Cálculo I

João Mendonça (jmendonca@ua.pt)

Ano Lectivo 2022/23

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Parte 3 - Séries Numéricas

Aula 19

Introdução às Séries Numéricas

Desde muito cedo aprendemos a lidar com a soma de um número finito de parcelas. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais ($n \in \mathbb{N}$), então a sua soma pode ser representada por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Pensemos agora na possibilidade de considerar a "soma" de uma infinidade de parcelas. Vamos ver que tal é possível e, em certos casos, podemos mesmo calcular essa "soma".

Definição

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Chamamos série numérica de termo geral a_n à soma de todos os termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n.$$

A sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associada a esta série é a sucessão definida por $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

Definição

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se convergente se a respectiva sucessão das somas parciais, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, for convergente, i.e., se existir e for finito o limite $\lim_{n\to\infty} S_n$. Nesse caso, chamamos soma da série ao valor desse limite e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Caso contrário, i.e., se a sucessão das somas parciais for divergente, divemos que a série é divergente.

Exemplo

Temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Para se perspectivar tal, comecemos por perceber quais são os primeiros termos da sucessão das somas parciais:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}, \quad S_2 = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \quad S_3 = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}, \quad \ldots, \quad S_n = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{2^n} = \tfrac{2^n-1}{2^n}.$$

Podemos provar esta última identidade por indução matemática ou com recurso à factorização:

$$(1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n) = 1-a^{n+1}.$$

Exemplo (cont...)

Agora, do conhecimento que detemos para as sucessões, decorre que

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

e, portanto, de acordo com a definição apresentada anteriormente, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Exemplo

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão constante onde $x_n = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

Na realidade, neste caso temos que a série é dada por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

A sucessão de termo geral $S_n = n$ não converge e, de facto, a série em causa é divergente.

Exemplo

A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente, visto que a sucessão das somas parciais associada não tem limite:

$$S_n = \begin{cases} -1, & n \in 2\mathbb{N}-1 \\ 0, & n \in 2\mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e tem soma igual a 1. De facto, como

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

então $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Como mera informação e curiosidade, indicam-se aqui outros exemplos de séries convergentes, algumas delas famosas na história e no desenvolvimento do Cálculo:

- **Série dos factoriais inversos:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e.$$

- **Série "alternada" dos naturais inversos:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln(2).$$

- **Série de Gregory:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

- **Séries de Euler:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nota: Devemos ver que, em geral, não é lícito associar nem trocar a ordem dos termos de uma série. Como podemos ver, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ é uma série divergente. No entanto,

$$\begin{aligned} c &= 1+2+3+4+5+6+\cdots \\ 4c &= 4+8+12+\cdots \\ c-4c &= 1-2+3-4+5-6+\cdots \end{aligned}$$

A última expressão, $c-4c$, é coincidente com a expansão da função $\frac{1}{(1+x)^2}$ em série de potências (concretizando $x=1$). Assim,

$$c-4c = \frac{1}{(1+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{1}{12}.$$

De forma semelhante, é possível ver que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ são divergentes, mas ao manipular a ordem dos termos conseguimos obter somas iguais a, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Definição

Chamamos série geométrica a toda a série que é gerada por uma progressão geométrica, ou seja, uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots,$$

onde $a \neq 0$ é o primeiro termo e $r \in \mathbb{R}$ é a razão da série.

Nota: Convencionando $0^0 = 1$, podemos também representar a séire geométrica por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

A natureza deste tipo de séries depende da sua razão. Tal pode ser justificado através de argumentos já utilizados anteriormente no estudo da série de razão $\frac{1}{2}$.

Em geral, dada uma série geométrica de razão r (e primeiro termo a), para todo o $n \in \mathbb{N}$ temos

$$S_n = \begin{cases} na, & r = 1. \\ a\dfrac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$$

Recordando o comportamento de r^n quando $n \to \infty$, concluimos que:

Proposição

A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ converge se e só se $|r| < 1$ e, nesse caso, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Demonstração.

Consideremos a sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativas à série em questão. Sabemos que $S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$. Então,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad (1-r)S_n = (1-r)\sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$$

Demonstração.

$$(1-r)S_n = (1-r)\sum_{k=1}^{n} ar^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad (1-r)S_n = \sum_{k=1}^{n} a(1-r)r^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Suponhamos que $|r| < 1$. Então

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

Caso $|r| \geq 1$, temos que $\lim_{n\to\infty} S_n \neq 0$, pelo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ diverge. ♦

Exemplo

A série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
é uma série geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Como $-1 < \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente e tem soma $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$.

