

Relazione progetto di Calcolo Numerico

A.A. 2021/2022

Apollonio Francesco
Bianchi Andrea
Mazzetti Francesca

January 28, 2022

Contents

1	Introduzione	1
1.1	Il dataset	1
1.2	Gli algoritmi	1
1.3	I test	2
2	Analisi dei risultati ottenuti	3
3	PSNR e MSE al variare dei parametri	6
3.1	Introduzione	6
3.2	Variazione del PSNR	6
3.3	Variazione del MSE	7
3.4	Analisi dei dati ottenuti	7
4	Medie e Deviazioni standard	8
4.1	PSNR - Medie	8
4.2	PSNR - Deviazioni standard	9
4.3	MSE - Medie	10
4.4	MSE - Deviazioni standard	10
5	Analisi delle proprietà dai metodi numerici	11
5.1	L'andamento dell'errore	11
5.2	L'andamento della funzione obiettivo	12
5.3	L'andamento della norma del gradiente	14

1 Introduzione

Il problema di Deblur consiste nella ricostruzione di un'immagine a partire da un dato acquisito mediante il modello:

$$b = Ax + \eta$$

Con b che è l'immagine corrotta, x l'immagine originale da ricostruire, la matrice A applica il blur gaussiano e η è il rumore aggiunto all'immagine sfocata, con distribuzione Gaussiana di media 0 e deviazione standard σ .

1.1 Il dataset

Per eseguire i test richiesti è stato generato un dataset di otto immagini contenenti forme geometriche varie su sfondo nero a cui sono state aggiunte due ulteriori immagini fotografiche, delle quali una, la figura "sample9.png" molto contrastata e con pochi dettagli e l'altra, "sample10.png" meno contrastata ma più dettagliata.

1.2 Gli algoritmi

Per ricostruire le immagini danneggiate sono stati impiegati diversi algoritmi, in modo da poter poi confrontarne l'efficacia.

La soluzione naive Il primo tentativo di ricostruzione è stato fatto utilizzando un algoritmo semplice - per questo detto naive - per risolvere il problema di ottimizzazione:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

In questo caso la funzione da minimizzare è $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ e il suo gradiente è $\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b$. La funzione è stata implementata usando il metodo dei gradienti coniugati, implementato dalla funzione minimize inclusa nella libreria numpy.

Regolarizzazione Dal momento che la funzione naive recupera sì la nitidezza dell'immagine, ma introduce un rumore elevato, è necessario introdurre un termine di regolarizzazione di Tikhonov, il problema di minimizzazione diventa quindi:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2$$

La funzione da minimizzare è quindi $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2}\|x\|_2^2$ e il suo gradiente è $\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b + \lambda x$. La funzione è stata implementata sia tramite la funzione minimize inclusa nella libreria numpy che tramite il metodo del gradiente illustratoci a lezione. Sono poi stati eseguiti test con diversi valori di lambda.

Variazione totale Un altro termine di regolarizzazione adatto è dato dalla funzione di Variazione Totale. Data x l'immagine di dimensioni $n \times m$, la variazione totale TV di x è definita come:

$$TV(u) = \sum_i^n \sum_j^m \sqrt{\|\nabla u(i, j)\|_2^2 + \epsilon^2}$$

Il problema di minimo da risolvere diventa quindi:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda TV(u)$$

il cui gradiente è:

$$\nabla f(x) = (A^T Ax - A^T b) + \lambda \nabla TV(x)$$

La funzione è stata implementata usando il metodo del gradiente visto a lezione e già utilizzato nel precedente punto. Sono stati eseguiti test per diversi valori di λ .

1.3 I test

Dopo aver applicato il blur gaussiano e il disturbo alle immagini del dataset, abbiamo applicato diversi algoritmi per migliorare la qualità delle immagini. Per ogni immagine abbiamo eseguito un ciclo di test applicando diversi blur gaussiani, diversi valori di deviazione standard per il rumore e diversi valori per il parametro λ del termine di regolarizzazione di Tikhonov. In tutti i test i metodi sono stati limitati ad un numero massimo di iterazioni pari a 100, per permettere di elaborare tutte e dieci le immagini in un tempo ragionevole. I valori usati sono riassunti nella tabella 1.

I dati raccolti possono essere trovati integralmente nella cartella "data" allegata, di seguito commenteremo i risultati più rilevanti.

