Cálculo I

João Mendonça (jmendonca@ua.pt)

Ano Lectivo 2022/23

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Parte 2 - Integração de Funções Reais de uma Variável Real

Aula 7

Introdução às Primitivas

Definição

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, onde D_f é um sub-conjunto de pontos interiores (aberto) de $\mathbb{R}$. Caso exista, chamamos **(função)** primitiva de f a qualquer função $F : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in D_f$.

No caso de existência de uma primitiva de f, dizemos que f é primitivável. Diremos também que f é primitivável num aberto $A \subseteq D_f$ quando $f|_A$ for primitivável e que uma primitiva de $f|_A$ é uma primitiva de f em A.

Nota: Toda a primitiva de uma função contínua é uma função contínua.

Nota: Em termos de notação, para uma primitiva de uma função $y = f(x)$ é habitual utilizarmos a notação, $P_x f(x)$, $P_x f$, $P f(x)$, $P f$, $\int f(x)$ ou $\int f$.

Proposição

Sejam F_1 e F_2 duas primitivas de f num intervalo $]a, b[$. Então, $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ou seja, F_1 e F_2 diferem entre si por apenas uma constante real.

Exemplo

Dado que $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 50$ e $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ possuem a propriedade $F_1'(x) = x^2 = F_2'(x)$, temos que tanto F_1 como F_2 são primitivas de $f(x) = x^2$. Na realidade, dado o resultado do slide anterior, temos já a consciência global de que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

O recíproco do resultado anterior é, obviamente, verdadeiro.

Definição

À família de todas as primitivas de uma função f, $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, chamamos integral indefinido de f. Denotamos usualmente este conjunto de funções por

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A f chamamos função integranda e a x variável de integração.

Introdução às Primitivas

Nota: Pode parecer estranha a aparição do $\mathrm{d}x$ (da notação diferencial de derivada). Mais tarde veremos a utilidade em certas manipulações para o cálculo de primitivas.

- Atendendo ao anteriormente explorado,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

  onde F é uma primitiva de f.

- Se f for diferenciável, então

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Proposição

Sejam f e g funções definidas num aberto D, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Se f e g são primitiváveis em D, então $f+g$ é primitivável em D e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Determina o conjunto das primitivas de $f :]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) \equiv 0$.

2. Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)
    - $f(x) = 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.
    - $f(x) = e^x$, com $x \in \mathbb{R}$.
    - $f(x) = \cos(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.
    - $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$.

Introdução às Primitivas - Resolução

1

$$\left\{ F : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \mid F(x) = \begin{cases} c_1, & x \in \,]-\infty, -1[\\ c_2, & x \in \,]-1, 0[\\ c_3, & x \in \,]1, \infty[\end{cases} \right\}$$

2

- $F(x) = x^2 + 10.$
- $F(x) = e^x + 50.$
- $F(x) = \sin(x) + e.$
- $F(x) = \ln(x) + \pi.$

Primitivas Imediatas

Chamamos primitivas imediatas às funções cujas derivadas são **funções elementares** conhecidas.

- $$\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
- $$\int \frac{1}{x \ln(a)} \, \mathrm{d}x = \log_a(|x|) + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas Imediatas

- $$\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \sec(x)\tan(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \csc(x)\cot(x)\,\mathrm{d}x = -\csc(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

1. Calcula:
    - $\displaystyle\int (2^x - 3\sin(x))\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int (x+3)x^2\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int 4x^6 - 2x^3 + 7x - 4\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int 12+\csc(x)(\sin(x)+\csc(x))\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int 6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$
2. Determina a primitiva G da função $g(x) = 3x^3 + \frac{7}{2\sqrt{x}} - e^x$ que satisfaz $G(1) = 15 - e$.
3. Determina a primitiva H da primitiva da função $h(x) = 24x^2 - 48x + 2$ que satisfaz $H(-2) = -4$ e $H(1) = -9$.

