistema 2 attraverso un termine di interazione nell'Hamiltoniana del sistema composto 1+2. Tale termine di interazione consiste in uno scalare dipendente dal tempo  $\tilde{\theta}$ , detta *forza di accoppiamento istantanea*, e dal prodotto tra  $\hat{C}$  ed un'altra osservabile  $\hat{P}$  a spettro continuo di un sistema 2:

$$\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \tilde{\theta}(t) \hat{C} \otimes \hat{P} \quad (1.33)$$

dove  $\hat{H}_0 \equiv \hat{H}^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{H}^{(2)}$ , con  $\hat{H}^{(1)}$  e  $\hat{H}^{(2)}$  Hamiltoniane libere dei due sistemi. Per semplificare l'analisi, assumiamo che i due termini dell'Hamiltoniana commutino,  $[\hat{H}_0, \hat{C} \otimes \hat{P}] = 0$ , o alternativamente assumiamo

<sup>12</sup>Ciò è stato dimostrato in diversi modi, appoggiandosi alternativamente o al “teorema della rappresentazione di Stinespring” o al “teorema di Neumark”. Ho scelto per chiarezza e semplicità l'enunciato contenuto in [11] alla voce “Teorema 2.5”, denominato “Open-system representation”. L'enunciato originale in realtà è più generale di quanto qui riportato in forma contestualizzata. Nei primi due capitoli di tale risorsa si può ritrovare una trattazione nel linguaggio della fisica matematica di quanto detto nelle sezioni 1.1 e 1.2.

<sup>13</sup>Si noti che tali operatori di misura coincidono con gli operatori di Kraus definiti precedentemente. Si preferisce usare una notazione diversa affinché sia chiaro quando stiamo trattando un'evoluzione di un sistema e quando invece trattiamo un processo di misura.

<sup>14</sup>La proprietà di completezza esprime il fatto che le proprietà definite da (1.30a) devono sommare ad 1

<sup>15</sup>Oltre al già citato [6], si fa riferimento anche a [16], [17] e [15].

che la misura sia fatta abbastanza velocemente da poter trascurare l'evoluzione libera data da  $\hat{H}_0$  durante il processo di misura. Con tali ipotesi possiamo descrivere l'effetto della misura considerando solo l'evoluzione generata dall'Hamiltoniana di interazione

$$\hat{H}_{\text{int}} = \tilde{\theta}(t)\hat{C} \otimes \hat{P} \quad (1.34a)$$

$$\hat{U}(t) \simeq \exp\left\{-i\tilde{\theta}(t)(\hat{C} \otimes \hat{P})t\right\} \quad (1.34b)$$

Con abuso di notazione indichiamo con  $\hat{U}$  l'operatore unitario che descrive l'evoluzione del sistema composto dall'inizio alla fine del processo di misurazione:

$$\hat{U} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \hat{U}(t)dt \stackrel{(1.34b)+(a)}{\simeq} \exp\left\{-i(\hat{C} \otimes \hat{P}) \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\theta}(t)dt\right\} = \exp\left\{-i\theta(\hat{C} \otimes \hat{P})\right\} \quad (1.35)$$

ove  $t_i$  e  $t_f$  sono gli estremi del supporto della funzione  $\theta(t)$  mentre  $\theta$  è la *forza di accoppiamento*:

$$\theta \equiv \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\theta}(t)dt \quad (1.36)$$

Si noti che il passaggio in (a) vale nel limite di misure istantanee ( $\tilde{\theta}(t) \approx \theta\delta(t - t_i)$ ), in tal caso  $\hat{C} \otimes \hat{P} \equiv (\hat{C} \otimes \hat{P})(t_i)$  oppure nel caso in cui  $\hat{C}$  e  $\hat{P}$  non dipendano da  $t$ . Vediamo ora cosa succede al sistema composto durante il processo di misura. Espandendo  $\hat{U}$  nella base ortogonale di  $\mathcal{H}_1$  definita dagli autovettori di  $\hat{C}$ , si ha

$$\hat{C} = \sum_i c_i |c_i\rangle \langle c_i| = \sum_i c_i \hat{\Pi}_i \quad (1.37)$$

$$\hat{U} = \sum_i \hat{\Pi}_i \otimes \exp\left\{-i\theta c_i \hat{P}\right\} \quad (1.38)$$

Affinché l'accoppiamento con  $\hat{P}$  permetta la misura di  $\hat{C}$ , è necessario che  $\hat{P}$  descriva la variabile canonica coniugata (nel senso del formalismo Hamiltoniano) di un'altra variabile  $q$  descritta da  $\hat{Q}$ , sempre appartenente al sistema 2, che svolga il ruolo di variabile puntatore e che al termine della misura conservi l'informazione sulla grandezza misurata.<sup>16</sup> In tal caso  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  hanno la stessa algebra degli operatori "posizione" e "momento" in  $L^2(\mathbb{R})$ , e quindi sono ad essi equivalenti.<sup>17</sup> Si ha allora:

$$\exp\left\{-iq_0\hat{P}\right\} |q\rangle = |q + q_0\rangle \quad (1.39)$$

dove  $|q\rangle$  sono gli autostati di  $\hat{Q}$  di autovalore  $q$ . Definiamo gli stati  $|\phi(q)\rangle$  come

$$|\phi(q)\rangle = \int dq \phi(q) |q\rangle \quad (1.40)$$

ossia come "pacchetti" composti da autostati di  $\hat{Q}$  pesati secondo una ampiezza di probabilità  $\phi(q)$ . Osserviamo che poiché  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  sono canonicamente coniugate, a causa della loro algebra non commutativa non è possibile costruire stati fisici che coincidono con gli autostati generalizzati di tali operatori, in quanto per qualsiasi stato reale  $|\phi(q)\rangle$  deve essere rispettato il seguente vincolo sulle varianze di  $q$  e  $p$ :<sup>18</sup>

$$(\Delta q)_\phi (\Delta p)_\phi \geq \hbar/2 \quad (1.41)$$

Poiché non è possibile che sperimentalmente valga  $(\Delta q)_\phi = 0$ , si ha per forza che  $|\phi(q)\rangle$  non può essere autovettore di  $\hat{Q}$ . Si definisce  $\mu_\phi = \int dq q |\phi(q)|^2$  il valor medio della distribuzione di probabilità definita da  $\phi(q)$  e  $(\Delta q)_\phi^2 = \left(\int dq q^2 |\phi(q)|^2 - \mu_\phi^2\right)$  la sua varianza, che coincide con la varianza dell'operatore  $\hat{Q}$  nello stato  $|\phi(q)\rangle$ . Da (1.39) si ha

$$\exp\left\{-iq_0\hat{P}\right\} |\phi(q)\rangle = \int dq \phi(q) |q + q_0\rangle = \int dq' \phi(q' - q_0) |q'\rangle = |\phi(q - q_0)\rangle \quad (1.42)$$

Siamo ora in grado di descrivere lo stato del sistema composto al termine del processo di misura. Immediatamente prima della misura il sistema 1 è in uno stato  $|\psi\rangle$ , che può essere scritto come una sovrapposizione

<sup>16</sup>Più in generale è sufficiente che  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  non commutino. Si veda il paragrafo 12.2 di [15].

<sup>17</sup>Ciò è provato in [18]

<sup>18</sup>Si definisce la varianza dell'operatore  $\hat{Q}$  nello stato  $|\phi\rangle$  come  $(\Delta q)_\phi^2 \equiv \langle \hat{Q}^2 \rangle_\phi - \langle \hat{Q} \rangle_\phi^2$ .

degli autostati di  $\hat{C}$ :  $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |c_i\rangle$ . Tale stato è scorrelato dallo stato  $|\phi(q)\rangle$  del sistema 2. Al termine dell'interazione tra i due sistemi (ossia al tempo  $t_f$ ) il sistema 1 + 2 è descritto da

$$|\Psi'\rangle = \hat{U} |\Psi\rangle = \hat{U} (|\psi\rangle \otimes |\phi(q)\rangle) = \sum_i \alpha_i |c_i\rangle \otimes |\phi(q - \theta c_i)\rangle \quad (1.43)$$

La posizione del puntatore  $q$  è stata correlata con il valore dell'osservabile  $\hat{C}$ , ed il sistema 2 è ora composto da una sovrapposizione dei pacchetti iniziali (1.40) sfasati rispetto i diversi valori  $\theta c_i$  e pesati rispetto i coefficienti  $\alpha_i$ . Se al termine dell'evoluzione eseguiamo una misura (idealmente) proiettiva<sup>19</sup> della variabile  $q$  con esito  $\tilde{q}$  il sistema composto si trova nello stato (non normalizzato)

$$|\Psi_{\tilde{q}}\rangle = \left( \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_{\tilde{q}} \right) |\Psi'\rangle = \sum_i \alpha_i \phi(\tilde{q} - \theta c_i) |c_i\rangle |\tilde{q}\rangle = \phi(\tilde{q} - \theta \hat{C}) |\psi\rangle |\tilde{q}\rangle \quad (1.44)$$

Le misure descritte dallo schema di von Neumann possono quindi esser espresse in termini di operatori di misura sul sistema 1 come

$$\hat{M}_{\tilde{q}} = \phi(\tilde{q} - \theta \hat{C}) \quad (1.45)$$

e poiché  $|\phi(q)|^2$  è normalizzata allora gli operatori  $\{\hat{M}_{\tilde{q}}\}_{\tilde{q} \in \mathbb{R}}$  soddisfano (1.32).

### 1.3.1 Descrizione statistica

<sup>20</sup> Consideriamo il procedimento appena descritto. La probabilità di ottenere un certo esito  $\tilde{q}$  da una misura di  $q$  e lo stato del sistema dopo una misura con tale esito sono:

$$p(\tilde{q}) = \langle \Psi' | \left( \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_{\tilde{q}} \right) | \Psi' \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 |\phi(\tilde{q} - \theta c_i)|^2 = \langle |\phi(\tilde{q} - \theta \hat{C})|^2 \rangle_\psi \quad (1.46)$$

$$|\Psi'_{\tilde{q}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(\tilde{q})}} \left( \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_{\tilde{q}} \right) |\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(\tilde{q})}} \phi(\tilde{q} - \theta \hat{C}) |\psi\rangle |\tilde{q}\rangle \quad (1.47)$$

Possiamo ora calcolare valore atteso e varianza della misura:

$$E[q] = \int d\tilde{q} \tilde{q} p(\tilde{q}) = \sum_i |\alpha_i|^2 \int d\tilde{q} \tilde{q} |\phi(\tilde{q} - \theta c_i)|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 (\mu_\phi + \theta c_i) = \mu_\phi + \theta \langle \hat{C} \rangle_\psi \quad (1.48)$$

$$E[q^2] = \int d\tilde{q} \tilde{q}^2 p(\tilde{q}) = \sum_i |\alpha_i|^2 \int d\tilde{q} \tilde{q}^2 |\phi(\tilde{q} - \theta c_i)|^2 = \theta^2 \langle \hat{C}^2 \rangle_\psi + 2\mu_\phi \theta \langle \hat{C} \rangle_\psi + \mu_\phi^2 + (\Delta q)_\phi^2 \quad (1.49)$$

$$\text{Var}[q] = E[q^2] - E[q]^2 = (\Delta q)_\phi^2 + \theta^2 \langle \hat{C}^2 \rangle_\psi - \theta^2 \langle \hat{C} \rangle_\psi^2 = (\Delta q)_\phi^2 + \theta^2 (\Delta C)_\psi^2 \quad (1.50)$$

Si noti che se considero la variabile  $c \equiv (q - \mu_\phi)/\theta$ , per tale variabile vale

$$E[c] = \langle \hat{C} \rangle_\psi \quad (1.51a)$$

$$\sigma^2 \equiv \text{Var}[c] = (\Delta q)_\phi^2 / \theta^2 + (\Delta C)_\psi^2 \quad (1.51b)$$

Se consideriamo quindi la misura della variabile  $c$  definita rispetto a  $q$ , il valore atteso di tale variabile coinciderà col valore atteso di una misura di  $\hat{C}$ . Tanto più  $(\Delta q)_\phi^2 / \theta^2$  è piccola tanto più la varianza della misura di  $c$  coincide con la varianza  $(\Delta C)_\psi^2$ .

### 1.3.2 Misure proiettive nel formalismo di von Neumann

Consideriamo lo stato finale del sistema composto al termine dell'evoluzione unitaria

$$|\Psi'\rangle = \sum_i \alpha_i |c_i\rangle \otimes |\phi(q - \theta c_i)\rangle \quad (1.52)$$

Con particolari condizioni le misure descritte dal formalismo di von Neumann possono esser descritte direttamente dall'assioma 3. Ciò avviene se la misura proiettiva del sistema 2 risulta proiettiva anche nel sistema 1, ossia se seleziona solo uno dei possibili stati  $|c_k\rangle \otimes |\phi(q - \theta c_k)\rangle$ , con probabilità  $|\alpha_k|^2$ .

<sup>19</sup>È impossibile eseguire una misura proiettiva di  $q$  in quanto è impossibile lasciare il sistema 2 in un autostato di  $\hat{Q}$  a causa di (1.41). Possiamo però eseguire misure generalizzate con incertezza arbitrariamente piccola purché non nulla.

<sup>20</sup>L'impostazione del paragrafo è stata adattata da [19] e [17].



Ricordando però che  $q$  è una variabile continua, se le variazioni  $\theta c_i$  delle posizioni di due o più stati  $|\phi(q - \theta c_i)\rangle$  sono troppo piccole rispetto all'incertezza iniziale  $\Delta q$ , non è possibile distinguere gli stati, e quindi non è possibile eseguire una misura proiettiva come descritto dall'assioma della misura. La condizione sufficiente affinché una misura di von Neumann sia proiettiva può essere formalizzata con

$$|\theta|(\delta c) \gg \Delta q \quad (1.53)$$

ove  $\delta c$  è la distanza minima tra gli autovalori  $c_j$  e  $\Delta q$  definita dalla distribuzione  $|\phi(q)|$ .

Assumendo per semplicità  $\mu_\phi = 0$ , se (1.53) è verificata allora gli operatori di misura  $\hat{M}_{\tilde{q}} = \phi(\tilde{q} - \theta \hat{C})$  saranno di fatto dei proiettori nel caso in cui  $|\tilde{q} - \theta c_i| \leq \Delta q$  per qualche autovalore  $c_i$ , mentre nel caso in cui  $\tilde{q} - \theta c_i \gg \Delta q$  per ogni  $c_i$ , gli operatori  $\hat{M}_{\tilde{q}}$  avranno come codominio solo il vettore nullo e quindi la probabilità di ottenere un esito descritto da uno di essi è nulla.

### 1.3.3 Effetto delle misure non ideali del puntatore

Così come non è possibile che lo stato  $|\phi(q)\rangle$  sia autostato di  $\hat{Q}$  a causa di (1.41), allo stesso modo non è possibile eseguire una misura di  $q$  che proietti lo stato del sistema 2 in un autostato dell'operatore, in quanto in tal caso lo stato finale dovrebbe essere autostato di  $\hat{Q}$ . È quindi impossibile eseguire misure di  $\hat{Q}$  esatte, ma le misure del puntatore saranno sempre descritte da un insieme di operatori  $\{\hat{M}_x\}$ , ove l'operatore  $\hat{M}_x$  corrisponde ad una misura con un certo esito  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\hat{M}_x = \int dq m(q - x) |q\rangle \langle q| = m(\hat{Q} - x) \quad (1.54)$$

ove  $|m(q)|^2$  è una distribuzione di probabilità (ha norma in  $L^2$  unitaria) con una certa varianza  $\sigma_x \neq 0$  e media  $\mu_x = 0$  (ci si può sempre ricondurre facilmente a questo caso). Rispetto a tale misura la probabilità di ottenere un certo valore  $x$  su uno stato  $|\phi\rangle$  è  $p(x) = \langle \hat{M}_x^\dagger \hat{M}_x \rangle_\phi$ , e in tal caso lo stato del puntatore dopo la misura sarà  $\hat{M}_x |\phi\rangle$ . Considerando il sistema composto:

$$p(x) = \langle \hat{M}_x^\dagger \hat{M}_x \rangle_{\Psi'} \stackrel{(1.43)}{=} \sum_i \int dq |\alpha_i|^2 |m(q - x)|^2 |\phi(q - \theta c_i)|^2 \quad (1.55)$$

$$|\Psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_x) |\Psi'\rangle \stackrel{(1.43)}{=} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \int dq m(q - x) \phi(q - \theta \hat{C}) |\psi\rangle |q\rangle \quad (1.56)$$

Calcolando la matrice ridotta si ottiene lo stato finale del sistema 1 dopo l'esito  $x$ :

$$|\psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left( \int dq m(q - x) \phi(q - \theta \hat{C}) \right) |\psi\rangle \quad (1.57)$$

$$\hat{M}_x^{(1)} \equiv \mathcal{N} \int dq m(q - x) \phi(q - \theta \hat{C}) \quad (1.58)$$

ove  $\hat{M}_x^{(1)}$  descrive l'effetto sul sistema 1 della misura  $\hat{M}_x$  sul sistema 2, mentre  $\mathcal{N}$  è tale da rendere soddisfatta (1.32). Torniamo a considerare il sistema composto. La varianza sulla misura di  $\hat{M}_x$  vale

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \int dx x^2 p(x) - \left( \int dx x p(x) \right)^2 \\ &= \sum_i |\alpha_i|^2 \int dq (\sigma_x^2 + q^2) |\phi(q - \theta c_i)|^2 - \left( \sum_i |\alpha_i|^2 \int dq q |\phi(q - \theta c_i)|^2 \right)^2 \\ &\stackrel{(1.50)}{=} \sigma_x^2 + (\Delta q)_\phi^2 + \theta^2 (\Delta C)_\psi^2 \end{aligned} \quad (1.59)$$

E definendo analogamente a quanto già fatto  $c \equiv x/\theta$  (assumiamo  $\mu_\phi = 0$ )

$$E[c] = \langle \hat{C} \rangle_\psi \quad (1.60a)$$

$$\sigma^2 \equiv \text{Var}[c] = ((\Delta q)_\phi^2 + \sigma_x^2)/\theta^2 + (\Delta C)_\psi^2 \quad (1.60b)$$

Le osservazioni fatte in sezione 1.3.2 si possono facilmente estendere a questa analisi, osservando che affinché la misura di  $x$  sia proiettiva nel sistema 1 (e quindi (1.57) sia autostato di  $\hat{C}$ ) deve valere

$$|\theta|(\delta c) \gg \sqrt{(\Delta q)^2 + \sigma_x^2} \quad (1.61)$$

## 1.4 Misure deboli

<sup>21</sup> Le misure deboli sono state introdotte per la prima volta in [3]. Per darne una definizione semplificata, esse possono essere viste come l'opposto delle misure proiettive. Mentre le misure proiettive restituiscono un risultato con precisione infinita, le misure deboli hanno precisione prossima allo zero. Mentre le misure proiettive perturbano fortemente il sistema quantistico modificandolo in maniera irreversibile, le misure deboli praticamente lasciano il sistema inalterato. Come vedremo in questa sezione, le altre differenze tra misure proiettive e misure deboli sono molte.

Per lo sperimentatore che si trova a dover misurare un sistema quantistico è fondamentale valutare vantaggi e svantaggi di ognuna, nonché le proprietà esclusive che ha ognuna di esse. Spesso in laboratorio si usano misure intermedie tra le due, in modo da poter sfruttare i vantaggi ed limitare i svantaggi di entrambe.

**Definizione 5.** Si definisce misura debole una misura che nel formalismo di von Neumann ha le seguenti caratteristiche:

1. Accoppiamento debole: Il prodotto tra la forza di accoppiamento  $\theta$  e la varianza del momento del puntatore è piccolo:

$$|\theta| \Delta p_\phi \ll 1 \quad (1.62)$$

In particolare, le variazioni delle posizioni del puntatore dovute ad ogni autovalore di  $\hat{C}$  in (1.43) sono trascurabili rispetto a  $\Delta q_\phi$ .

2. Grande ensemble: La stessa misura viene ripetuta in modo identico su un grande numero di stati identici, e viene poi eseguita una media tra i vari esiti ottenuti.

Vediamo cosa implicano le due condizioni imposte dalla definizione.

La prima condizione è l'opposto della condizione (1.53) necessaria per eseguire una misura proiettiva, in quanto per il principio di indeterminazione la (1.62) implica  $\Delta q_\phi \gg |\theta|$ . Se le traslazioni dovute ai singoli autovalori sono trascurabili, allora una misura proiettiva sul sistema 2 considererà i pacchetti corrispondenti ai vari autovalori quasi perfettamente sovrapposti, ogni misura crea quindi una perturbazione pressoché nulla sul sistema 1:

$$\hat{M}_c |\psi\rangle \approx |\psi\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{M}_c \approx \mathbb{1} \quad (1.63)$$

Abbiamo visto nella sezione 1.3.1 che considerando una misura descritta con il formalismo di von Neumann tale misura ha valore atteso e varianza descritte in (1.60):

$$E[c] = \langle \hat{C} \rangle_\psi \quad \sigma^2 \equiv \text{Var}[c] = ((\Delta q)_\phi^2 + \sigma_x^2)/\theta^2 + (\Delta C)_\psi^2 \quad (1.64)$$

e quindi nell'ipotesi (1.62) tale varianza è molto grande, e per ottenere una misura utile del valor medio di  $\hat{C}$  è necessario eseguire un grande numero di misure. Se supponiamo che la varianza di  $\hat{C}$  in  $|\psi\rangle$  sia finita,  $(\Delta \hat{C})_\psi^2 < \infty$ , vediamo dal teorema dei grandi numeri che eseguendo un numero di misure  $N$  sufficientemente grande, la media dei risultati ottenuti  $\bar{c}$  approssimerà molto bene  $E[c]$ , in quanto la varianza della media  $\Delta^2 = \sigma^2/N$  può essere molto piccola anche se  $\sigma$  è molto grande:  $\bar{c} \simeq E[c] = \langle C \rangle_\psi$ .

Osserviamo inoltre che se eseguiamo una misura debole del sistema 2 anziché una proiettiva, l'effetto di tale misura è debole anche sul sistema 1, a prescindere da (1.62), in quanto anche in tal caso il sistema 1 non viene praticamente perturbato.

Ci sono quindi 2 modi<sup>22</sup> per eseguire una misura debole:

1. Creare un accoppiamento tra sistema e misuratore molto debole, in modo tale da rendere  $|\theta| \ll 1$
2. Accoppiare il sistema con un puntatore la cui funzione d'onda abbia grande varianza:  $\Delta q \gg 1$

### 1.4.1 Post-selezione e valori deboli

<sup>23</sup> Supponiamo di eseguire una misura debole del sistema 1 tramite un accoppiamento debole con il sistema 2 e successivamente eseguire una misura proiettiva sul primo sistema che lascia il sistema 1 nello stato  $|\psi'\rangle$ . Dopo la seconda misura il sistema composto si trova allora nello stato

$$|\Psi'\rangle = \mathcal{N} \left( \hat{\Pi}_{\psi'} \otimes \mathbb{1} \right) \exp \left\{ -i\theta(\hat{C} \otimes \hat{P}) \right\} |\psi\rangle |\phi\rangle \quad (1.65)$$

<sup>21</sup>Per la trattazione si è fatto uso dei lavori [20], [17] e [21]

<sup>22</sup>Un altro modo è, come visto, porre  $\sigma_x \gg 1$ , tale opzione però consiste di fatto in una misura debole sul sistema composto

<sup>23</sup>Si è fatto uso principalmente dei lavori [21], [22], [23] e [16], e in parte di [3], [24], [25], [17] [20]

con  $\mathcal{N}$  opportuna costante di normalizzazione. Poiché il proiettore è nella forma  $\hat{\Pi}_{\psi'} = |\psi'\rangle\langle\psi'|$  se consideriamo solo il sistema 2 calcolando la matrice ridotta otteniamo che lo stato finale di questo è:

$$\begin{aligned} |\phi'\rangle &= \mathcal{N} \int dp \left( \langle\psi'| \exp\{-i\theta p \hat{C}\} |\psi\rangle \right) \tilde{\phi}(p) |p\rangle = \mathcal{N} \int dp \left( \langle\psi'| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\theta p)^n \hat{C}^n |\psi\rangle \right) \tilde{\phi}(p) |p\rangle \\ &\stackrel{(a)}{\approx} \mathcal{N} \int dp \left( \langle\psi'| (1 - i\theta p \hat{C}) |\psi\rangle \right) \tilde{\phi}(p) |p\rangle = \mathcal{N} \int dp \langle\psi'|\psi\rangle (1 - i\theta p C_w) \tilde{\phi}(p) |p\rangle \\ &\stackrel{(b)}{\approx} \mathcal{N} \int dp \langle\psi'|\psi\rangle \exp\{-i\theta p C_w\} \tilde{\phi}(p) |p\rangle = \mathcal{N} \langle\psi'|\psi\rangle \exp\{-i\theta C_w \hat{P}\} |\phi\rangle \end{aligned} \quad (1.66)$$

Dove abbiamo usato la seguente definizione:

**Definizione 6.** Definiamo Valore Debole dell'osservabile descritta da  $\hat{C}$  nello stato pre e post-selezionato  $\langle\psi'|\psi\rangle$  il valore complesso:

$$C_w \equiv \langle\hat{C}\rangle_{\langle\psi'|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi'|\hat{C}|\psi\rangle}{\langle\psi'|\psi\rangle} \quad (1.67)$$

Per indicare valori deboli di ordini superiori usiamo la notazione

$$C_w^n \equiv \langle\hat{C}^n\rangle_{\langle\psi'|\psi\rangle} \quad (1.68)$$

Consideriamo la validità dell'approssimazione (a). Tale approssimazione vale se  $\forall n = 2 \dots \infty$ :<sup>24</sup>

$$|(-i\theta p) C_w| \gg \left| \frac{1}{n!} (-i\theta p)^n C_w^n \right| \quad \forall p : \tilde{\psi}(p) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{\langle\psi'|\hat{C}|\psi\rangle}{\langle\psi'|\hat{C}^n|\psi\rangle} \right|^{\frac{1}{n-1}} \gg |\theta| \Delta p \quad (1.69)$$

Consideriamo la validità dell'approssimazione (b). Tale approssimazione vale se

$$|-i\theta C_w p| \ll 1 \quad \forall p : \tilde{\psi}(p) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\theta C_w| \Delta p \ll 1 \quad (1.70)$$

Si noti come tali condizioni sono soddisfatte per misure sufficientemente deboli. Nel caso in cui  $C_w$  sia reale si ha immediatamente che

$$|\phi'(q)\rangle = |\phi(q - \theta C_w)\rangle \quad (1.71)$$

Nel caso generale in cui  $\hat{P}$  è l'osservabile presente nell'Hamiltoniana e  $\hat{Q}$  è una qualsiasi osservabile del sistema 2 (non è richiesto che siano canonicamente coniugate e, anzi, possono coincidere) è dimostrato in [22] che vale

$$\langle\hat{Q}\rangle_{\phi'} = \langle\hat{Q}\rangle_{\phi} + i\theta \langle\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P}\rangle_{\phi} \text{Re } C_w + \theta \left( \langle\hat{P}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{P}\rangle_{\phi} - 2\langle\hat{P}\rangle_{\phi} \langle\hat{Q}\rangle_{\phi} \right) \text{Im } C_w \quad (1.72)$$

e nel caso particolare in cui  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  siano posizione e momento e il sistema 2 abbia massa  $m$ , dalla precedente formula si ottiene

$$\langle q \rangle_{\phi'} = \langle q \rangle_{\phi} + \theta \text{Re } C_w + \theta m \text{Im } C_w \frac{d}{dt} (\Delta q)_{\phi}^2 \Big|_{t_0} \quad (1.73a)$$

$$\langle p \rangle_{\phi'} = \langle p \rangle_{\phi} + 2\theta \text{Im } C_w (\Delta p)_{\phi}^2 \Big|_{t_0} \quad (1.73b)$$

dove  $t_0$  è l'istante in cui viene eseguita la misura ipotizzando essa sia istantanea ( $\tilde{\theta}(t) = \theta \delta(t - t_0)$ ). Si noti che l'ultimo termine di (1.73a) viene spesso ommesso poiché è nullo nel caso in cui  $\phi(q)$  è reale.