Dim Kernel	Std dev Sigma Kernel	Std Dev Rumore	Lambda
5×5	0.5	0.01	0.01
7×7	1	0.02	0.05
9×9	1.3	0.03	0.08
N.A.	N.A.	0.04	0.32
N.A.	N.A.	0.05	1

Table 1: Valori assunti dai parametri nei test

2 Analisi dei risultati ottenuti

Dai test effettuati sulle immagini (di seguito riporteremo solo due delle dieci immagini elaborate; le restanti immagini possono essere trovate nella galleria a fine documento) possiamo immediatamente notare come la correzione naive risulti largamente insufficiente ai fini di una ricostruzione accurata della figura di partenza.

I due metodi regolarizzati con parametro di Tikhonov danno risultati ottimi e simili fra loro. Il metodo del gradiente regolarizzato con parametro TV offre, invece, un risultato migliore nel caso di immagini con forme geometriche astratte ma genera figure non del tutto nitide (quasi come se fosse un effetto "acquerello") nel caso di scatti fotografici.

Ricordiamo, comunque, che dal momento che i metodi utilizzati sono iterativi, le funzioni convergenti e che, nel caso dei nostri test, i metodi sono stati limitati a 100 iterazioni, possiamo aspettarci un aumento della qualità del miglioramento con l'aumentare del numero di iterazioni.

