1. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018

Isabel Brás

UA, 9/2/2023

Cálculo II – Agrup. 4 22/23

Resumo dos Conteúdos

Série de potências — definição

Definição:

Chama-se série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ (ou série de potências de $x - c$) a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n\,, \quad \text{onde } a_n \in \mathbb{R}\,, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0\,; \tag{1}$$

onde x é um número real indeterminado.
Aos números a_n chamam-se os coeficientes da série.

Convenção:

Em (1), mesmo que $x = c$, $\quad a_0(x-c)^0 = a_0$.

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Série de potências centrada na origem com coeficientes unitários.

Notar que [porquê?]

- a série é convergente sse $|x| < 1$, *i.e.*, sse $x \in]-1, 1[$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

O conjunto $]-1, 1[$ é o chamado domínio de convergência da série.

Domínio de convergência de uma série de potências

Definição:
Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ ao conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge chamamos domínio de convergência da série.

Exemplos: Usando os Critérios de D'Alembert e/ou de Cauchy e (se necessário) outros critérios de convergência de séries numéricas, como o Critério de Leibniz, podemos obter o domínio de convergência das seguintes séries:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; domínio de convergência: $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^n$; domínio de convergência: $]-2,0]$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-2)^n$; domínio de convergência: $\{2\}$

Intervalo de convergência/Raio de convergência

Teorema:
Qualquer que seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$, verifica-se uma, e uma só, das condições:

(i) a série converge (absolutamente) em $x = c$ e diverge se $x \neq c$;

(ii) a série converge (absolutamente) em todo $x \in \mathbb{R}$;

(iii) existe um único $R > 0$ para o qual a série converge (absolutamente) se $x \in]c-R, c+R[$ e diverge se $x \in]-\infty, c-R[\cup]c+R, +\infty[$.

Definições:

Ao número R chamamos raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$.

No caso (i) , consideramos $R = 0$; no caso (ii) , consideramos $R = +\infty$;
Caso $R \neq 0$, o intervalo $]c-R, c+R[$ (ou $\mathbb{R}$, quando $R = +\infty$) designa-se por intervalo de convergência da série.

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; intervalo de convergência: $\mathbb{R}$; $R = +\infty$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^n$; intervalo de convergência: $]-2, 0[$; $R = 1$

Observações:

- Uma série de potências pode convergir ou não nos extremos do seu intervalo de convergência. O teorema do slide anterior nada afirma sobre a natureza da série nesses pontos.
- O domínio de convergência de uma série de potências contém o seu intervalo de convergência, mas poderá ainda conter algum dos extremos desse intervalo. O estudo da natureza da série nesses pontos é feito caso a caso.

Raio de Convergência, usando os Coeficientes da Série

Proposição:

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $R = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, se este limite existir.
2. $R = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, se este limite existir.

Observações:

1. Estas fórmulas de cálculo do raio de convergência resultam da aplicação do critério da razão ou do critério da raiz. Assim, estes métodos funcionam quando a aplicação direta desses critérios também pode ser usada (em alternativa).
2. Cuidado com a aplicação: a série tem que apresentar uma escrita tal como no enunciado da proposição.

Polinómios de Taylor

Definição:

Seja f uma f.r.v.r. admitindo derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$. Ao polinómio

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

chamamos polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto c.
Caso $c = 0$, o polinómio $T_0^n f(x)$ passa a ser designado por polinómio de MacLaurin de ordem n da função f.

Observação:

$T_c^n f(x)$ é o único polinómio de grau menor ou igual a n que assume o mesmo valor que f em c e que as suas sucessivas derivadas em c são iguais às sucessivas derivadas de f em c, respetivamente, até à ordem n.

Exemplos

1. O polinómio de Taylor de ordem n em c, para c qualquer em $\mathbb{R}$, de uma função polinomial de grau n é a própria função. Por exemplo, $T_1^3(x^3) = x^3$.