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{e}\right)^n$$

é uma série geométrica de razão $-\frac{\pi}{e}$. Esta série é divergente dado que $|-\frac{\pi}{e}| \geq 1$.

Definição

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se redutível (telescópica, ou de Mengoli) se o termo geral a_n puder ser escrito numa das formas

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n,$$

para alguma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e algum $p \in \mathbb{N}$.

Considere-se o caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$ (o outro caso poderá ser tratado do mesmo modo). Após alguns cálculos simples, vemos que as somas parciais são dadas por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+p}) = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}).$$

Desta forma, a série converge se e só se for convergente a sucessão de termo geral $u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ (devemos lembrar que p é fixo). Nesse caso, a soma da série é

$$u_1 + \cdots + u_p - \lim_{n\to\infty} (u_{p+1} + \cdots + u_{n+p}).$$

É claro que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for ela própria convergente, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+p}) = u_1 + \cdots + u_p - p \cdot \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$$

é uma série telescópica convergente (a sua soma é $\frac{25}{12}$).

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n+1))$$

é uma série telescópica divergente.

1. Verfique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, calcule a sua soma:
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{99}{100}\right)^n$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{e}\right)^n$
   - $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}2^{-n}$
2. Determine a soma (se existir) das seguintes séries:
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+4)}$
   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

Aula 20

Proposição (Linearidade)

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões numéricas. Então:

1. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem convergentes para, respectivamente, A e B, segue que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é também convergente para $A + B$.*

2. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (para A), então para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tem convergência λA.*

3. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.*

Demonstração.

1. Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sucessões das somas parciais relativas a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Dado que estas duas convergem para A e B, respectivamente, temos que
$$\lim_{n\to\infty} S_n = A \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} S'_n = B.$$
Tomando $(S^*_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n + S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sabemos que $S^*_n = S_n + S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_n + \sum_{k=1}^{n} b_n = \sum_{k=1}^{n}(a_n + b_n)$ é a sucessão das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ e que
$$\lim_{n\to\infty} S^*_n = \lim_{n\to\infty} S_n + S'_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S'_n = A + B.$$
Desta forma, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge para $A + B$.
2. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para A. Se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for a sucessão das somas parciais relativa a esta série, sabemos que convirgirá para A. Tomando $S'_n = \lambda S_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, sabemos ainda que $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será a sucessão de somas parciais relativa a $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$. Além disso,
$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda A.$$
♦

Nota: É importante ter em mente que o recíproco do ponto 1. do resultado anterior não é válido. De facto, é possível termos duas séries divergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cuja soma é convergente. (Para verificação, tome-se $a_n = -1$ e $b_n = 1$).

Exemplo

Consideremos a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}.$$

Por decomposição das fracções, é possível chegar a

$$\frac{1}{n(n+3)(n+6)} = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}\right).$$

- Ora, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$ é uma série de Mengoli com $a_n = \frac{1}{n}$ e $p = 3$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série é convergente e a sua soma é $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}\right)$ é uma série de Mengoli onde $a_n = \frac{1}{n+3}$ e $p = 3$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série é convergente e a sua soma é $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$.

Como são ambas convergentes, a série dada é também convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)} = \frac{1}{18}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{18}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}\right) = \frac{73}{1080}.$$

Definição

Chamamos resto de ordem p da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à série

$$r_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Nota: Com resultados anteriores podemos concluir que se uma série é convergente, o mesmo acontecerá ao seu resto de qualquer ordem.

A soma do resto de ordem p de uma série convergente dá-nos o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma da série a sua soma parcial S_p. De facto, o erro é dado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n-1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} = r_p.$$

O teorema que se segue pode considerar-se, de certo modo, uma generalização da propriedade associativa da adição ao caso das séries convergentes.

Teorema

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão estritamente crescente de elementos de $\mathbb{N}$. Seja ainda $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida do seguinte modo

$$b_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell_1} a_k, & n = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=\ell_{n-1}+1}^{\ell_n} a_k, & n > 1. \end{cases}$$

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração.

Por definição de série convergente existe e é finito o limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Então qualquer sub-sucessão de S_n será convergente e terá o mesmo limite $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será convergente se e só se $S'_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ for convergente.

Demonstração.

No entanto,

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} b_n = \sum_{k=1}^{\ell_1} a_k + \sum_{k=\ell_1+1}^{\ell_2} a_k + \cdots + \sum_{k=\ell_{n-1}+1}^{\ell_n} a_k = \sum_{k=1}^{\ell_n} a_k = S_{\ell_n},$$

ou seja, S'_n é uma sub-sucessão de S_n, sendo, portanto, convergente para o mesmo valor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

♦

Nota: O resultado diz-nos que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{\ell_1} + \cdots + a_{\ell_2} + \cdots = (a_1 + \cdots + a_{\ell_1}) + (a_{\ell_1+1} + \cdots + a_{\ell_2}) + \cdots$$

Esta “propriedade associativa” não é válida se a série for divergente. Basta observar que se não considerássemos S_n como convergente, nada poderíamos dizer acerca da natureza de S'_n.