1

- $\int (2^x - 3\sin(x))\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int (2^x - 3\sin(x))\,\mathrm{d}x &= \int 2^x\,\mathrm{d}x - \int 3\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^x}{\ln(2)} - 3\int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^x}{\ln(2)} + 3\cos(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) - \frac{3}{x} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas Imediatas - Resolução

- $\int (x+3)x^2 \, \mathrm{d}x$

$$\int (x+3)x^2 \, \mathrm{d}x = \int x^3 + 3x^2 \, \mathrm{d}x = \int x^3 \, \mathrm{d}x + 3\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^3 + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

- $\int \sqrt[5]{x^3} \, \mathrm{d}x$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}} \, \mathrm{d}x = \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

- $\int 4x^6 - 2x^3 + 7x - 4 \, \mathrm{d}x$

$$\int 4x^6 - 2x^3 + 7x - 4 \, \mathrm{d}x = 4\int x^6 \, \mathrm{d}x - 2\int x^3 \, \mathrm{d}x + 7\int x \, \mathrm{d}x - \int 4 \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{4x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + \frac{7x^2}{2} - 4x + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int 12 + \csc(x)(\sin(x) + \csc(x))\ \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int 12 + \csc(x)(\sin(x) + \csc(x))\ \mathrm{d}x &= \int 12 + \csc(x)\sin(x) + \csc^2(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int 13 + \csc^2(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int 13\ \mathrm{d}x + \int \csc^2(x)\ \mathrm{d}x \\ &= 13x - \cot(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int 6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int 6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x &= 6\int \cos(x)\ \mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= 6\sin(x) + 4\arcsin(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primitivas Imediatas - Resolução

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 12\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \arctan(x) + 12\arccos(x) + c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. $G(x) = \int g(x)\,\mathrm{d}x = \int 3x^3 + \frac{7}{2\sqrt{x}} - e^x\,\mathrm{d}x = \frac{3x^4}{4} + 7\sqrt{x} - e^x + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$

Ora, se $G(1) = 15 - e$, então $\frac{3(1)^2}{4} + 7\sqrt{1} - e + c = 15 - e \quad \Rightarrow \quad c = \frac{29}{4}$.

3. Sabemos que

$$\begin{aligned}H(x) = \int \left(\int h(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\int 24x^2 - 48x + 2\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(8x^3 - 24x^2 + 2x + c_1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^4 - 8x^3 + x^2 + c_1x + c_2.\end{aligned}$$

Ora, se $H(-2) = -4$ e $H(1) = -9$, segue que $c_1 = \frac{100}{3}$ e $c_2 = -\frac{112}{3}$.

Primitivas "Quase" Imediatas

Proposição

Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função primitivável e* $g : .D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função tal que a composta* $f \circ g$ *está bem definida. Se* g *é diferenciável em* D_g*, então* $(f \circ g)g'$ *é primitivável e tem-se que*

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(x))\,\mathrm{d}(g(x)) = F(g(x)) + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

onde F *é uma primitiva de* f*.*

Exemplo

Vejamos que

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) = \sin(x^2) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

e que

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \arctan(x)\,\mathrm{d}(\arctan(x)) = \frac{\arctan^2(x)}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Vamos determinar a primitiva F da função $f(x) = \sec^4(x)$ que satisfaz $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int \sec^4(x)\ \mathrm{d}x &= \int \sec^2(x)(\tan^2(x) + 1)\ \mathrm{d}x \\
&= \int \sec^2(x)\tan^2(x)\ \mathrm{d}x + \int \sec^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int \tan^2(x)\ \mathrm{d}(\tan(x)) + \int \sec^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ora, como já temos a forma geral das primitivas de f, basta substituirmos x por 0 e descobrir a constante c:

$$F(0) = \frac{\tan^3(0)}{3} + \tan(0) + c = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{2}.$$

Assim, concluímos que $F(x) = \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + \frac{\pi}{2}$.

Primitivas "Quase" Imediatas

A lista de primitivas que se segue generaliza a dos slides 9 e 10 e é consequência da última proposição apresentada.

Seja f uma função diferenciável. Então:

- $$\int f'(x)(f(x))^p \, \mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{p+1}}{p+1} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)} \, \mathrm{d}x = \log_a(|f(x)|) + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int f'(x) a^{f(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int f'(x)\sin(f(x)) \, \mathrm{d}x = -\cos(f(x)) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int f'(x)\cos(f(x)) \, \mathrm{d}x = \sin(f(x)) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas

- $\displaystyle\int f'(x)\sec^2(f(x))\,\mathrm{d}x = \tan(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\csc^2(f(x))\,\mathrm{d}x = -\cot(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\sec(f(x))\tan(f(x))\,\mathrm{d}x = \sec(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\csc(f(x))\cot(f(x))\,\mathrm{d}x = -\csc(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Aula 8

1. Determine os seguintes integrais indefinidos:

- $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x7^{x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int e^{\tan(x)}\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+9)^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

2. Determine a primitiva da função $f(x) = x^{-2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.

3. Determine a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \qquad \text{e} \qquad F(0) = \ln(4).$$

4. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

   determine $f(\frac{\pi}{4})$.

