Matemática Discreta

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 27 de Fevereiro de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo 2
Princípios de Enumeração Combinatória

Introdução

Exemplo

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?
- Quantas sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros existem?
- Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. A equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ tem quantas soluções com $x_i \in \mathbb{N}$?
- Sejam 50 pessoas numa sala de 7 m $\times$ 7 m. Então, há duas pessoas que estão a uma distância inferior a 1.5 metros entre elas?
- ...

Definição

Seja $f\colon A \longrightarrow B$ uma função. Então, f diz-se

- **injetiva** quando, para todos os $x, y \in A$: $f(x) = f(y) \implies x = y$.
- **sobrejetiva** quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- **bijetiva** quando f é injetiva e sobrejetiva.

Definição

Uma função $f\colon A \longrightarrow B$ diz-se **invertível** quando existe uma função $g\colon B \longrightarrow A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Teorema

$f\colon A \longrightarrow B$ é invertível se e somente se f é bijetiva.

Nota

Para um conjunto finito A, denota-se por $|A|$ o número de elementos de A.

1. O princípio da gaiola dos pombos

A ideia

n pombos voam para m gaiolas. Se $n > m$, então pelo menos uma gaiola irá ter mais de um pombo.

Também conhecido como «o princípio das gavetas de Dirichlet».

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), matemático alemão.

Mais formal

Sejam A um conjunto e $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma família de subconjuntos de A dois a dois disjunta com

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m.$$

Se $|A| > m$, então $|A_i| > 1$ para algum $1 \leq i \leq m$.

Formulação alternativa

Sejam A e B conjuntos finitos e $f : A \longrightarrow B$ uma função. Se $|A| > |B|$, então f não é injetiva.

A contraposição é «mais óbvia»: Se $f : A \longrightarrow B$ é injetiva, então $|A| \leq |B|$.

Exemplo

Há duas pessoas aqui na sala que fazem anos no mesmo mês.

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f\colon \{\text{pessoas na sala}\} &\longrightarrow \{\text{janeiro}, \dots, \text{dezembro}\}, \\ p &\longmapsto \text{o mês do nascimento de } p \end{aligned}$$

com

$$|\{\text{janeiro}, \dots, \text{dezembro}\}| = 12$$

e

$$|\{\text{pessoas na sala}\}| > 12 \qquad \text{(espero).}$$

Logo, f não é injetiva.

Exemplo

Sejam 50 *pessoas numa sala de* 7 *m* $\times$ 7 *m. Então, há duas pessoas que estão a uma distância inferior a* 1.5 *metros entre elas.*

Dividimos a sala em quadrados «unitários» e consideremos a função

$$\begin{aligned} f\colon \{\text{as pessoas na sala}\} &\longrightarrow \{\text{os quadrados}\} \\ p &\longmapsto \text{o quadrado onde } p \text{ está} \end{aligned}$$

(se p está na fronteira, escolhemos um dos quadrados). Como

$$|\{\text{as pessoas na sala}\}| = 50 \quad \text{e} \quad |\{\text{os quadrados}\}| = 49,$$

há duas pessoas p e q no mesmo quadrado (f não é injetiva). Logo:

$$\begin{aligned} \text{«a distância entre } p \text{ e } q\text{»} &\leq \text{o comprimento do diagonal do quadrado} \\ &= \sqrt{2} < 1.5. \end{aligned}$$

Teorema

Para todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existem números inteiros p e q com $q \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.

Nota

Logo, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{n^2}$.

Notação

Para $x \in \mathbb{R}$, denota-se por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro a com $a \leq x$.

Teorema

Para todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existem números inteiros p e q com $q \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.

Demonstração.

- Para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, consideremos $r_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor \in [0, 1[$.
- Consideremos a função

$$\begin{aligned} f\colon \{0, 1, \dots, n\} &\longrightarrow \left\{ \left[0, \tfrac{1}{n}\right[,\ \left[\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right[,\ \dots,\ \left[\tfrac{n-1}{n}, 1\right[\right\} \\ k &\longmapsto \text{o intervalo } \mathcal{I} \text{ com } r_k \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

- Pelo princípio da gaiola dos pombos, existem números l e k em $\{0, 1, \dots, n\}$ (digamos $l < k$) tal que $|r_l - r_k| < \frac{1}{n}$.
- Portanto,

$$\frac{1}{n} > |k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor - l\alpha + \lfloor l\alpha \rfloor| = |(k - l)\alpha - (\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor)|$$

e escolhemos $q = k - l \in \{1, \dots n\}$ e $p = \lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor$. $\square$

Exemplo

Num torneio em que participam $n \geq 2$ equipas de futebol, todas as equipas jogam uma vez umas com as outras. Mostre que em cada jornada pelo menos duas equipas realizaram o mesmo número de jogos até esta jornada.