2. $$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

3. $$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

4. $$T_0^{2n+1}(\operatorname{sen} x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

5. $$T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Fórmula de Taylor

Teorema:

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então, para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{T_c^n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{R_c^n f(x)}.}$$

$\downarrow$

Fórmula de Taylor de ordem n da função f no ponto c, com resto de Lagrange

$R_c^n f(x) \longrightarrow$ resto de Lagrange de ordem n de f no ponto c

$T_c^n f(x) \longrightarrow$ polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto c

Note que, se $x = c$, $f(c) = T_c^n f(c)$, (resto nulo).

Majorantes do resto de Lagrange

O módulo do resto de Lagrange $R_c^n f(x)$ dá-nos o erro absoluto cometido quando tomamos $T_c^n f(x)$ por $f(x)$, uma vez que

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| \ .$$

Mesmo que desconheçamos esse resto é possível, em geral, majorá-lo.

Formas de efetuar a majoração do resto:

Se a $(n+1)$-ésima derivada de f é contínua num intervalo $[a, b]$ contendo o ponto c, então é limitada. Tomando $M \geq \sup_{y \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right|$

$$|R_c^n f(x)| \leq M \frac{|x - c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{onde } x \in [a, b].$$

Ver applet, sobre a aproximação de uma função usando polinómios de Taylor.

Série de Taylor — definição

Definição:

Se f admitir derivadas (finitas) de todas as ordens em c, à série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

chamamos série de Taylor da função f no ponto c.
Se $c = 0$, passamos a chamar-lhe série de MacLaurin de f.

Exemplo:

A série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Relacione com o ponto 3. do slide 10.

No exemplo do slide anterior, a série de Taylor da função no ponto $c = 0$ converge para a função no intervalo $]-1,1[$, i.e., para cada $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Questão:

Seja I um intervalo aberto centrado no ponto c onde a série de Taylor de f é convergente, será que a sua soma para cada x é igual a $f(x)$?
Nem sempre, ver exemplo do slide seguinte!

Funções Analíticas

Definição:

Sejam I um intervalo aberto, $c \in I$, e f uma função definida em I que admite derivadas finitas de todas as ordens em c. Dizemos que f é analítica em c se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in]c - r, c + r[\subset I$, a série de Taylor de f converge para $f(x)$.

Exemplos

1. Função analítica em $c = 0$: $g(x) = \dfrac{1}{1 - x}$
2. Função não analítica em $c = 0$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

   f possui derivadas finitas de todas as ordens em $\mathbb{R}$, mas como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, a sua série de MacLaurin converge para a função nula.

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I. Então, para todo o $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ se, e só se, } \lim_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0.$$

Exemplo: Seja $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$R_0^n f(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,, \qquad x \neq 0, \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como $\lim_{n\to\infty} R_0^n f(x) = 0$, [Porquê?], concluímos que a série de MacLaurin da função exponencial converge para a própria função em $\mathbb{R}$, i.e.,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I. Se existir $M > 0$ tal que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\,, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n\,, \qquad \forall x \in I.$$

Exercício: Usando o teorema anterior mostre que:

1. $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

Compare com os pontos 4. e 5. do slide 10.

Apêndice I: Critérios de D'Alembert e de Cauchy para uma série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Critério de D'Alembert: Se $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e existe $L := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

Então, se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente e se $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Critério de Cauchy: Se existe $L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$.

Então, se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente e se $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Apêndice II: Conceitos de Majorantes e de Supremo

Majorante de um conjunto:

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, conjunto não vazio. Diz-se que A é um conjunto majorado se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$, para todo o $x \in A$. Qualquer M que satisfaça essa desigualdade é chamado de majorante de A.

Supremo de um conjunto majorado:

O supremo de um conjunto A (majorado) é o menor dos majorantes. Isto é, $s \in \mathbb{R}$ diz-se supremo de A se s for um majorante e se para todo o $\delta > 0$, existe $b \in A$ tal que $s - \delta < b$. Notação: $s = \sup A$.

Axioma do Supremo:

Todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado tem supremo.

Máximo: Se $s = \sup A$ pertence a A, a s chama-se máximo de A.

Notação: $s = \max A$.