1

- $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^5)}{1+x^5} = \frac{\ln(|1+x^5|)}{5} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x$

$$\int \sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int x7^{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int x7^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x7^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 7^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{7^{x^2}}{2\ln(7)} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas - Resolução

- $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(|1+x^2|) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}(\ln(x))^3\,\mathrm{d}x = \int (\ln(x))^3\,\mathrm{d}(\ln(x)) = \frac{\ln^4(x)}{4} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int e^{\tan(x)}\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{\tan(x)}\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}(\tan(x)) = e^{\tan(x)} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{\ln(|x^2+9|)}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas - Resolução

- $\displaystyle \boxed{\int \frac{1}{(x+9)^2}\, \mathrm{d}x}$

$$\int \frac{1}{(x+9)^2}\, \mathrm{d}x = \int (x+9)^{-2}\, \mathrm{d}x = \int (x+9)^{-2}\, \mathrm{d}(x+9) = \frac{(x+9)^{-1}}{-1} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle \boxed{\int \frac{1}{x^2+9}\, \mathrm{d}x}$

$$\int \frac{1}{x^2+9}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 1\ \mathrm{d}\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{\arctan(\frac{x}{3})}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle \boxed{\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, \mathrm{d}x}$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan(e^x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas - Resolução

- $\boxed{\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x}$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{(\frac{2}{3})3x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{3\arcsin(x^2)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\boxed{\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int -4x^3(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-x^4)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^4)\\ &= -\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c,\ c \in \mathbb{R}\\ &= \frac{\sqrt{1-x^4}}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\boxed{\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln(x)\,\mathrm{d}(\ln(x)) = \frac{\ln^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{5}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x = 5\int \ln^{-3}(x)\,\mathrm{d}(\ln(x)) = -\frac{5\ln^{-2}(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln(x))}{\ln(x)} = \ln(|\ln(x)|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Proposição

Sejam f e g duas funções de x diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}$. Então,

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f'(x)}\underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\sqrt{x+1}}_{f'(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \int \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{15} + c, \; c \in \mathbb{R}$$

Exemplo

$$\boxed{\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x} = \cos(x)\sin(x) - \int \sin(x)(-\sin(x)) \, \mathrm{d}x$$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int (1 - \cos^2(x)) \, \mathrm{d}x$$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int 1 \, \mathrm{d}x - \boxed{\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(3x+x^2)}_{g(x)}\underbrace{\sin(2x)}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}\int \underbrace{(3+2x)}_{h(x)}\underbrace{\cos(2x)}_{i'(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2} \\
&\qquad +\frac{1}{2}\left(\frac{(3+2x)\sin(2x)}{2}-\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2} \\
&\qquad +\frac{1}{2}\left(\frac{(3+2x)\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}\right)+c,\ c\in\mathbb{R} \\
&= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2}+\frac{(3+2x)\sin(2x)}{4} \\
&\qquad +\frac{\cos(2x)}{4}+c,\ c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

- Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e, além disso, é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação (se alguma delas se simplificar).
- Por vezes é necessário efectuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

Primitivação por Partes - Exercícios

1. Determine os seguintes integrais utilizando a técnica de integração por partes:

   - $\displaystyle\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int e^{-3x}(2x+3)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x.$

2. A corrente i num circuito RCL é dada por

$$i = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega} + \omega\right)e^{-\alpha t}\sin(\omega t).$$

São constantes a força electromotriz E, ligada no instante $t = 0$, a capacidade C (em farads), a resistência R (em ohms), a indutância L (em henrys),

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C - R^2}}$$

A carga Q (em coulombs) é dada por $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i$, com $Q(0) = 0$. Determine a expressão de $Q(t)$.

Aula 9

Primitivação de Funções Trigonométricas

Funções que consistem em produtos de senos e co-senos podem ser integradas de forma quase imediata se utilizarmos identidades trigonométricas. O processo pode ser tedioso, mas a técnica é relativamente simples.