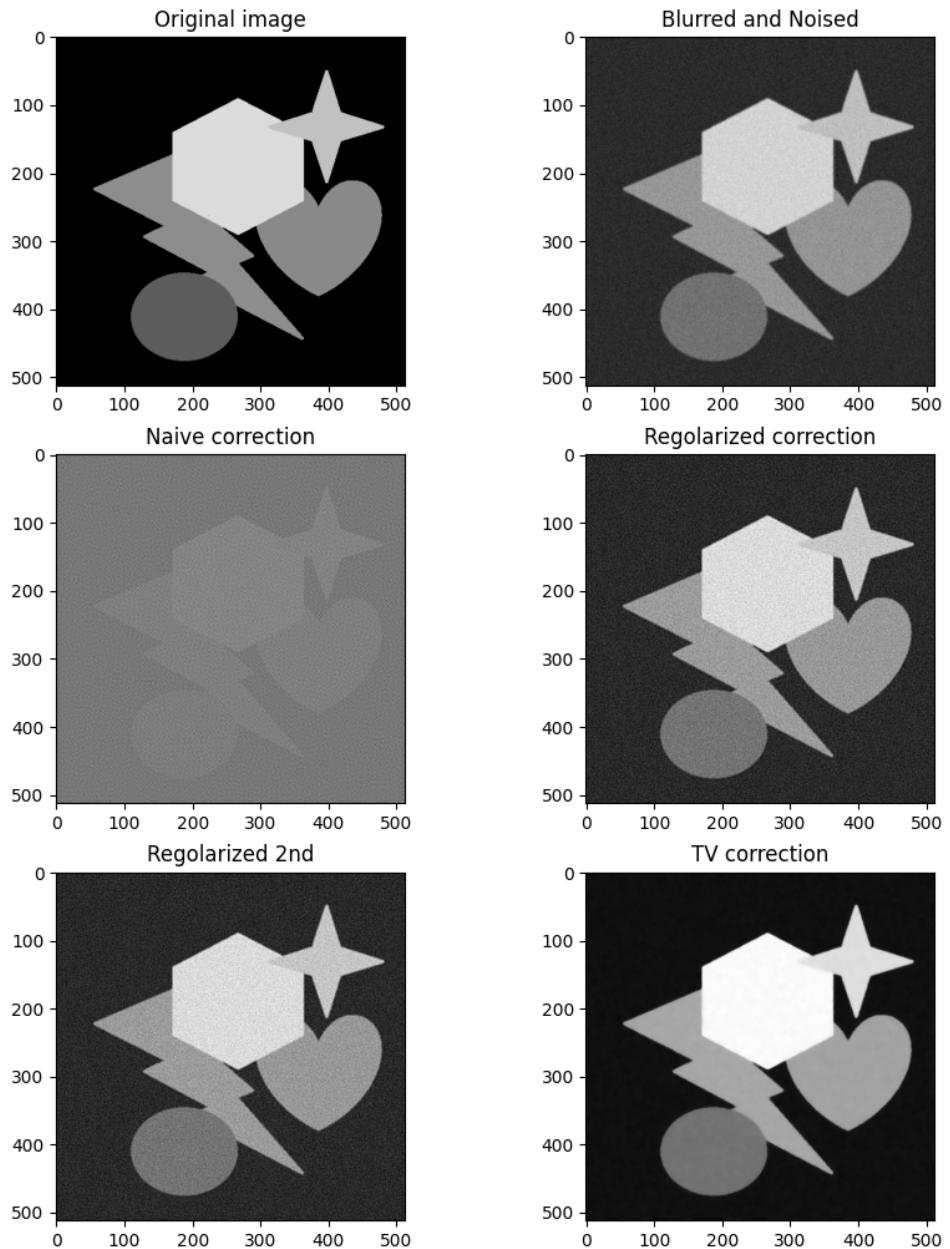


Figure 1: sample5.png - Dim. Kernel: 9×9 , $\sigma : 1.3$, Std. Dev.: 0.05, $\lambda : 0.08$

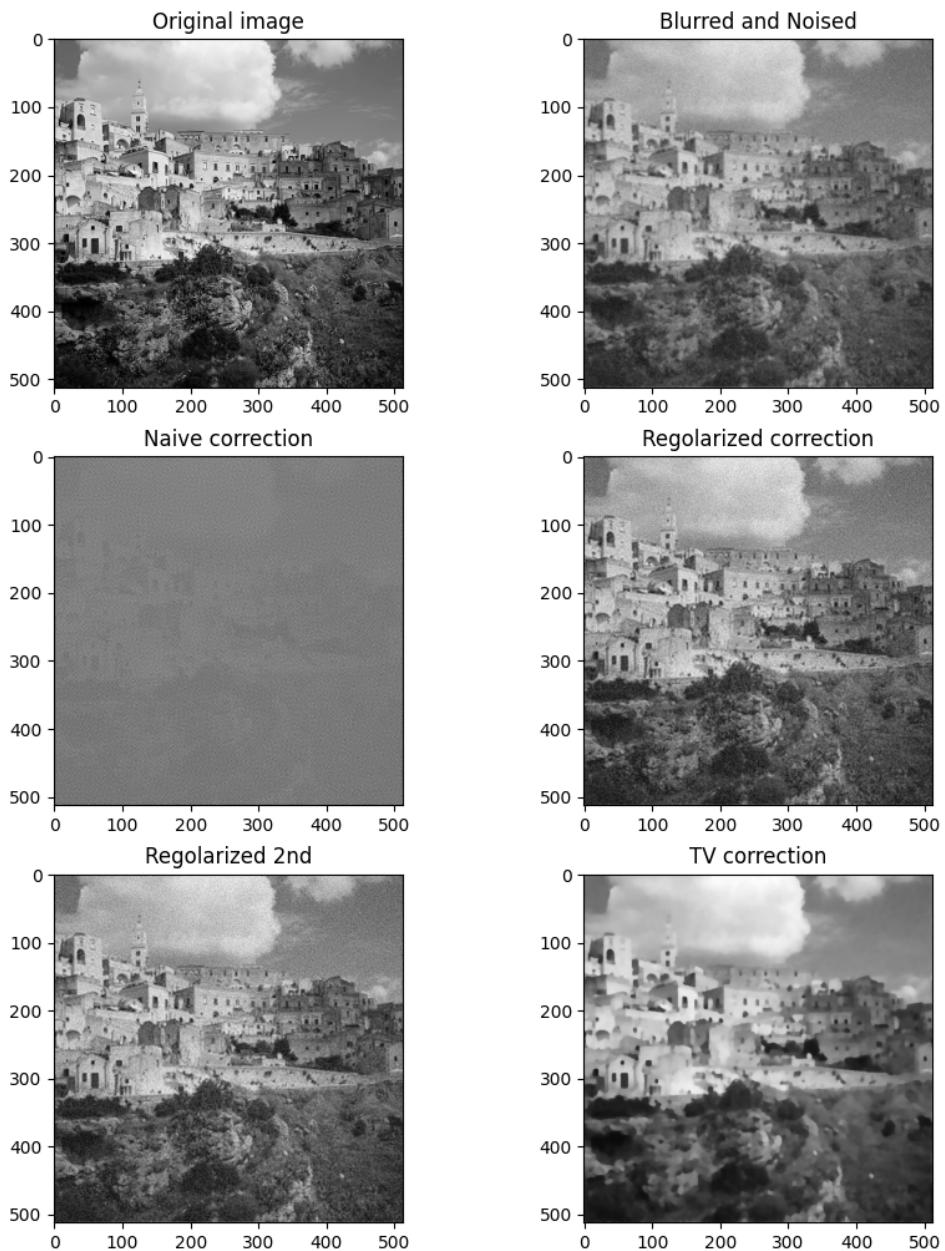


Figure 2: sample10.png - Dim. Kernel: 9×9 , $\sigma : 1.3$, Std. Dev.: 0.05, $\lambda : 0.08$

