

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica 2022/23

Agrupamento II

Folha 1

1. Determine o conjunto das soluções das seguintes equações nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 .

a) $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$.

b) $x_1 + x_2 - x_4 = 0$;

c) $x_2 = 5$.

2. Determine uma equação nas incógnitas x, y, z onde x e z são incógnitas visíveis, y é invisível e $(1, -1, 0)$ é solução da equação.

3. Considere os sistemas nas incógnitas x, y, z

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2y - z = 4 \\ 3z = 6 \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z = 4 \\ z = 1 \end{cases};$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ y + 2z = 6 \end{cases};$$

$$(d) x + y - 4z = 0 \quad .$$

Indique os sistemas escalonados, classifique-os e determine o seu conjunto das soluções.

4. Considere o sistema nas incógnitas x, y, z e nos parâmetros reais a, b, c . Determine a, b, c de modo que $(1, 0, 0)$ seja solução do sistema.

$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 3 \\ bx + y + 3z = 1 \\ cx - y - z = -1 \end{cases} .$$

5. Indique um sistema de três equações lineares com três incógnitas que tenha $(1, 2, 3)$ como solução.

6. Indique um sistema de equações lineares impossível com três equações lineares e quatro incógnitas.

7. Quais dos sistemas seguintes são equivalentes?

$$(a) \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases};$$

$$(c) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}.$$

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Quais das matrizes acima são matrizes em escada e quais estão na forma em escada reduzida?

b) Usando operações elementares reduza as matrizes A, B e C à:

i. forma escalonada;

ii. forma escalonada reduzida.

c) Calcule a característica das matrizes A, B e C .

9. Resolva os seguintes sistemas usando o método de redução de Gauss.

$$(a) \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + 3z = 2 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + 3z = 2 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases};$$

$$(d) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ 2x - y + 4z = 4 \end{cases};$$

$$(e) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases};$$

$$(f) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases} .$$

10. Determine os valores de α para os quais o sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

(a) não tem solução; (b) tem exactamente uma solução; (c) tem uma infinidade de soluções.

11. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases} .$$

a) Discuta o sistema em função de β .

b) Considere o sistema homogéneo associado a $\beta = 0$ e determine a sua solução.

12. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y + z = a \\ x - by + z = -b \end{cases} ,$$

onde a e b são parâmetros reais.

a) Determine os valores de a e b para os quais o sistema é:

i. possível e determinado; ii. impossível.

b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

13. Considere os planos seguintes definidos pelas equações indicadas

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : x + z - 1 = 0, \quad \mathcal{P}_3 : x - 2 = -z + 1, \quad \mathcal{P}_5 : 2y + 2 = 0, \\ \mathcal{P}_2 : y = 2, \quad \mathcal{P}_4 : y = -1, \quad \mathcal{P}_6 : x - z + 3 = 0, \end{aligned}$$

e as retas r, t e l definidas pelas equações vectoriais

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + a(-1, 0, 1), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$t : (x, y, z) = (1, 3, 2) + a(1, 1, 1), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$l : (x, y, z) = (0, 1, 0) + a(0, -1, 1), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Considere ainda as retas n e m que são a interseção dos planos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 e dos planos \mathcal{P}_3 e \mathcal{P}_4 , respectivamente. Determine:

a) a interseção dos planos

$$i. \mathcal{P}_1 \text{ e } \mathcal{P}_3; \quad ii. \mathcal{P}_4 \text{ e } \mathcal{P}_5;$$

b) a interseção das retas

$$i. r \text{ e } n; \quad ii. r \text{ e } t; \quad iii. r \text{ e } l; \quad iv. r \text{ e } m;$$

c) a interseção da reta l com o plano \mathcal{P}_2 ;

d) a interseção da reta r com o plano \mathcal{P}_1 ;

e) a interseção da reta t com o plano \mathcal{P}_6 .

14. Considere a reta r com equações cartesianas

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

e o plano \mathcal{P} definido pela equação $bx + by + z = 2$. Discuta a posição relativa da reta r e do plano \mathcal{P} , em função dos parâmetros reais a e b .

15. Determine uma equação vetorial da reta r definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano \mathcal{P} que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e que contém a reta r .