Se (1.69) è soddisfatta, allora da (1.66) vediamo anche che vale l'approssimazione lineare dell'operatore di evoluzione durante la misura debole:

$$\hat{U} = \exp\{-i\theta \hat{C} \otimes \hat{P}\} \approx \mathbb{1} - i\theta \hat{C} \otimes \hat{P} \quad (1.74)$$

<sup>24</sup>Si noti che  $\frac{n-1}{n!} \geq 2$  per  $n \geq 2$ . Omettiamo tale fattore a destra poiché è richiesta una maggiorazione di almeno un ordine di grandezza.

**Valori deboli anomali** <sup>25</sup> Una proprietà molto importante dei valori deboli è che sia le loro parti reali che quelle immaginarie possano diversificarsi molto rispetto agli autovalori delle osservabili a cui si riferiscono. Prendiamo in considerazione un fascio di particelle con spin  $\frac{1}{2}$  con stati pre-selezionato e post-selezionato puri:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} \\ e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \quad |\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad \phi \in [0, \pi] \quad (1.75)$$

ove i vettori sono definiti rispetto alla base data dagli autovettori della matrice di Pauli  $\hat{\sigma}_z$ . Supponiamo di eseguire una misura debole dello spin lungo  $z$ . Il valore debole della misura è allora

$$(\sigma_z)_w = \frac{\langle \psi' | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle}{\langle \psi' | \psi \rangle} = \frac{1}{\cos \phi} \quad (1.76)$$

Ricordando che gli autovalori di  $\hat{\sigma}_z$  sono  $\pm 1$  osserviamo subito che il valore atteso della misura debole è sempre al di fuori del range degli autovalori se  $\phi \notin \{0, \pi\}$ .

Diamo una rapida giustificazione di tale fenomeno, rimandando agli articoli nella nota 25 per una spiegazione molto più dettagliata. Come è già stato detto, nel caso di misure deboli la singola misura del sistema perturba minimamente il sistema, e quindi possiamo assumere che lo stato immediatamente dopo la misura  $\hat{\sigma}_z$  sia ancora  $|\psi\rangle$ , con ottima approssimazione. La probabilità  $p(s)$  di ottenere un certo esito  $s$  da una misura di  $\hat{\sigma}_z$  deve coincidere con la somma delle probabilità  $p(s|\psi')$  di ottenere un certo esito  $s$  nel caso di post-selezione del sistema nello stato  $|\psi'\rangle$  pesate rispetto alle probabilità di post-selezione:

$$p(c) = \sum_{\psi'} p(c|\psi') p(\psi') = \sum_{\psi'} p(c|\psi') |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 \quad (1.77)$$

Questa è la condizione affinché l'interpretazione statistica del valore debole coincida con quella del valor medio di un'osservabile. La distribuzione  $p(c|\psi')$  può quindi differire molto da  $p(c)$  purché  $|\langle \psi' | \psi \rangle|^2$  sia abbastanza piccolo. Si vede quindi che la probabilità di ottenere determinati valori deboli decresce tanto più tali valori deboli sono "anomali".

**La misura di valori deboli** La misura dei valori deboli può essere effettuata direttamente usando (1.73):

$$\langle q \rangle_{\phi'} = \langle q \rangle_{\phi} + \theta \operatorname{Re} C_w \quad (1.78a)$$

$$\langle p \rangle_{\phi'} = \langle p \rangle_{\phi} + 2\theta \operatorname{Im} C_w (\Delta p)_{\phi}^2 \quad (1.78b)$$

Con opportune scelte di  $\phi(q)$  e misurando le traslazioni di  $q$  e  $p$  (uno per ogni misura) per un enorme numero di misure si possono ottenere indipendentemente i valori  $\operatorname{Re} C_w$  e  $\operatorname{Im} C_w$  con pochissimo errore statistico, purché siano rispettate le condizioni (1.69) e (1.70).

### 1.4.2 Misure deboli con puntatori a qubit

<sup>26</sup>Abbiamo finora considerato solo misure di von Neumann dove l'apparato misuratore contribuisce all'Hamiltoniana di interazione con un operatore unitario a spettro continuo. In realtà, a patto di modificare la trattazione, è possibile considerare anche la possibilità di utilizzare un apparato misuratore descritto in uno spazio  $\mathcal{H}$  a dimensione finita. Ciò è importante ai fini sperimentali, infatti permette di utilizzare come apparato misuratore oggetti quantistici relativamente semplici da gestire, come la polarizzazione di fotoni oppure lo spin di elettroni.

Consideriamo una misura nello schema di von Neumann dove il sistema 2 è un qubit<sup>27</sup> con stato iniziale normalizzato  $|\phi\rangle \langle \phi| = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$  e l'Hamiltoniana del sistema composto è tale da farlo evolvere secondo

$$\hat{U} = \exp\left\{-i\theta \hat{C} \otimes (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})\right\} \quad (1.79)$$

<sup>25</sup>[3], [21], [19], [26] (capitolo 16), [23]

<sup>26</sup>[27], [23]

<sup>27</sup>Come già accennato, un qubit non è altro che un sistema quantistico ove gli stati puri sono definiti da raggi vettori in uno spazio di Hilbert di dimensione 2. Può quindi esser rappresentato in modo univoco da vettori unitari in  $\mathbb{R}^3$  (si veda la rappresentazione nella sfera di Bloch), mentre matrici densità e osservabili possono esser definite come combinazioni lineari della matrice identità e delle 3 matrici di Pauli.

dove  $\vec{m}$  e  $\vec{n}$  sono vettori di  $\mathbb{C}^3$ ,  $\|\vec{m}\| = 1$ ,  $\vec{\sigma}$  è un vettore che ha come elementi le 3 matrici di Pauli, e  $\theta \ll 1$ , in modo tale da permettere l'approssimazione lineare dell'operatore unitario. Allora dopo l'evoluzione del sistema composto e dopo una post-selezione del primo sistema il qubit si trova nello stato:

$$|\phi'\rangle = \mathcal{N} \langle \psi' | \exp \left\{ -i\theta \hat{C} \otimes (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right\} | \psi \rangle | \phi \rangle \approx \mathcal{N} \langle \psi' | \psi \rangle (\mathbb{1} - i\theta C_w (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) | \phi \rangle) \quad (1.80)$$

È ora possibile eseguire una misura di una qualsiasi osservabile del qubit, ossia qualsiasi operatore nella forma  $\vec{q} \cdot \vec{\sigma}$ , con valore atteso che utilizzando un'approssimazione al prim'ordine in  $\theta$  vale:

$$\begin{aligned} \langle \vec{q} \cdot \vec{\sigma} \rangle_{\phi'} &\approx \langle \phi | \vec{q} \cdot \vec{\sigma} | \phi \rangle + \theta \langle \phi | i[\vec{n} \cdot \vec{\sigma}, \vec{q} \cdot \vec{\sigma}] | \phi \rangle \cdot \text{Re } C_w \\ &\quad + \theta \{ \langle \phi | (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{q} \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{q} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) | \phi \rangle - 2 \langle \phi | \vec{n} \cdot \vec{\sigma} | \phi \rangle \langle \phi | \vec{q} \cdot \vec{\sigma} | \phi \rangle \} \cdot \text{Im } C_w \\ &= \vec{q} \cdot \vec{m} + 2\theta \{ (\vec{q} \times \vec{n}) \cdot \vec{m} \} \text{Re } C_w + 2\theta \{ \vec{n} \cdot \vec{q} - (\vec{n} \cdot \vec{m})(\vec{q} \cdot \vec{m}) \} \text{Im } C_w \end{aligned} \quad (1.81)$$

Scegliendo ora opportunamente i vettori della sfera di Bloch  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{q}$  possiamo misurare parte reale e parte immaginaria di  $C_w$  grazie alla misura descritta da  $\vec{q}$ . In particolare

$$\vec{m} \perp \vec{n}, \vec{q} = \vec{n} \times \vec{m} \Rightarrow 2\theta \text{Re } C_w \approx \langle (\vec{n} \times \vec{m}) \cdot \vec{\sigma} \rangle_{\phi'} \quad (1.82a)$$

$$\vec{m} \perp \vec{n}, \vec{q} = \vec{n} \Rightarrow 2\theta \text{Im } C_w \approx \langle \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \rangle_{\phi'} \quad (1.82b)$$

## 1.5 Valori modulari

<sup>28</sup>*I principali problemi legati alla realizzazione di misure deboli in laboratorio sono legati alla richiesta che l'accoppiamento tra sistema ed apparato misuratore sia debole. Tale richiesta spesso è difficile da soddisfare, e inoltre i risultati che si ottengono sono frutto di approssimazioni, la cui validità pratica spesso non è assicurata, come vedremo nella sezione dedicata alle applicazioni delle misure deboli. Lungi dal sminuire l'importanza delle misure deboli con tale considerazione, in quanto i valori deboli hanno comunque ampi ed importanti utilizzi, vediamo ora un'alternativa ai valori deboli, rappresentata dai valori modulari. Tali valori sono di particolare interesse quando l'osservabile del sistema 2 presente nell'Hamiltoniana è un proiettore, poiché mediante una scelta accorta dello stato iniziale del sistema 2 è possibile eseguire una misura con forza di accoppiamento medio-alta pur preservando lo stato del sistema misurato. Inoltre esiste uno stretto collegamento tra valori deboli e valori modulari, e questi possono esser connessi con facilità specialmente se anche il primo sistema è un qubit.*

Consideriamo un caso particolare di misuratore a qubit, in cui l'osservabile del qubit a cui viene accoppiata  $\hat{C}$  è un certo proiettore  $\hat{\Pi}$  con autostati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , e lo stato iniziale del puntatore è  $|\phi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ . In tal caso lo stato finale dell'apparato misuratore dopo la post-selezione del primo sistema è

$$|\phi'\rangle = \mathcal{N} \langle \psi' | \exp \left\{ -i\theta \hat{C} \otimes \hat{\Pi} \right\} | \psi \rangle (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) = \mathcal{N} \langle \psi' | \psi \rangle \left( \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 \frac{\langle \psi' | e^{-i\theta \hat{C}} | \psi \rangle}{\langle \psi' | \psi \rangle} |1\rangle \right) \quad (1.83)$$

**Definizione 7.** Definiamo Valore modulare di  $\hat{C}$  nello stato pre e post-selezionato  $\langle \psi' | \psi \rangle$  il valore complesso:

$$C_m \equiv \frac{\langle \psi' | e^{-i\theta \hat{C}} | \psi \rangle}{\langle \psi' | \psi \rangle} \quad (1.84)$$

In assenza di alcuna ipotesi sulla forza di interazione  $\theta$ , abbiamo quindi ricavato che in tal caso l'evoluzione del puntatore è

$$|\phi'\rangle = \mathcal{N} (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 C_m |1\rangle) \quad (1.85)$$

La misura dei valori modulari è particolarmente agevole poiché se lo stato finale del sistema 2 che si ottiene è  $|\phi'\rangle = \beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$  allora il valore modulare è

$$C_m = \frac{\alpha_0 \beta_1}{\alpha_1 \beta_0} \quad (1.86)$$

Si noti inoltre che nel caso particolare in cui  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  ed il primo sistema sia anch'esso un qubit si ha una relazione tra valori modulari e valori deboli di alcune (importanti) osservabili:

$$\sigma_m \equiv \frac{\langle \psi' | e^{i\frac{\pi}{2} \hat{\sigma}} | \psi \rangle}{\langle \psi' | \psi \rangle} = i\sigma_w \quad (\hat{\sigma} = \mathbb{1}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) \quad (1.87)$$

---

<sup>28</sup>[28], [29]

La relazione precedente nel caso in cui il sistema 1 sia un qubit può essere generalizzata ([29]):

$$\sigma_m = a \sigma_w + b \quad a \equiv \frac{e^{-i\theta\lambda_1} - e^{-i\theta\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad b \equiv -\frac{\lambda_2 e^{-i\theta\lambda_1} - \lambda_1 e^{-i\theta\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (1.88)$$

dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono gli autovalori di  $\hat{\sigma}$ , un qualsiasi operatore in  $\mathbb{C}^2$ .  
Se invece  $\hat{C}$  è un qualche proiettore  $\hat{\Pi}$  in  $\mathbb{C}^n$  per  $n$  arbitrario, vale

$$\Pi_m = 1 - \Pi_w(1 - e^{-i\theta}) \quad (1.89)$$

È interessante notare che è possibile implementare una misura che perturba poco il sistema pur usando una forza di accoppiamento piuttosto alta, infatti per qualsiasi valore di  $\theta$  e  $C_m$  è possibile scegliere  $\alpha_1$  sufficientemente piccolo in modo tale che l'effetto della misura sia molto limitato.

## 1.6 Applicazioni delle misure generalizzate

Verranno ora illustrate alcune utili applicazioni delle misure generalizzate analizzate finora. Tutte le applicazioni illustrate sono molto interessanti specialmente nell'ambito della Teoria dell'Informazione.

### 1.6.1 Misura di osservabili non commutative

<sup>29</sup> Come già detto, la capacità di interagire con gli oggetti quantistici vincola le possibilità che abbiamo di usarli nelle nostre applicazioni. Se consideriamo due osservabili non commutative, solo una di queste può essere misurata con una misura proiettiva poiché dopo la prima misura lo stato quantistico viene modificato irreversibilmente, perdendo molta dell'informazione che aveva originariamente. Tale fenomeno, intrinseco nella Fisica Quantistica ma non in quella Classica, ha fatto sì che negli anni si siano cercate le misure più efficienti per acquisire l'informazione contenuta in un qubit. Utilizzando invece misure che non perturbano lo stato, come le misure deboli o le misure modulari, ciò non è più necessario, in quanto lo stato non viene perturbato dalla singola misura.

Come si vede in (1.63) una misura debole perturba in modo minimo lo stato del sistema, e quindi è possibile misurare in sequenza osservabili non compatibili, in quanto in seguito alla prima misura lo stato del sistema è molto simile a quella iniziale.

Nel caso di misure con post-selezione, è stato ricavato in [30] che usando puntatori diversi per osservabili distinte, il prodotto delle variazioni delle posizioni dei singoli puntatori dipende esclusivamente dai valori deboli di prodotti delle osservabili misurate. Siano  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , le variazioni delle variabili puntatore associate alle misure delle osservabili  $\hat{C}_i$ , allora misurando in modo debole tutte le  $n$  osservabili nell'ordine dato da  $i$  crescente, si ha

$$\langle q_1 q_2 \dots q_n \rangle = \frac{\theta^n}{2^{n-1}} \text{Re} \sum_{r \geq s} \sum_{\vec{i} \vec{j}} (C_{i_r}, \dots, C_{i_1})_w (C_{j_s}, \dots, C_{j_1})_w^* \quad (1.90)$$

ove per ogni coppia  $r, s$  la seconda sommatoria è su tutte le possibili coppie di vettori ordinati di indici  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  dove  $i$  ha  $r$  elementi e  $j$  ne ha  $s$ , e vale  $\vec{i} \cup \vec{j} = (1, \dots, n)$  e  $\vec{i} \cap \vec{j} = \emptyset$ . Nel caso in cui  $r = s$  deve anche valere  $i_1 = 1$ . Delle formule analoghe si possono ottenere anche per le variazioni dei prodotti delle variabili coniugate  $\langle p_1 p_2 \dots p_n \rangle$

### 1.6.2 Amplificazione mediante valori deboli

<sup>30</sup> L'articolo [3], oltre ad aver causato numerosi dibattiti sull'interpretazione delle misure non proiettive, ha da subito mostrato la potenzialità che hanno i valori deboli nella misura di grandezze estremamente piccole, grazie al fatto che con le dovute post-selezioni essi possano discostarsi molto dagli autovalori delle osservabili a cui si riferiscono. Gli articoli [34], [35], [36] e [37] sono solo degli esempi di come le misure deboli abbiano permesso di misurare grandezze estremamente piccole con precisioni irraggiungibili a parità di strumentazione. Campi come la metrologia o la sensoristica possono sfruttare le tecniche qui illustrate per produrre nuove tecnologie ad alta precisione con costi molto più bassi di quelli delle tecnologie con stessa precisione.

<sup>29</sup>Si veda [30], [31] e [32]

<sup>30</sup>[33], per approfondire vedi [16], alla fine del paragrafo 2.5.4.

Data una certa osservabile  $\hat{C}$ , si è visto che una misura con post-selezione su stati  $|\psi\rangle$  e  $|\psi'\rangle$  molto distanti tra loro nello spazio delle fasi può portare a valori deboli  $C_w$  anche molto diversi dai valori attesi previsti dallo spettro dell'osservabile. Tale proprietà viene sfruttata per ridurre l'errore sperimentale nella determinazione di parametri sconosciuti dell'evoluzione dello stato quantistico (ad esempio lo spostamento dovuto a lamine birifrangenti, deviazione di fasci e variazioni di fase, di frequenza, angolari, temporali, di velocità, e di temperatura). Le misure deboli sono particolarmente adatte a questo scopo, in quanto in genere i parametri da determinare per cui è richiesto tale approccio sono molto piccoli, e utilizzandoli come costanti di accoppiamento fanno sì che l'interazione descriva una misura debole. La scelta poi di usare stati di pre e post-selezione particolarmente distanti fa sì che lo spostamento del puntatore in (1.78) sia piuttosto ampio e facile da misurare, permettendo così di risalire facilmente e con minore errore a  $\theta$  e quindi alla grandezza che si vuole misurare.

Nella metrologia quantistica si è visto ([38]) che i valori deboli di  $\hat{C} \otimes \hat{P}$  sono in relazione con il limite inferiore teorico dell'errore dello stimatore  $\hat{\theta}$  del parametro  $\theta$  per un certo stato iniziale  $|\Psi\rangle$  fissato (limite di Cramer-Rao):

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left[ \sum_m \left( 2 \text{Im} \frac{\langle m | (\hat{C} \otimes \hat{P}) | \Psi \rangle}{\langle m | \Psi \rangle} \right)^2 p(m) \right]^{-1} \quad (1.91)$$

che si ottiene dalla definizione di matrice di informazione di Fisher e da  $p(m) = |\langle m | \hat{U} | \Psi \rangle|^2$ . (Si noti che per simmetria del formalismo a due stati, il limite descritto da (1.91) può esser riscritto rispetto ad un fissato stato finale  $|\Psi'\rangle$ , svolgendo la sommatoria su tutti i possibili stati iniziali  $|n\rangle$ ). Ciò è in forte relazione con la necessità di ottenere valori deboli sufficientemente grandi degli operatori presenti nell'Hamiltoniana di accoppiamento per poter rilevare l'effetto di parametri molto piccoli dell'evoluzione in presenza di rumore di fondo.

Si osservi tuttavia che i valori deboli non possono essere arbitrariamente grandi poiché non sarebbero più verificate le ipotesi (1.69) ed (1.70), e sarebbe quindi necessario considerare termini di ordine superiore nell'unitaria di evoluzione dei sistemi. Inoltre, la bassa probabilità di rilevamento necessaria per avere grandi valori deboli rende difficoltosa la risoluzione del segnale, richiedendo tempi di misura più lunghi per poter ottenere un segnale sufficiente.

Detto ciò, si è visto che comunque tali metodi di misurazione dei parametri dell'evoluzione del sistema producono comunque risultati simili a quelli ottimali, e tali metodi di amplificazione rendono il processo di misura più robusto rispetto a certi tipi di rumori tecnici addizionali.

Altri ulteriori vantaggi pratici delle misure deboli sono dati dall'utilizzo di una strumentazione più economica e modesta, in quanto non è più richiesto l'uso di strumentazione ad altissima precisione per misurare valori estremamente piccoli. Inoltre in seguito alla misura debole il sistema è ancora in uno stato simile a quello iniziale e può esser utilizzato per altri fini anche dopo una prima misura finalizzata alla determinazione di  $\theta$ .

### 1.6.3 Tomografia debole diretta

*Una fase fondamentale di qualsiasi protocollo utilizzato nell'Informazione Quantistica è quella dell'acquisizione dell'informazione contenuta in un qubit o più in generale di uno stato quantistico. Tale processo, detto Tomografia Quantistica, prevede di eseguire misure atte ad ottenere la rappresentazione dell'oggetto quantistico rispetto ad una qualche base dello spazio di Hilbert ove viene rappresentato. I primi protocolli creati per svolgere tale processo richiedono di eseguire un certo numero minimo di misure proiettive distinte, che devono essere poi analizzate con una procedura che diventa onerosa nel caso di sistemi più complessi. L'utilizzo di misure deboli al posto di quelle proiettive permette di semplificare molto il protocollo, riducendo in parte il numero di misure indipendenti che di fatto devono essere eseguite, ma soprattutto fornendo risultati diretti che richiedono un'analisi successiva molto semplice. Ciò permette di ridurre notevolmente il tempo richiesto da tale processo, a patto di accettare un'approssimazione del risultato finale. L'articolo [39] è solo uno degli esempi in cui l'utilizzo di misure deboli al posto di quelle proiettive ha permesso di ottimizzare il processo di tomografia nel caso di sistemi ad alto numero di gradi di libertà. Ciò ha grandi vantaggi dal punto di vista sperimentale, soprattutto in prospettiva dell'utilizzo di algoritmi quantistici nella riduzione della complessità temporale delle soluzioni di alcuni problemi computazionali.*

Poiché i valori deboli sono quantità complesse, essi possono essere utilizzati per misurare direttamente quantità complesse normalmente inaccessibili che possono essere riscritte come somma o prodotti di valori deboli complessi, come ad esempio la fase geometrica. Un'applicazione molto interessante di questa tecnica è la determinazione diretta della funzione d'onda di uno stato quantistico.

Precedentemente tale operazione era possibile solo attraverso il processo indiretto della tomografia quantistica (*Quantum State Tomography (QST)*, [40], [41]), basata su una lunga serie di misure proiettive dello stato

quantistico, che venivano poi utilizzate per ricostruire la matrice di densità dello stato attraverso operazioni di ricerca numerica, che rendevano problematica la propagazione degli errori sperimentali di tale processo, e richiedevano un grande tempo di post processing (che talvolta poteva diventare addirittura proibitivo per stati a grandi dimensioni, come nella determinazione del momento angolare orbitale). Detto infatti  $d$  il numero di stati del sistema, la QST richiede di misurare un numero di proiettori lineari indipendenti nell'ordine di  $d^2$ , processo che può essere molto oneroso per un sistema a molti gradi di libertà.

È possibile evitare tale procedura di ricostruzione globale espandendo lo stato in termini di valori deboli misurabili direttamente (*Direct Weak Tomography (DWT)*, [42], [43], [44], [45]). Per determinare lo stato iniziale, tale protocollo richiede solo di eseguire  $d$  diverse evoluzioni del sistema accoppiato ad un qubit puntatore, una post-selezione del sistema e infine la misura dei valori attesi di  $\hat{\sigma}_z$  e  $\hat{\sigma}_y$  sul qubit<sup>31</sup> al termine di ogni evoluzione e successiva post-selezione. Il termine “diretta” si riferisce al fatto che i valori che descrivono la funzione d'onda si ottengono direttamente da misure di probabilità senza successivi calcoli di ricerca numerica. Attraverso la DWT è stata possibile la misura dello stato di un fotone con un milione di gradi di libertà ([39]), operazione che richiederebbe un lavoro enorme con la QST e che fornirebbe un risultato finale affetto da un errore molto maggiore di quello ottenuto con la DWT.

