1 Teorema de los Números Primos - Resumen de la Demostración (Análisis Complejo)

Teorema 1.1 (Teorema de los Números Primos)**.** *La función de conteo de números primos $\pi(x)$, que denota la cantidad de números primos menores o iguales a x, satisface:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1.$$

Equivalentemente, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ cuando $x \to \infty$.

Resumen de la Demostración (Utilizando la Función Zeta de Riemann). La demostración original del Teorema de los Números Primos, desarrollada independientemente por Hadamard y de la Vallée Poussin, se basa en las profundas propiedades de la función zeta de Riemann $\zeta(s)$. A continuación, se presenta un resumen de los puntos clave:

1. **Función Zeta de Riemann:** La función zeta se define para $\mathrm{Re}(s) > 1$ como:

   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

   Esta identidad (producto de Euler) establece una conexión fundamental entre la función zeta y la distribución de los números primos.

2. **Relación con la Función de Conteo de Primos:** El Teorema de los Números Primos es equivalente a la siguiente afirmación sobre la función de Chebyshev $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \ln(p)$:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

   La función zeta y $\vartheta(x)$ están interrelacionadas a través de identidades que involucran la transformada de Mellin.

3. **Extensión Meromorfa y Polos:** La función zeta puede ser extendida a una función meromorfa en todo el plano complejo, con un único polo simple en $s = 1$. Las propiedades analíticas de esta extensión son cruciales.

4. **No Existencia de Ceros en Re$(s) = 1$:** Un paso esencial en la demostración es probar que $\zeta(1+it) \neq 0$ para cualquier número real t. Esta propiedad, demostrada mediante técnicas de análisis complejo, es fundamental para obtener la estimación asintótica de $\vartheta(x)$.

5. **Teorema de Inversión de Perron:** Este teorema del análisis complejo permite expresar $\vartheta(x)$ como una integral de contorno que involucra la función zeta y su derivada logarítmica $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

6. **Estimación de la Integral de Contorno:** La demostración culmina con la cuidadosa evaluación asintótica de esta integral de contorno. Utilizando el hecho de que $\zeta(1+it) \neq 0$ y las propiedades del polo de $\zeta(s)$ en $s=1$, se demuestra que el término dominante en la integral conduce a $\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$, lo que implica el Teorema de los Números Primos.

Nota: La demostración "elemental" posterior de Selberg y Erdős, aunque no utiliza directamente el análisis complejo, es también intrincada y se basa en desigualdades y métodos combinatorios dentro de la teoría de números.

Para una comprensión detallada de la demostración, se recomienda consultar textos avanzados sobre teoría analítica de números como "An Introduction to the Theory of Numbers" de Hardy y Wright, o "Multiplicative Number Theory I: Classical Theory" de Montgomery y Vaughan. □