Introdução aos Limites

Introdução

Afinal, o que é um limite? É mais intuitivo do que pode parecer. **O limite é o valor para o qual a função se aproxima à medida que sua variável tende a um valor**. Já vamos aproveitar para introduzir um pouco de notação. Por exemplo:

Uma maneira de ler o que está escrito acima é: limite de com tendendo a .

À medida que o se aproxima de , pra qual valor você acha que o vai se aproximar? Dá vontade de simplesmente substituir o ali no lugar do , não é? Pois é isso mesmo que devemos fazer! Portanto, neste caso:

Daí você provavelmente está pensando: “Sério...? É só isso? Não é possível que seja tão fácil ¬¬”. Pois bem... Não é!

Mas a verdade é que, em todos os casos, a primeira coisa que você deve fazer é substituir o valor da variável na função, para saber o que está acontecendo com o limite.

Como assim? Bom, como veremos mais à frente, no assunto de limites nós lidamos com alguns tipos de indeterminações. E para identificar qual o tipo, você precisa substituir a variável. Já de início, vamos introduzir umas coisas estranhas (que não são indeterminações!!!) para você ir se acostumando:

Ou seja, é quase como se estivéssemos escrevendo:

Pois bem, você pode usar essas equações **erradas** para se orientar. Mas jamais escreva isso como parte da resolução!

Temos também outro limite que virá a ajudar a nossa vida:

Propriedades de Limites

Felizmente, as propriedades são bastante intuitivas! É quase como se nós estivéssemos fazendo a distributiva do limite sobre todos os termos da função! O único detalhe é que, para a propriedade valer, os limites à direita da equação precisam existir! Isto significa que no lado direito não pode resultar nenhuma indeterminação. Nós veremos indeterminações mais à frente.

Esta última vale para contínua somente.

Exemplos de utilização das propriedades incluem:

Reparou como o limite entrou na raiz? Esta é aquela última propriedade em ação (minha preciosa) e ela está valendo porque a função raiz quadrada é contínua, conforme tínhamos comentado. Prosseguindo, basta substituir:

Utilizar essas regras só se torna um problema quando elas **não** são válidas, mas não é muito difícil de perceber isto. Você só precisa ter em mente quando que nós chegamos a uma **indeterminação**.

Indeterminações

Existem vários tipos de indeterminações, dentre os quais os mais comuns são:

Acho que, para a maioria das pessoas, a última destas que é a mais estranha de se perceber (todo mundo acha que dá sempre zero!), portanto vamos começar por ela. Ex.:

Como que nós começamos a atacar o problema? Conforme comentamos na introdução, deve-se substituir o valor de pra ver qual é. Deu ruim, não deu? Substituindo, obtemos duas divisões por zero, isto significa que, se utilizássemos a propriedade da soma, teríamos:

Daí chegamos numa indeterminação. Isto significa que **a propriedade**, neste caso, **não é válida**! Deu vontade de dizer que dá zero, não é? Mas nesse caso, infelizmente, a resposta não é zero. Para resolver o problema, você deve manipular a função para chegar em algo em que seja válida alguma propriedade, conforme veremos nos exercícios.

Exemplos mais simples das outras indeterminações seriam:

Repare que, dependendo da forma como você usa as propriedades de limites, você pode chegar em indeterminações diferentes pro mesmo problema. Mas não importa, você sabe que algo está errado de qualquer forma. Poderíamos pegar o primeiro exemplo e usar a propriedade do produto:

Outro que pode parecer estranho é o . Dá vontade de dizer que dá um, certo? Mas observe, se supusermos que é :

Puxando o logaritmo de ambos os lados:

Ou seja, igualando uma indeterminação a zero! Não é razoável, não concorda?

Bom, é isso. No capítulo da regra de L’Hospital vamos ver com mais calma cada um desses problemas. Até lá.