Aula 21

Séries Numéricas - Convergência

Em geral, a convergência de uma série não é analisada directamente a partir da sucessão das somas parciais, mas recorrendo antes a critérios de convergência.

$$\text{Convergência Geral} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Critério de Convergência de Cauchy} \\ \textbf{Condição Necessária de Convergência} \\ \text{Critério de Abel} \\ \text{Critério de Dirichlet} \end{cases}$$

$$\text{Convergência Termos Não Negativos} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Critério do Integral de MacLaurin} \\ \textbf{Critério do Limite} \\ \textbf{Critério da Comparação} \\ \text{Critério da Condensação de Cauchy} \end{cases}$$

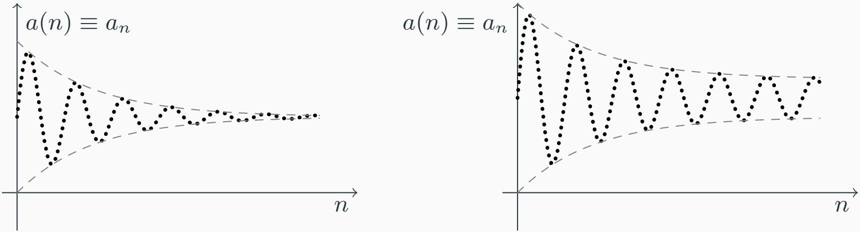
$$\text{Convergência Absoluta} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Critério da Raíz de Cauchy} \\ \textbf{Critério do Quociente de D'Alembert} \end{cases}$$

$$\text{Convergência Termos Alternados} \rightarrow \left\{ \textbf{Critério de Leibniz} \right.$$

Definição

Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma sucessão de Cauchy se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir uma ordem $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > N_0$ então a distância entre a_n e a_m é menor que ε, ou seja, se

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



Teorema (Critério da Convergência de Cauchy - Sucessões Reais)

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de número reais, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se e só se for uma sucessão de Cauchy.

Teorema (Critério da Convergência de Cauchy - Séries)

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e só se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir uma ordem $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon$, para todo o $m \geq N_0$ e $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para A. Então, a sucessão das somas parciais, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convirgirá para S. Como qualquer sucessão real convergente é de Cauchy, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : j, m \geq N_0 \Rightarrow |S_j - S_m| < \varepsilon.$$

Em particular, para $j = m + p$, com $p \in \mathbb{N}$,

$$|S_j - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{m+p} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_n \right| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que para todo o $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq N_0$, então $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon$, para $p \in \mathbb{N}$. Tomando $j = m + p$, temos $|S_j - S_m| < \varepsilon$, ou seja , que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Porque esta é uma sucessão de números reais, sabemos ser convergente, o que implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♦

Corolário

A convergência ou divergência de uma série não é afectada pela adição de um número finito de termos.

Demonstração.

Vamos começar por demonstrar o resultado para a adição de um único real. Sejam então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série, $t \in \mathbb{R}$, e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão das somas parciais associadas à série anterior. Por definição, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge exactamente quando $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Também sabemos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e só se for uma sucessão de Cauchy.

Adicionemos t entre o k-ésimo e o $(k+1)$-ésimo termos da série original e consideremos a nova sucessão de somas parciais para a série, $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Suponhamos que $m > n > k+1$. Então,

$$\begin{aligned} S'_m &= a_1 + \cdots + a_k + t + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n + \cdots + a_{m-1} \\ S'_n &= a_1 + \cdots + a_k + t + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1}, \end{aligned}$$

pelo que $S'_m - S'_n = a_n + \cdots + a_{m-1} = S_{m-1} - S_{n-1}$. Assim, $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucesão de Cauchy se e só se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. ♦

Nota: O último resultado pode ainda ter uma diferente forma: "A natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos". De facto, se $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $S'_n = \sum_{k=p+1}^{n} a_k$ (com $n > p + q$), temos $S_n = S'_n + \sum_{k=1}^{p} a_k$, e, portanto, se existir um dos limites, o outro também existirá:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n + \sum_{k=1}^{p} a_k.$$

Teorema (Condição Necessária de Convergência)

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de termos associados à série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Então, se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, tem-se que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração.

Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Então, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sucessão das somas parciais relativas à série em questão é tal que $S_k = a_k - S_{k-1}$ e $a_k = S_k - S_{k-1}$. Tomando agora o limite $k \to \infty$ em ambos os membros, atingimos

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = A - A = 0.$$

♦

Corolário

Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Nota: O corolário acima é muito mais aplicável do que a C.N.C. em geral. Isso dá-nos um critério para determinar rapidamente se muitas séries são divergentes. Vejamos que a recíproca do Teorema não é válida em geral, i.e., se $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ então não podemos necessariamente determinar a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplo

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ é divergente, uma vez que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Exemplo

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n^3}{10 + 2n^3}$ é divergente, uma vez que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - n^3}{10 + 2n^3} = -\frac{1}{2} \neq 0$.

Exemplo

Consideremos a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, o que não nos permite concluir nada sobre a natureza da série. No entanto, se tivermos atenção à sucessão das somas parciais, podemos ver que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, o que nos leva a

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ e se tem que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, concluímos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite ∞ e que a série em estudo é divergente.

Teorema (Critério de Abel)

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de reais. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demonstração.

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, temos que a sucessão de somas parciais $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Desta forma, a sucessão em causa, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é limitada, pelo que existirá um $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| \leq M$.

Além disso, dado que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, vemos que $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$ converge. Adicionalmente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_{k+1} - b_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\,|b_{k+1} - b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M|b_{k+1} - b_k| = M\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k|.$$

Existem agora dois casos a considerar. Suponhamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente. Então, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} - b_k$ converge para $-b_1$. Caso $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja monótona decrescente, então $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1}$ converge para b_1.

Demonstração.

Em qualquer um dos casos, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k|$ converge. Assim, o membro direito da fórmula das somas parciais converge, o que implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

◆

Teorema (Critério de Dirichlet)

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de reais. Se a sucessão de somas parciais $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for decrescente e tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demonstração.

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão limitada de somas parciais relativas a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Então, por definição, existirá um $M \in \mathbb{R}^+$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$. Assim, é possível ver que

$$\lim_{n\to\infty} -Mb_{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} -|A_n|b_n \leq \lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} |A_n| b_{n+1} \leq M b_{n+1}.$$

Demonstração.

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0$. Segue então que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n(b_{n+1} - b_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n||b_{n+1} - b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M|b_{n+1} - b_n| = M \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n).$$

Considerando

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1,$$

teremos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = -b_1,$$

pelo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ converge.

Da mesma forma, $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n(b_{n+1} - b_n)|$ converge, o que implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_{n+1} - b_n)$. Uma vez ambos os termos das somas parciais para as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

♦

Séries Numéricas - Convergência Geral - Exercícios

1. Analise a natureza das séries seguintes à luz da condição necessária de convergência:
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{7}{10}\right)^n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\frac{6+8n+9n^2}{3+2n+n^2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3ne^n}{n^2+1}$
2. Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em alguns casos, determine as suas somas:
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}50\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{7}{11}\right)^n+\left(\frac{10}{3}\right)^n\right]$
   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{n^2-1}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n+1}}{4^{2n}}$

3. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt[n]{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$$

também convegem.

4. Utilizando o Critério de Dirichlet, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$$

é convergente. Por último, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n}}$$

é divergente.

Séries Numéricas - Termos Não Negativos

Definição

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos não negativos se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $a_n \geq 0$.

Teorema

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a sucessão das somas parciais associada é monótona crescente.

Teorema

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão de somas parciais for limitada superiormente.

Demonstração.

Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$. Se a série em causa é convergente, então, por definição, a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite finito. Consequentemente, é uma sucessão limitada. Suponhamos que S_n é limitada. Como $a_n \geq 0$ tem-se que $S_{n+1} \geq S_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que S_n é uma sucessão monótona crescente. As duas afirmações anteriores implicam a convergência de S_n, o que equivale a dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. ♦

Teorema (Critério do Integral de MacLaurin)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Se existir uma função descrescente $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que converge para 0 e tal que $f(n) = a_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então:

1. $\displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + a_n \leq S_n \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + a_1$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se e só se* $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge.*
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge se e só se* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge.*

Demonstração.

1. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Então, o integral de f em $[1, n]$ é igual à soma dos integrais de f nos sub-intervalos $[1, 2], [2, 3], \ldots, [n-1, n]$. Por outras palavras,

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Dado que f é decrescente em $[1, \infty[$, temos que para todo o $k \in \{2, 3, \ldots\}$ e todo o $x \in [x_{k-1}, x_k]$: $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Demonstração.