3 PSNR e MSE al variare dei parametri

3.1 Introduzione

Nel fare i test volti al raccoglimento dei dati sulla variazione di PSNR e MSE, abbiamo alterato la dimensione del kernel, il valore di σ , la deviazione standard del rumore e il valore del parametro di regolarizzazione usando i valori riportati nella tabella 1. Abbiamo così ottenuto 75 differenti valori di PSNR ed MSE per ogni algoritmo applicato su un'immagine, per un totale di 750 valori per l'intero dataset. Dato che una tabella di simili dimensioni richiederebbe troppo spazio all'interno di questo documento, riportiamo in questa sede solo le tabelle con le medie dei valori ottenuti fra le 10 immagini di alcuni test scelti. Per i dati completi rimandiamo ai file .csv allegati. I parametri sono indicati con la notazione KX_Y_Z; dove X indica la dimensione e il valore di sigma del kernel (K1 equivale ad un kernel di dimensione 5×5 con valore di $\sigma = 0.5$, K2 equivale ad una dimensione di 7×7 con $\sigma = 1$ e K3 indica un kernel di dimensione 9×9 con $\sigma = 1.3$), Y indica il valore della deviazione standard del rumore e Z il valore del parametro λ .

3.2 Variazione del PSNR

Parametri	Noised	Naive	Tikhonov1	Tikhonov2	TV
K1_0.01_0.01	32.888	20.906	28.853	29.397	40.310
K1_0.02_0.05	30.763	14.891	27.670	27.671	36.089
K1_0.03_0.08	28.663	11.362	25.762	25.762	34.484
K1_0.04_0.32	26.830	8.861	21.422	21.422	30.933
K1_0.05_1	25.248	6.925	15.829	15.829	26.091
K2_0.01_0.01	30.625	8.963	29.434	30.134	36.806
K2_0.02_0.05	29.216	2.883	28.629	28.630	33.337
K2_0.03_0.08	27.613	-0.660	26.921	26.921	32.157
K2_0.04_0.32	26.084	-3.171	21.414	21.414	29.549
K2_0.05_1	24.697	-5.128	15.785	15.785	26.568
K3_0.01_0.01	29.929	9.127	29.723	30.262	35.828
K3_0.02_0.05	28.696	3.018	28.697	28.699	32.249
K3_0.03_0.08	27.238	-0.550	27.071	27.071	31.340
K3_0.04_1	25.812	-3.069	15.764	15.764	26.297
K3_0.05_1	24.497	-5.031	15.759	15.759	26.284

Table 2: PSNR medi in test scelti

3.3 Variazione del MSE

Parametri	Noised	Naive	Tikhonov1	Tikhonov2	TV
K1_0.01_0.01	0.00062	0.0081	0.0013	0.0011	0.00021
K1_0.02_0.05	0.00092	0.0324	0.0017	0.0017	0.00059
K1_0.03_0.08	0.00142	0.0730	0.0027	0.0027	0.00080
K1_0.04_0.32	0.00211	0.1299	0.0083	0.0083	0.00168
K1_0.05_1	0.00302	0.2029	0.0313	0.0313	0.00352
K2_0.01_0.01	0.00108	0.1269	0.0011	0.0010	0.00049
K2_0.02_0.05	0.00138	0.5148	0.0014	0.0014	0.00092
K2_0.03_0.08	0.00188	1.1643	0.0021	0.0021	0.00113
K2_0.04_0.32	0.00258	2.0757	0.0085	0.0085	0.00198
K2_0.05_1	0.00348	3.2576	0.0316	0.0316	0.00334
K3_0.01_0.01	0.00128	0.1222	0.0011	0.0010	0.00061
K3_0.02_0.05	0.00158	0.4990	0.0015	0.0015	0.00107
K3_0.03_0.08	0.00208	1.1352	0.0021	0.0021	0.00127
K3_0.04_0.32	0.00278	2.0320	0.0086	0.0086	0.00211
K3_0.05_1	0.00368	3.1857	0.0318	0.0318	0.00348