Consideriamo uno stato  $|\psi\rangle$ , questo può esser scritto rispetto a una certa base  $\{|a\rangle\}_{a=1,\dots,d}$  normalizzata come

$$|\psi\rangle = \sum_a \langle a|\psi\rangle |a\rangle \quad (1.92)$$

L'obiettivo della tomografia è quello di determinare i coefficienti  $\langle a|\psi\rangle$ . Consideriamo ora uno stato  $|\psi'\rangle$  tale che  $\langle \psi'|a\rangle = 1/\sqrt{d}$  per ogni vettore  $|a\rangle$  della base, ad esempio  $|\psi'\rangle = (1/\sqrt{d}) \sum_a |a\rangle$ . Allora se eseguiamo delle misure deboli dei proiettori  $\hat{\Pi}_a = |a\rangle\langle a|$  e post-selezioniamo poi il sistema iniziale nello stato  $|\psi'\rangle$  si ha

$$(\hat{\Pi}_a)_w = \frac{\langle \psi'|a\rangle \langle a|\psi\rangle}{\langle \psi'|\psi\rangle} = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle a|\psi\rangle \quad (1.93)$$

per qualche costante  $\mathcal{N}$  che non dipende da  $a$ . Lo stato iniziale del sistema può allora esser scritto come

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} \sum_a (\hat{\Pi}_a)_w |a\rangle \quad (1.94)$$

e la costante  $\mathcal{N}$  si può determinare normalizzando lo stato finale. Usando come sistema di misura un qubit con base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , se lo stato stato iniziale del qubit è  $|0\rangle$  e l'Hamiltoniana di interazione dei due sistemi è  $\theta \hat{\Pi}_a \otimes \hat{\sigma}_y$ , si ha allora da (1.82):

$$(\hat{\Pi}_a)_w \stackrel{\theta \ll 1}{\approx} \tilde{\mathcal{N}} \left[ \left( \langle \hat{\Pi}_+ \rangle_{\phi'_a} - \langle \hat{\Pi}_- \rangle_{\phi'_a} \right) + i \left( \langle \hat{\Pi}_L \rangle_{\phi'_a} - \langle \hat{\Pi}_R \rangle_{\phi'_a} \right) \right] \quad (1.95)$$

ove abbiamo usato i valori attesi sullo stato finale  $|\phi'\rangle$  dei proiettori sui seguenti stati:

$$|\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle) \quad |L\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + i|1\rangle) \quad |R\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle - i|1\rangle) \quad (1.96)$$

Si ha una nuova costante  $\tilde{\mathcal{N}}$  che anche questa volta è indipendente da  $a$  e può esser determinata alla fine normalizzando lo stato finale. Si noti che bisogna eseguire  $d$  diverse evoluzioni al variare di  $a$ , e quindi per ogni proiettore corrispondente agli stati (1.96) ci saranno  $d$  valori attesi.

Tale tecnica di tomografia è generalizzabile agli stati misti, complicando però la trattazione.<sup>32</sup> Ricordiamo che il risultato ottenuto non è esatto, in quanto abbiamo fatto uso dell'approssimazione al prim'ordine dell'operatore unitario. Il beneficio primario di questo approccio è la necessità di un post-processo minimale (e quindi una propagazione minimale dell'errore sperimentale). Lo svantaggio di questo approccio è che lo stato iniziale del primo sistema non è noto, e quindi non si può esser sicuri della validità dell'approssimazione lineare in  $\theta$ . Trascurare termini di grado superiore rilevanti causerebbe errori nella stima, che non verrebbero rilevati a posteriori.

Come analizzato in [45], nel complesso la tomografia standard presenta, a parità di dati sperimentali, un minore errore statistico rispetto alla DWT, che però risulta comunque competitiva per quanto riguarda la robustezza ad errori, e ha il vantaggio di essere molto più semplice da eseguire sperimentalmente. Diventa inoltre particolarmente vantaggiosa per valori di  $d$  medio – alti.

<sup>31</sup>O di un'altra coppia di osservabili compatibili

<sup>32</sup>[46], [47]



## Analisi dell'accuratezza della tomografia debole

Prendiamo in considerazione l'accuratezza della DWT. Il metodo utilizzato fornisce un risultato  $|\psi\rangle_W$  che è approssimato rispetto allo stato iniziale  $|\psi\rangle$ . Definiamo allora l'accuratezza in termini della distanza  $\mathcal{D}$  tra i due stati nello spazio delle fasi, che nel caso particolare di stati puri è

$$\mathcal{D} = \sqrt{1 - |\langle\psi|\psi_W\rangle|^2}. \quad (1.97)$$

In senso fisico tale valore indica appunto quanto la funzione d'onda ottenuta dalla DWT differisce da quella reale. Il metodo DWT sarà considerato efficiente quando sarà soddisfatta la condizione  $\mathcal{D} \ll 1$ . Si dimostra in [48] una condizione sufficiente di efficienza:

$$\sum_a \left( \langle \hat{\Pi}_+ \rangle_{\phi'_a} - \langle \hat{\Pi}_- \rangle_{\phi'_a} \right) \geq 0 \xrightarrow{\theta \text{ piccolo}} \mathcal{D} \leq \theta/2 \quad (1.98)$$

Quando (1.98) non è soddisfatta, il metodo DWT non è garantito funzioni, e devono essere scelti valori di  $\theta$  minori per soddisfare la condizione di efficienza. Si può dimostrare che è sempre possibile soddisfare (1.98) con un valore di  $\theta$  sufficientemente piccolo. Anche i dati sperimentali mostrano che per piccoli valori di  $\theta$  il metodo DWT fallisce con minor probabilità e l'errore sistematico è limitato.

### 1.6.4 Tomografia forte diretta

<sup>33</sup> Abbiamo già accennato al fatto che in alcune fortunate occasioni i valori modulari possono essere utilizzati al posto di quelli deboli, permettendo così di ottenere gli stessi risultati che si ottengono usando i valori deboli usando però misure a forza arbitraria. Osserviamo che la (1.94) può esser scritta in termini di valori modulari usando la (1.89), e quindi è possibile la tomografia diretta usando misure a forza arbitraria ottenendo risultati esatti anziché approssimati. Verrà qui presentato un protocollo che permette la tomografia diretta usando misure non deboli e che fornisce un risultato esatto, come la tomografia tradizionale. Vedremo come tale protocollo è a tutti gli effetti migliore di quello illustrato precedentemente. Tale confronto tuttavia non è finalizzato a screditare la DWT rispetto a questo secondo metodo, in quanto anche la DWT può esser particolarmente vantaggiosa in determinate situazioni.

Il protocollo della DWT può essere migliorato descrivendo un nuovo protocollo che presenta accuratezza infinita  $\mathcal{D} = 0$  e anche in tal caso non richiede fasi di post-processo onerose, e anzi richiede un numero di misure dello stesso ordine di grandezza della DWT. Tale tecnica di tomografia è detta tomografia diretta forte (*Direct Strong Tomography (DST)*), poiché in generale usa un accoppiamento tra sistema e misuratore a qubit non debole, con  $\theta$  che varia nell'intervallo  $0 < \theta \leq \pi/2$  ( $\theta = \pi/2$  coincide con la forza di accoppiamento massima). Come già detto, a differenza della DWT tale tecnica fornisce un risultato esatto e non approssimato.

Consideriamo nuovamente un sistema descritto da:

$$|\psi\rangle = \sum_{a=1}^d \alpha_a |a\rangle \quad (1.99)$$

Come nel caso della DWT tale sistema è accoppiato ad un qubit con stato iniziale  $|0\rangle$  attraverso l'operatore

$$\hat{U}_a = e^{-i\theta \hat{\Pi}_a \otimes \hat{\sigma}_y} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \hat{\Pi}_a \otimes [(1 - \cos \theta) \mathbb{1} + i \sin \theta \hat{\sigma}_y] \quad (1.100)$$

e dopo l'evoluzione unitaria il sistema 1 è post-selezionato nello stato  $|\psi'\rangle = (1/\sqrt{d}) \sum_a |a\rangle$ .

Combinando la (1.94) con la (1.89) otteniamo per un qualsiasi valore di  $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$ :

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} \sum_a \left( 1 - (\hat{\Pi}_a)_m \right) |a\rangle \quad (1.101)$$

Si dimostra in [48] che in tal caso vale in forma esatta (non approssimata) la formula

$$\left( 1 - (\hat{\Pi}_a)_m \right) = \tilde{\mathcal{N}} \left[ \left( \langle \hat{\Pi}_+ \rangle_{\phi'_a} - \langle \hat{\Pi}_- \rangle_{\phi'_a} + 2 \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \langle \hat{\Pi}_1 \rangle_{\phi'_a} \right) + i \left( \langle \hat{\Pi}_L \rangle_{\phi'_a} - \langle \hat{\Pi}_R \rangle_{\phi'_a} \right) \right] \quad (1.102)$$

ove  $\tilde{\mathcal{N}}$  non dipende da  $a$  e si fa riferimento agli stati definiti in (1.96) e allo stato  $|1\rangle$ . Tali probabilità si possono ottenere sperimentalmente da misure dirette. Si noti inoltre che per  $\theta \ll 1$  l'approssimazione

<sup>33</sup>Per una trattazione approfondita si rimanda a [49], [48], [50]

al prim'ordine di tale risultato coincide con quello presentato per la DWT. Al solito,  $\mathcal{N}$  si può ottenere normalizzando lo stato finale.

In tal caso il risultato è esatto a tutti gli ordini in  $\theta$ , senza alcuna approssimazione. La differenza tra la DST e la DWT è che la prima richiede la misura dello stato del puntatore anche nello stato  $|1\rangle$ . Questa richiesta aggiuntiva è compensata dal fatto che i risultati ottenuti non sono approssimati, e l'accuratezza e precisione della DST sono maggiori di quelli della DWT, come dimostrato teoricamente e sperimentalmente in [48].

La tecnica della DST può esser estesa per la ricostruzione di matrici di densità per stati misti grazie all'aggiunta di un ulteriore misuratore a qubit, come descritto in [50].

### Analisi della precisione della DST e confronto con la DWT

Un altro parametro importante della qualità del metodo è la sua precisione, ossia l'errore statistico nella stima della funzione d'onda. Tale parametro è importante per valutare la variazione degli errori in relazioni al numero di misure effettuate. Per far ciò si valuta lo *scarto quadratico medio statistico*  $\delta\alpha$ :

$$\delta\alpha = \sqrt{\sum_i |\delta\alpha_i|^2}. \quad (1.103)$$

Bassi valori di  $\theta_W$  (la forza di accoppiamento usata per la DWT) corrispondono ad una minore precisione della DWT rispetto alla DST. I dati sperimentali mostrano inoltre che quando la condizione (1.98) è soddisfatta ossia quando l'errore sistematico  $\mathcal{D}$  è basso, gli errori statistici della DWT sono tipicamente maggiori degli errori statistici della DST.

Tali considerazioni mostrano definitivamente come la DST sia un metodo migliore della DWT nella misura diretta delle funzioni d'onda, per quanto riguarda gli errori sistematici e statistici. Utilizzando misure forti, dove c'è un forte legame tra la funzione d'onda da misurare e quella dell'apparato misuratore, si ottiene una miglior stima della funzione d'onda.

## Capitolo 2

# Interferometro per misure generalizzate

In questo capitolo viene descritto un modello di interferometro che permette di eseguire misure di von Neumann a forza  $\theta$  arbitraria della polarizzazione ( $\hat{\sigma}_z$ ) e dell'osservabile associata a  $\hat{\sigma}_x$  di singoli fotoni. Tale modello è stato realizzato sperimentalmente in laboratorio ed è stata ricavata una legge che associa ai parametri  $\{\theta_H, \theta_V, \varphi_{\text{exp}}\}$  che descrivono la configurazione, la corrispondente forza di accoppiamento  $\mu_{\text{exp}}$  osservata sperimentalmente. Invertendo tale relazione è stato possibile ottenere una legge che associa ad ogni parametro teorico  $\mu_{\text{theor}}$  desiderato dallo sperimentatore il parametro  $\varphi_{\text{exp}}$  da impostare sull'interferometro in modo tale che questo si comporti in modo più fedele possibile al modello teorico desiderato. Per ogni interferometro sono state testate 2 diverse configurazioni e sono stati confrontati i risultati ottenuti con ognuna di esse.

Nell'ultima parte del capitolo è poi presentata un'analisi che permette la correzione dei parametri con cui è stato configurato gli interferometri affinché questi si comportino in modo più simile possibile al modello ideale e che quindi abbiano prestazioni migliori dal punto di vista sperimentale.

### 2.1 Descrizione del modello

Viene qui caratterizzato il modello teorico dell'interferometro, assumendo che tutte le componenti siano ideali, e ricavando per esso una descrizione sia nel formalismo di von Neumann che in quello di Kraus. Viene inoltre proposta un'utile modifica del modello che permette di allargare la famiglia delle misure che possono essere eseguite e di eseguire la tomografia degli stati all'uscita dell'interferometro con la semplice aggiunta di un polarizzatore lineare fisso. Infine viene presentato un utile accorgimento per semplificare il setup sperimentale qualora ci fossero più interferometri in serie.

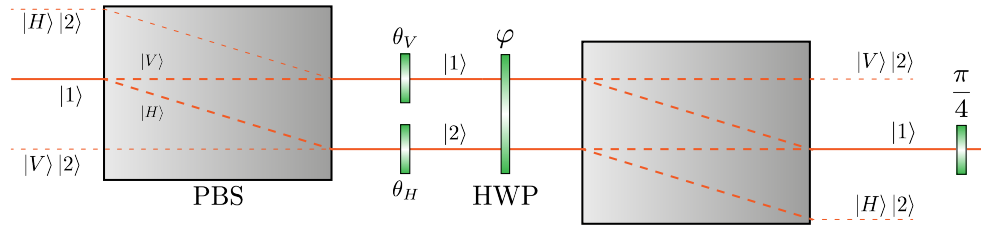


Figura 2.1: Modello concettuale dell'interferometro usato in laboratorio. Si noti che l'interpretazione degli stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  come cammini ha senso nella parte dell'interferometro compresa tra i due PBS, mentre all'esterno dei PBS lo stato finale  $|2\rangle$  indica semplicemente un qubit costituito da stati a polarizzazione orizzontale o verticale spazialmente separati.

L'interferometro è costituito da due *Polarizing Beam Splitter* (PBS) e quattro *Lamine a semionda* (Half Wave Plate, HWP). Il fascio entrante, indicato con  $|1\rangle$ , viene diviso in due fasci polarizzati linearmente dal primo PBS. Ognuno di questi due fasci percorrerà poi un diverso cammino,  $|1\rangle$  o  $|2\rangle$ , dove attraverserà due lamine (la seconda lamina è in comune) che ne cambieranno la polarizzazione, mantenendola però lineare. Infine i due fasci passeranno nel secondo PBS e verrà raccolto il fascio centrale come si può vedere in figura. Un'ultima lamina a semionda ha lo scopo di scambiare la componente  $|H\rangle$  con la componente  $|V\rangle$  del fascio finale indicato con  $|1\rangle$ . Si noti che i due fasci tratteggiati con linea sottile entranti nel primo PBS (indicati con  $|2\rangle$ ) sono indicati perché utili all'analisi ma non saranno mai popolati, ossia nessun fotone entrerà mai nel PBS attraverso quei canali.<sup>1</sup> Si possono assumere come stati fittizi.

<sup>1</sup>Non sarebbe neppure possibile con la implementazione del modello usata in laboratorio

Nel caso in cui anziché inviare un fascio si inviano singoli fotoni, secondo l'interpretazione standard dalla MQ, ogni fotone sarà in uno stato di sovrapposizione dei due cammini secondo probabilità date dalle sue componenti orizzontale e verticale, sarà cioè in uno stato di sovrapposizione degli stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  secondo coefficienti che dipendono da  $\langle V|\psi\rangle$  e  $\langle H|\psi\rangle$ .

Se indichiamo lo stato iniziale entrante nel PBS con  $|\psi\rangle$  allora seguendo il formalismo analizzato nel capitolo precedente lo stato iniziale dopo l'accoppiamento col misuratore è  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle |1\rangle$ .

Il fatto che all'uscita del secondo interferometro consideriamo solo gli stati uscenti nello stato  $|1\rangle$  corrisponde ad una misura proiettiva sull'apparato misuratore, secondo il proiettore  $\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_1$ . Come previsto sia dal modello di Kraus che da quello di von Neumann, la misura generalizzata è data dall'evoluzione unitaria del sistema composto seguita da una misura proiettiva sull'apparato misuratore, ed è tale misura proiettiva a dare l'informazione sullo stato quantistico iniziale del primo sistema all'osservatore. Tale informazione sulla polarizzazione dello stato iniziale si ottiene appunto dall'ampiezza di probabilità della componente  $|1\rangle$  al termine dell'evoluzione, presupponendo noto l'effetto dell'interferometro sullo stato iniziale.

## Polarizing Beam Splitters

L'effetto di ognuno dei PBS è quello di lasciar passare inalterata la componente a polarizzazione verticale del fascio trasmesso e a traslare spazialmente la componente a polarizzazione orizzontale. Nel caso di traslazione viene aggiunta una fase che possiamo assumere pari ad  $e^{i\gamma}$ . Poiché all'uscita dell'interferometro considereremo solo la componente  $|1\rangle$ , osserviamo che in entrambi i cammini possibili il fascio subisce esattamente una traslazione, quindi si può raccogliere il fattore  $e^{i\gamma}$  nello stato finale e lo si può porre pari a 1 visto che lo stato finale  $|\psi'\rangle$  è definito a meno di una fase.

Usiamo la seguente convenzione:  $|H\rangle = (1, 0)^T$ ,  $|V\rangle = (0, 1)^T$ ,  $|1\rangle = (1, 0)^T$  e  $|2\rangle = (0, 1)^T$ .

Con tale notazione, e scegliendo come base  $\{|H1\rangle, |H2\rangle, |V1\rangle, |V2\rangle\}$ , l'operatore unitario che descrive il primo PBS (a sinistra nel disegno, PBS1) ha l'effetto di mantenere inalterate le componenti  $|V\rangle$  e di scambiare  $|H\rangle |1\rangle$  con  $|H\rangle |2\rangle$ . Viceversa il secondo PBS (a destra nel disegno, PBS2) lascia inalterate le componenti  $|H\rangle$  e scambia  $|V\rangle |1\rangle$  con  $|V\rangle |2\rangle$ .<sup>2 3</sup>

$$\hat{U}_{PBS1} = \hat{\Pi}_H \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\Pi}_V \otimes \mathbb{1} \quad \hat{U}_{PBS2} = \hat{\Pi}_H \otimes \mathbb{1} + \hat{\Pi}_V \otimes \hat{\sigma}_x \quad (2.1)$$

## Half Wave Plates

L'effetto delle lamine a semionda è quello di cambiare la polarizzazione dei fasci. In particolare l'asse di polarizzazione del fotone viene ruotato in modo da portarsi in posizione simmetrica a quella iniziale rispetto all'asse della lamina. In formule ([51]) se  $\varphi$  è l'angolo a cui è posizionata la lamina rispetto all'asse verticale:

$$\hat{U}_{HWP}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \cos(2\varphi)\hat{\sigma}_z + \sin(2\varphi)\hat{\sigma}_x = (\sin(2\varphi), 0, \cos(2\varphi))^T \cdot \vec{\sigma} \quad (2.2)$$

Le due lamine agli angoli  $\theta_H$  e  $\theta_V$  sono disposte in modo tale che valga  $\theta_V - \theta_H = \frac{\pi}{4}$ .

## Interferometro

Con tali assunzioni l'evoluzione complessiva dell'interferometro è descritta dall'operatore unitario:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \left( \hat{U}_{HWP}\left(\frac{\pi}{4}\right) \otimes \hat{\Pi}_1 + \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_2 \right) \hat{U}_{PBS2} \left( \left( \hat{U}_{HWP}(\varphi) \hat{U}_{HWP}(\theta_V) \right) \otimes \hat{\Pi}_1 + \left( \hat{U}_{HWP}(\varphi) \hat{U}_{HWP}(\theta_H) \right) \otimes \hat{\Pi}_2 \right) \hat{U}_{PBS1} \\ &= \underbrace{\exp\left\{-i\left(2\theta_H - 2\varphi + \frac{\pi}{4}\right)(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y)\right\}}_{\hat{U}_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{T}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

<sup>2</sup>Si noti che le differenze tra gli operatori dei due PBS dipendono dalle notazioni diverse utilizzate in figura per ognuno di essi.

<sup>3</sup>Matrici di Pauli:  $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , e  $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix}$

<sup>4</sup>Si veda la dimostrazione in appendice, sezione A.1.

Posto  $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$  e  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle|1\rangle$ , l'effetto della matrice  $\hat{T}$  sullo stato iniziale è

$$\hat{T}|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle\left(\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta|V\rangle\left(\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |\psi\rangle\left(\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.4)$$

quindi di fatto  $\hat{U}$  corrisponde ad una misura di von Neumann descritta da  $\hat{U}_1$  ove il primo sistema viene accoppiato con un secondo con stato iniziale  $|\phi\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$ . La forza di tale accoppiamento è  $\theta = 2\theta_H - 2\varphi + \frac{\pi}{4}$ .

$$\hat{U}_1 = \exp\{-i\theta\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y\} \quad (2.5)$$

Assumeremo d'ora in poi l'interferometro come un apparato per la misura della polarizzazione ( $\hat{\sigma}_z$ ) con forza  $\theta$  arbitraria impostata variando  $\varphi$ , ove il sistema iniziale (il fotone) descritto da  $|\psi\rangle$  viene accoppiato con un qubit con stato iniziale  $|\phi\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ . Il sistema composto evolve poi secondo  $\hat{U}_1$ .

Lo stato al termine dell'evoluzione unitaria è

$$\begin{aligned} \hat{U}_1|\psi\rangle|\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) - \alpha \sin(\theta) \\ \alpha \cos(\theta) + \alpha \sin(\theta) \\ \beta \cos(\theta) + \beta \sin(\theta) \\ \beta \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\mu) \\ \alpha \sin(\mu) \\ \beta \sin(\mu) \\ \beta \cos(\mu) \end{pmatrix} \\ &= \alpha|H\rangle(\cos(\mu)|1\rangle + \sin(\mu)|2\rangle) + \beta|V\rangle(\sin(\mu)|1\rangle + \cos(\mu)|2\rangle) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dove abbiamo definito  $\mu \equiv \theta + \frac{\pi}{4} = 2\theta_V - 2\varphi$ . Si noti che per  $\theta = 0$  lo stato finale è identico a quello iniziale, definito in (2.4), e quindi la misura non ha alcun effetto sullo stato composto, come ci si aspettava dalla definizione di  $\theta$  come forza di accoppiamento. Invece per  $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$  la misura è proiettiva, in quanto per  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  si ha  $\sin(\mu) = 0$  e per  $\theta = \frac{\pi}{4}$  si ha  $\cos(\mu) = 0$ . Per valori di  $\mu$  intermedi l'accoppiamento crea una variazione dello stato iniziale. Tale variazione è tanto più apprezzabile da una misura proiettiva sul secondo sistema quanto più  $\theta$  si discosta dallo zero.

Dopo la misura proiettiva sul sistema 2 descritta da  $\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_1$ , il sistema composto si trova nello stato  $|\Psi'\rangle = |\psi'\rangle|1\rangle = (\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_1)\hat{U}_1|\psi\rangle|\phi\rangle$  con  $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$  e sviluppando i calcoli si ottiene

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha(\cos(\theta) - \sin(\theta)) \\ \beta(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\mu) \\ \beta \sin(\mu) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

L'effetto della misura sul primo sistema può quindi esser descritto dalla matrice di Kraus

$$\hat{M}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) + \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) & 0 \\ 0 & \sin(\mu) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

L'insieme  $\{\hat{M}_\mu\}_{\mu \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$  descrive tutte le possibili misure che possono esser eseguite dall'interferometro al variare di  $\mu$ . È inutile scegliere  $\mu$  in un intervallo di ampiezza  $2\pi$  poiché in tal caso le misure sarebbero ridondanti:  $\hat{M}_{\mu+\pi} = -\hat{M}_\mu$ , quindi avremmo due operatori che si distinguono solo per un fattore -1, che di fatto non è rilevante nello stato finale definito a meno di una fase.