Utilizando a última desigualdade, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x\right) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} a_{k+1}\,\mathrm{d}x\right) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} a_k\,\mathrm{d}x\right)$$

Notemos que $\int_k^{k+1} a_k\,\mathrm{d}x = a_k((k+1)-k) = a_k$, para todo o k, pelo que a desigualdade se simplifica em

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n - a_n$$

Combinando as desigualdades, atingimos o pretendido,

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + a_n \leq S_n \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + a_1.$$

Demonstração.

2. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para uma soma A. Então, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para esse mesma A. Utilizando o ponto 1. acima, temos que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq A$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pelo que
$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq A.$$
Tal mostra-nos que $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge (uma vez que f é positiva).

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge para uma constante $\gamma \in \mathbb{R}$. Utilizando novamente o ponto 1. acima, temos que
$$S_n \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + a_1 = a_1 + \gamma.$$
Tomando o limite de $n \to \infty$, obtemos $\lim_{n\to\infty} S_n \leq a_1 + \gamma$. Desta forma, a sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e, pelo facto de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser positiva, temos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente. Assim, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

♦

Exemplo

Seja $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ a série de termo geral $a_n = \frac{1}{n \ln^{\alpha}(n)}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tivermos alguma atenção, podemos verificar que

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha}(x)}$$

é uma função positiva e contínua em $[2, \infty[$. Como, se $x > 2$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \qquad & \Leftrightarrow \qquad -\frac{\ln^{\alpha}(x) + \alpha \ln^{\alpha-1}(x)}{x^2 \ln^{2\alpha}(x)} = 0 \\ & \Leftrightarrow \qquad -\frac{\ln^{\alpha-1}(x)(\ln(x) + \alpha)}{x^2 \ln^{2\alpha}(x)} = 0 \\ & \Leftrightarrow \qquad \ln(x) + \alpha = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e^{-\alpha}, \end{aligned}$$

caso $x > e^{-\alpha}$, $f'(x) < 0$, pelo que f será decrescente. Para $p \geq e^{-\alpha}$ e $p \geq 2$, estudemos o integral

$$\int_p^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_p^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha}(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Exemplo (cont...)

Se $\alpha = 1$,

$$\int_p^t \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(x))\big|_p^t = \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(p)),$$

e se $\alpha \neq 1$,

$$\int_p^t \frac{1}{x\ln^{\alpha}(x)}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\ln^{-\alpha+1}(x)}{-\alpha+1}\right|_p^t = \frac{\ln^{-\alpha+1}(t) - \ln^{-\alpha+1}(p)}{-\alpha+1},$$

tendo-se

$$\lim_{t\to\infty}\int_p^t \frac{1}{x\ln^{\alpha}(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1, \\ \frac{\ln^{-\alpha+1}(p)}{-\alpha+1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Então, o integral converge se e só se $\alpha > 1$. Pelo Critério do Integral de MacLaurin, a série converge se e só se $\alpha > 1$.

Nota: Convém ter em mente que, na utilização do Critério do Integral, o valor obtido na resolução do integral impróprio (quando este é convergente) <u>não é</u> a soma da respectiva série.

Exemplo

Vamos determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

converge ou diverge.

Comecemos por ver que $f(x) = \frac{1}{x+1}$ é uma função decrescente, positiva e contínua que tende para 0 quando $x \in [1, \infty[$. Desta forma, podemos aplicar o Critério do Integral de MacLaurin:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln(x+1)\big|_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln(t+1) - \ln(2)) = \infty.$$

Dado que o integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ diverge, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ também diverge.

Definição

Às séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}$$

chamamos séries de Dirichlet (ou séries harmónicas de ordem α).

Não é difícil ver que a convergência destas séries pode ser analisada segundo o critério do integral. De facto:

- Se $\alpha \leq 0$, a série é divergente porque o termo geral não tende para 0.
- Se $\alpha > 0$, a função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty[$. Sabemos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$$

  converge se e só se $\alpha > 1$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$.

Teorema (Critério de Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que* $a_n \leq b_n$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também será convergente.*
2. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *também será divergente.*

Demonstração.

Sejam $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $S'_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$. Porque $a_n \leq b_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $0 \leq S_n \leq S'_n$.

1. Visto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, a sucessão das suas somas parciais, (S'_n), é limitada, o que implica que S_n também seja limitada, ou seja, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente.
2. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então (S_n) não é limitada. Tal implica que (S'_n) não seja limitada, o que nos leva a concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seja divergente.

♦

Nota: Como vimos anteriormente, a omissão de um número finito de termos não altera a natureza da série, portanto, o resultado anterior mantém-se válido se existir um $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$, para todo o $n \geq p$.