Fixamos uma jornada, e consideremos

$$\begin{aligned} N\colon \{\text{as } n \text{ equipas}\} &\longrightarrow \{0, 1, \dots, n-2, n-1\}. \\ e &\longmapsto \text{o número total de jogos de } e \end{aligned}$$

Caso 1: Cada equipa realizou pelo menos um jogo. Então, podemos considerar acima o conjunto de chegada $\{1, \dots, n-1\}$; pelo princípio da gaiola dos pombos, N não é injetiva.

Caso 2: Pelo menos uma equipa não realizou nenhum jogo. Logo, nenhuma equipa realizou $n-1$ jogos e por isso (ver acima), pelo princípio da gaiola dos pombos, N não é injetiva.

Ideia

Suponhamos que temos m caixas. Se em cada caixa há no máximo k bolas, então temos no máximo mk bolas.

Contraposição: Se temos mais do que mk bolas, então uma caixa tem mais do que k bolas.

Mais formal

Sejam A um conjunto e $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ uma família de subconjuntos de A dois a dois disjunta com

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m.$$

Se $km < |A|$, então, $|A_i| > k$ para algum $1 \leq i \leq m$.

Formulação alternativa

Sejam A e B conjuntos finitos e $f : A \longrightarrow B$ uma função.

Se $k|B| < |A|$, então existe um $b \in B$ com $|\{x \in A \mid f(x) = b\}| > k$.

Exemplo

Na área metropolitana de Lisboa, há pelo menos 15 pessoas com o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.

(Cada pessoa tem no máximo 200000 fios de cabelo na cabeça e na área metropolitana de Lisboa residem 2,871,133 pessoas[a].)

Agora consideremos a função «número de fios de cabelo na cabeça»:

$$f\colon \{\text{Lisboetas}\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, 200000\}.$$

Como $14 \cdot 200001 < 2821697$, existe um $n \in \{0, 1, \dots, 200000\}$ com

$$|f^{-1}(n)| > 14; \qquad (\text{Nota:} \quad f^{-1}(n) = \{p \mid f(p) = n\})$$

isto é, há pelo menos 15 pessoas com n fios de cabelo na cabeça.

[a] fonte: Wikipédia.

2. O PRINCÍPIO DA BIJEÇÃO

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f\colon A \longrightarrow B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Nota

Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Existe uma bijeção entre o conjunto C dos números naturais de 4 algarismos em $A = \{1, 2, \dots, 9\}$ e o conjunto A^4.

De facto, a função

$$f\colon A^4 \longrightarrow C, \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \longmapsto a_1 10^3 + a_2 10^2 + a_3 10 + a_4$$

é bijetiva.

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f\colon A \longrightarrow B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Nota

Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Determinamos o número de subconjuntos de $X = \{1, \dots, n\}$.

A função

$$P(X) \longrightarrow \{\text{as sequências binárias de comprimento } n\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

é bijetiva (porque é invertível).

3. Os princípios da adição e da multiplicação

O príncipio da adição

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos dois a dois disjuntos (isto é, tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$). Então

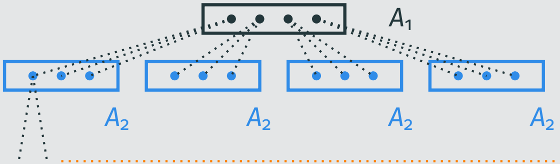
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

O princípio da multiplicação

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

Ilustração



Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n.

  Contamos os elementos de $\underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ vezes}}$.

- Logo, para um conjunto X com n elements: $|P(X)| = 2^n$.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?

  Determinamos o tamanho do conjunto

  $$\{1, \dots, 9\}^4;$$

  ou seja, existem $9^4 = 6561$ tais números.

- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $0, \dots, 9$ e que são divisíveis por 5?

  O conjunto

  $$\{1, \dots 9\} \times \{0, 1, \dots, 9\}^2 \times \{0, 5\}$$

  tem 1800 elementos.

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos «a», «b», «c», «(», «)» de modo que

- *o número de «(» é igual ao número de «)»,*
- *em cada parte inicial da palavra, o número de «(» é maior ou igual ao número de «)»,*
- *entre os símbolos «(» e «)» está pelo menos um dos símbolos «a,b,c».*

Seja S o conjunto destas palavras, e consideremos

- $S_0 = \{p \in S \mid p$ não tem nenhuma parêntese$\}$,
- $S_1 = \{p \in S \mid p$ tem uma vez o símbolo «(»$\}$,
- $S_2 = \{p \in S \mid p$ tem duas vezes o símbolo «(»$\}$,

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto), e por isso

$$|S| = |S_0| + |S_1| + |S_2|.$$

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$ (dois a dois disjunto).