Exemplo

Vamos determinar a primitiva F da função $f(x) = \sin^5(x)$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x)\sin^4(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(x)(\sin^2(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin(x)(1-\cos^2(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int -(1-\cos^2(x))^2\,\mathrm{d}(\cos(x)) \\
&= \int -(1-2\cos^2(x)+\cos^4(x))\,\mathrm{d}(\cos(x)) \\
&= -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Vamos determinar a primitiva F da função $f(x) = \sin^6(x)$.

$$\int \sin^6(x)\ \mathrm{d}x = \int (\sin^2(x))^3\ \mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{(1-\cos(2x))}{2}\right)^3\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int 1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\boxed{\int 1\ \mathrm{d}x} - \frac{3}{8}\boxed{\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x} + \frac{3}{8}\boxed{\int \cos^2(2x)\ \mathrm{d}x}$$

$$- \frac{1}{8}\boxed{\int \cos^3(2x)\ \mathrm{d}x}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3\sin(2x)}{16} - \frac{\left(\sin(2x) - \frac{\sin^3(2x)}{3}\right)}{16} + \frac{3\left(x + \frac{\sin(4x)}{4}\right)}{16} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Primitivação de Funções Trigonométricas

1. **Potências ímpares de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$.**
   - Destacamos uma unidade à potência ímpar e passamos o factor resultante à co-função utilizando $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

2. **Potências pares de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$.**
   - Passamos ao arco duplo através das fórmulas
   $$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

3. **Produtos com factores do tipo $\sin(mx)$ ou $\cos(nx)$.**
   - Aplicamos as fórmulas
   $$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2},$$
   $$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2},$$
   $$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}.$$

4. **Potências pares e ímpares de $\tan(x)$ ou $\cot(x)$**
   - Destacam-se $\tan^2(x)$ ou $\cot^2(x)$ e aplicam-se as fórmulas
   $$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \qquad \text{ou} \qquad \cot^2(x) = \csc^2(x) - 1.$$
5. **Potências pares de $\sec(x)$ ou $\csc(x)$**
   - Destacam-se $\sec^2(x)$ ou $\csc^2(x)$ e aplicam-se as fórmulas
   $$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 \qquad \text{ou} \qquad \csc^2(x) = \cot^2(x) + 1.$$
6. **Potências ímpares de $\sec(x)$ ou $\csc(x)$**
   - Destacam-se $\sec^2(x)$ ou $\csc^2(x)$ e primitiva-se por partes escolhendo esse factor para primitivar.

1. Determina os seguintes integrais indefinidos:
    - $\displaystyle\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sin(x)\cos^5(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \tan^6(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sin^5(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(-3x)\,\mathrm{d}x$

Definição

Uma função cuja expressão analítica admita a forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, onde N e D são funções polinomiais (com coeficientes reais) em x e D é não nula, diz-se uma função racional.

Caso $\deg(N) < \deg(D)$, dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fracção própria.

Proposição

Se $\deg(N) \geq \deg(D)$, então existem polinómios Q e R tais que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

com $\deg(R) < \deg(D)$. Aos polinómios Q e R chamamos, respectivamente, quociente e resto da divisão de N por D.

Exemplo

Sendo $N(x) = 4x^3 + 3x$ e $D(x) = 2x^2 + 1$, tem-se que $\frac{N(x)}{D(x)} = 2x + \frac{x}{2x^2+1}$. Neste caso, os polinómios quociente e resto são, respectivamente, $Q(x) = 2x$ e $R(x) = x$.

Nota: Como consequência, obtemos

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x,$$

reduzindo-se assim a primitiva inicial à questão das primitivas no segundo membro anterior.

Definição

Designamos por fracções simples todas as fracções do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Bx+C}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^q}$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$\frac{2}{x-1} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad \frac{x-2}{x^2+x+1} \qquad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}.$$

Proposição

Toda a fracção própria pode ser decomposta numa soma de fracções simples. De facto, sendo α_k (com $1 \leq k \leq s$) todas as suas raízes reais (com multiplicidade μ_k) e $c_\ell = \beta_\ell + \gamma_\ell i$ (com $1 \leq \ell \leq t$) todas as suas raízes complexas (com multiplicidade ν_k). Então,

$$\frac{N(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{n=1}^{\mu_k} \frac{A_k^{(n)}}{(x-\alpha_k)^n} + \sum_{\ell=1}^{t} \sum_{m=1}^{\nu_\ell} \frac{B_\ell^{(m)} x + C_\ell^{(m)}}{((x-\beta_\ell)^2 + \gamma_\ell^2)^m}.$$

Nota: A primitiva de uma função racional $\frac{N(x)}{D(x)}$ pode sempre escrever-se como soma, produto, quociente e composição de funções racionais, logaritmos e arco-tangentes.