Exemplo

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Como

$$0 < \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é geométrica de razão $\frac{1}{2}$, sabemos ser convergente. Assim, pelo Critério de Comparação, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é também convergente.

Exemplo

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \cos^2(n)}.$$

Exemplo (cont...)

O facto de subtrarir $\cos^2(n) \geq 0$ no denominador implica que

$$\frac{n}{n^2 - \cos^2(n)} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

No entanto, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Assim, pelo Critério de Comparação, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \cos^2(n)}$ é divergente.

Corolário (Critério do Limite)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que existe o limite

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então, verificam-se as seguintes condições:

1. *Se $\ell \in \mathbb{R}^+$, as séries têm a mesma natureza.*
2. *Se $\ell = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
3. *Se $\ell = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração.

1. Seja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}^+$. Então, por definição,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0,\ \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \varepsilon.$$

Considerando $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, concluímos que, a partir da ordem N_0 temos

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} - \ell < \frac{\ell}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2},$$

e , portanto,

$$a_n < \frac{3\ell b_n}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\ell b_n}{2} < a_n.$$

3. Seja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Então, por definição,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0,\ \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon.$$

A partir da ordem N_0 teremos $a_n > \varepsilon b_n > 0$, uma vez que $b_n > 0$.

♦

Exemplo

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+3}$. Como sabemos, é uma série de termos não negativos. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+1}{n^4+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^2}{n^4+3} = 2,$$

pelo que as séries terão a mesma natureza. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+3}$ também converge.

Exemplo

Consideremos a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$. Como sabemos, é uma série de termos não negativos. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt[3]{n^7}+\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^7(1+\frac{1}{n^4})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^7}(4+\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n^7}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{1}} = 4,$$

pelo que as séries terão a mesma natureza. Dado que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverge, temos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$ também diverge.

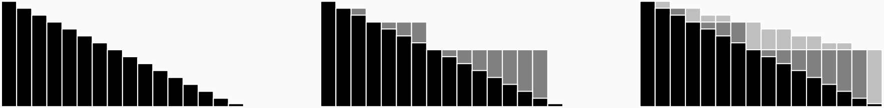
Aula 22

Séries Numéricas - Termos Não Negativos - Convergência

Teorema (Critério da Condensação de Cauchy)

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente de termos positivos. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e só se a seguinte série converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$



Demonstração.

Sejam $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$. Note-se que dada a circunstância de $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$, temos que ambas as sucessões $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (associadas às séries em estudo) são monótonas crescentes e minoradas.

Demonstração.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Para um n fixo, escolha-se k tal que $2k \geq n$. Então, atendendo a que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= T_k. \end{aligned}$$

Tal mostra que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é majorada e, portanto, concluímos que é convergente.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Para um k fixo, escolha-se n tal que $n \geq 2^k$. Perante tal, temos

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k}}{2} \\ &= \frac{T_k}{2}. \end{aligned}$$

Isto mostra que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão majorada e, portanto, convergente. ♦

Séries Numéricas - Termos Não Negativos - Exercícios

1. Utilizando os critérios anteriormente introduzidos, estude a convergência das seguintes séries:

   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)^3}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+7}{n^4 \sin^2(n)}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+4n+1}}{n^3+9}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n+\cos^2(n)}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2-n}{n^3+9}$
   - $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2-3n+2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^3}}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n^2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n^4+1)^2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

2. Aplique o Critério da Condensação de Cauchy para determinar a convergência das seguintes séries:

   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$
   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$

3. Mostre que a série

$$\sum_{n=16}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n)) \ln^p(\ln(\ln(n)))}$$

   converge se e só se $p > 1$.

4. Mostre que, se $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ também converge.

5. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos, então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ também converge.

Vamos introduzir uma nova propriedade das séries numéricas, a **convergência absoluta**. A impotância do estudo desta característica reside no facto das séries deste tipo serem "fortes" o suficiente para ter propriedades de somas finitas que nem todas as séries convergentes têm.

Um exemplo simples será a possibilidade de re-ordenação dos termos sem alteração da soma da série.

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então o mesmo acontecerá à série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração.

Vejamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente se e só se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq N_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \big||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_{m+p}|\big| < \varepsilon.$$

Como

$$|a_{m+1} + \cdots + a_{m+p}| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_{m+p}| = \big||a_{m+1}| + \cdots + |a_{m+p}|\big|$$

temos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq N_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon. \qquad \blacklozenge$$

Definição

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente. Caso $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seja, mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente, dizemos que a série é simplesmente convergente (ou condicionalmente convergente).