  Aqui o primeiro número indica a posição de «(», o segundo número indica a posição de «)».

  Portanto: $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$, logo $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$.
- $S_2 = \{$«((a))», «((b))», «((c))»$\}$, logo $|S_2| = 3$.

Conclusão: $|S| = 243 + 162 + 3 = 408$.

4. Generalizações

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (o número de escolhas é independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (o número de escolhas é independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{os números com 4 algarismos distintos}\}| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$
- Para $A = \{$os números com 4 algarismos distintos em $1, \dots, 9$, um deles igual a $5\}$,

$$|A| = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344.$$

Nota

O princípio da adição é apenas válido quando os conjuntos $A_1, \dots, A_n$ são dois a dois disjuntos. Mais geral, temos:

O princípio de inclusão-exclusão

- Para os conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para os conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - \\
&\qquad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right).$$

Abraham de Moivre (1718), Daniel da Silva (1854), James Joseph Sylvester (1883), …

Exemplo

Determinarmos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

- Seja $A_k = \{n \in \{1, \dots, 1000\} \mid k \text{ divide } n\} \quad (k = 1, 2, \dots)$.
- Assim,

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5| &= |A_3| + |A_5| - |A_3 \cap A_5| \\ &= \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor \\ &= 333 + 200 - 66 = 467. \end{aligned}$$

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais («a,e,i,o,u»)?

Sejam $A_a, \dots, A_u$ os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem «a», …, «u», respetivamente. Então, procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| = 22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| = 21^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \dots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \dots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 18^{10}$.

Há 10 intersecções de 2 conjuntos, 10 intersecções de 3 conjuntos e 5 intersecções de 4 conjuntos. Logo,

$$|A_a \cup \dots \cup A_u| = 5 \cdot 22^{10} - 10 \cdot 21^{10} + 10 \cdot 20^{10} - 5 \cdot 19^{10} + 18^{10}.$$

Subconjuntos vs. propriedades

Sejam X um conjunto finito, $p_1, \dots, p_n$ propriedades aplicável aos elementos de X e $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$ o número de elementos de X que têm pelo menos as propriedades p_{i_1}, p_{i_2}, … e p_{i_k}.

O número de elementos de X que têm pelo menos uma das propriedades $p_1, \dots, p_n$ e dado por

$$\begin{aligned}|A| = N(1) &+ \cdots + N(n)\\ &- N(1,2) - \cdots - N(n-1,n)\\ &+ N(1,2,3) + \cdots + N(n-2,n-1,n)\\ &- \dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &+ (-1)^{n+1} N(1,\dots,n).\end{aligned}$$

Nota: Sendo $A_i = \{x \in X \mid p_i(x)\}$,

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n, \qquad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

Subconjuntos vs. propriedades

Sejam X um conjunto finito, $p_1, \dots, p_n$ propriedades aplicável aos elementos de X e $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$ o número de elementos de X que têm pelo menos as propriedades p_{i_1}, p_{i_2}, ... e p_{i_k}.

O número de elementos de X que têm nenhuma das propriedades $p_1, \dots, p_n$ e dado por

$$\begin{aligned}
|X \setminus A| = |X| &- N(1) - \cdots - N(n) \\
&+ N(1,2) + \cdots + N(n-1, n) \\
&- N(1,2,3) - \cdots - N(n-2, n-1, n) \\
&+ \dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&+ (-1)^n N(1, \dots, n).
\end{aligned}$$

Nota: Sendo $A_i = \{x \in X \mid p_i(x)\}$,

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n, \qquad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

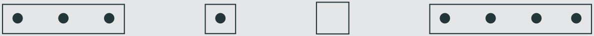
5. O princípio da bijeção (outra vez)

Exemplo

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i, k, n \in \mathbb{N}$) coincide com o número de maneiras de colocar k bolas indistinguíveis em n caixas numeradas.

Exemplo

O número de maneiras de colocar k bolas indistinguíveis em n caixas numeradas coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros.



1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1

Exemplo

O número de sequências binárias com k uns e m zero coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos.

Exemplo

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos.

De facto, com $X = \{1, \dots, k+m\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_{k+m} \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k+m} \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Voltaremos a estas questões no

Capítulo 3: Agrupamentos e Identidades Combinatórias.