Aula 10

Primitivação de Fracções Simples

Procedimento:

1. Decompor $D(x)$ em factores irredutíveis:

   $$D(x) = a(x-\alpha_1)^{\mu_1} \cdots (x-\alpha_n)^{\mu_n} ((x-\beta_1)^2 + \gamma_1^2)^{\nu_1} \cdots ((x-\beta_m)^2 + \gamma_m)^{\nu_m},$$

   onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu_k, \nu_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.
2. Associar a cada fator de $D(x)$ uma determinada fracção simples ou soma de fracções simples de acordo com o seguinte:

   i. Ao factor de $D(x)$ do tipo $(x-\alpha_k)^{\mu_k}$, com $\mu_k \in \mathbb{N}$, corresponde

   $$\frac{A_1}{x-\alpha_k} + \frac{A_2}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_{\mu_k}}{(x-\alpha_k)^{\mu_k}},$$

   onde $A_1, \ldots, A_k$ são constantes reais a determinar.

   ii. Ao factor de $D(x)$ do tipo $((x-\beta_\ell)^2 + \gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}$, com $\nu_\ell \in \mathbb{N}$, corresponde

   $$\frac{B_1 x + C_1}{((x-\beta_\ell)^2 + \gamma_\ell^2)} + \frac{B_2 x + C_2}{((x-\beta_\ell)^2 + \gamma_\ell^2)^2} + \cdots + \frac{B_{\nu_\ell} x + C_{\nu_\ell}}{((x-\beta_\ell)^2 + \gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}}$$

   onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $i = 1, \ldots, s$.

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Primitivação de Fracções Simples

1. Fracção do tipo: $\dfrac{A}{(x-\alpha_k)^{\mu_k}}$

    - Se $\mu_k = 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha_k)}\,\mathrm{d}x = A\ln(|x-\alpha_k|) + c,\ c \in \mathbb{R}$

    - Se $\mu_k \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^{\mu_k}}\,\mathrm{d}x = \frac{A(x-\alpha_k)^{-\mu_k+1}}{-\mu_k+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

2. Fracção do tipo: $\dfrac{Bx+C}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}}$

    - Reduz-se à primitivação de fracções dos tipos:

$$\frac{t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$$

Primitivação de Fracções Simples

i. Fracção do tipo: $\dfrac{t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$

- Se $\nu_\ell = 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(|1+t^2|)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- Se $\nu_\ell \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}\,\mathrm{d}t = \frac{(1+t^2)^{-\nu_\ell+1}}{2(-\nu_\ell+1)} + c,\ c \in \mathbb{R}$

ii. Fracção do tipo: $\dfrac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$

- Se $\nu_\ell = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(t) + c,\ c \in \mathbb{R}$
- Se $\nu_\ell \neq 1$, aplicamos o método de primitivação por partes recursivamente, partindo de $\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Primitivação de Fracções Simples - Resumo

Função Primitivável	Primitiva
$\dfrac{A}{(x-\alpha_k)^{\mu_k}}$	$\begin{cases} A\ln(\lvert x-\alpha_k\rvert)+c,\ c\in\mathbb{R},\ \mu_k=1 \\ \dfrac{A(x-\alpha_k)^{-\mu_k+1}}{-\mu_k+1}+c,\ c\in\mathbb{R},\ \mu_k\neq 1 \end{cases}$
$\dfrac{Bx+C}{(x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2}$	$\dfrac{B\ln((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)}{2}+\dfrac{B\beta_\ell+C}{\gamma_\ell}\arctan\left(\dfrac{x-\beta_\ell}{\gamma_\ell}\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$
$\dfrac{Bx+C}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}}$	$\dfrac{B(1+t^2)^{-\nu_\ell+1}}{2\gamma_\ell^{2\nu_\ell-2}(1-\nu_\ell)}+\dfrac{B\beta_\ell+C}{\gamma_\ell^{2\nu_\ell-1}}\displaystyle\int\dfrac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}\,\mathrm{d}t+c,\ c\in\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$	a primitiva aparece através da primitivação por partes , tomando $$\frac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}=\frac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell-1}}-\frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$$

Exemplo

Calculemos a primitiva de

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Ora, sabemos que

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

de seguida encontramos a decomposição em fracções parciais:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

Esta última igualdade implica que

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

$$\begin{cases} x^2 : 3 = A + B + C \\ x^1 : 4 = C - \frac{B}{2} - A \\ x^0 : 1 = -2A \end{cases}$$

Exemplo (cont...)