Table 3: MSE medi in test scelti

3.4 Analisi dei dati ottenuti

L’analisi delle misure di PSNR e MSE va in contrasto con quanto osservato nelle immagini analizzate poc’anzi. Risulta, infatti, che il valore di PSNR dell’algoritmo che implementa il metodo del gradiente con il parametro di regolarizzazione *TV* sia sempre superiore a quello degli altri algoritmi, nonostante, come già riportato, le immagini fotografiche ottenute con lo stesso metodo risultino, se pur all’apparenza, qualitativamente inferiori (almeno nel caso di un massimo di 100 iterazioni).

4 Medie e Deviazioni standard

Abbiamo poi calcolato, per alcuni parametri fissati, i valori medi e la deviazione standard di PSNR e MSE calcolati sull'intero set di immagini, di seguito riportati.

4.1 PSNR - Medie

Parametri	Noised	Naive	Tikhonov1	Tikhonov2	TV
K1_0.02_0.32	30.763	14.894	21.781	21.781	31.042
K1_0.04_0.08	26.828	8.878	23.923	23.923	34.110
K2_0.01_0.05	30.622	8.966	30.553	30.553	33.510
K2_0.03_0.01	27.612	-0.671	21.223	22.298	34.238
K2_0.04_1	26.078	-3.175	15.791	15.791	26.581
K3_0.01_0.32	29.933	9.123	21.522	21.522	29.281
K3_0.03_0.08	27.238	-0.550	27.071	27.071	31.340
K3_0.05_0.05	24.494	-5.038	24.107	24.110	31.849

Table 4: PSNR medi

Analizzando tale tabella possiamo notare come le medie rappresentano esattamente i valori che ci aspettavamo: la qualità dell'immagine migliora sensibilmente ed in ogni caso utilizzando la funzione di Variazione Totale. Scarse differenze possiamo invece notare tra i due algoritmi del metodo del gradiente. Da notare sono, inoltre, i valori del PSNR negativi per K3 (Kernel di dimensione 9 x 9 con sigma = 1.3). Ciò avviene a causa del Kernel utilizzato: esso rende estremamente costosa computazionalmente la generazione dell'immagine a tal punto da non essere eseguita totalmente. Questo rende tali valori inaffidabili.

4.2 PSNR - Deviazioni standard

Parametri	Noised	Naive	Tikhonov1	Tikhonov2	TV
K1_0.02_0.32	1.658	0.0236	2.641	2.641	4.471
K1_0.04_0.08	0.841	0.0410	0.582	0.582	4.472
K2_0.01_0.05	2.528	0.0375	2.172	2.172	4.362
K2_0.03_0.01	1.577	0.0192	0.168	0.233	3.687
K2_0.04_1	1.228	0.0314	2.743	2.743	3.538
K3_0.01_0.32	2.572	0.0794	2.637	2.637	3.872
K3_0.03_0.08	1.697	0.0467	1.831	1.831	3.788
K3_0.05_0.05	1.072	0.0192	0.824	0.825	3.800

Table 5: PSNR deviazioni standard

Analizziamo i risultati ottenuti dall’analisi statistica delle ”Deviazioni Standard”. Notiamo immediatamente come i valori che tendono a discostarsi maggiormente dalla loro media sono i PSNR risultanti dall’utilizzo della funzione di Variazione Totale. D’altro canto i risultati più ”affidabili mediamente” risultano essere invece quelli del PSNR dell’immagine corrotta. In linee generali possiamo infine notare un andamento di tale valore crescente al crescere delle dimensioni del Kernel.