### 2.1.1 Descrizione del modello con l'aggiunta di due lamine

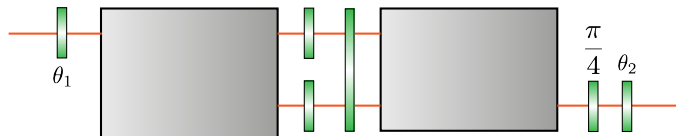


Figura 2.2: Schema dell'interferometro con lamine agli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Osserviamo che se poniamo all'inizio e alla fine dell'interferometro due lamine HWP ad angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  come in figura 2.2, tale interferometro sarà definito dall'operatore  $\hat{M}_\mu^{\theta_1, \theta_2} \equiv \hat{U}_{HWP}(\theta_2) \hat{M}_\mu \hat{U}_{HWP}(\theta_1)$ , si ha

allora:

$$\hat{M}_\mu^{0,0} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) & 0 \\ 0 & \sin(\mu) \end{pmatrix} = \cos(\mu)\hat{\Pi}_H + \sin(\mu)\hat{\Pi}_V \quad (2.9a)$$

$$\hat{M}_\mu^{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \sin(\mu) & 0 \\ 0 & \cos(\mu) \end{pmatrix} = \sin(\mu)\hat{\Pi}_H + \cos(\mu)\hat{\Pi}_V \quad (2.9b)$$

$$\hat{M}_\mu^{\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\mu) + \sin(\mu) & \cos(\mu) - \sin(\mu) \\ \cos(\mu) - \sin(\mu) & \cos(\mu) + \sin(\mu) \end{pmatrix} = \cos(\mu)\hat{\Pi}_+ + \sin(\mu)\hat{\Pi}_- \quad (2.9c)$$

$$\hat{M}_\mu^{-\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\mu) + \sin(\mu) & \sin(\mu) - \cos(\mu) \\ \sin(\mu) - \cos(\mu) & \cos(\mu) + \sin(\mu) \end{pmatrix} = \sin(\mu)\hat{\Pi}_+ + \cos(\mu)\hat{\Pi}_- \quad (2.9d)$$

ove  $\hat{\Pi}_\pm$  è il proiettore sull'autostato  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)^T$  di  $\hat{\sigma}_x$  con autovalore  $\pm 1$ . Vediamo quindi che con l'aggiunta di lamine all'inizio e alla fine dell'interferometro è possibile performare anche misure di  $\hat{\sigma}_x$  oltre che di  $\hat{\sigma}_z$  come già visto. È possibile anche in tal caso ottenere una formulazione nel formalismo di von Neumann considerando<sup>5</sup>  $\hat{U}^{\theta_1, \theta_2} \equiv \hat{U}_{HWP}(\theta_2)\hat{U}\hat{U}_{HWP}(\theta_1)$  ed eseguendo passaggi algebrici simili a quelli svolti in (A.6).

### 2.1.2 Tomografia dello stato uscente

Supponiamo inoltre che per la tomografia dello stato uscente dell'interferometro si ponga un polarizzatore lineare orientato lungo l'asse orizzontale dopo la lamina impostata all'angolo  $\theta_2$ . In tale configurazione il polarizzatore misurerà proiettivamente la componente  $|H\rangle$  dello stato finale, e la serie polarizzatore–interferometro sarà descritta da  $\hat{\Pi}_H \hat{M}_\mu^{\theta_1, \theta_2}$ . Per poter misurare la componente  $|V\rangle$  è necessario scambiare la componente orizzontale con quella verticale dello stato finale prima che questo incida sul polarizzatore, e ciò può esser eseguito aggiungendo una lamina HWP all'angolo  $\pi/4$ , ottenendo così l'operatore  $\hat{\Pi}_H \hat{U}_{HWP}(\pi/4) \hat{M}_\mu^{\theta_1, \theta_2}$ . Senza aggiungere una lamina a  $\pi/4$  tra l'interferometro ed il polarizzatore, osserviamo lo stesso effetto si può ottenere facendo avanzare l'angolo di  $\theta_2$  di  $\pi/4$ :

$$\hat{\Pi}_H \hat{U}_{HWP}(\pi/4) \hat{M}_\mu^{\theta_1, \theta_2} = -\hat{\Pi}_H \hat{M}_\mu^{\theta_1, \theta_2 + \frac{\pi}{4}} \quad (2.10)$$

E poiché il segno meno non è rilevante nella tomografia dello stato finale, vediamo quindi che il setup descritto in Fig.2.2 permette di eseguire oltre alle misure definite in (2.9), anche la tomografia degli stati finali dopo tali misure, con la semplice aggiunta di un polarizzatore lineare fisso.

### 2.1.3 Interferometri in serie

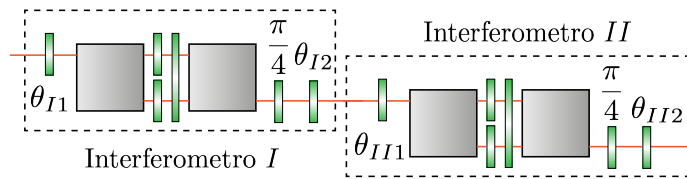


Figura 2.3: Schema di due interferometri posti in serie.

Ponendo in serie due interferometri, osserviamo che le 3 lamine HWP adiacenti possono esser sostituite da un'unica lamina HWP. Vale infatti la formula, per  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\hat{U}_{HWP}(\theta_1) \cdot \hat{U}_{HWP}(\theta_2) \dots \hat{U}_{HWP}(\theta_{2n+1}) = \hat{U}_{HWP} \left( \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} \theta_i \right) \quad (2.11)$$

e quindi le tre lamine si possono sostituire con un'unica lamina all'angolo  $\theta_{I,II} \equiv \theta_{I1} - \theta_{II2} + \frac{\pi}{4}$ :

$$\hat{U}_{HWP}(\theta_{II1}) \cdot \hat{U}_{HWP}(\theta_{II2}) \cdot \hat{U}_{HWP} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \hat{U}_{HWP} \left( \theta_{II1} - \theta_{II2} + \frac{\pi}{4} \right) = \hat{U}_{HWP}(\theta_{I,II}) \quad (2.12)$$

<sup>5</sup>La notazione corretta prevederebbe di scrivere al posto di  $\hat{U}_{HWP}(\theta_i)$ , che vale in 2D, l'operatore  $\hat{U}_{HWP}(\theta_i) \otimes \hat{\Pi}_1 + \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_2$ .

## 2.2 Caratterizzazione sperimentale dell'interferometro

In questa sezione si è ricavata la relazione tra il modello teorico e il comportamento degli interferometri creati in laboratorio secondo tale modello, ricavando una legge lineare che mette in relazione la forza effettiva  $\mu_{\text{exp}}$  dell'interferometro quando questo è impostato secondo un certo parametro  $\varphi_{\text{exp}}$ .

Si è inoltre visto come variazioni dei risultati sperimentali possano esser ricondotti ad errori nella disposizione delle lamine dell'interferometro.

La sezione si conclude con un'analisi delle possibili soluzioni per la calibrazione dell'interferometro affinché questo si comporti in maniera fedele al modello ideale, procedura necessaria per ottenere risultati sperimentali ottimali.

In laboratorio sono stati realizzati due interferometri secondo il modello descritto nella sezione precedente, disposti secondo la figura 2.3 adottando la semplificazione descritta in 2.1.3. Il comportamento reale di ognuno degli interferometri realizzati è stato poi analizzato e confrontato con il modello teorico. In particolare si è voluto analizzare il comportamento degli interferometri  $i$  e  $j$  rispettivamente per valori di  $\mu$  nei range  $\mu_I \in (0.3, 0.4)$  e  $\mu_{II} \in (0.1, 0.2)$ . Tale scelta è dovuta al fatto che tali interferometri sono stati utilizzati per realizzare le misure generalizzate richieste nell'esperimento descritto in [52].

In una prima fase della caratterizzazione, per ogni interferometro sono state impostate le lamine in due configurazioni  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$  e  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$ , variando poi l'angolo  $\varphi = \varphi_{\text{exp}}$  in modo tale che gli interferometri eseguissero nel modello teorico una serie di misure al variare di<sup>6</sup>  $\mu \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . Per ogni scelta di  $\varphi_{\text{exp}}$ , si è analizzato il comportamento reale dell'interferometro<sup>7</sup> e si è poi confrontato tale comportamento con il modello teorico ottenendo il valore  $\mu_{\text{exp}}$  da porre nel modello teorico affinché questo descriva al meglio i dati sperimentali.

Ricavata la mappa  $\zeta : \varphi_{\text{exp}} \rightarrow \mu_{\text{exp}}$  per i valori  $\varphi_{\text{exp}}$  impostati, per generalizzare tale relazione a tutti i valori  $\mu_{\text{exp}} \in [0, \frac{\pi}{4}]$  è stata applicata una procedura di *curve fitting*. Vista la rappresentazione grafica di  $\zeta$ , è stato applicato un modello di *regressione lineare*, ottenendo così una relazione lineare  $\tilde{\zeta} : \varphi_{\text{exp}} \rightarrow \mu_{\text{exp}}$ . Questa relazione se invertita definisce una nuova funzione  $\tilde{\zeta}^{-1} : \mu_{\text{theor}} \rightarrow \varphi_{\text{exp}}$ , che permette la configurazione ottimale dell'interferometro per tutti i valori  $\mu_{\text{theor}} \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

L'analisi è stata effettuata utilizzando unicamente stati iniziali a polarizzazione lineare, ed assumendo che gli interferometri reali cambiassero l'angolo della polarizzazione senza però rendere questa ellittica, ma mantenendola lineare.

Si è eseguito un confronto tra le due configurazioni dei parametri  $\{\theta_H, \theta_V\}$  indicate precedentemente, in modo da determinare quale delle due fosse ottimale per garantire un comportamento dell'interferometro più simile possibile a quello ideale.

Si è preferito caratterizzare le componenti dell'interferometro comprese tra le coppie di PBS (PBS inclusi), cioè l'interferometro senza le lamine agli angoli  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\pi/4$ , se consideriamo la configurazione di figura 2.2. Queste lamine infatti venivano ruotate spesso per permettere la tomografia del processo quantistico, e quindi era insensato eseguirne una caratterizzazione, bensì si è assunto che gli angoli a cui erano impostate queste lamine fossero esatti e coerenti con il loro modello teorico.

### 2.2.1 Risultati della caratterizzazione

La procedura per la caratterizzazione descritta è riportata in appendice nella sezione A.2. Nella tabella 2.1 e nei grafici di figura 2.4 sono raccolti i risultati ottenuti.

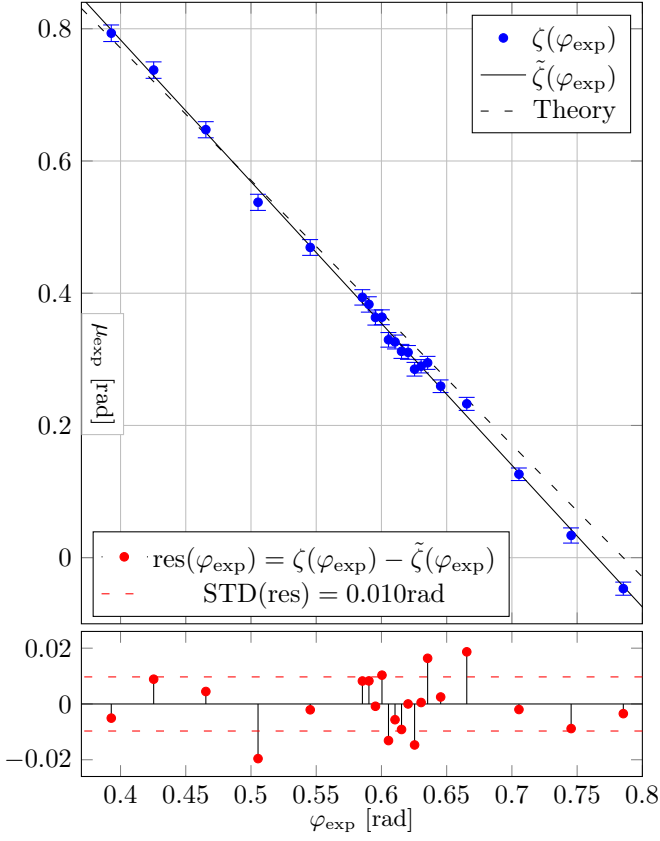
Si può osservare che dai dati sperimentali ottenuti non ci sono differenze apprezzabili tra le configurazioni  $\{0, \pi/4\}$  e  $\{-\pi/8, \pi/8\}$ , e quindi dall'analisi fatta non c'è motivo di preferire una configurazione rispetto all'altra. Ciò è coerente con il modello teorico, in cui è rilevante solo la differenza tra  $\theta_H$  e  $\theta_V$ .

	a	b
Interferometro 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-2.14 \pm 0.03$	$1.64 \pm 0.02$
Interferometro 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-2.09 \pm 0.01$	$0.766 \pm 0.003$
Interferometro 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-2.11 \pm 0.03$	$1.71 \pm 0.02$
Interferometro 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-2.344 \pm 0.007$	$0.844 \pm 0.002$

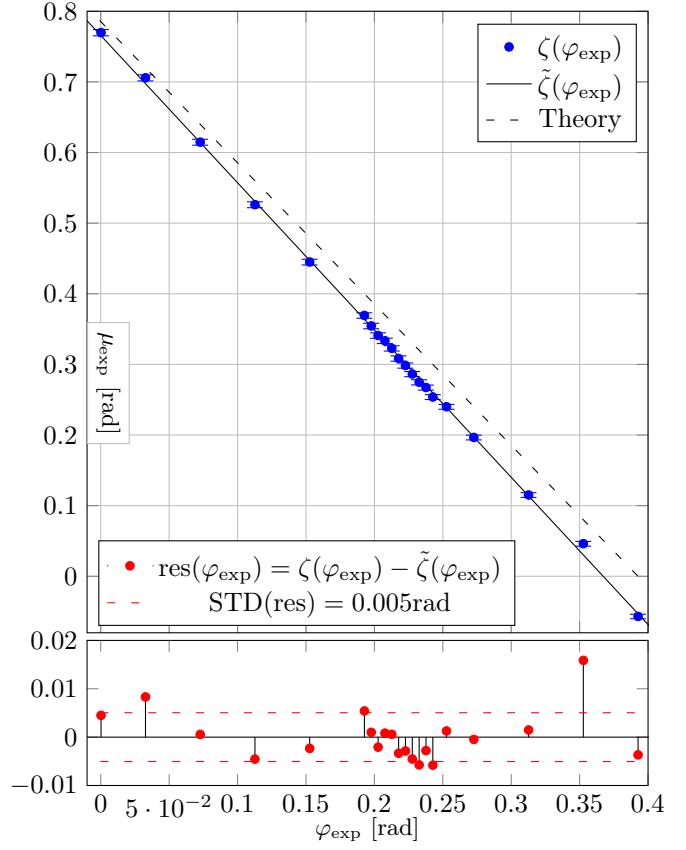
Tabella 2.1: Risultati del procedimento di “curve fitting”

<sup>6</sup>Altre configurazioni sarebbero state ridondanti in quanto tale range di valori permette di effettuare tutte le misure possibili descritte in sezione 2.1.1, grazie all'accorgimento presentato in sezione 2.1.2

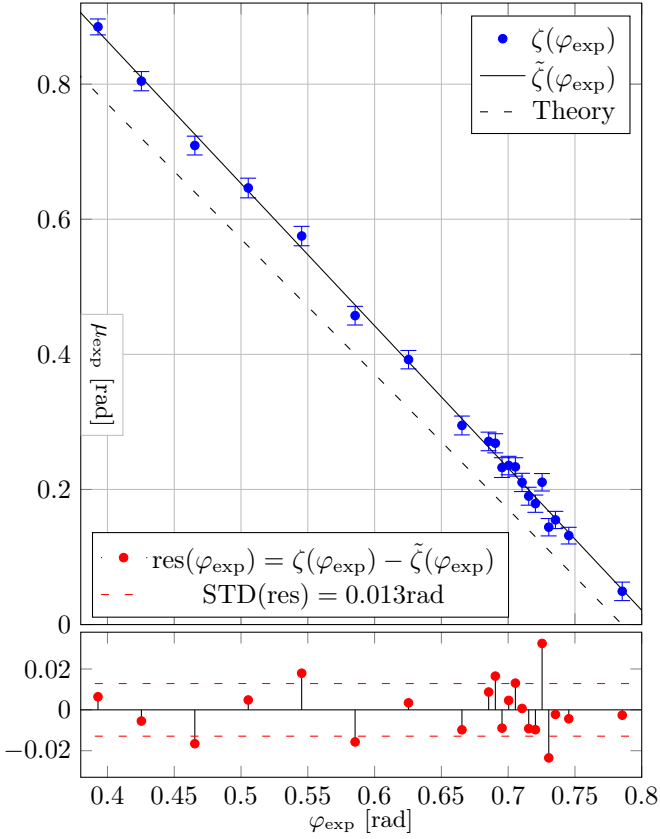
<sup>7</sup>Tale procedura prende il nome di *Quantum Process Tomography*



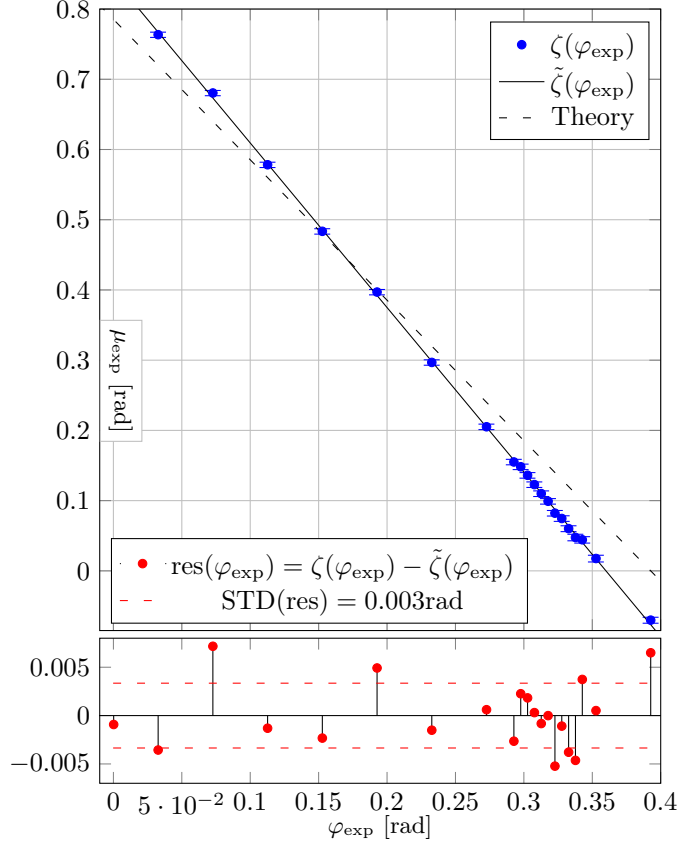
(a) Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$



(b) Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\}$



(c) Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$



(d) Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\}$

Figura 2.4: Rappresentazione grafica di  $\zeta(\varphi_{\text{exp}})$  e  $\tilde{\zeta}(\varphi_{\text{exp}})$ , con indicati gli errori sulla stima di  $\zeta(\varphi_{\text{exp}})$ . È stato anche riportato con la linea tratteggiata il modello teorico  $\mu = 2\theta_V - 2\phi$ . I punti rossi indicano i residui tra  $\zeta(\varphi_{\text{exp}})$  e  $\tilde{\zeta}(\varphi_{\text{exp}})$  e le linee tratteggiate rosse la deviazione standard della loro distribuzione.



### 2.2.2 Correzione del posizionamento delle lamine

Dai grafici precedenti si vede come l'andamento della funzione  $\tilde{\zeta}$  si discosti nei vari casi dall'andamento teorico previsto dal modello.

Ciò è dovuto a diversi errori sperimentali, come un posizionamento errato dei vari componenti dell'interferometro e dell'apparato utilizzato per la caratterizzazione oppure un utilizzo di componenti non ideali.

Nonostante non sia possibile risalire esattamente ai contributi dati dalle diverse fonti di errore appena elencate, è possibile correggere la funzione  $\tilde{\zeta}$  facendo sì che la nuova funzione  $\tilde{\zeta}'$  coincida con il modello teorico solo assumendo nel modello teorico dei errori nel posizionamento delle lamine, come descritto approfonditamente in sezione A.2.5.

Assumendo che la differenza effettiva tra gli angoli a cui sono posizionate le lamine  $\theta_H$  e  $\theta_V$  non sia  $-\frac{\pi}{4}$  come previsto dal modello teorico:

$$\theta_H - \theta_V = -\frac{\pi}{4} + \delta_1 \quad (2.13)$$

e che nel posizionamento delle lamine  $\phi$  e  $\theta_V$  si sia commesso un errore, ed anziché porle in modo tale che la differenza tra gli angoli a cui sono posizionate sia  $\theta_V - \varphi_{\text{exp}}$  le si sia poste in modo tale che l'angolo reale sia  $\theta_V - \varphi_{\text{real}}$

$$\theta_V - \varphi_{\text{real}} = \theta_V - \varphi_{\text{exp}} + \delta_2 \quad (2.14)$$

allora i valori di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  che fanno sì che la funzione  $\mu_{\text{exp}} = \tilde{\zeta}'(\varphi_{\text{real}})$  coincida con il modello teorico  $\mu_{\text{exp}} = -2\varphi_{\text{real}} + 2\theta_V$  sono riportati nella seguente tabella:

	$\delta_1 [\text{rad}]$	$\delta_2 [\text{rad}]$	$a$	$b$
Interf. 1, conf. $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \frac{\pi}{4}\}$	$0.0513 \pm 0.0001$	$-0.015 \pm 0.01$	$-2.00 \pm 0.03$	$1.57 \pm 0.01$
Interf. 1, conf. $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\}$	$0.0330 \pm 0.0002$	$-0.023 \pm 0.002$	$-2.00 \pm 0.01$	$0.786 \pm 0.003$
Interf. 2, conf. $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \frac{\pi}{4}\}$	$0.0334 \pm 0.0002$	$0.030 \pm 0.01$	$-2.00 \pm 0.03$	$1.57 \pm 0.02$
Interf. 2, conf. $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\}$	$0.11187 \pm 0.00007$	$-0.028 \pm 0.002$	$-2.00 \pm 0.01$	$0.785 \pm 0.003$

Tabella 2.2: Coefficienti  $a$  e  $b$  di  $\tilde{\zeta}'(\varphi_{\text{real}}) = a\varphi_{\text{real}} + b$  per i valori  $\delta_1$  e  $\delta_2$  indicati

Alla fine della sezione A.2.5 sono presentati i grafici analoghi a quelli di Figura 2.4 con i valori  $\delta_1$  e  $\delta_2$  indicati in tabella.

I valori di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  ottenuti sono quindi in grado di compensare le variazioni dei dati sperimentali dal modello teorico. Osservando però che realisticamente non è possibile che l'errore commesso nel posizionamento delle lamine possa raggiungere valori come  $0.11187 \text{ rad} \approx 6.410^\circ$ , possiamo concludere che i valori  $\delta_1$  e  $\delta_2$  che abbiamo ottenuto compensano per forza altri errori sperimentali oltre ad un possibile errore nel posizionamento delle lamine, come quelli citati all'inizio del paragrafo.

Tale analisi è sicuramente utile per determinare le correzioni da apportare alla posizione delle lamine affinché l'interferometro si comporti in maniera più fedele possibile al modello teorico, ma è anche utile per mostrare che anche errori grossolani nella fase di posizionamento delle lamine possono essere facilmente compensati da una funzione di calibrazione del tipo  $\mu_{\text{exp}} = a\varphi_{\text{exp}} + b$ , che può essere determinata in modo molto più semplice e rapido rispetto ai parametri  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , e che permette di ottenere il comportamento ideale richiesto per l'interferometro senza dover agire direttamente sulla posizione delle lamine, procedura delicata e che richiede tempo sicuramente maggiore. La determinazione di  $\tilde{\zeta}(\varphi_{\text{exp}})$ , se automatizzata, può richiedere solo pochi minuti per ottenere una calibrazione decisamente precisa intorno ad un certo valore  $\mu$ , tempo dovuto principalmente alla raccolta dei dati sperimentali, mentre la determinazione di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  richiede, oltre ad un tempo equivalente per la raccolta dei dati, anche un tempo di 15 – 30 minuti per il post-processing dei dati con un computer abbastanza performante, oltre ad una delicata operazione di riposizionamento delle lamine. Non è inoltre detto che riposizionando le lamine si ottengano i risultati desiderati, poiché ruotandole possono presentarsi ulteriori variazioni del modello teorico a causa dell'utilizzo di lamine non ideali, richiedendo una nuova procedura di determinazione di  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .



## Capitolo 3

# Entanglement e misure a forza arbitraria

Come già visto nel primo capitolo, è possibile eseguire misure deboli che perturbano in maniera minima lo stato su cui viene eseguita la misura. In particolare, è possibile eseguire misure a forza arbitraria che con un'opportuna scelta della forza di accoppiamento preservano l'entanglement dello stato quantistico pur dando all'osservatore un'informazione non nulla sullo stato ([53], [54]). Ciò è impossibile con misure proiettive, in quanto in tal caso lo stato finale è separabile e si perde quindi l'entanglement ([55]).

Recentemente, è stata analizzata la fattibilità sperimentale di osservare entanglement in uno stato bipartito dopo una serie di  $N$  misure di von Neumann ([56]) e ciò è stato realizzato sperimentalmente per un numero di misure fino a 3 ([52]).

L'interferometro caratterizzato nel secondo capitolo è stato utilizzato in [52] per implementare le prime 2 misure descritte. Per la terza, essendo proiettiva e finalizzata a determinare la correlazione dello stato dopo le prime due misure, non era necessario utilizzare l'interferometro. Illustreremo in questo capitolo una versione molto semplificata dell'esperienza descritta in [52], ma sufficiente a mostrare come gli interferometri realizzati permettano di eseguire misure che preservano l'entanglement.

### 3.1 Breve introduzione al paradosso EPR e alla disuguaglianza CHSH

<sup>1</sup> In seguito alla descrizione della Meccanica Quantistica proposta da von Neumann, Einstein, Podolsky e Rosen [58] e in seguito ai primi tre anche Schrödinger [59], hanno osservato che la teoria quantistica prevedeva un fenomeno che poteva andare in contrasto con alcuni principi base della fisica, sopravvissuti alla rivoluzione quantistica.