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

$$\begin{cases} x^2 : 3 = A + B + C \\ x^1 : 4 = C - \frac{B}{2} - A \\ x^0 : 1 = -2A \end{cases}$$

Da resolução do sistema considerado segue que $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$ e $C = \frac{7}{2}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x &= \int x + 1 + \frac{7}{2(x-2)} - \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int x \, \mathrm{d}x + \int 1 \, \mathrm{d}x + \int \frac{7}{2(x-2)} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{7\ln(|x-2|)}{2} - \frac{\ln(|x|)}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo

Calculemos a primitiva de

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1}.$$

Ora, sabemos que

$$(x^4+1) = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1);$$

de seguida encontramos a decomposição em fracções parciais:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Esta última igualdade implica que

$$1 = (Ax+B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx+D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

$$\begin{cases} x^3 : 0 = A + C \\ x^2 : 0 = B + D + \sqrt{2}(A - C) \\ x^1 : 0 = A + C + \sqrt{2}(B - D) \\ x^0 : 1 = B + D \end{cases}$$

Exemplo (cont...)

Da primeira e da terceira equações decorre que $A=-C$ e que $B=D$. Da quarta equação $B=D=\frac{1}{2}$ e da segunda equação $A=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-C$. Em consequência, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{2}x-2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(-\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-\sqrt{2}x+1) + c,\ \ c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Resolve os seguintes integrais indefinidos:

- $\displaystyle\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{x^5+x^4+8x^3+8x^2+16x+16}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{4x-11}{x^3-9x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{2x^2+4x+22}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^4+3x^2+2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^5+1}\,\mathrm{d}x$

1

- $\boxed{\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{x^5+x^4+8x^3+8x^2+16x+16}\,\mathrm{d}x}$

Comecemos por notar que a função que temos em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) > \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será factorizar $D(x)$ em irredutíveis. Podemos ver (de forma relativamente rápida) que -1 é raíz de $D(x)$. Por aplicação da regra de Ruffini, vem que

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & 1 & 8 & 8 & 16 & 16 \\ -1 & & -1 & 0 & -8 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

$$x^5+x^4+8x^3+8x^2+16x+16 = (x+1)(x^4+8x^2+16) = (x+1)(x^2+4)^2.$$

Desta forma,

$$\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{x^5+x^4+8x^3+8x^2+16x+16} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

A última igualdade implica que

$$3x^4+x^3+20x^2+3x+31 = A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+4)+(Dx+E)(x+1).$$

Igualando os coeficientes,

$$\begin{cases} x^4 : 3 & = A + B \\ x^3 : 1 & = B + C \\ x^2 : 20 & = 8A + 4B + C + D \\ x^1 : 3 & = 4B + 4C + D + E \\ x^0 : 31 & = 16A + 4C + E \end{cases}$$

Resulta da resolução do sistema anterior que $A = 2$, $B = 1$, $C = D = 0$ e $E = -1$. Por conseguinte,

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{x^5 + x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x + 16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln(|x+1|) + \frac{\ln(|x^2+4|)}{2} - \frac{x}{8(x^2+4)} - \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{16} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

- $$\int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x$$

A função em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) > \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será factorizar $D(x)$ em irredutíveis. Podemos ver (de forma relativamente rápida) que 1 é raíz de $D(x)$. Por aplicação da regra de Ruffini, vem que

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

Desta forma,

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

A última igualdade implica que

$$1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-1).$$

Igualando os coeficientes,

$$\begin{cases} x^2 : 0 & = A + B \\ x^1 : 0 & = C - B \\ x^0 : 1 & = A - C \end{cases}$$

Resulta da resolução do sistema anterior que $A = \frac{1}{2}$ e $B = C = -\frac{1}{2}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(|x-1|)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(|x-1|)}{2} - \frac{\ln(|x^2+1|)}{4} - \frac{\arctan(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

A função em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) = \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será aplicar o algoritmo da divisão a $N(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -3x^2-3 & 3 \\ \hline -3 & \end{array}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int 3 - \frac{3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 3\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 3x - 3\arctan(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- $\boxed{\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}\,\mathrm{d}x}$

A função em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) > \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será factorizar $D(x)$ em irredutíveis. Podemos ver (de forma relativamente rápida) que -1 é raíz de $D(x)$.