4.3 MSE - Medie

Parametri	Noised	Naive	Tikhonov1	Tikhonov2	TV
K1_0.02_0.32	0.00092	0.0323	0.00790	0.00790	0.00166
K1_0.04_0.08	0.00212	0.1294	0.00409	0.00409	0.00083
K2_0.01_0.05	0.00108	0.1268	0.00102	0.00102	0.00091
K2_0.03_0.01	0.00188	1.1671	0.00755	0.00589	0.00064
K2_0.04_1	0.00259	2.0775	0.03167	0.03167	0.00333
K3_0.01_0.32	0.00128	0.1223	0.00844	0.00844	0.00207
K3_0.03_0.08	0.00208	1.1352	0.00218	0.00218	0.00127
K3_0.05_0.05	0.00368	3.1904	0.00396	0.00396	0.00113

Table 6: MSE medi

4.4 MSE - Deviazioni standard

Parametri	Noised	Naive	Tikhonov1	Tikhonov2	TV
K1_0.02_0.32	0.000509	0.000175	0.004603	0.00460	0.00274
K1_0.04_0.08	0.000511	0.001225	0.000590	0.00059	0.00143
K2_0.01_0.05	0.000989	0.001092	0.000718	0.00071	0.00151
K2_0.03_0.01	0.000983	0.005180	0.000307	0.00033	0.00095
K2_0.04_1	0.000990	0.015020	0.018500	0.01850	0.00385
K3_0.01_0.32	0.001187	0.002201	0.005215	0.00521	0.00299
K3_0.03_0.08	0.001185	0.012188	0.001236	0.00123	0.00188
K3_0.05_0.05	0.001187	0.014144	0.000918	0.00091	0.00167

Table 7: MSE deviazioni standard

L’analisi statistica dei parametri di MSE ottenuti ci riporta dei risultati estremamente positivi. Notiamo infatti come ognuno dei valori in tabella risulti strettamente minore anche di una singola unità: tutti valori MSE risultano estremamente simili tra loro quindi vicini alla loro stessa media.

5 Analisi delle proprietà dai metodi numerici

Analizziamo, infine, l'andamento del metodo del gradiente con i due parametri di regolarizzazione usati: il parametro di Tikhonov e il parametro Variazione Totale. L'algoritmo è stato eseguito su due immagini del dataset: l'immagine sample5 (figure geometriche) e l'immagine sample10 (scatto fotografico). I dati raccolti sono commentati di seguito.

5.1 L'andamento dell'errore

I dati raccolti sono stati inseriti nei due grafici (Figura 3 e Figura 4) qui riportati, il primo si riferisce all'esecuzione sull'immagine sample5 mentre il secondo all'esecuzione sull'immagine sample10.

Possiamo notare come in entrambe le esecuzioni l'errore del metodo del gradiente con parametro TV è maggiore (si direbbe quasi di un valore costante) rispetto all'errore del metodo con parametro di Tikhonov. Nel caso della seconda immagine i due andamenti sono quasi identici (a eccezione dello sfasamento).

Dopo una diminuzione iniziale l'errore torna ad aumentare per stabilizzarsi su un andamento asintotico all'incirca a partire dalla 40-esima iterazione.

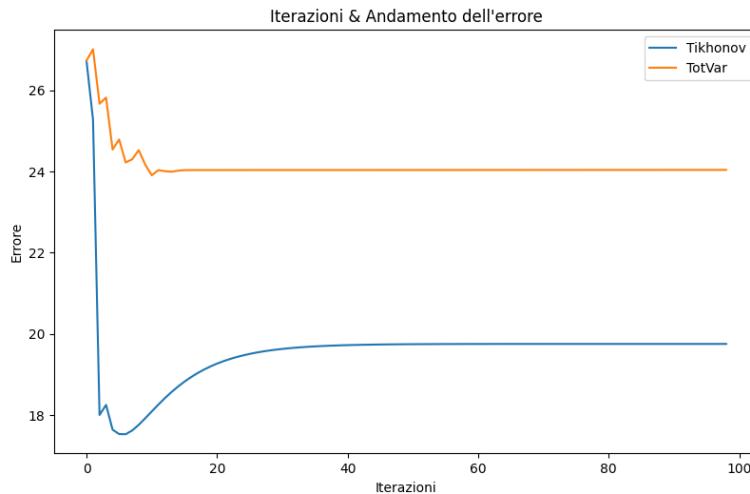


Figure 3: Andamento dell'errore, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample5