Consideriamo un sistema composto da due sottosistemi, descritto da uno stato quantistico non separabile in stati quantistici dei due sottosistemi, ad esempio un sistema composto da due fotoni e descritto da  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle)$ . Supponiamo ora che i due fotoni che compongono il sistema composto siano spazialmente separati, e di eseguire una misura proiettiva della polarizzazione su uno dei due. In tal caso se la misura ha come esito una polarizzazione orizzontale del fotone, ciò implica che il sistema composto dopo la misura sarà descritto da  $|\Psi'\rangle = |H\rangle|H\rangle$ . Viceversa, se la misura ha come esito una polarizzazione verticale, il sistema composto dopo la misura sarà descritto da  $|\Psi'\rangle = |V\rangle|V\rangle$ . Abbiamo quindi visto che in entrambi i casi abbiamo modificato anche lo stato del secondo fotone, posto a distanza dal primo, agendo unicamente sul primo fotone.

Questo fenomeno ha generato diversi dibattiti in quanto andava in contrasto con il principio di “località” o in alternativa a quello di “controfattualità”, finora indiscussi nella fisica classica e nella giovane Teoria della Relatività.

“It is rather discomfoting that the theory should allow a system to be steered or piloted into one or the other type of state at the experimenter’s mercy in spite of his having no access to it.” [59]

In [58] Einstein, Podolsky e Rosen supposero che la teoria della Meccanica Quantistica fosse ancora incompleta e che ci fossero delle variabili locali ignote della descrizione del sistema quantistico, che una volta considerate, avrebbero risolto il paradosso lasciando intaccati i due principi sopra citati.

Nel 1964 in [60] Bell assunse l'ipotesi proposta da EPR in cui ci fossero delle variabili locali ancora ignote che determinassero l'evoluzione dei sistemi quantistici così come descritto da von Neumann, ma tenendo validi

---

<sup>1</sup>Uno dei lavori più completi sull'argomento dell'entanglement è [57], dove si trovano illustrate anche le numerosissime applicazioni nella Teoria dell'Informazione Quantistica dell'entanglement.

i principi di località e controfattualità. Con tali assunzioni Bell dimostrò che tali ipotesi imponevano determinati vincoli tra le correlazioni statistiche che si ottenevano in esperimenti su sistemi bipartiti. Assumendo invece la completezza della teoria della Meccanica Quantistica, ma accettando di rinunciare o al principio di località o a quello di controfattualità, tali vincoli potevano essere violati.

Nel 1969, su ispirazione del lavoro di Bell, Clauser, Horne, Shimony e Holt [61] derivano la disuguaglianza che prende il loro nome (CHSH), e che permette di testare sperimentalmente i vincoli teorici descritti da Bell. Consideriamo un esperimento in cui usiamo un grande ensemble di sistemi identici, ognuno dei quali è composto da due sottosistemi spazialmente separati, e ogni sistema deve essere descritto da uno stato composto non separabile. Le osservabili  $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2\}$  vengono misurate in uno dei due sottosistemi mentre le osservabili  $\{\hat{B}_1, \hat{B}_2\}$  sono misurate nel secondo sottosistema. Queste 4 osservabili si assume abbiano autovalori  $\{+1, -1\}$ . Nell'ipotesi EPR deve essere soddisfatta la seguente disuguaglianza sulle correlazioni degli esiti sperimentali, che prende il nome di *Disuguaglianza CHSH*:

$$S_{\text{CHSH}} = |\langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_2 \rangle| \leq 2 \quad (3.1)$$

ove i valori attesi si intendono nel grande ensemble di stati prima descritto. Nel caso in cui la disuguaglianza venga violata l'ipotesi EPR non è valida.

Nel 1982 l'esperimento descritto in [62] violò una forma modificata della disuguaglianza CHSH, confutando così l'ipotesi EPR e costringendo la comunità scientifica a rinunciare o al principio di località o a quello di controfattualità, ma dimostrando la completezza della teoria quantistica.

## 3.2 Descrizione del protocollo

La procedura per la verifica della disuguaglianza CHSH eseguita in laboratorio è molto simile a quella illustrata in appendice in sezione A.2.2, ed è descritta approfonditamente nei "Supplemental Material" di [52].

L'LCR e le lamine poste all'uscita delle fibre ottiche che conducono ad Alice e Bob sono posizionati in modo tale da impostare il sistema composto nello stato  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$ .<sup>2</sup>

I due interferometri caratterizzati e posti nel braccio di Alice sono posizionati in serie ed impostati per eseguire delle misure generalizzate, con  $\mu_i \approx 0.34$  e  $\mu_j \approx 0.19$ .<sup>3</sup> Tali valori sono quelli che teoricamente permettono di massimizzare il valore atteso di  $S_{\text{CHSH}}$  nella misura proiettiva finale.

Cosideriamo ora l'ultima misura proiettiva eseguita, necessaria ad osservare la correlazione tra i fotoni di Alice e quelli di Bob e quindi alla verifica della disuguaglianza CHSH. Definiamo  $\hat{A}_1 \equiv \hat{U}_{\text{HWP}}(2\varphi_{A1})$ ,  $\hat{A}_2 \equiv \hat{U}_{\text{HWP}}(2\varphi_{A2})$ ,  $\hat{B}_1 \equiv \hat{U}_{\text{HWP}}(2\varphi_{B1})$  e  $\hat{B}_2 \equiv \hat{U}_{\text{HWP}}(2\varphi_{B2})$ , ove gli angoli  $\varphi_{XY}$  sono scelti in modo tale da massimizzare il valore atteso di  $S_{\text{CHSH}}$ .<sup>4</sup>

Per misurare queste osservabili è necessario porre dopo i due interferometri di Alice e dopo l'LCR di Bob una lamina HWP e un polarizzatore lineare posto con l'asse orizzontale. Osserviamo che vale  $\hat{U}_{\text{HWP}}(2\varphi) = \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi) - \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi})^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi})$ , con  $\bar{\varphi} \equiv \varphi + \pi/4$ . La probabilità di ottenere l'esito  $+1$  dalla misura di  $\hat{U}_{\text{HWP}}(2\varphi)$  è  $\langle \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi) \rangle_\Psi$  mentre la probabilità di ottenere  $-1$  è  $\langle \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi})^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi}) \rangle_\Psi$ . Otteniamo così

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \otimes \hat{B} \rangle_\Psi &= \left\langle \left( \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi_A)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi_A) - \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi}_A)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi}_A) \right) \right. \\ &\quad \left. \otimes \left( \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi_B)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\varphi_B) - \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi}_B)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(\bar{\varphi}_B) \right) \right\rangle_\Psi \\ &= p_{\{\varphi_A, \varphi_B\}} - p_{\{\bar{\varphi}_A, \varphi_B\}} - p_{\{\varphi_A, \bar{\varphi}_B\}} + p_{\{\bar{\varphi}_A, \bar{\varphi}_B\}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ove  $p_{\{X,Y\}} = \langle (\hat{U}_{\text{HWP}}(X)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(X)) \otimes \hat{U}_{\text{HWP}}(Y)^\dagger \hat{\Pi}_H \hat{U}_{\text{HWP}}(Y) \rangle_\Psi$  è la probabilità che i due fotoni che all'inizio erano nello stato  $|\Psi\rangle$  escano uno dal polarizzatore di Alice e uno da quello di Bob quando la lamina di Alice precedente il polarizzatore è impostata all'angolo  $X$  mentre quella di Bob all'angolo  $Y$ .

Vediamo quindi che per misurare  $\langle \hat{A} \otimes \hat{B} \rangle_\Psi$  è sufficiente misurare, nelle configurazioni indicate, le probabilità di osservare contemporaneamente fotoni alle uscite dei due polarizzatori, ed eseguendo poi una semplice combinazione lineare di tali probabilità. Per semplificare molto la procedura di calcolo delle probabilità, osserviamo che  $p_{\{\varphi_A, \varphi_B\}} + p_{\{\bar{\varphi}_A, \varphi_B\}} + p_{\{\varphi_A, \bar{\varphi}_B\}} + p_{\{\bar{\varphi}_A, \bar{\varphi}_B\}} = 1$  e quindi per misurare le probabilità  $p_{\{X,Y\}}$

<sup>2</sup>L'LCR contribuisce ad azzerare la fase tra il termine  $|HH\rangle$  ed il termine  $|VV\rangle$  in  $|\Psi\rangle$  come descritto in [63] e [64].

<sup>3</sup>Si comprende qui la scelta di caratterizzare i due interferometri con una maggiore attenzione ai valori vicini a  $\mu_i$  e  $\mu_j$ .

<sup>4</sup>La scelta degli angoli  $\varphi_{Ai}$  e  $\varphi_{Bj}$  che definiscono  $\hat{A}_i$  e  $\hat{B}_j$  non è banale, e l'analisi che porta a tale scelta è riportata nei Materiali Supplementari dell'articolo [52]. La definizione degli operatori  $\hat{A}_i$  coincide con quella riportata sopra l'equazione (S.4), posto  $\mu_3 = 0$  (misura proiettiva). Per quanto riguarda gli operatori  $\hat{B}_j$  invece, definiti sopra l'equazione (S.8), è necessario ridefinire  $2\varphi_{B0} \equiv \pi/4 - \theta_3/2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$  e  $2\varphi_{B1} \equiv \theta_3/2 - \pi/4 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ . I valori di  $\varphi_{Ai}$  e  $\varphi_{Bj}$  sono scelti in modo tale da rendere massimo il valore atteso di  $S_{\text{CHSH}}$ .

è sufficiente misurare per ogni configurazione  $\{X, Y\}$  il numero di fotoni uscenti in un intervallo di tempo costante e dividere poi questo numero per la somma di tutti i fotoni usciti nelle 4 configurazioni:

$$\langle \hat{A}_i \otimes \hat{B}_j \rangle_\Psi = \frac{N(\varphi_{Ai}, \varphi_{Bj}) - N(\overline{\varphi}_{Ai}, \varphi_{Bj}) - N(\varphi_{Ai}, \overline{\varphi}_{Bj}) + N(\overline{\varphi}_{Ai}, \overline{\varphi}_{Bj})}{N(\varphi_{Ai}, \varphi_{Bj}) + N(\overline{\varphi}_{Ai}, \varphi_{Bj}) + N(\varphi_{Ai}, \overline{\varphi}_{Bj}) + N(\overline{\varphi}_{Ai}, \overline{\varphi}_{Bj})} \quad (3.3)$$

### 3.3 Elaborazione dei dati sperimentali

I dati sperimentali raccolti sono contenuti in tabella:

$N(X, Y)$	$\varphi_{A1}$	$\overline{\varphi}_{A1}$	$\varphi_{A2}$	$\overline{\varphi}_{A2}$	$\leftarrow$ Valori di $X$
$\varphi_{B1}$	$770 \pm 28$	$1 \pm 1$	$380 \pm 19$	$320 \pm 18$	
$\overline{\varphi}_{B1}$	$95 \pm 10$	$110 \pm 10$	$23 \pm 5$	$160 \pm 13$	
$\varphi_{B2}$	$750 \pm 27$	$25 \pm 5$	$250 \pm 16$	$455 \pm 21$	
$\overline{\varphi}_{B2}$	$95 \pm 10$	$75 \pm 9$	$155 \pm 12$	$6 \pm 2$	

$\uparrow$  Valori di  $Y$

I valori contenuti in tabella sono le coincidenze  $N(X, Y)$  misurate, ossia il numero di volte in cui si è rilevato contemporaneamente<sup>5</sup> un fotone dopo l'ultimo polarizzatore di Alice e un fotone dopo quello di Bob. Una coincidenza consiste in due fotoni entangled, uno diretto nel braccio di Alice e uno in quello di Bob, che superano entrambi il rispettivo polarizzatore posto alla fine del rispettivo braccio.

Per assicurarci che la disuguaglianza CHSH sia violata è necessario studiare l'errore sul risultato finale. Assumendo sensatamente che le coincidenze possano essere descritte da un processo Poissoniano, il numero di coincidenze in un certo intervallo di tempo ha distribuzione Poissoniana, e quindi i valori  $N(X, Y)$  sono affetti da un errore  $\delta N(X, Y)$  pari a  $\sqrt{N(X, Y)}$ .

Possiamo ora calcolare i valori da inserire nella disuguaglianza CHSH:

$$\langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1 \rangle_\Psi = 0.80 \pm 0.02 \quad (3.4a)$$

$$\langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2 \rangle_\Psi = 0.75 \pm 0.02 \quad (3.4b)$$

$$\langle \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_1 \rangle_\Psi = 0.22 \pm 0.03 \quad (3.4c)$$

$$\langle \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_2 \rangle_\Psi = -0.41 \pm 0.03 \quad (3.4d)$$

Otteniamo così infine

$$S_{\text{CHSH}} = \langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_2 \rangle = 2.18 \pm 0.05 \quad (3.5)$$

Abbiamo quindi ottenuto una violazione della disuguaglianza CHSH con 3.4 deviazioni standard, dimostrando come le misure generalizzate eseguite con i due interferometri abbiano preservato lo stato di correlazione del sistema bipartito pur acquisendo una certa informazione sul sistema.

<sup>5</sup>La definizione di simultaneità accetta un ritardo  $\delta t$  tra il detector di Alice e quello di Bob dovuto alla differenza di cammino tra i due bracci. In particolare, la finestra di coincidenza è  $\pm 1$  ns.



# Conclusioni

La trattazione delle misure generalizzate proposta nella prima parte di questo lavoro ha rielaborato il formalismo di von Neumann e quello di Kraus, mettendo in luce i punti di raccordo e le differenze tra i due, e mostrando vantaggi e svantaggi di ognuno dei due formalismi.

In particolare, si è visto come il formalismo di Kraus abbia validità generale e spesso sia più vantaggioso per effettuare calcoli, in quanto prevede semplici operazioni tra matrici, facilmente eseguibili tramite un calcolatore. È inoltre relativamente facile ricavare la descrizione in tale formalismo di un processo fisico, in quanto è sufficiente calcolare lo stato finale a partire da un qualsiasi stato iniziale attraverso le leggi proprie della fisica. Tale formalismo quindi è un utile strumento matematico, con lo svantaggio però di essere particolarmente astratto e di porre attenzione solo sul sistema misurato e non sull'apparato di misurazione, e quindi è difficile comprendere e ricavare tutte le proprietà di un processo di misura a partire dalla sua descrizione nel formalismo di Kraus.

Viceversa, il formalismo di von Neumann dà una prospettiva più chiara e completa sul processo fisico in corso, in quanto considera l'interazione tra sistema misurato ed apparato di misurazione, e permette di descrivere meglio le misure tramite le osservabili coinvolte nell'evoluzione del sistema composto e tramite la forza di accoppiamento tra il sistema misurato e l'apparato misuratore. Risulta tuttavia più complesso ricavare una descrizione nel formalismo di von Neumann a partire da un processo fisico preesistente, come si può vedere ad esempio dalla dimostrazione contenuta in sezione A.1, poiché non esiste una procedura valida in generale per fare ciò, e non è banale riuscire a capire come sistema ed apparato interagiscano. È invece molto semplice ricavarla nel formalismo di Kraus a partire da quella nel formalismo di von Neumann, e quindi quest'ultimo risulta particolarmente vantaggioso quando si vuole descrivere una misura a partire dalle osservabili misurate e dalla forza di accoppiamento, e si vuole da tale analisi determinare le matrici che descrivono il processo sul sistema misurato, magari per capire come implementare sperimentalmente la misura descritta.

Il formalismo di von Neumann inoltre dando una descrizione più completa del processo di misura permette di derivarne alcune proprietà, come nel caso di valori deboli e valori modulari, e di sfruttare tali caratteristiche fisiche per utili applicazioni, come nella creazione di sensori quantistici, apparati per la misura e protocolli più efficienti per la tomografia. Derivare valori deboli e modulari sarebbe stato estremamente più difficile con il formalismo di Kraus, e tale formalismo risulta svantaggioso per descrivere tali caratteristiche delle misure generalizzate.

Si può riassumere tutto ciò con queste considerazioni. Le misure quantistiche generalizzate risultano un utile strumento al servizio di branche come l'Informatica, l'Elettronica, le Telecomunicazioni e la produzione di sensori di precisione. Il formalismo di von Neumann, quando utilizzabile, dà una descrizione molto completa del processo fisico e delle sue peculiarità, mentre il formalismo di Kraus è utile soprattutto come strumento per descrivere semplicemente in modo matematico l'effetto un processo di misura su un sistema.

Nel capitolo 2 abbiamo descritto un interferometro adatto ad eseguire svariati tipi di misure generalizzate sulle polarizzazioni dei fotoni. Esso è stato caratterizzato dettagliatamente e si è ricavata una procedura per descrivere la relazione tra il modello teorico ed il comportamento sperimentale di interferometri costruiti secondo tale modello, in modo che attraverso tale procedura si possa configurare il dispositivo in maniera molto più accurata affinché esegua le misure previste a livello teorico. Sono inoltre state presentate alcune modifiche di tale interferometro che permettono di allargare la famiglia delle misure che possono essere effettuate e di eseguire la tomografia degli stati uscenti, pur mantenendo una strumentazione molto modesta. Si è poi dimostrato come eventuali errori nel posizionamento delle lamine possano esser facilmente compensati dalla procedura di calibrazione presentata, molto più efficiente in tempo e complessità rispetto ad una correzione manuale della posizione delle lamine, permettendo così di semplificare la disposizione delle componenti dell'interferometro.

Nel capitolo 3 sono stati utilizzati due interferometri descritti secondo tale modello per eseguire misure ge-

neralizzate su una delle due componenti di uno stato bipartito che presentava il fenomeno dell'entanglement, e si è visto come l'entanglement sia stato preservato al termine delle misure, cosa impossibile utilizzando misure proiettive. Ciò è molto importante anche a fini ingegneristici, in quanto l'entanglement è uno dei fenomeni quantistici più importanti in tutte le applicazioni della meccanica quantistica.



# Appendice A

## Materiali Supplementari - Capitolo 2

### A.1 Dimostrazione dell'equazione (2.3)

Poniamo  $\hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \equiv \hat{U}_{HWP}(\pi/4) \otimes \hat{\Pi}_1 + \mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_2$ .

Si ricorda che per le matrici di Pauli valgono le seguenti relazioni:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{A.1})$$

$$e^{ia(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})} = \cos(a) \mathbb{1} + i \sin(a) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (\text{A.2})$$

Inoltre vale in generale

$$(\hat{A} \otimes \hat{B}) \cdot (\hat{C} \otimes \hat{D}) = (\hat{A} \cdot \hat{C}) \otimes (\hat{B} \cdot \hat{D}) \quad (\text{A.3})$$

Usando tali relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \left( \left( \hat{U}_{HWP}(\varphi) \hat{U}_{HWP}(\theta_V) \right) \otimes \hat{\Pi}_1 + \left( \hat{U}_{HWP}(\varphi) \hat{U}_{HWP}(\theta_H) \right) \otimes \hat{\Pi}_2 \right) \hat{U}_{PBS1} \\ &= \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \left( (\cos(2\theta_V - 2\varphi) \mathbb{1} + i \sin(2\theta_V - 2\varphi) \hat{\sigma}_y) \otimes \hat{\Pi}_1 + (\cos(2\theta_H - 2\varphi) \mathbb{1} + i \sin(2\theta_H - 2\varphi) \hat{\sigma}_y) \otimes \hat{\Pi}_2 \right) \hat{U}_{PBS1} \\ &= \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \left( \exp \left\{ i(2\theta_V - 2\varphi) \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\Pi}_1 + i(2\theta_H - 2\varphi) \hat{\sigma}_y \otimes (\mathbb{1} - \hat{\Pi}_1) \right\} \right) \hat{U}_{PBS1} \\ &= \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \left( \exp \left\{ i(2\theta_V - 2\theta_H) \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\Pi}_1 + i(2\theta_H - 2\varphi) \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1} \right\} \right) \hat{U}_{PBS1} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Sperimentalmente si pone  $\theta_V - \theta_H = \frac{\pi}{4}$ . Inoltre, poiché  $\hat{U}_{PBS2}^{-1} = \hat{U}_{PBS2}$  e  $\hat{U}_{\frac{\pi}{4}}^{-1} = \hat{U}_{\frac{\pi}{4}}$ , si ha:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \exp \left\{ \left( i(2\theta_H - 2\varphi) \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1} + i \frac{\pi}{2} \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\Pi}_1 \right) \right\} \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{PBS1} \\ &= \exp \left\{ \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \left( i(2\theta_H - 2\varphi) \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1} + i \frac{\pi}{2} \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\Pi}_1 \right) \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \right\} \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{PBS1} \\ &= \exp \left\{ -i(2\theta_H - 2\varphi) \underbrace{\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y}_{\hat{A}} + i \frac{\pi}{2} \underbrace{\hat{\Pi}_V \otimes \hat{\sigma}_y}_{\hat{B}} \right\} \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{PBS1} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e poiché  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  commutano ( $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ ) si possono separare i due membri dell'esponenziale

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \exp \left\{ -i(2\theta_H - 2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y) \right\} \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} (\hat{\Pi}_V \otimes \hat{\sigma}_y) \right\} \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{PBS1} \\ &= \exp \left\{ -i(2\theta_H - 2\varphi + \frac{\pi}{4}) (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y) \right\} \exp \left\{ i \frac{\pi}{4} (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y) \right\} \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} (\hat{\Pi}_V \otimes \hat{\sigma}_y) \right\} \hat{U}_{\frac{\pi}{4}} \hat{U}_{PBS2} \hat{U}_{PBS1} \\ &= \underbrace{\exp \left\{ -i(2\theta_H - 2\varphi + \frac{\pi}{4}) (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y) \right\}}_{\hat{U}_1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{T}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup>Per  $Y = Y^{-1}$  valgono  $Y e^X Y = e^{YXY}$  e  $YY = \mathbb{1}$ .

## A.2 Dettagli sulla caratterizzazione degli interferometri

### A.2.1 Confronto tra comportamento reale e modello teorico

Considerando il modello teorico, per descrivere l'interferometro senza la lamina a  $\pi/4$  è sufficiente moltiplicare  $\hat{M}_\mu$  a sinistra per  $\hat{U}_{HWP}(\pi/4)$ , in quanto  $\hat{U}_{HWP}(\pi/4) \cdot \hat{U}_{HWP}(\pi/4) = \mathbb{1}$ :

$$\hat{M}_{\mu 1} = \hat{U}_{HWP}(\pi/4) \cdot \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\mu) \\ \cos(\mu) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Se consideriamo lo stato iniziale descritto dalla matrice densità  $\rho_{\text{in}} = |\psi\rangle\langle\psi|$  allora i possibili stati finali previsti dal modello teorico sono descritti da matrici densità come

$$\rho_{\text{out}}^\mu = \mathcal{M}^\mu(\rho_{\text{in}}) = \hat{M}_{\mu 1} \rho_{\text{in}} \hat{M}_{\mu 1}^\dagger \quad (\text{A.8})$$

definite al variare del parametro  $\mu$ . La matrice  $\rho_{\text{out}}^\mu$  non è normalizzata (ha traccia in generale non unitaria) a causa della post selezione (la trasformazione  $\mathcal{M}^\mu$  non preserva la traccia).

Sperimentalmente, se usiamo come stato iniziale  $\rho_{\text{in}}$  e impostiamo la lamina mobile all'angolo  $\varphi = \varphi_{\text{exp}}$ , avremo come stato finale un certo  $\tilde{\rho}_{\text{out}}^\varphi$ , secondo una certa trasformazione  $\mathcal{E}^\varphi$ :

$$\tilde{\rho}_{\text{out}}^\varphi = \mathcal{E}^\varphi(\rho_{\text{in}}) = \hat{E}_\varphi \rho_{\text{in}} \hat{E}_\varphi^\dagger \quad (\text{A.9})$$

ove  $\hat{E}_\varphi$  sono matrici che dipendono dal valore di  $\varphi$  impostato nell'interferometro. Anche questa volta non si richiede che lo stato finale sia normalizzato.

L'obiettivo della caratterizzazione è determinare, dato un certo valore  $\varphi_{\text{exp}}$  impostato sull'interferometro, quale valore  $\mu_{\text{exp}}$  rende la trasformazione  $\mathcal{M}^{\mu_{\text{exp}}}$  più simile possibile a quella reale  $\mathcal{E}^{\varphi_{\text{exp}}}$ .

Tale concetto di “distanza” tra processi quantistici è formalizzato in [65]. Sia  $|\Phi\rangle \equiv \sum_i |i\rangle |i\rangle / \sqrt{d}$ , con  $\{|i\rangle\}_i$  base dello spazio di Hilbert del sistema di dimensione  $d$ . Siano inoltre definite le matrici densità<sup>2</sup>  $\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}} \equiv [\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}^{\varphi_{\text{exp}}}](|\Phi\rangle\langle\Phi|)$  e  $\rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}} \equiv [\mathcal{I} \otimes \mathcal{M}^{\mu_{\text{exp}}}](|\Phi\rangle\langle\Phi|)$  ove  $\mathcal{I}$  è la trasformazione identità. Tali matrici vengono poi normalizzate rispetto alla traccia in quanto andranno confrontate.<sup>3</sup> Allora la distanza tra i processi  $\mathcal{M}^{\mu_{\text{exp}}}$  e  $\mathcal{E}^{\varphi_{\text{exp}}}$  può esser definita come la distanza tra gli stati quantistici  $\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}}$  e  $\rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}}$ . Scegliendo  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle)$  abbiamo:<sup>4</sup>

$$\rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}} = \mathcal{N}(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_{\mu_{\text{exp}} 1})(|\Phi\rangle\langle\Phi|)(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_{\mu_{\text{exp}} 1})^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\mu_{\text{exp}}) & \cos(\mu_{\text{exp}})\sin(\mu_{\text{exp}}) & 0 \\ 0 & \cos(\mu_{\text{exp}})\sin(\mu_{\text{exp}}) & \sin^2(\mu_{\text{exp}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

ove  $\mathcal{N}$  è tale da rendere la matrice densità a traccia unitaria.