Primitivação de Funções Racionais - Resolução

Por aplicação da regra de Ruffini, vem que

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 3 & 2 & 0 \\
-1 & & -1 & -2 & 0 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x = (x+1)(x+2)x$$

Desta forma,

$$\frac{x^2+1}{x^3+3x^2-2x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x}.$$

A última igualdade implica que

$$x^2 + 1 = Ax(x+2) + Bx(x+1) + C(x+1)(x+2).$$

Igualando os coeficientes,

$$
\begin{cases}
x^2 : 1 & = A + B + C \\
x^1 : 0 & = 2A + B + 3C \\
x^0 : 1 & = 2C
\end{cases}
$$

Resulta da resolução do sistema anterior que $A = -2$, $B = \frac{5}{2}$ e $C = \frac{1}{2}$.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \int -\frac{2}{x+1}+\frac{5}{2(x+2)}+\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{5}{2(x+2)}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\ln(|x+1|)+\frac{5\ln(|x+2|)}{2}+\frac{\ln(|x|)}{2}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aula 11

Primitivação por Mudança de Variável

Proposição

Sejam f e φ duas funções tais que $f \circ \varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que a função $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, que φ' tem sinal constante e que $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável. Então f é também primitivável no intervalo $\varphi(]a, b[)$ e

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$= \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}(\varphi(t))\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Demonstração.

Suponhamos que se conhece uma primitiva $H(t)$ de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ e se pretendem obter as primitivas de $f(x)$. Admitindo que o sinal de φ' se mantém constante em $]a, b[$, é fácil ver que $H(\varphi^{-1}(x))$ é uma primitiva de $f(x)$ no intervalo aberto $\varphi(]a, b[)$:

$$\frac{\mathrm{d}(H \circ \varphi^{-1})}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$$

♦

Exemplo

Pensemos em calcular $\int \frac{x}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$. Se fizermos a substituição $u = 1 + x^4$ teremos $\mathrm{d}u = 4x^3\, \mathrm{d}x$. No entanto, como $4x^2$ não é constante,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{4x^2} \frac{4x^3}{1+x^4}\, \mathrm{d}x \neq \frac{1}{4x^2} \int \frac{4x^3}{1+x^4}\, \mathrm{d}x.$$

Isto permite exibir que a mudança $u = 1 + x^4$ não resolve o problema. No entanto, se fizermos $u = x^2$, teremos $\mathrm{d}u = 2x\, \mathrm{d}x$ e, assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\Big|_{u=x^2} = \frac{\arctan(u)}{2}\Big|_{u=x^2} = \frac{\arctan(x^2)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Exemplo

Calculemos $\int e^{\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x$. Ao escolher $x = t^3$, ficamos com $3t^2\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int e^{x^{\frac{1}{3}}}\ \mathrm{d}x &= \int 3t^2 e^t\ \mathrm{d}t \\ &= 3t^2 e^t - 6te^t + 6e^t + c,\ \ c \in \mathbb{R} \\ &= 3x^{\frac{2}{3}} e^{x^{\frac{1}{3}}} - 6x^{\frac{1}{3}} e^{x^{\frac{1}{3}}} + 6e^{x^{\frac{1}{3}}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemplo

Calculemos $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$. Ao escolher $t = \sqrt{2x}$, com $t \geq 0$, obtemos $\mathrm{d}x = t\ \mathrm{d}t$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}} &= \int \frac{t}{1+t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= t - \ln(|1+t|) + c,\ \ c \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{2x} - \ln(|1+\sqrt{2x}|) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primitivação por Mudança de Variável

Nem sempre é muito claro qual a mudança de variável mais recomendada. No entanto, em numerosas situações encontram-se estudadas substituições aconselhadas. Veja-se a seguinte tabela na qual f é uma função irracional dos argumentos indicados.

Nota: A utilização destas substituições permite transformar a função a primitivar numa função racional que pode ser primitivável por decomposição.

- Integrais do tipo $\displaystyle\int \frac{Px+Q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$:

  $\rightarrow$ Decompor $Px+Q$ em $\displaystyle p\frac{\mathrm{d}(ax^2+bx+c)}{\mathrm{d}x}+q$.

- Integrais do tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$:

  $\rightarrow$ Aplicar substituição $\displaystyle t=\frac{1}{px+q}$.