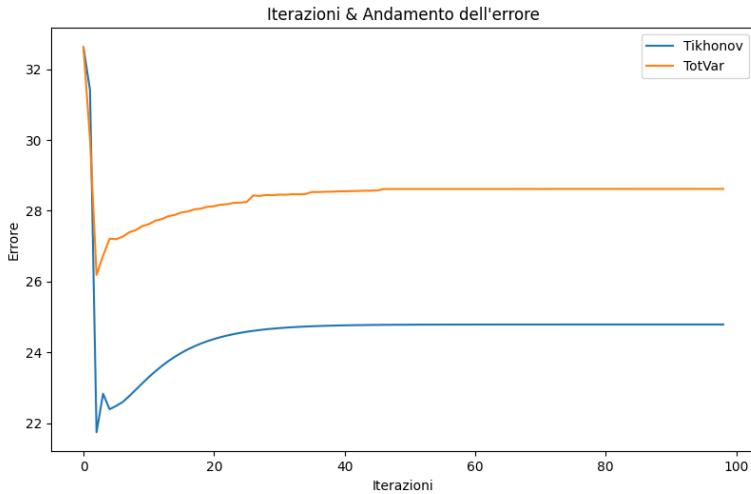


Figure 4: Andamento dell'errore, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample10

5.2 L'andamento della funzione obiettivo

Anche in questo caso i dati raccolti sono stati inseriti nei due grafici (Figura 5 e Figura 6) qui riportati: il primo grafico si riferisce all'esecuzione sull'immagine sample5 mentre il secondo a quella sull'immagine sample10.

Possiamo notare come in entrambe le esecuzioni l'andamento della funzione da minimizzare nel metodo del gradiente con parametro TV è migliore rispetto all'andamento del metodo con parametro di Tikhonov.

Fin dalle primissime iterazioni, inoltre, la funzione assume un andamento chiaramente asintotico. Questo ci permette di dedurre come un auspicabile miglioramento del risultato, ottenibile da un aumento delle iterazioni, è in realtà relativamente ridotto; possiamo infatti ottenere delle figure ottimali già con un centinaio di iterazioni.

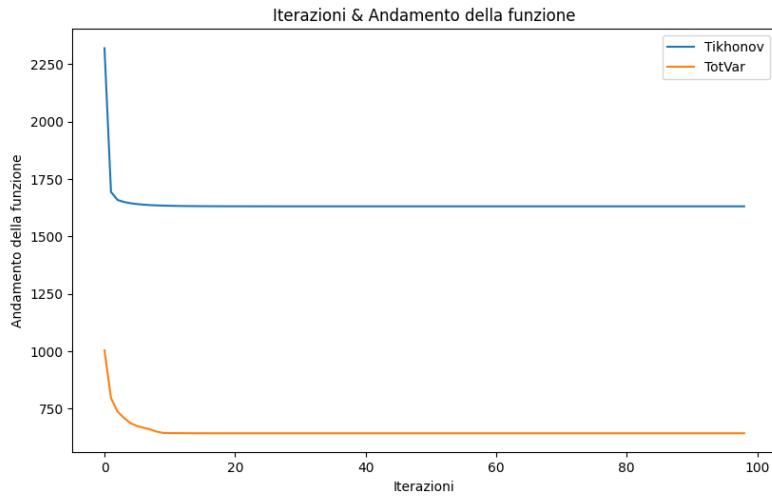


Figure 5: Andamento della funzione, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample5

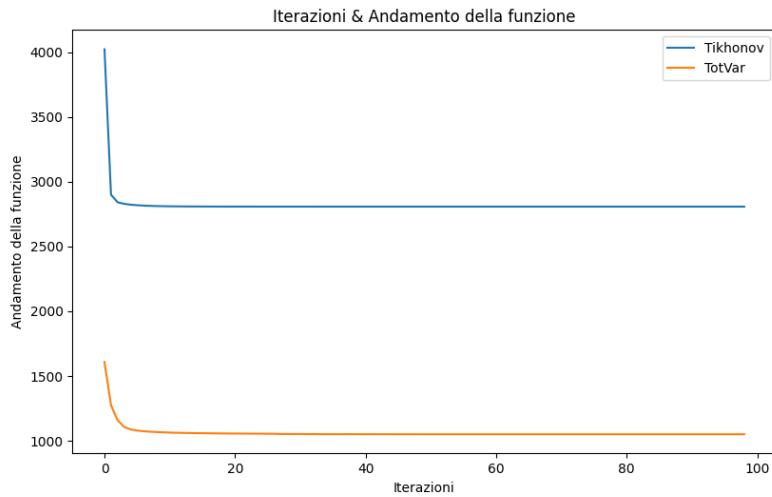


Figure 6: Andamento della funzione, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample10

5.3 L'andamento della norma del gradiente

Analizziamo, infine, l'andamento della norma del gradiente della funzione da minimizzare. Anche in questo caso, come nei precedenti, i dati raccolti sono stati inseriti nei due grafici (Figura 7 e Figura 8) sotto riportati, il primo grafico si riferisce all'esecuzione sull'immagine sample5 mentre il secondo a quella sull'immagine sample10.