Occupiamoci ora della caratterizzazione di  $\mathcal{E}^{\varphi_{\text{exp}}}$ , supponendo  $\hat{E}_{\varphi_{\text{exp}}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , con i 4 coefficienti  $a, b, c, d$  reali (assumiamo che sia i fotoni entranti che quelli uscenti abbiano polarizzazioni lineari). Determiniamo ora  $\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}}$ :

$$\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}} = \mathcal{N}(\mathbb{1} \otimes \hat{E}_{\varphi_{\text{exp}}})(|\Phi\rangle\langle\Phi|)(\mathbb{1} \otimes \hat{E}_{\varphi_{\text{exp}}})^\dagger = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & ad \\ ac & c^2 & bc & cd \\ ab & bc & b^2 & bd \\ ad & cd & bd & d^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Osserviamo che se  $\hat{E}_{\varphi_{\text{exp}}} = \hat{M}_{\mu_{\text{exp}} 1}$  si ha come ci si aspetta  $\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}} = \rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}}$ .

<sup>2</sup>Si noti che le notazioni usate nelle definizioni seguenti sono coerenti con quelle riportate in [65], ma sono invertite rispetto a quelle nell'articolo [66], in cui sono descritte le fondamentali teoriche di tale procedura di determinazione della distanza tra processi quantistici.

<sup>3</sup>L'articolo [65] tratta processi quantistici che preservano la traccia della matrice densità, e quindi la nostra caratterizzazione non rientra in pieno titolo nella casistica descritta nel paper. Si è visto comunque che con l'accorgimento di normalizzare  $\rho_{\mathcal{E}}^\mu$  e  $\rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{fit}}}$  prima di calcolarne la distanza si è ottenuta una buona caratterizzazione dei processi di nostro interesse.

<sup>4</sup>Per il formalismo matriciale adottiamo la notazione  $|H\rangle|H\rangle = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $|H\rangle|V\rangle = (0, 1, 0, 0)^T$ ,  $|V\rangle|H\rangle = (0, 0, 1, 0)^T$ ,  $|V\rangle|V\rangle = (0, 0, 0, 1)^T$ .

Per ottenere il risultato desiderato, ossia la mappa  $\zeta : \varphi_{\text{exp}} \rightarrow \mu_{\text{exp}}$ , minimizziamo la distanza tra  $\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}}$  e  $\rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}}$ , ad esempio usando la Distanza di Traccia  $D(\rho, \sigma) \equiv 1/2 \text{Tr} |\rho - \sigma|$ , con  $|X| \equiv \sqrt{X^\dagger X}$ . La scelta di usare la distanza di traccia rispetto ad altre misure di distanza definite per gli stati quantistici è arbitraria, si potrebbe benissimo minimizzare una norma basata sulla Fedeltà, come  $C(\rho, \sigma) \equiv \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)}$ , con Fedeltà definita come  $F(\rho, \sigma) \equiv \text{Tr} (\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}})^2$ . Sviluppando il conto della distanza di traccia con software come *Mathematica* oppure tramite procedura di diagonalizzazione si ottiene

$$D(\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}}, \rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}}) = \sqrt{1 - \frac{(b \sin(\mu_{\text{exp}}) + c \cos(\mu_{\text{exp}}))^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \quad (\text{A.12})$$

Si osservi anche qui che se  $\hat{E}_{\varphi_{\text{exp}}} = \hat{M}_{\mu_{\text{exp}}}$  vale  $D(\rho_{\mathcal{E}}^{\varphi_{\text{exp}}}, \rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{exp}}}) = 0$ . Vale quindi

$$\zeta(\varphi_{\text{exp}}) = \mu_{\text{exp}} = \min_{\mu} \sqrt{1 - \frac{(b \sin(\mu) + c \cos(\mu))^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \quad (\text{A.13})$$

Indichiamo con  $p_{XY}$  le probabilità di ottenere come stato finale  $|Y\rangle$  se lo stato iniziale è  $|X\rangle$ . In tal caso, da semplici calcoli si ottiene  $p_{HH} = a^2$ ,  $p_{VH} = b^2$ ,  $p_{HV} = c^2$  e  $p_{VV} = d^2$ . Inoltre posto  $|D\rangle = |+\rangle$  si ha  $2ab = 2p_{DH} - p_{HH} - p_{VH}$  e  $2ac = 2p_{HD} - p_{HH} - p_{HV}$  e usando  $\text{sgn}(bc) = \text{sgn}(2ab \cdot 2ac)$  si ottiene il segno di  $bc$ . Sperimentalmente le probabilità  $p_{XY}$  sono state ottenute facendo attraversare ogni interferometro da un numero pressoché costante nel tempo di fotoni polarizzati secondo  $X$  e ponendo dopo l'interferometro un polarizzatore rispetto ad  $Y$ . Misurando il numero di fotoni per intervallo di tempo uscenti dall'interferometro rispetto ai diversi  $Y$  è stato possibile ricavare tutte le probabilità  $p_{XY}$ . Si rimanda alla sezione A.2.2 per chiarimenti maggiori sulla tomografia del processo quantistico e quindi sul calcolo delle probabilità  $p_{XY}$ .

Purtroppo, dai dati sperimentali si è visto che il calcolo di  $\text{sgn}(bc)$  è spesso fallace con la procedura illustrata, in quanto il valore di  $2ab$  risulta affetto da errore relativo piuttosto alto (considerando una distribuzione Poissoniana degli errori dovuta al conteggio dei fotoni). Nel caso in cui il segno di  $2bc$  sia invertito, si osserva in (A.13) che ciò comporta ad una inversione del segno di  $\mu_{\text{exp}}$ . Assumiamo quindi il valore di  $2bc$  come sempre positivo, calcolando così  $\mu_{\text{exp}}$  a meno del segno. Tale segno sarà impostato osservando che la funzione  $\zeta$  dovrà avere andamento approssimativamente lineare. A parte valori di  $\mu_{\text{exp}}$  prossimi allo zero, si assume sensatamente che i valori di  $\mu_{\text{exp}}$  che si ottengono abbiano stesso segno di  $2\theta_V - 2\varphi_{\text{exp}}$ .

Una volta ottenuta la mappa  $\zeta$  per ricerca numerica (eseguita tramite interprete *Python* con il codice riportato in sezione A.4, Listing A.1), va quindi eseguita una procedura di *curve fitting*, scelta a seconda dei risultati sperimentali, in modo da ottenere la mappa continua  $\tilde{\zeta}$ .

## A.2.2 Descrizione dell'apparato e del protocollo per la raccolta dei dati sperimentali

Al fine di poter caratterizzare i due interferometri, è necessario ricavare tutte le probabilità  $p_{XY}$  richieste nella sezione A.2.1.

<sup>5</sup> Per fare ciò è stata utilizzata una sorgente di stati entangled basata sulla tecnica SPDC<sup>6</sup>, costituita da una sorgente laser a 404 nm che genera un fascio che viene poi inviato verso un interferometro di Sagnac in cui è posto un cristallo PPKTP. Per il funzionamento della sorgente è anche necessario l'inserimento di due lamine HWP come in figura.<sup>7</sup>

Tale sorgente genera coppie di fotoni ad una lunghezza d'onda di 808 nm, che risultano descritte da un unico stato entangled  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle)$ . I fotoni di ogni sono spazialmente separati e diretti in due diverse fibre ottiche a singolo modo, dopo aver attraversato ognuno un filtro dicroico, che seleziona i fasci a 808 nm e riflette quelli a 404 nm.

Una di queste fibre ottiche conduce i fotoni verso una parte dell'apparato, che possiamo indicare con  $A$  oppure, come si usa fare negli esperimenti di ottica quantistica, chiamiamo "Alice".<sup>8</sup> In tale parte dell'apparato i fotoni uscenti, la cui polarizzazione ora sarà assolutamente casuale a causa delle numerosissime riflessioni all'interno della fibra, attraverseranno in primis una lamina QWP<sup>9</sup> ed una HWP, che ne imposteranno la polarizzazione iniziale a seconda del valore  $p_{XY}$  da misurare. Dopo di che i fotoni attraverseranno i due

<sup>5</sup>Il setup sperimentale è lo stesso di quello costruito per l'esperienza descritta in [52]. Si rimanda alla descrizione dettagliata contenuta nei materiali supplementari allegati a tale articolo per ulteriori dettagli tecnici.

<sup>6</sup>*Spontaneous Parametric Down Conversion*

<sup>7</sup>Per i dettagli tecnici del funzionamento di tale sorgente si vedano gli articoli [67], [68] e [69].

<sup>8</sup>Diremo spesso che "Alice ha eseguito una certa operazione" per indicare che quella determinata parte dell'apparato ha eseguito tale operazione sui fotoni lì condotti dalla fibra ottica. Chiameremo equivalentemente "Alice" oppure "il braccio di Alice" tale parte dell'apparato.

<sup>9</sup>*Lamina a quarto d'onda o Quarter Wave Plate*

interferometri da caratterizzare posti in serie come descritto in sezione 2.1.3 con in coda un polarizzatore lineare che permette la tomografia come visto in sezione 2.1.2.

L'altra fibra ottica conduce i fotoni dall'altra parte dell'apparato, indicata con  $B$  o "Bob". Anche in questa parte come prima cosa i fotoni uscenti attraversano una lamina QWP e una HWP. Dopo di che attraversano un LCR<sup>10</sup>. Queste 3 componenti ottiche, insieme alle prime 2 lamine di Alice, sono impostate in modo da far sì che lo stato composto dopo le queste prime componenti sia  $|H\rangle|X\rangle$ . La parte finale del braccio di Bob è finalizzata alla tomografia degli stati che arrivano al termine del braccio, ed è quindi costituita da una lamina HWP e da un polarizzatore lineare. In questo caso la tomografia dalla parte di Bob non è necessaria, la lamina HWP è impostata in modo da non cambiare la polarizzazione, e il polarizzatore lineare è posto in modo da lasciar passare la componente orizzontale. In tal modo, a meno di perdite, tutti i fotoni che arrivano a Bob vengono fatti passare inalterati.

Una componente fondamentale per permettere la determinazione dello stato finale di Alice e quindi le probabilità  $p_{XY}$  sono due detector posti dopo i polarizzatori lineari posti alla fine del braccio di Alice e di quello di Bob, che mandano un segnale ogni volta che un fotone incide con essi. Tali detector, che in particolare sono SPAD, sono connessi ad un contatore di coincidenze, che conta il numero di volte in cui i due detector rilevano simultaneamente dei fotoni. Si fa ciò per evitare che i fotoni in arrivo all'estremità del braccio di Alice siano rilevati come falsi positivi dovuti a luce ambientali o ad imperfezioni sperimentali. I fotoni d'interesse devono arrivare all'estremità del braccio di Alice nello stesso istante in cui un altro fotone è arrivato all'estremità del braccio di Bob, in quanto sono queste coppie di fotoni sono generate simultaneamente.<sup>11</sup> Le uniche post-selezioni vengono eseguite nel braccio di Alice, quindi non c'è perdita di coincidenze dovute alle componenti presenti nel braccio di Bob.

La procedura per ottenere i vari valori  $p_{XY}$  di ogni interferometro consiste nel posizionare l'altro interferometro in modo che non abbia alcun effetto ( $\theta = 0$ ), impostare la polarizzazione  $X$  dello stato iniziale tramite la lamina HWP e quella QWP poste all'ingresso del braccio di Alice, e impostare l'ultima lamina HWP della serie dei due interferometri in modo che combinata con il polarizzatore fisso permetta di lasciar passare i fotoni con polarizzazione finale  $Y$ . Misurando il numero di coincidenze rilevate in un certo intervallo di tempo in ognuna delle configurazioni è possibile risalire alle probabilità desiderate dividendo tale numero per il numero di coincidenze rilevate quando i due interferometri sono impostati con  $\theta = 0$ .

### A.2.3 Analisi dei dati raccolti

I dati sperimentali raccolti con la procedura riportata in Sec. A.2.2 sono riportati in Sec. A.3 insieme ai valori di  $\zeta(\varphi_{\text{exp}})$ . Riportiamo delle figure A.1 – A.4 alcuni grafici che illustrano i risultati ottenuti. Si ricordi che i valori di  $\mu_{\text{exp}}$ , indicati in blu nei grafici, sono determinati a meno del segno.

Ove necessario, sono state apportate correzioni del segno tramite dei punti neri come spiegato alla fine della sezione A.2.1. Come si può vedere da (A.13) il valore della distanza di traccia per tali punti resta corretto, in quanto nella minimizzazione della distanza di traccia l'utilizzo di un segno invertito per  $bc$  si compensa con l'uso del segno invertito per  $\mu_{\text{exp}}$ .

Calcolando i valori medi della distanza di traccia si può notare che per il primo interferometro tale distanza media è minore nella configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$ , mentre nel secondo la distanza media è circa la stessa, è leggermente minore nella configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$ .

Si noti che i valori nulli della distanza di traccia nella figura A.3 sono dovuti al fatto che dai dati raccolti le matrici sperimentali erano perfettamente riconducibili a quelle teoriche per determinati valori di  $\mu_{\text{fit}}$ , grazie al fatto che non sono stati rilevati fotoni in configurazioni  $HH$  e  $VV$ .

### A.2.4 Applicazione del modello di regressione lineare

Visto l'andamento approssimativamente lineare dei valori, possiamo eseguire un procedimento di "curve fitting" lineare di  $\zeta(\varphi_{\text{exp}})$  per ottenere una legge  $\tilde{\zeta} : \varphi_{\text{exp}} \rightarrow \mu_{\text{exp}}$  lineare. Qualora si vorrà che l'interferometro si comporti secondo una certa matrice  $\hat{M}_{\mu_{\text{theor}}}$ , se usiamo il modello lineare, la scelta ottimale sarà impostarlo secondo l'angolo  $\varphi_{\text{set}} = \tilde{\zeta}^{-1}(\mu_{\text{theor}})$ . Usando nuovamente l'interprete *Python* con il codice riportato in sezione

<sup>10</sup>Per tale caratterizzazione l'LCR è inutile e si potrebbe omettere, lo stesso setup sperimentale si utilizzerà tuttavia anche per l'esperienza descritta nel capitolo 3

<sup>11</sup>In realtà c'è un ritardo di tra l'istante in cui uno dei fotoni della coppia arriva nel braccio di Alice e l'istante a cui l'altro fotone della coppia arriva all'estremità del braccio di Bob. Il contatore è impostato per avere una finestra di coincidenza di  $\pm 1$  ns, tale valore che si è visto sperimentalmente che compensa bene il ritardo dovuto alle differenze tra i 2 bracci, ma permette comunque di cancellare la maggior parte del rumore di fondo.

A.4, Listing A.2, e definendo  $\tilde{\zeta} : \varphi_{\text{exp}} \rightarrow \mu_{\text{exp}} = a \varphi_{\text{exp}} + b$ , si ottengono allora i risultati riportati in tabella A.1. Il grafico di  $\tilde{\zeta}$  è riportato in sezione 2.2.1.

	a	b
Interferometro 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-2.14 \pm 0.03$	$1.64 \pm 0.02$
Interferometro 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-2.09 \pm 0.01$	$0.766 \pm 0.003$
Interferometro 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-2.11 \pm 0.03$	$1.71 \pm 0.02$
Interferometro 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-2.344 \pm 0.007$	$0.844 \pm 0.002$

Tabella A.1: Risultati del procedimento di “curve fitting”

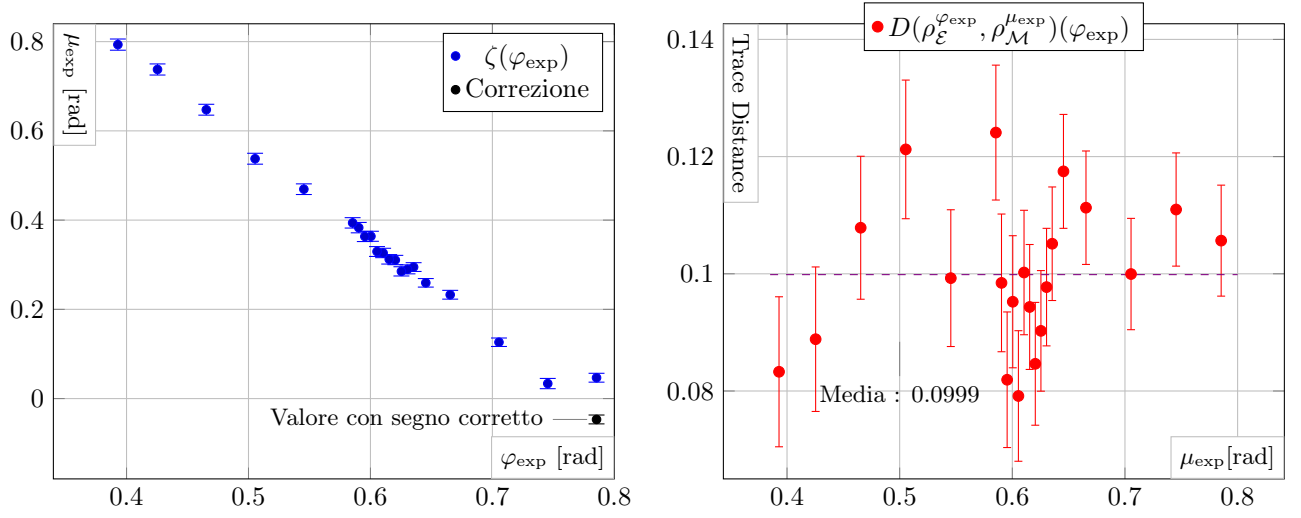


Figura A.1: Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$

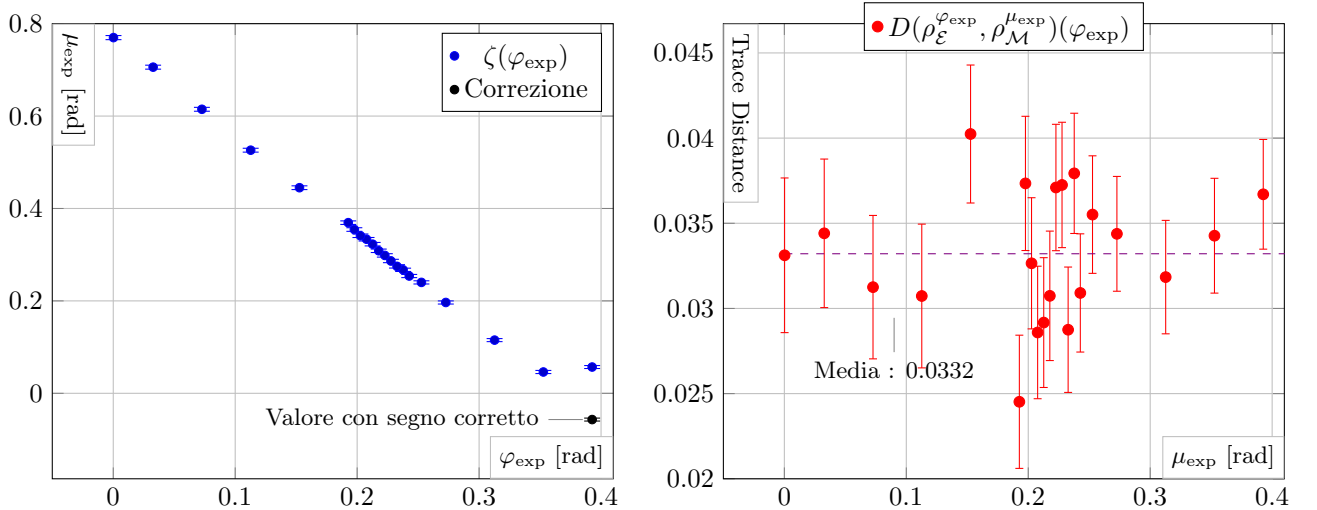


Figura A.2: Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$

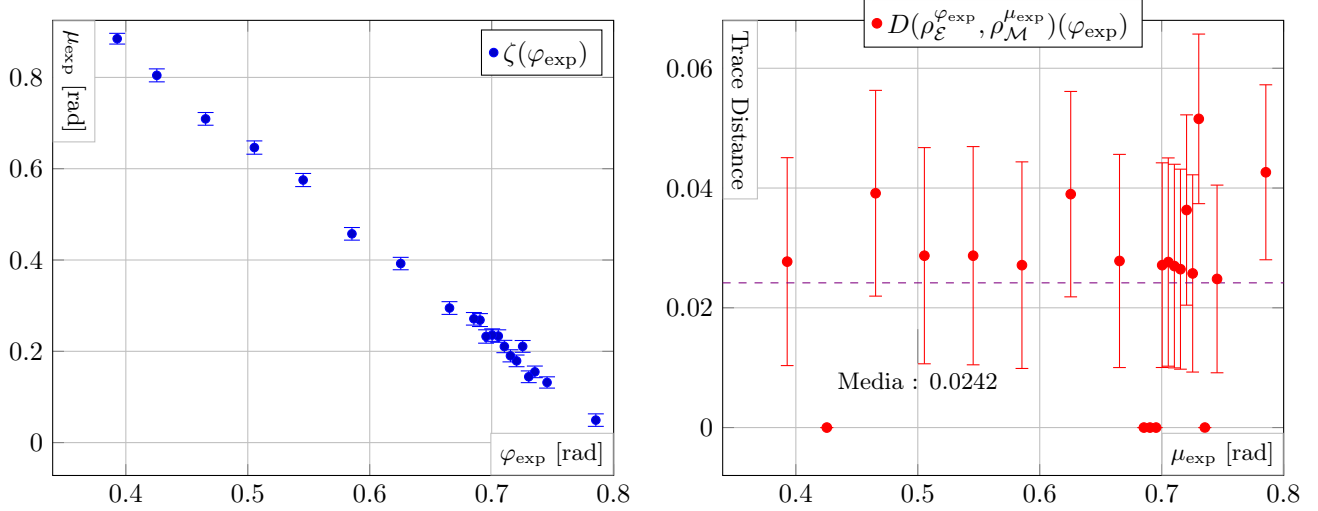


Figura A.3: Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$

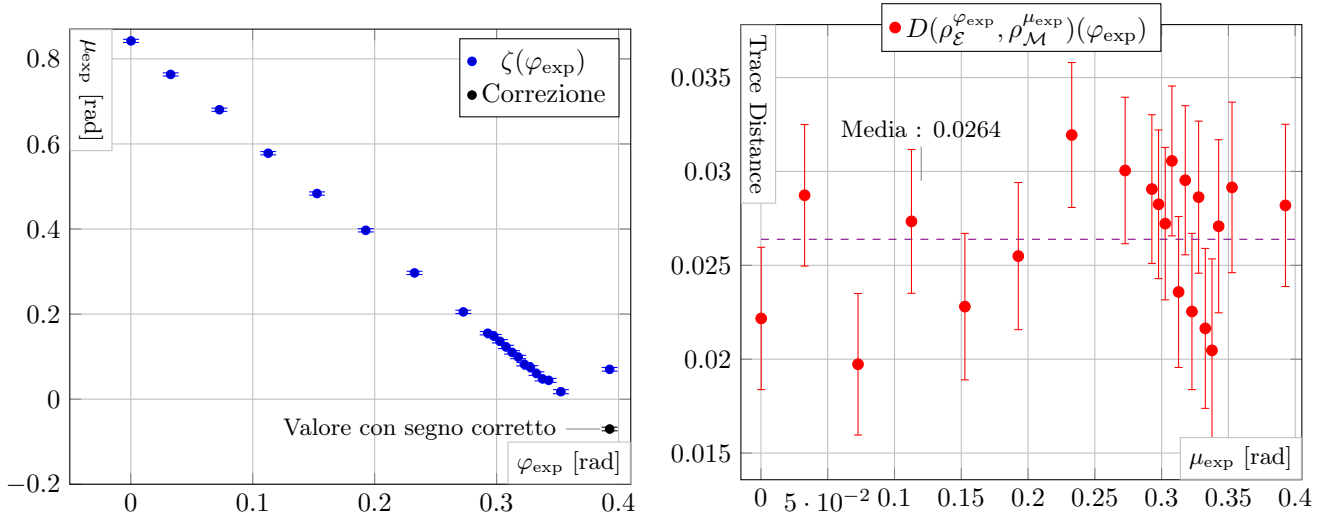


Figura A.4: Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$

### A.2.5 Posizionamento errato delle lamine

Ipotizziamo che il posizionamento delle lamine sia affetto da errore e che quindi i valori effettivi degli angoli sono non siano quelli previsti dal modello teorico. Per tale analisi assumeremo come esatto il valore di  $\theta_V$ . Tale assunzione non è in alcun modo limitativa per i nostri scopi in quanto siamo interessati solo alle posizioni relative delle lamine.

Assumiamo che la differenza tra le lamine  $\theta_H$  e  $\theta_V$  non sia esattamente  $-\pi/4$  ma sia

$$\theta_H - \theta_V = -\frac{\pi}{4} + \delta_1 \quad (\text{A.14})$$

Assumiamo inoltre che quando abbiamo deciso di impostare l'angolo tra le lamine  $\theta_V$  e  $\varphi$  al valore  $\theta_V - \varphi_{\text{exp}}$  le abbiamo invece erroneamente impostate secondo un angolo  $\theta_V - \varphi_{\text{real}}$  diverso da quello da noi scelto, e quindi anche il valore  $\varphi_{\text{exp}}$  è affetto da un certo errore (come già detto considereremo il valore di  $\theta_V$  come esatto)<sup>12</sup>

$$\theta_V - \varphi_{\text{real}} = \theta_V - \varphi_{\text{exp}} + \delta_2 \quad \rightarrow \quad \varphi_{\text{exp}} = \varphi_{\text{real}} + \delta_2 \quad (\text{A.15})$$

e quindi i dati raccolti per ogni configurazione dell'interferometro corrispondono al valore  $\varphi_{\text{exp}} - \delta_2$  anziché a  $\varphi_{\text{exp}}$ .