Primitivação por Mudança de Variável

Primitiva	Substituição
$\int f(x, e^x)$	$x = \ln(t),\ t \in \mathbb{R}^+$
$\int f(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \dfrac{a\sin(t)}{b},\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\int f(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \dfrac{a\tan(t)}{b},\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\int f(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \dfrac{a\sec(t)}{b},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$	$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

1. Resolve os seguintes integrais indefinidos:

- $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x\sqrt{8+x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+6}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}\,\mathrm{d}x$

1

- $\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t = 1-x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -1 \Leftrightarrow -\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int (t-1)^2\sqrt{t}\,(-\mathrm{d}t) = -\int (t-1)^2\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{2t^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4t^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\\ &= -\frac{2(1-x)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c,\ \ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- $\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t = 2x+5} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x.$

$$\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{t-5}{2}\right) t^{10}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{4}\int (t-5)t^{10}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int t^{11}-5t^{10}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{5t^{11}}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=\sqrt{e^x-1}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\arctan(t) = 2\arctan(\sqrt{e^x-1})+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(t)}{t}(2t\,\mathrm{d}t) = 2\int \sin(t)\,\mathrm{d}t\\ = -2\cos(t) = -2\cos(\sqrt{x}) + c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=e^x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}+2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{1}{t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t+1}\\ &= -\frac{1}{e^x+1} + c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{x = 3\sin(t)} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\cos(t) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = 3\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3\cos(x)}{(3\sin(t))^2\sqrt{9-(3\sin(t))^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{3\cos(t)}{9\sin^2(t)\sqrt{9\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\int \csc^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\cot(t)}{9} = -\frac{\cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)}{9} + c,\ c \in \mathbb{R} \\
&= -\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aula 12

1. Se um objecto se move em linha recta a uma velocidade dada por $v(t) = 1 - t^2$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 2, qual a posição do objecto no instante final $t = 2$?

$$(A)\ -\frac{2}{3} \qquad (B)\ 0 \qquad (C)\ \frac{4}{3}$$

2. Se um objecto se move em linha recta a uma aceleração dada por $a(t) = -\frac{3t}{2}$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 0, já a deslocar-se com velocidade 1, qual a posição do objecto no instante final $t = 2$?

$$(A)\ -4 \qquad (B)\ 0 \qquad (C)\ \frac{1}{2}$$

3. Se um objecto se move em linha recta a uma aceleração dada por $x''(t) = \frac{3t}{2}$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 0, já a deslocar-se com velocidade 1, qual a expressão para $x(t)$?

$(A)\ \dfrac{9t^2}{8} + t \qquad (B)\ \dfrac{t^3}{4} + t \qquad (C)$ Nenhuma das anteriores

4. Se um objecto se move em linha recta a uma velocidade dada por $v(t) = e^t + t$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 1, qual a posição do objecto no instante final $t = 2$?

$$(A)\ e^2 + 1 \qquad (B)\ e^2 + 3 \qquad (C)\ e^2 + 2$$

5. Um carro move-se em linha recta a uma aceleração dada por $a(t) = \frac{9t}{10}$, em cada instante $t \in [0, 10]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 0, qual a posição do objecto no instante final $t = 10$?

$$(A)\ 250 \qquad (B)\ 380 \qquad (C)\ 200$$

Extensão dos Conceitos de Primitiva e Derivada

A definição de primitiva F não foi dada pontualmente mas sim num conjunto, e um tal conjunto foi considerado aberto porque a definição dada exigiu a derivação de F nos pontos do mesmo.

Se admitirmos a consideração de derivadas laterais, podemos fazer a seguinte extensão do conceito:

Definição

Uma função $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma primitiva de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se e só se

- $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in \,]a, b[$,
- $F'_d(a) = f(a)$,
- $F'_e(b) = f(b)$.

Em tal caso diz-se também que f é a (função) derivada de F.

Nota: Diz-se também que uma função F é uma primitiva de $f : D_F \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ em $[a, b] \subseteq D_f$ se e só se F é uma primitiva de $f|_{[a,b]}$ no sentido definido acima.

Extensão dos Conceitos de Primitiva e Derivada

É também possível provar que é válido o seguinte critério simples para testarmos se uma primitiva de uma função num intervalo aberto se pode estender a uma primitiva no correspondente intervalo fechado:

Proposição

Se $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e se $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in \,]a, b[$, onde f é uma função contínua à direita em a e contínua à esquerda em b, então F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Exemplo

Podemos ver que a restrição de

$$F(x) = \frac{9\arcsin(\frac{x}{3})}{2} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}$$

ao intervalo $]-3, 3[$ é uma primitiva de $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ nesse intervalo. Já que F, tanto como f, são contínuas no domínio comum de definição $[-3, 3]$, o resultado acima garante que F também é uma primitiva de f em $[-3, 3]$.