Possiamo notare come in entrambe le esecuzioni l'andamento del gradiente della funzione è pressapoco simile per entrambi i parametri di regolarizzazione scelti.

La norma del metodo che implementa il parametro TV oscilla maggiormente nelle prime iterazioni rispetto alla norma dell'implementazione con parametro di Tikhonov, ma anche in questo caso è sufficiente superare le 40 iterazioni perché il risultato si stabilizzi ed entrambe le implementazioni assumano un andamento simile.

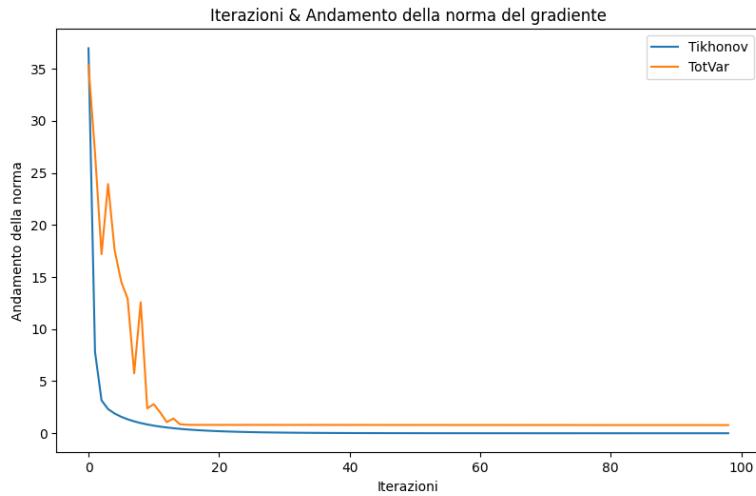


Figure 7: Andamento della norma del gradiente, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample5

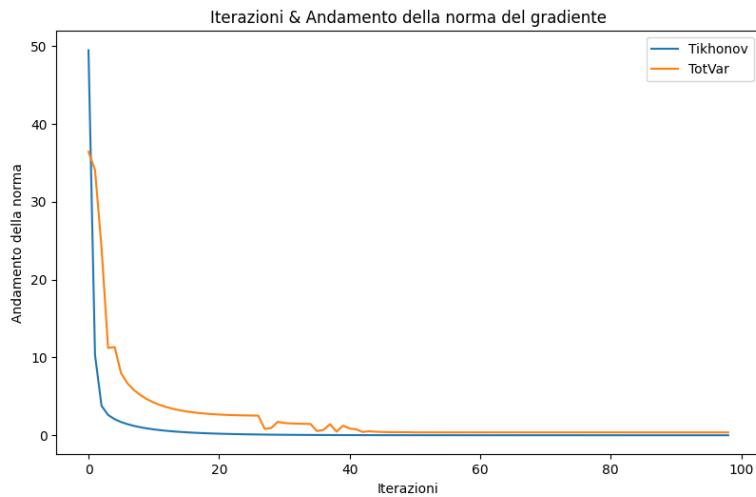


Figure 8: Andamento della norma del gradiente, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample10

List of Figures

1	sample5.png - Dim. Kernel: 9×9 , $\sigma : 1.3$,Std. Dev.:0.05, $\lambda : 0.08$	4
2	sample10.png - Dim. Kernel: 9×9 , $\sigma : 1.3$,Std. Dev.:0.05, $\lambda : 0.08$	5
3	Andamento dell'errore, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample5	11
4	Andamento dell'errore, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample10	12
5	Andamento della funzione, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample5	13
6	Andamento della funzione, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample10	13
7	Andamento della norma del gradiente, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample5	14
8	Andamento della norma del gradiente, confronto fra parametro di Tikhonov e TV su immagine sample10	15

List of Tables

1	Valori assunti dai parametri nei test	3
2	PSNR medi in test scelti	6
3	MSE medi in test scelti	7
4	PSNR medi	8
5	PSNR deviazioni standard	9
6	MSE medi	10
7	MSE deviazioni standard	10

Galleria