Nota: Realça-se que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta poderá ser convergente ou divergente.

Exemplo

Vamos verificar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ é absolutamente convergente. Como sabemos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^3}.$$

Ora, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, o que nos leva a $|\sin(n)| \leq 1$. Assim, temos

$$\frac{|\sin(n)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Pelo Critério de Comparação, concluímos então (porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ é absolutamente convergente.

Exemplo

Vamos estudar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}}$. Como é possível ver,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

No entanto, concluímos anteriormente que esta última série é divergente (série de Dirichlet de ordem $\frac{1}{2}$), pelo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}}$ não será absolutamente convergente. Podemos verificar posteriormente que será simplesmente convergente.

Teorema (Critério do Quociente de D'Alembert)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais não nulos e

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Se o limite existir, verificam-se as seguintes condições:

1. *Se $\ell \in [0, 1[$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.*
2. *Se $\ell \in [1, \infty[$ ou $\ell = \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*
3. *Se $\ell = 1$, nada se pode concluir.*

Demonstração.

1. Suponhamos que $\ell \in [0,1[$. Dado que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, para um $\ell < k < 1$, existirá uma ordem $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq N_0$, então $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \leq k$. Então, $|a_{m+1}| \leq k|a_m|$, pelo que se tem

$$
\begin{aligned}
|a_{N_0+1}| &\leq k|a_{N_0}| \\
|a_{N_0+2}| &\leq k|a_{N_0+1}| \leq k^2|a_{N_0}| \\
|a_{N_0+3}| &\leq k|a_{N_0+2}| \leq k^2|a_{N_0+1}| \leq k^3|a_{N_0}| \\
&\vdots \\
|a_{N_0+r}| &\leq \cdots \leq k^r|a_{N_0}|
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{N_0+r}| \leq \sum_{r=1}^{\infty} k^r|a_{N_0}|$. Acontece que $\sum_{n=1}^{\infty} k^r|a_{N_0}|$ converge da mesma forma que a série geométrica (dado que $0 \leq \ell < k < 1$) e, pelo Critério de Comparação, encontramos uma subsucessão $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n|$ que converge... o que nos obriga a conlcuir que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Demonstração.

2. Suponhamos que $\ell \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$. Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, temos que existirá uma ordem $N_0 \in \mathbb{N}$ para a qual, se $m \geq N_0$

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |a_{m+1}| > |a_m|.$$

Contudo, de acordo com a última desigualdade, podemos verificar $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, ou seja, que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Desta forma, pela Condição Necessária de Convergência, concluímos que a série em mãos é divergente.

⧫

Exemplo

Vamos determinar a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$. Como o termo geral é não nulo, vamos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

e aplicar o Critério do Quociente de D'Alembert.

Exemplo (cont...)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-10)^{n+1}}{4^{2(n+1)+1}(n+2)}}{\frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-10)(n+1)}{4^2(n+2)}\right| = \frac{10}{16} < 1.$$

Dado que $\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, concluímos que a série em questão é absolutamente convergente.

Exemplo

Vamos determinar a natureza da série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(2n-1)!}$. Como o termo geral é não nulo, vamos calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

e aplicar o Critério do Quociente de D'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{(2n+1)!}}{\frac{n^2}{(2n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)n^2}\right| = 0 < 1.$$

Dado que $\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, concluímos que a série em questão é absolutamente convergente.

Exemplo

Seja $k > 0$. Vamos determinar a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$. Dado que o termo geral a_n é não nulo,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{k^n n!}{n^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{k^{n+1}(n+1)!n^n}{k^n n!(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} k \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{k}{e}.$$

O Critério do Quociente de D'Alembert permite-nos concluir que: se $\frac{k}{e} < 1$, i.e., se $k < e$, a série é convergente; enquanto que se $\frac{k}{e} > 1$, a série será divergente.

Caso $k = e$, nada se poderá concluir. No entanto, como $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ é uma sucessão crescente com limite e, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ será decrescente e terá limite 1, ou seja, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tenderá para 1 por valores maiores. Desta forma, é possível concluir que a série em causa é divergente.

Teorema (Critério da Raíz de Cauchy)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Se o limite existir, verificam-se as seguintes condições:

1. *Se $\ell \in [0,1[$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.*
2. *Se $\ell \in [1,\infty[$ ou $\ell = \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*
3. *Se $\ell = 1$, nada se pode concluir.*

Demonstração.

1. Comecemos por assumir que $\ell \in [0,1[$. Então, para um $\ell < k < 1$ existirá uma ordem $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq N_0$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} < k \quad \Rightarrow \quad |a_n| < k^n.$$

Desta forma, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} k^n$. No entanto, dado que $0 < k < 1$, a última série irá convergir. Pelo Critério de Comparação, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, i.e., que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração.