<sup>12</sup>I parametri con pedice "set" corrispondono ai valori reali, mentre quelli con pedice "exp" (experimental) corrispondono ai valori misurati sperimentalmente. Nel caso ideale tali parametri coincidono.

Utilizzando il modello teorico descritto da (A.7), la relazione tra  $\varphi_{\text{exp}}$  e  $\mu_{\text{exp}}$  ottenuta dai dati sperimentali è:

$$\mu_{\text{exp}} = \tilde{\zeta}(\varphi_{\text{exp}}) = a\varphi_{\text{exp}} + b \quad (\text{A.16})$$

Si vuole ora modificare il modello teorico in modo tale che esso consideri degli errori nel posizionamento delle lamine, come descritto da (A.14) e (A.15), e si vogliono ottenere i valori di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  tali che la relazione tra  $\mu_{\text{exp}}$  e  $\varphi_{\text{real}}$  ottenuta con il nuovo modello sia quella prevista idealmente:

$$\mu_{\text{exp}} = -2\varphi_{\text{real}} + 2\theta_V \quad (\text{A.17})$$

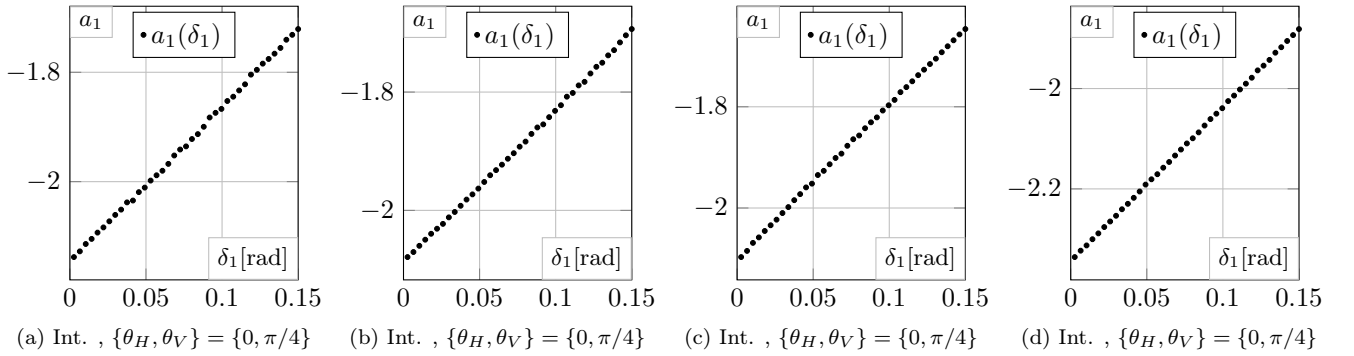
In tal modo è possibile correggere le differenze  $\theta_H - \theta_V$  e  $\theta_V - \varphi$  grazie agli angoli  $\delta_1$  e  $\delta_2$  ottenuti, facendo sì che la relazione tra i nuovi parametri  $\varphi_{\text{real}}'$  e  $\mu_{\text{exp}}'$  determinata utilizzando il modello teorico originale ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ) sia quella prevista nel caso ideale (A.17).

### Determinazione di $\delta_1$

Poniamo per ora  $\delta_2 = 0$ . Assumendo solo la (A.14), la (A.7) diventa

$$\hat{M}_{\mu 1} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\mu) \\ \cos(\mu + 2\delta_1) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Possiamo ora ripetere la procedura descritta nelle sezioni A.2.1–A.2.4 con  $\hat{M}_{\mu 1}$  definita in (A.18) per vari valori di  $\delta_1$  ottenendo per ogni valore di  $\delta_1$  una relazione  $\tilde{\zeta}_1 : \varphi_{\text{exp}} \rightarrow \mu_{\text{exp}}$ , con  $\tilde{\zeta}_1(\varphi_{\text{exp}}) = a_1\varphi_{\text{exp}} + b_1$ , come rappresentato nei seguenti grafici



Siamo interessati a scegliere  $\delta_1$  tale da porre  $a_1 = -2$ . Interpolando i valori  $a_1(\delta_1)$  ottenuti con tale procedura nella zona in cui  $a_1(\delta_1)$  ha andamento lineare<sup>13</sup> possiamo calcolare i valori di  $\delta_1$  richiesti:

	$\delta_1[\text{rad}]$	$a_1$	$b_1$
Interf. 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$0.0513 \pm 0.0001$	$-2.00 \pm 0.03$	$1.54 \pm 0.02$
Interf. 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$0.0330 \pm 0.0002$	$-2.00 \pm 0.01$	$0.740 \pm 0.003$
Interf. 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$0.0334 \pm 0.0002$	$-2.00 \pm 0.03$	$1.63 \pm 0.02$
Interf. 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$0.11187 \pm 0.00007$	$-2.00 \pm 0.01$	$0.730 \pm 0.003$

Tabella A.2: Coefficienti  $a_1$  e  $b_1$  di  $\tilde{\zeta}_1(\varphi_{\text{exp}}) = a_1\varphi_{\text{exp}} + b_1$  per i valori  $\delta_1$  indicati

### Determinazione di $\delta_2$

Con la scelta di  $\delta_1$  descritta nel paragrafo precedente e  $\delta_2 = 0$ , siamo arrivati ad una nuova funzione

$$\mu_{\text{exp}} = \tilde{\zeta}_1(\varphi_{\text{exp}}) = -2\varphi_{\text{exp}} + b_1 \quad (\text{A.19})$$

<sup>13</sup>Utilizzando la procedura presentata nelle sezioni precedenti, la funzione  $a_1(\delta_1)$  è ben definita con andamento lineare solo in un intorno di zero, poiché per valori che si diversificano significativamente dallo zero è necessario fare particolari accorgimenti nella procedura di caratterizzazione dell'interferometro a causa di errori nel segno di  $\mu_{\text{exp}}$  anche per valori lontani dallo zero. In ogni caso è sufficiente calcolare  $a_1$  in un certo range di valori e rappresentare i valori ottenuti in un grafico per vedere dove la funzione ha andamento lineare.

Se consideriamo (A.15), allora dalla relazione sopra si ottiene

$$\mu_{\text{exp}} = -2\varphi_{\text{exp}} + b_1 = -2(\varphi_{\text{real}} + \delta_2) + b_1 = -2\varphi_{\text{real}} + (b_1 - 2\delta_2) \quad (\text{A.20})$$

E ponendo  $b_1 - 2\delta_2 = 2\theta_V$  otteniamo

$$\delta_2 = \frac{b_1}{2} - \theta_V \quad (\text{A.21})$$

	$\delta_2 [\text{rad}]$
Interf. 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-0.02 \pm 0.01$
Interf. 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-0.023 \pm 0.002$
Interf. 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$0.03 \pm 0.01$
Interf. 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-0.028 \pm 0.002$

Tabella A.3: Valori di  $\delta_2$

### Caratterizzazione degli interferometri assumendo $\delta_1$ e $\delta_2$ calcolati

Sono qui presentati i grafici che presentano la caratterizzazione degli interferometri nelle varie configurazioni assumendo gli errori descritti da  $\delta_1$  e  $\delta_2$  indicati nelle tabelle A.2 e A.3

	a	b
Interf. 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-2.00 \pm 0.03$	$1.57 \pm 0.01$
Interf. 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-2.00 \pm 0.01$	$0.786 \pm 0.003$
Interf. 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$	$-2.00 \pm 0.03$	$1.57 \pm 0.02$
Interf. 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$	$-2.00 \pm 0.01$	$0.785 \pm 0.003$

Tabella A.4: Risultati del procedimento di “curve fitting”

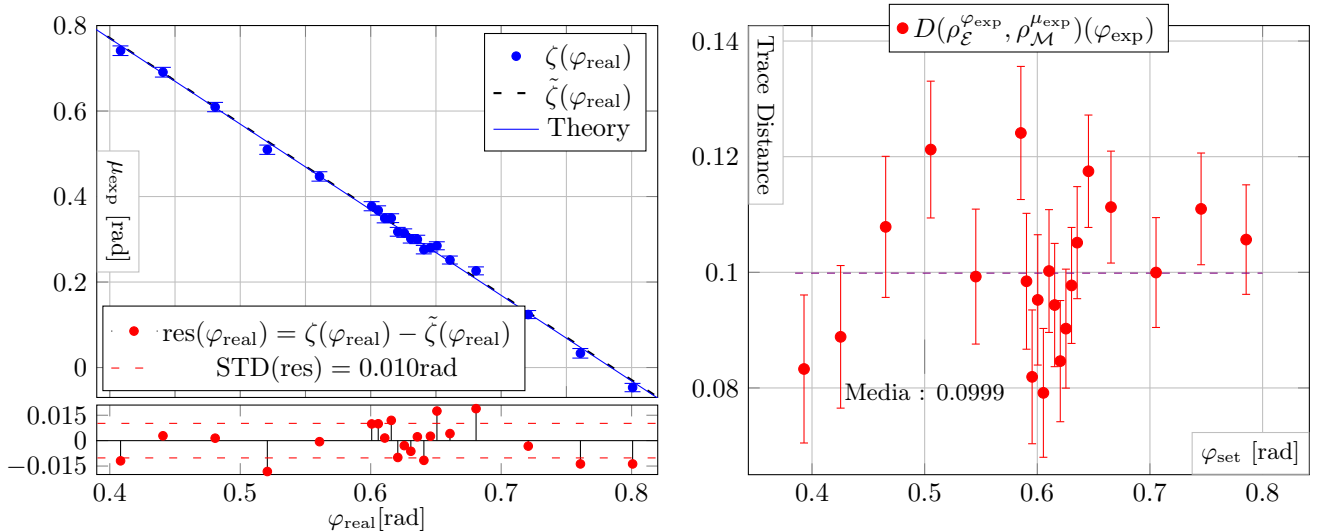


Figura A.5: Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$



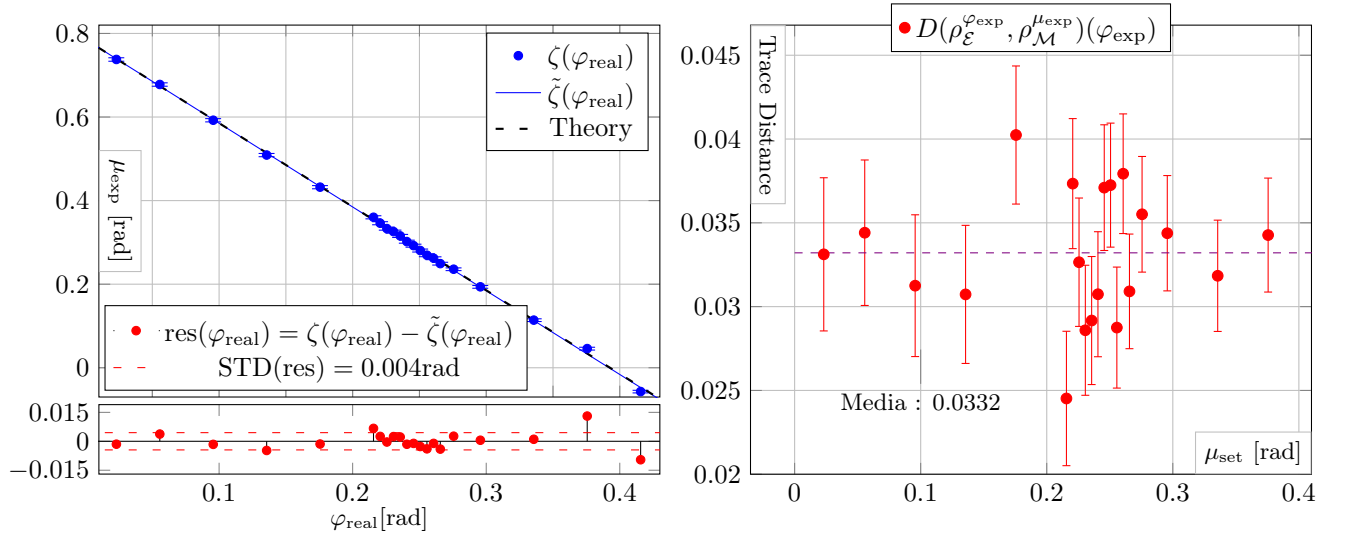


Figura A.6: Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$

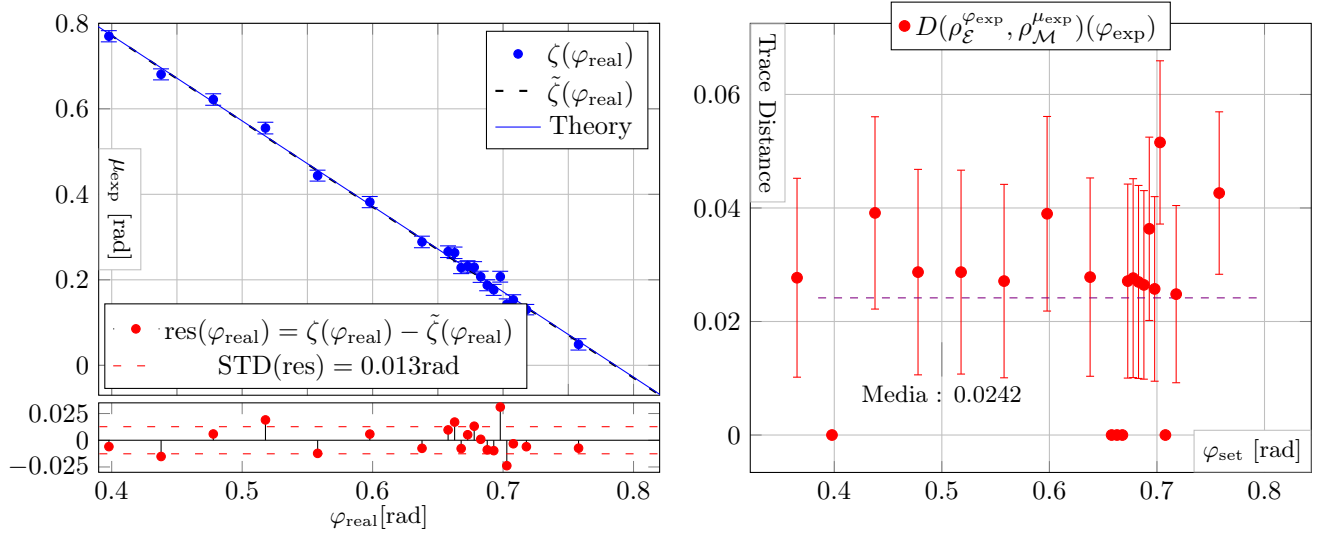


Figura A.7: Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$

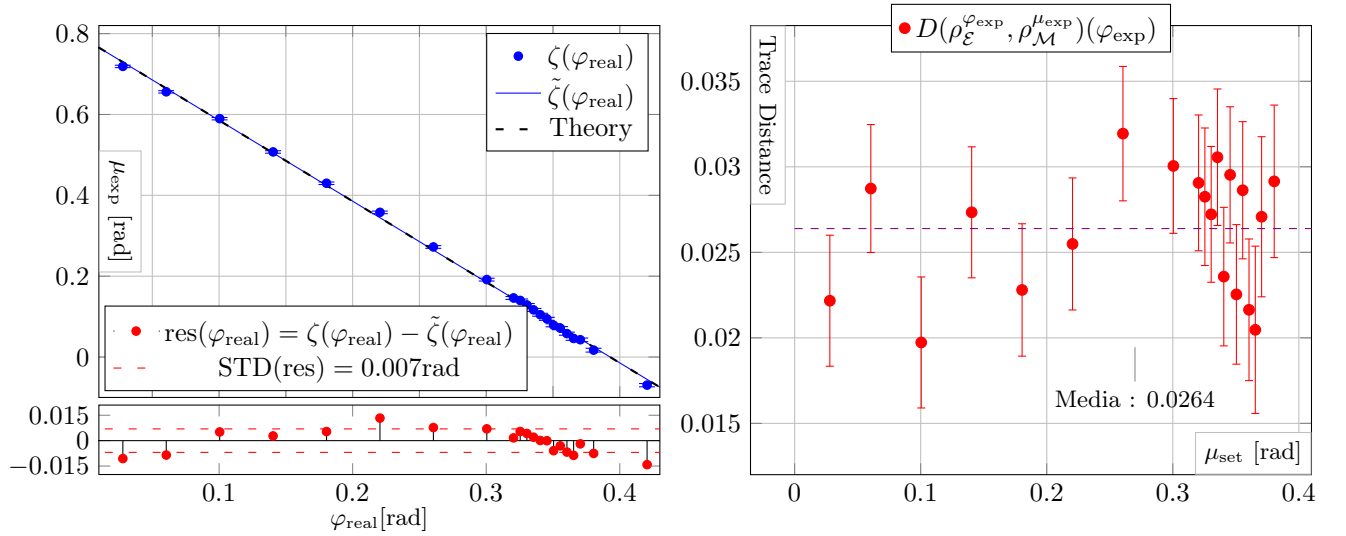


Figura A.8: Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$

## A.3 Tabelle contenenti i dati sperimentali raccolti

### Tabelle A.5 – A.8

Sono in seguito riportate le tabelle contenenti i dati sperimentali raccolti per la caratterizzazione dei due interferometri. Per ogni interferometro ci sono due tabelle, una contenete i dati corrispondenti alla configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$  delle lamine ed una contenente i dati corrispondenti alla configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$ .

Ogni riga corrisponde ad un determinato valore di  $\mu_{\text{set}}$ , indicato nella prima colonna. Dopo la prima colonna ci sono 4 colonne contenenti il numero di fotoni rilevati all'uscita dell'interferometro, i fotoni entranti hanno polarizzazione indicata in cima alla colonna.

Nelle 16 colonne successive, sono contenuti i numeri di fotoni che oltre ad aver attraversato l'interferometro, hanno superato anche un polarizzatore lineare impostato per lasciar passare solo la componente Y incidente. Se indichiamo la polarizzazione dei fotoni prima che incidano sull'interferometro con X, allora le lettere indicate in cima a queste 16 colonne corrispondono a "XY".

### Tabelle A.9 (a) – (d)

Tali tabelle contengono i valori di  $\mu_{\text{fit}}$  corrispondenti ad ogni valore di  $\mu_{\text{set}}$  impostato sui due interferometri nelle due possibili configurazioni. Nella terza colonna sono anche riportate le corrispondenti distanze di traccia minime, ossia corrispondenti ai valori di  $\mu_{\text{fit}}$  indicati.

$\mu_{\text{set}}$	H	V	D	A	HH	HV	HD	HA	VH	VV	VD	VA	DH	DV	DD	DA	AH	AV	AD	AA
0	2716	2876	2728	2676	1	2740	1397	1360	6	30	16	12	2	1261	549	664	4	1423	809	606
0.08	2561	2918	2692	2552	0	2644	1411	1254	3	33	17	26	5	1298	686	549	1	1461	710	771
0.16	2735	3026	2828	2856	0	2730	1427	1315	44	28	33	43	14	1327	837	441	27	1435	587	845
0.24	2670	2848	2706	2802	3	2492	1370	1343	140	30	55	94	61	1195	917	350	67	1301	468	946
0.28	2668	2804	2738	2736	1	2470	1284	1194	174	36	66	126	92	1160	893	281	86	1334	411	994
0.3	2477	2723	2624	2690	3	2376	1280	1107	219	26	81	116	95	1105	969	245	101	1209	375	1022
0.31	2403	2672	2570	2510	1	2286	1200	1068	203	23	92	123	126	1066	950	249	92	1197	331	926
0.32	2416	2653	2364	2410	1	2130	1124	1014	183	18	90	120	94	1070	840	200	98	1118	342	908
0.33	2354	2550	2396	2340	0	2136	1108	957	220	17	104	146	118	978	900	224	102	1100	314	907
0.34	2201	2474	2404	2206	1	2017	1072	927	210	19	100	142	110	932	849	190	118	1038	296	866
0.35	2170	2321	2310	2118	1	2034	1030	893	233	22	107	123	109	913	807	158	102	1026	250	832
0.36	2092	2264	2126	2044	1	1846	992	900	216	12	91	147	97	839	812	143	101	994	253	859
0.37	1950	2253	2064	2042	2	1718	978	877	249	16	101	158	135	858	830	156	105	977	229	834
0.38	1991	2119	2118	1972	0	1681	898	806	243	13	125	143	127	753	847	137	114	942	217	816
0.39	1858	2044	2024	1878	4	1582	897	763	257	14	113	152	134	769	742	147	108	818	200	819
0.4	1883	1930	1920	1894	3	1581	831	739	273	26	125	155	126	672	746	111	88	855	180	741
0.48	1736	1996	1836	1894	3	1439	806	655	370	15	158	189	192	661	738	63	164	714	123	749
0.56	1709	1870	1758	1784	5	1286	742	581	457	21	191	297	256	560	835	38	231	699	94	815
0.64	1767	1872	1712	1688	8	1081	603	484	618	12	278	353	291	549	824	18	279	622	50	822
0.72	1562	1813	1668	1710	5	895	464	418	739	8	324	419	400	435	814	9	325	498	20	787
0.785	1524	1654	1660	1594	7	775	417	386	800	4	356	444	395	372	757	12	356	434	13	771

Tabella A.5: Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$

$\mu_{\text{set}}$	H	V	D	A	HH	HV	HD	HA	VH	VV	VD	VA	DH	DV	DD	DA	AH	AV	AD	AA
0	24248	26867	24488	23298	4	24392	11976	11639	79	29	80	28	58	11640	5317	6699	34	12340	7260	5621
0.08	23365	24755	21976	21074	0	22070	11547	11151	47	26	7	64	23	10653	5829	4907	25	11917	5728	6236
0.16	22342	24746	21506	20812	1	22362	11134	10974	299	22	72	222	155	11050	6830	4252	144	11484	4842	7027
0.24	21921	24592	21760	21656	3	21129	10994	10695	838	23	271	515	405	10007	7422	3155	405	10978	3869	7896
0.28	21816	24125	21296	20944	2	20182	10413	10061	1209	25	453	715	581	9573	7707	2780	577	10405	3345	7898
0.3	21256	23727	20694	20370	1	19598	10215	9556	1319	19	524	803	670	9233	7617	2443	630	9883	3026	7719
0.31	20269	22596	19936	19170	4	18726	9717	9183	1404	25	565	855	720	8996	7431	2287	654	9546	2891	7741
0.32	19867	21890	18728	18744	2	17912	9368	9063	1423	14	553	842	721	8660	7378	2164	707	9193	2702	7501
0.33	18851	21262	18296	18196	2	17217	8979	8593	1493	24	629	880	711	8264	7068	2047	739	8803	2576	7282
0.34	18360	20591	18080	17550	4	16567	8661	8228	1568	21	652	963	782	8285	7266	1913	759	8675	2408	7580
0.35	18239	20530	18348	17598	3	16316	8463	8202	1656	14	675	995	857	7846	7043	1738	843	8689	2171	7309
0.36	17825	19775	17458	17080	2	15840	8310	7849	1772	13	747	1008	901	7686	6920	1640	866	8169	2099	7050
0.37	17132	19356	16930	16678	0	15279	8145	7645	1833	14	741	1045	883	7507	6801	1570	887	8044	2066	6989
0.38	17295	19408	16768	16454	7	14981	7697	7286	1886	11	793	1029	989	7280	6892	1472	883	7733	1951	6967
0.39	16888	18755	16510	16020	8	14486	7744	7233	1984	15	825	1101	1023	7108	6853	1402	973	7613	1753	7008
0.4	16712	18607	16370	15826	4	14458	7551	7097	2166	6	820	1189	1052	6751	6606	1215	1020	7288	1694	6785
0.48	15724	17779	15574	15190	4	12559	6688	6182	2856	21	1288	1606	1399	5985	6662	801	1374	6389	1247	6641
0.56	15130	16978	14974	14498	7	11073	6054	5474	3735	7	1714	2030	1996	5280	6817	432	1849	5737	777	6878
0.64	14940	16729	14516	13888	8	9558	5236	4527	4763	6	2127	2479	2453	4476	6576	215	2210	4662	496	6290
0.72	13554	15010	13220	13230	10	7817	4359	3760	5679	6	2661	2930	2869	3864	6368	109	2586	3963	334	6230
0.785	12662	14036	12504	12478	6	6571	3577	3052	6174	8	2903	3276	3183	3147	6101	117	2872	3299	253	5811

Tabella A.6: Interferometro 1, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$