16. Considere o plano \mathcal{P} que passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ e a família de planos $\mathcal{P}_{a,b}$ definidos pela equação cartesiana $ax + y + z = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determine uma equação cartesiana do plano \mathcal{P} .

b) Discuta a posição relativa dos planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b .

17. Considere a reta r definida por $x = 2y + z = 1$ e a família de retas $s_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + s(0, 2, b), \quad s \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa das retas r e $s_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b .

18. Considere as retas r_1 e r_2 de equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha(-1, 0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(0, -1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Verifique que as retas r_1 e r_2 são enviezadas.

b) Determine o plano que contém r_2 e é paralelo a r_1 .

Algumas soluções

1. a) $S = \{(2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$

b) $S = \{(-x_2 + x_4, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$

c) $S = \{(x_1, 5, x_3, x_4) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$

3. Sistemas escalonados: a), c), d).

a) Sistema possível e determinado; $S = \{(-4, 3, 2)\}.$

c) Sistema possível e simplesmente indeterminado; $S = \{(5 - 2z, 6 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$

d) Sistema possível e duplamente indeterminado; $S = \{(-y + 4z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$

4. $a = 3, b = 1, c = -1.$

7. a), c).

8. a) matrizes em escada: A, C ; matrizes em escada reduzida: C ;

b. i) por exemplo: $B \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

b. ii) $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

c) $\text{car}(A) = 2, \text{car}(B) = 3, \text{car}(C) = 3.$

9. a) Conjunto solução: $S = \{(-2z, 2 - 5z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$

b) Conjunto solução: $S = \{(-4, -8, 2)\}.$

c) Sistema impossível.

d) Conjunto solução: $S = \{(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0)\}.$

e) Conjunto solução: $S = \{(x_3, \frac{1}{3} - 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$

f) Conjunto solução: $S = \{(-1 - 2x_2, x_2, 0, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$

g) Sistema impossível.

10. (a) $\alpha = -1$ (b) $\alpha^2 \neq 1$ (c) $\alpha = 1.$

11. a) O sistema $\begin{cases} \text{não tem solução} & \text{se } \beta = 1, \\ \text{tem uma infinidade de soluções} & \text{se } \beta = -1, \\ \text{tem exactamente uma solução} & \text{nos outros casos.} \end{cases}$

b) $x = y = z = 0$ é a única solução.

- 12.** a) i. $b \neq -1$. ii. $b = -1$ e $a \neq 1$.
b) $\{(1, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (neste caso $a = 1$ e $b = -1$).
- 13.** a) (i) os planos não se intersectam; (ii) os planos são coincidentes;
b) (i) r e n são coincidentes; (ii) r e t intersectam-se no ponto $(0, 2, 1)$: (iii) r e l não se intersectam e são enviezadas; (iv) r e m não se intersectam e são estritamente paralelas;
c) l é concorrente com \mathcal{P}_2 no ponto $(0, 2, -1)$;
d) r está contida em \mathcal{P}_1 ;
e) t é estritamente paralela a \mathcal{P}_6 .
- 14.** se $b \neq 0$ e $a \neq 1$, r é concorrente com \mathcal{P} num ponto; se $b = 0$, r é estritamente paralela a \mathcal{P} ; se $a = b = 1$, r está contida em \mathcal{P} ; se $a = 1$ e $b \neq 1$, r é estritamente paralela a \mathcal{P} .
- 15.** uma equação vetorial da reta r é $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; uma equação vetorial do plano \mathcal{P} é $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma equação cartesiana de \mathcal{P} é $y - z = 1$.
- 16.** a) $x - y - z + 1 = 0$;
a) \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = -1$ e $b = 1$; estritamente paralelos se $a = -1$ e $b \neq 1$; concorrentes se $a \neq -1$ e $b \in \mathbb{R}$.
- 17.** r e $s_{a,b}$ são coincidentes se $a = 1$ e $b = -4$; estritamente paralelas se $a \neq 1$ e $b = -4$; concorrentes se $a = 1$ e $b \neq -4$; enviezadas se $a \neq 1$ e $b \neq -4$.
- 18.** b) $x + y + z = 1$;