$\mu_{\text{set}}$	H	V	D	A	HH	HV	HD	HA	VH	VV	VD	VA	DH	DV	DD	DA	AH	AV	AD	AA
0	1526	2242	1940	1822	2	1644	828	790	4	1	6	2	6	769	474	331	1	827	341	440
0.08	1573	2209	1848	1788	1	1594	823	741	28	0	23	13	22	715	505	246	14	768	312	472
0.1	1505	2153	1748	1740	0	1557	797	735	38	0	27	15	21	720	536	270	18	770	259	495
0.11	1588	2186	1742	1738	3	1470	741	711	31	1	22	17	26	723	522	240	7	734	265	502
0.12	1430	1989	1594	1600	1	1442	746	705	66	0	29	18	24	693	492	223	16	738	230	449
0.13	1448	2062	1598	1558	1	1465	750	684	48	1	28	31	30	664	503	175	21	672	225	478
0.14	1375	1960	1484	1482	0	1377	705	619	51	1	32	23	38	610	504	204	22	642	237	425
0.15	1246	1948	1516	1516	1	1314	639	633	60	0	31	23	33	623	497	164	32	696	196	471
0.16	1320	1766	1458	1406	1	1238	652	621	70	0	36	25	35	612	459	142	30	610	218	459
0.17	1251	1850	1416	1466	0	1285	656	595	74	1	40	27	32	562	480	164	25	609	188	443
0.18	1224	1796	1358	1414	0	1106	626	575	62	0	47	31	53	556	439	159	29	639	193	479
0.19	1232	1690	1364	1312	0	1176	628	586	89	0	42	39	47	597	506	149	41	616	179	457
0.2	1252	1651	1366	1332	0	1177	628	570	91	0	46	44	46	547	473	143	34	615	162	435
0.24	1213	1746	1544	1328	0	1182	597	606	109	1	64	45	71	559	440	124	46	588	171	444
0.32	1229	1679	1438	1378	2	1122	581	509	192	0	111	88	121	530	546	73	91	539	127	542
0.4	1188	1636	1366	1338	1	1094	555	447	265	0	155	117	128	457	581	56	108	479	85	523
0.48	1136	1585	1228	1210	0	854	477	447	359	1	160	172	198	436	632	34	179	442	65	551
0.56	1109	1640	1232	1232	0	773	397	391	440	1	228	203	244	359	605	27	203	409	36	580
0.64	1140	1526	1238	1232	0	751	322	350	553	2	295	302	268	364	588	25	272	377	40	631
0.72	1086	1628	1290	1236	0	617	332	294	666	0	339	333	343	269	628	29	344	311	38	673
0.785	1099	1464	1234	1254	0	522	262	253	779	1	365	337	412	244	643	45	352	305	46	561

Tabella A.7: Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$

$\mu_{\text{set}}$	H	V	D	A	HH	HV	HD	HA	VH	VV	VD	VA	DH	DV	DD	DA	AH	AV	AD	AA
0	13805	17221	13506	13946	9	13760	7141	6272	68	2	40	48	16	6317	2831	3450	64	6610	3999	2748
0.08	13018	16359	13212	12934	9	12931	6736	6031	4	2	5	1	12	6186	3248	2992	6	6287	3263	3000
0.1	12344	15271	12386	12520	8	12242	6454	5802	24	1	13	10	21	5917	3207	2664	4	6063	3124	3047
0.11	12461	15299	12570	12374	4	11899	6320	5575	27	1	22	17	26	5535	3151	2626	7	5892	2827	3006
0.12	11751	14840	14212	15042	5	14883	7773	7163	54	2	32	38	57	7453	4327	3313	13	7908	3815	4000
0.13	16269	19870	15988	16130	11	15761	8141	7361	88	2	57	43	70	7607	4396	3258	31	7959	3752	4177
0.14	16499	20240	16368	16318	5	15631	8245	7548	106	3	55	68	99	7644	4458	3299	26	8015	3853	4275
0.15	16587	20184	16226	16878	12	15882	8060	7488	157	2	85	79	127	7713	4687	3297	55	7985	3662	4365
0.16	16337	20513	16912	16582	7	15987	8314	7505	195	2	90	113	156	7718	4646	3095	55	8039	3640	4353
0.17	16737	20671	16476	16468	11	15808	8158	7581	241	4	123	123	176	7587	4747	2945	74	8189	3476	4691
0.18	16634	20540	16592	16996	9	15891	8195	7765	298	3	141	157	214	7751	4853	2875	104	8097	3536	4725
0.19	16874	20858	16748	17244	9	15918	8248	7712	355	4	201	193	231	7723	5182	2968	150	8172	3553	4883
0.2	17388	21279	17102	17106	10	16167	8302	7626	395	4	194	209	246	7666	4928	2781	126	8147	3346	4882
0.24	17123	21102	17240	17094	12	15909	8183	7573	689	3	339	355	424	7698	5591	2554	285	8307	3158	5312
0.32	17508	21891	17484	17396	13	15223	7906	7412	1424	4	666	708	879	7331	6191	2048	604	7939	2454	6156
0.4	17680	21756	17646	17880	7	14394	7521	7111	2530	4	1242	1334	1412	6804	6987	1421	1064	7474	1719	6971
0.48	17743	22687	17882	18138	7	13566	7063	6472	3740	2	1833	1904	2125	6394	7595	902	1798	6836	1101	7552
0.56	17977	22858	17808	18558	6	12188	6331	5840	5192	7	2597	2752	2836	5941	8311	526	2404	6402	713	8124
0.64	18209	22591	18358	18232	3	10865	5571	5174	7119	4	3442	3653	3733	5078	8751	270	3113	5554	331	8456
0.72	18430	22873	18296	18156	5	9478	4910	4418	8683	10	4167	4432	4609	4391	9120	164	4097	4894	146	8877
0.785	18340	22885	18094	17806	3	8113	4221	3994	10192	6	5068	5204	5493	3934	9144	190	4939	4455	97	9117

Tabella A.8: Interferometro 2, configurazione  $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$

Tabella A.9: Valori di  $\mu_{\text{fit}}$  e relative distanze di traccia  $D(\mu_{\text{fit}}) \equiv D(\rho_{\mathcal{E}}^{\mu_{\text{fit}}}, \rho_{\mathcal{M}}^{\mu_{\text{fit}}})$

(a) Interferometro 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$			(b) Interferometro 1, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$			(c) Interferometro 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{0, \pi/4\}$			(d) Interferometro 2, configurazione $\{\theta_H, \theta_V\} = \{-\pi/8, \pi/8\}$		
$\mu_{\text{set}}$	$\mu_{\text{fit}}$	$D(\mu_{\text{fit}})$	$\mu_{\text{set}}$	$\mu_{\text{fit}}$	$D(\mu_{\text{fit}})$	$\mu_{\text{set}}$	$\mu_{\text{fit}}$	$D(\mu_{\text{fit}})$	$\mu_{\text{set}}$	$\mu_{\text{fit}}$	$D(\mu_{\text{fit}})$
0.0	0.04676	0.10566	0.0	0.05685	0.03670	0.0	0.04929	0.04263	0.0	0.07018	0.02819
0.08	0.03367	0.11097	0.08	0.04611	0.03427	0.08	0.13177	0.02482	0.08	0.01759	0.02915
0.16	0.12628	0.09996	0.16	0.11512	0.03184	0.1	0.15497	0	0.1	0.04425	0.02708
0.24	0.23273	0.11128	0.24	0.19658	0.03438	0.11	0.14421	0.05155	0.11	0.04760	0.02047
0.28	0.25943	0.11748	0.28	0.24004	0.03551	0.12	0.21076	0.02574	0.12	0.06016	0.02164
0.3	0.29475	0.10513	0.3	0.25383	0.03091	0.13	0.17907	0.03633	0.13	0.07458	0.02863
0.31	0.28962	0.09773	0.31	0.26726	0.03793	0.14	0.19013	0.02645	0.14	0.08216	0.02254
0.32	0.28513	0.09026	0.32	0.27473	0.02875	0.15	0.21052	0.02697	0.15	0.09910	0.02953
0.33	0.31055	0.08464	0.33	0.28638	0.03725	0.16	0.23345	0.02764	0.16	0.11000	0.02358
0.34	0.31212	0.09434	0.34	0.29846	0.03710	0.17	0.23552	0.02712	0.17	0.12285	0.03056
0.35	0.32635	0.10022	0.35	0.30842	0.03074	0.18	0.23248	0	0.18	0.13609	0.02722
0.36	0.32959	0.07915	0.36	0.32277	0.02917	0.19	0.26846	0	0.19	0.14824	0.02825
0.37	0.36376	0.09523	0.37	0.33343	0.02859	0.2	0.27121	0	0.2	0.15505	0.02906
0.38	0.36333	0.08192	0.38	0.34096	0.03265	0.24	0.29482	0.02782	0.24	0.20518	0.03005
0.39	0.38314	0.09845	0.39	0.35445	0.03734	0.32	0.39224	0.03898	0.32	0.29681	0.03194
0.4	0.39383	0.12410	0.4	0.36930	0.02452	0.4	0.45736	0.02712	0.4	0.39699	0.02549
0.48	0.46929	0.09926	0.48	0.44497	0.04024	0.48	0.57522	0.02870	0.48	0.48349	0.02280
0.56	0.53757	0.12123	0.56	0.52617	0.03073	0.56	0.64635	0.02870	0.56	0.57826	0.02734
0.64	0.6474	0.10786	0.64	0.61469	0.03125	0.64	0.70918	0.03913	0.64	0.68048	0.01973
0.72	0.73759	0.08884	0.72	0.70585	0.03441	0.72	0.80450	0	0.72	0.76350	0.02873
0.785	0.79333	0.08328	0.785	0.76982	0.03312	0.785	0.88482	0.02771	0.785	0.84231	0.02217

## A.4 Listing dei codici sorgente *Python* utilizzati

Riportiamo qui per completezza alcuni dei *Python* utilizzati per la caratterizzazione dei due interferometri. Gli altri codici utilizzati sono versioni modificate è più complicate di quelli qui presentati, che invece nella loro semplicità permettono la comprensione delle procedure eseguite.

Listing A.1: Codice Python per la ricerca di  $\mu_{\text{fit}}$

```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy as sp
import scipy.optimize as sopt
import argparse

parser = argparse.ArgumentParser()
parser.add_argument("file", help = "File_with_experimental_data")
args=parser.parse_args()

# Load file
df = pd.read_csv(args.file, sep = ';')

def distance(mu,a,b,c,d):
    mu = float(mu)
    d = np.sqrt(1-((b*np.sin(mu)+c*np.cos(mu))**2)/(a**2+b**2+c**2+d**2))
    return d

#Constraints for optimization
Up_bound = np.pi/3.5
Low_bound = -np.pi/10

list_of_mu_fit = []
list_of_distances = []
for index, row in df.iterrows():
    norm = row["H"]
    a = np.sqrt(row["HH"]/norm)
    b = np.sqrt(row["VH"]/norm)
    c = np.sqrt(row["HV"]/norm)
    d = np.sqrt(row["VV"]/norm)

    #Avoid exceptions in "distance" function
    if a == 0 and d == 0 : a = 1e-20

    popt = sopt.minimize(fun = distance, x0 = row["mu"], args = (a,b,c,d),
                        bounds = ((Low_bound, Up_bound),))
    list_of_mu_fit.append(round(popt.x[0],5))
    list_of_distances.append(round(popt.fun,5))

df["mu_fit"] = list_of_mu_fit
df["distance"] = list_of_distances

#Output
print(df)
```



Listing A.2: Codice Python per il “curve fitting”

```

import pandas as pd
import scipy.optimize as sopt
import argparse

parser = argparse.ArgumentParser()
parser.add_argument("file", help = "File_with_experimental_data")
args=parser.parse_args()

# Load file
df = pd.read_csv(args.file, sep = ';')

# A straight line
def f(x, a, b):
    return a*x+b

popt, pcov = (sopt.curve_fit(f, df["mu_fit"], df["mu"]))

perr = np.sqrt(np.diag(pcov))

list_of_residuals=[]

for index, row in df.iterrows():
    list_of_residuals.append(row["mu_fit"]-(popt[0]*row["phi"]+popt[1]))

#Output
print("mu_fit=a_phi+b")
print("[a,b]= ", popt)
print("[std_a,std_b]= ", perr)
print("std_residuals= ", np.std(list_of_residuals) )

```



# Bibliografia

- [1] Giuliano Benenti, Giulio Casati e Giuliano Strini. *Principles of Quantum Computation and Information. Volume I: Basic Concepts*. World Scientific, apr. 2004. DOI: 10.1142/5528.
- [2] Giuliano Benenti, Giulio Casati e Giuliano Strini. *Principles of Quantum Computation and Information. Volume II: Basic Tools and Special Topics*. World Scientific, mar. 2007. DOI: 10.1142/5838.
- [3] Yakir Aharonov, David Z. Albert e Lev Vaidman. «How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100». In: *Phys. Rev. Lett.* 60 (14 apr. 1988), pp. 1351–1354. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1351.
- [4] K. Kraus. *States, Effects, and Operations. Fundamental Notions of Quantum Theory: Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin*. A cura di A. Böhm, J. D. Dollard e W. H. Wootters. Lecture Notes in Physics 190. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983. DOI: 10.1007/3-540-12732-1.
- [5] John von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Translation - from German. Princeton University Press, 1955. ISBN: 9780691028934.
- [6] John Preskill. «Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation». 1997-98. URL: <http://theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>.
- [7] Kenichi Konishi e Giampiero Paffuti. *Meccanica Quantistica: Nuova Introduzione*. Pisa University Press, mar. 2013. ISBN: 9788867410385.
- [8] Simone Montangero. «Appunti delle lezioni di Istituzioni di Informazione Quantistica - Università di Padova». 2019.
- [9] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CB09780511976667.
- [10] Dianmin Tong et al. «Operator-sum representation of time-dependent density operators and its applications». In: *Physical Review A* 69 (lug. 2004). DOI: 10.1103/PhysRevA.69.054102.
- [11] Michael M. Wolf. «Quantum Channels and Operations». Lecture Notes - Niels-Bohr Institute (Copenhagen). 2012. URL: <http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf>.
- [12] Nicholas Wheeler. «Generalized Quantum Measurement - Imperfect meters and POVMs». Set. 2012.
- [13] Deguang Han et al. «Dilations of frames, operator valued measures and bounded linear maps». In: *Contemporary Mathematics* 626 (nov. 2014). DOI: 10.1090/conm/626/12520.
- [14] Vern Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. 1<sup>a</sup> ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003. Cap. 4.
- [15] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. 1993<sup>a</sup> ed. Fundamental Theories of Physics. Springer, 1995. ISBN: 9780792336327.
- [16] Abraham G. Kofman, Sahel Ashhab e Franco Nori. «Nonperturbative theory of weak pre-and post-selected measurements». In: *Physics Reports* 520.2 (nov. 2012). ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2012.07.001.
- [17] Lajos Diósi. «Weak Measurements in Quantum Mechanics». In: *Encyclopedia of Mathematical Physics*. A cura di J.-P. Francoise, G.L. Naber e S.T. Tsou. Vol. 4. Elsevier, Oxford, feb. 2006, pp. 276–282.
- [18] M. H. Stone. «Linear Transformations in Hilbert Space. III. Operational Methods and Group Theory». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* (gen. 1930). DOI: 10.1073/pnas.16.2.172.

- [19] Yakir Aharonov e Alonso Botero. «Quantum averages of weak values». In: *Phys. Rev. A* 72 (5 nov. 2005), p. 052111. DOI: 10.1103/PhysRevA.72.052111.
- [20] Yakir Aharonov, Eliahu Cohen e Avshalom C. Elitzur. «Foundations and applications of weak quantum measurements». In: *Phys. Rev. A* 89 (5 mag. 2014), p. 052105. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.052105.
- [21] I. M. Duck, P. M. Stevenson e E. C. G. Sudarshan. «The sense in which a "weak measurement" of a spin-1/2 particle's spin component yields a value 100». In: *Physical Review D* 40 (6 1989), pp. 2112–2117. ISSN: 1550-7998,1089-4918. DOI: 10.1103/PhysRevD.40.2112.
- [22] Richard Jozsa. «Complex weak values in quantum measurement». In: *Physical Review A* 76 (4 2007), p. 044103. ISSN: 1050-2947,1094-1622. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.044103.
- [23] Shengjun Wu e Klaus Mølmer. «Weak measurements with a qubit meter». In: *Physics Letters A* 374.1 (2009), pp. 34–39. ISSN: 0375-9601. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.10.026.
- [24] Yakir Aharonov e Lev Vaidman. «Properties of a quantum system during the time interval between two measurements». In: *Phys. Rev. A* 41 (1 gen. 1990), pp. 11–20. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.11.
- [25] Yakir Aharonov e Lev Vaidman. «The Two-State Vector Formalism: An Updated Review». In: *Time in Quantum Mechanics*. A cura di J.G. Muga, R. Sala Mayato e Í.L. Egusquiza. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 399–447. ISBN: 978-3-540-73473-4. DOI: 10.1007/978-3-540-73473-4\_13.
- [26] Yakir Aharonov e Daniel Rohrlich. *Quantum paradoxes: quantum theory for the perplexed*. Physics Textbook. Wiley-VCH, feb. 2005. ISBN: 9783527403912. DOI: 10.1002/9783527619115.
- [27] G. J. Pryde et al. «Measurement of Quantum Weak Values of Photon Polarization». In: *Phys. Rev. Lett.* 94 (22 giu. 2005), p. 220405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.220405.
- [28] Y. Kedem e L. Vaidman. «Modular Values and Weak Values of Quantum Observables». In: *Physical Review Letters* 105.23 (nov. 2010). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.230401.
- [29] Le Bin Ho e Nobuyuki Imoto. «Full characterization of modular values for finite-dimensional systems». In: *Physics Letters A* 380.25 (2016), pp. 2129–2135. ISSN: 0375-9601. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.05.005.
- [30] Graeme Mitchison, Richard Jozsa e Sandu Popescu. «Sequential weak measurement». In: *Phys. Rev. A* 76 (6 dic. 2007), p. 062105. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.062105.
- [31] Lee A. Rozema et al. «Violation of Heisenberg's Measurement-Disturbance Relationship by Weak Measurements». In: *Phys. Rev. Lett.* 109 (10 set. 2012), p. 100404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.100404.
- [32] F. Piacentini et al. «Measuring Incompatible Observables by Exploiting Sequential Weak Values». In: *Phys. Rev. Lett.* 117 (17 ott. 2016), p. 170402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.170402.
- [33] Justin Dressel et al. «Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications». In: *Reviews of Modern Physics* 86.1 (mar. 2014), pp. 307–316. ISSN: 1539-0756. DOI: 10.1103/revmodphys.86.307.
- [34] Onur Hosten e Paul Kwiat. «Observation of the Spin Hall Effect of Light via Weak Measurements». In: *Science* 319.5864 (2008), pp. 787–790. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1152697.
- [35] P. Ben Dixon et al. «Ultrasensitive Beam Deflection Measurement via Interferometric Weak Value Amplification». In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (17 apr. 2009), p. 173601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.173601.
- [36] David J. Starling et al. «Precision frequency measurements with interferometric weak values». In: *Phys. Rev. A* 82 (6 dic. 2010), p. 063822. DOI: 10.1103/PhysRevA.82.063822.
- [37] J. M. Hogan et al. «Precision angle sensor using an optical lever inside a Sagnac interferometer». In: *Opt. Lett.* 36.9 (mag. 2011), pp. 1698–1700. DOI: 10.1364/OL.36.001698.
- [38] Holger F. Hofmann. «Uncertainty limits for quantum metrology obtained from the statistics of weak measurements». In: *Phys. Rev. A* 83 (2 feb. 2011), p. 022106. DOI: 10.1103/PhysRevA.83.022106.
- [39] Zhimin Shi et al. «Direct measurement of an one-million-dimensional photonic state». In: *2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*. Ago. 2016, pp. 187–187.
- [40] Daniel F. V. James et al. «On the Measurement of Qubits». In: *Phys. Rev. A* 64 (5 ott. 2001), p. 052312. DOI: 10.1103/PhysRevA.64.052312.

- [41] J.B. Altepeter, E.R. Jeffrey e P.G. Kwiat. «Photonic State Tomography». In: a cura di P.R. Berman e C.C. Lin. Vol. 52. *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Academic Press, 2005, pp. 105–159. DOI: 10.1016/S1049-250X(05)52003-2.
- [42] Jeff S. Lundeen et al. «Direct measurement of the quantum wavefunction». In: *Nature* 474 (giu. 2011). DOI: 10.1038/nature10120.
- [43] Jeff Z. Salvail et al. «Full characterization of polarization states of light via direct measurement». In: *Nature Photonics* 7 (4 mar. 2013). DOI: 10.1038/NPHOTON.2013.24.
- [44] Shengjun Wu. «State tomography via weak measurements». In: *Scientific Reports* 3 (feb. 2013), p. 1193. DOI: 10.1038/srep01193.
- [45] Lorenzo Maccone e Cosimo C. Rusconi. «State estimation: A comparison between direct state measurement and tomography». In: *Phys. Rev. A* 89 (2 feb. 2014), p. 022122. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.022122.
- [46] Jeff S. Lundeen e Charles Bamber. «Procedure for Direct Measurement of General Quantum States Using Weak Measurement». In: *Phys. Rev. Lett.* 108 (7 feb. 2012). DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.070402.
- [47] Charles Bamber e Jeff S. Lundeen. «Observing Dirac’s Classical Phase Space Analog to the Quantum State». In: *Phys. Rev. Lett.* 112 (7 feb. 2014), p. 070405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.070405.
- [48] Giuseppe Vallone e Daniele Dequal. «Strong Measurements Give a Better Direct Measurement of the Quantum Wave Function». In: *Physical Review Letters* 116.4 (gen. 2016). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.116.040502.
- [49] Ping Zou, Zhi-Ming Zhang e Wei Song. «Direct measurement of general quantum states using strong measurement». In: *Phys. Rev. A* 91 (5 mag. 2015), p. 052109. DOI: 10.1103/PhysRevA.91.052109.
- [50] Luca Calderaro et al. «Direct Reconstruction of the Quantum Density Matrix by Strong Measurements». In: *Physical Review Letters* 121.23 (dic. 2018). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.121.230501.
- [51] A. Gerrard e J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. Dover Publications, 1975. ISBN: 9781621986744.
- [52] Giulio Foletto et al. «Experimental Demonstration of Sustained Entanglement and Nonlocality After Sequential Measurements». In: (giu. 2019). URL: <https://arxiv.org/abs/1906.07412>.
- [53] Ralph Silva et al. «Multiple Observers Can Share the Nonlocality of Half of an Entangled Pair by Using Optimal Weak Measurements». In: *Phys. Rev. Lett.* 114 (25 giu. 2015), p. 250401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.250401.
- [54] T C White et al. «Preserving entanglement during weak measurement demonstrated with a violation of the Bell–Leggett–Garg inequality». In: *Npj Quantum Information* 2 (feb. 2016). DOI: 10.1038/npjqi.2015.22. URL: <https://doi.org/10.1038/npjqi.2015.22>.
- [55] Christopher A. Fuchs e Asher Peres. «Quantum-state disturbance versus information gain: Uncertainty relations for quantum information». In: *Phys. Rev. A* 53 (4 apr. 1996), pp. 2038–2045. DOI: 10.1103/PhysRevA.53.2038.
- [56] Akshata Shenoy H. et al. «Unbounded sequence of observers exhibiting Einstein-Podolsky-Rosen steering». In: *Phys. Rev. A* 99 (2 feb. 2019), p. 022317. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.022317.
- [57] Ryszard Horodecki et al. «Quantum entanglement». In: *Reviews of Modern Physics* 81.2 (giu. 2009), pp. 865–942. ISSN: 1539-0756. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.865.
- [58] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?» In: *Phys. Rev.* 47 (10 mag. 1935), pp. 777–780. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.
- [59] E. Schrödinger. «Discussion of Probability Relations between Separated Systems». In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31.4 (1935), pp. 555–563. DOI: 10.1017/S0305004100013554.
- [60] J. S. Bell. «On the Einstein Podolsky Rosen paradox». In: *Physics Physique Fizika* 1 (3 nov. 1964), pp. 195–200. DOI: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.
- [61] John F. Clauser et al. «Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories». In: *Phys. Rev. Lett.* 23 (15 ott. 1969), pp. 880–884. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.880.
- [62] Alain Aspect, Jean Dalibard e Gérard Roger. «Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers». In: *Phys. Rev. Lett.* 49 (25 dic. 1982), pp. 1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1804.

- [63] Nicholas A. Peters et al. «Remote State Preparation: Arbitrary Remote Control of Photon Polarization». In: *Phys. Rev. Lett.* 94 (15 apr. 2005), p. 150502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.150502.
- [64] Alexander Lohrmann, Chithrabanu Perumgatt e Alexander Ling. «Manipulation and measurement of quantum states with liquid crystal devices». In: *Opt. Express* 27.10 (mag. 2019), pp. 13765–13772. DOI: 10.1364/OE.27.013765.
- [65] Alexei Gilchrist, Nathan K. Langford e Michael A. Nielsen. «Distance measures to compare real and ideal quantum processes». In: *Phys. Rev. A* 71 (6 giu. 2005), p. 062310. DOI: 10.1103/PhysRevA.71.062310.
- [66] A. Jamiołkowski. «Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators». In: *Reports on Mathematical Physics* 3.4 (1972), pp. 275–278. DOI: 10.1016/0034-4877(72)90011-0.
- [67] Bao-Sen Shi e Akihisa Tomita. «Generation of a pulsed polarization entangled photon pair using a Sagnac interferometer». In: *Phys. Rev. A* 69 (gen. 2004). DOI: 10.1103/PhysRevA.69.013803.
- [68] Taehyun Kim, Marco Fiorentino e Franco N. C. Wong. «Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization Sagnac interferometer». In: *Phys. Rev. A* 73 (1 gen. 2006), p. 012316. DOI: 10.1103/PhysRevA.73.012316.
- [69] Fabian Steinlechner et al. «Efficient heralding of polarization-entangled photons from type-0 and type-II spontaneous parametric downconversion in periodically poled KTiOPO<sub>4</sub>». In: *JOSA B* 31 (set. 2014). DOI: 10.1364/JOSAB.31.002068.