2. Assumamos que $\ell \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$. Desta forma,

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| > 1^n = 1.$$

Contudo, se $|a_m| > 1$ para algum $m \geq N_0 \in \mathbb{N}$ (ordem), então temos que $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, o que implica (pela Condição Necessária de Convergência) a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♦

Exemplo

Consideremos a série de termo geral $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\
&= \frac{e}{2} > 1,
\end{aligned}$$

concluímos, pelo Critério da Raíz de Cauchy, que a série considerada é divergente.

Exemplo

Consideremos a série de termo geral $a_n = \frac{n^{1-3n}}{4^{2n}}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^{1-3n}}{4^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^{\frac{1}{n}-3}}{4^2}\right| = 0 < 1,$$

concluímos, pelo Critério da Raíz de Cauchy, que a série considerada é convergente.

Exemplo

Consideremos a série de termo geral $a_n = \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right| = \left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7} < 1,$$

concluímos, pelo Critério da Raíz de Cauchy, que a série considerada é convergente.

Aula 23

Teorema

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série absolutamente convergente e* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma qualquer permutação de* $\mathbb{N}$. *Então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *converge absolutamente e ambas as somas coincidem.*

O último resultado generaliza às séries absolutamente convergentes a propriedade comutativa da adição usual.

Contudo, é de referir que a propriedade não é válida para séries simplesmente convergentes e pode mesmo demonstrar-se que, por re-ordenação dos termos, podemos obter outra série de soma previamente fixada ou até uma série divergente.

Teorema (Re-Ordenação de Riemann)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série simplesmente convergente e* $\ell \in \mathbb{R}$. *Então, existirá uma permutação* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \ell.$$

Adicionalmente, existirá ainda uma permutação τ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \infty$.

Exemplo

Consideremos a série de Dirichlet alternada, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, que sabemos ser simplesmente convergente. Ao re-organizemos os termos por forma que cada termo positivo seja seguido por dois termos negativos, obtemos:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Temos para esta série as somas parciais

$$\begin{aligned}
S'_1 &= 1 \\
S'_2 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S'_3 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} S_2 \\
S'_4 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
S'_5 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
S'_6 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} S_4,
\end{aligned}$$

Exemplo (cont...)

onde $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Então, $S_{3n} = \frac{1}{2} S_{2n}$, o que implica que, sendo $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to\infty} S'_{3n} = \frac{1}{2} S$.

Como $S'_{3n+1} = S'_{3n} + \frac{1}{2n+1}$ e $S'_{3n+2} = S'_{3n} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2}$, atingimos

$$\lim_{n\to\infty} S'_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} S'_{3n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S'_{3n}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} S'_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} S'_{3n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty} S'_{3n},$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} S'_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} S'_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} S'_{3n} = \frac{1}{2} S.$$

Conclui-se assim que

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \frac{1}{2} S,$$

i.e., que a série obtida por re-ordenação dos termos da série de Dirichlet alternada é convergente e tem soma igual a metade da soma da série dada.

Ao referir a "força" de um dado critério, estamos de facto a aludir à capacidade de produção de um resultado (conclusivo).

Para que um teste de convergência seja "mais forte" que outro, um resultado do primeiro implicará um resultado do segundo. No entanto, deverão existir casos em que o critério de convergência forte funciona, mas o critério fraco não.

Teorema

O Critério da Raíz de Cauchy é mais forte que o Critério do Quociente de D'Alembert.

Exemplo

Consideremos a série de termo geral $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{2^{n+1}}, & n \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}$.

Se tivermos em atenção que $\frac{a_n}{a_{n+1}} \in \{1, \frac{1}{4}\}$, concluímos que o limite de análise no Critério do Quociente de D'Alembert não existe (pelo que não podemos concluir o que seja). Contudo, ao aplicar o Critério da Raíz de Cauchy, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^{n+1}}\right|} = \frac{1}{2}$$

e concluímos que a série é convergente.

Séries Numéricas - Convergência Absoluta - Força de Critérios

- Agora que cobrimos algumas propriedades interessantes de certas séries, vamos introduzir critérios mais avançados para convergência.

- Embora possamos ver que as técnicas que temos utilizado até agora são extremamente úteis e podem produzir resultados intrigantes, os critérios e estratégias que se exibiram nem sempre determinam convergência ou divergência de uma série.

- Em verdade, frequentemente acontece que os critérios que mencionámos não nos dão qualquer tipo de informação.

Para ilustrar o último ponto (de forma breve), vamos considerar uma série de Dirichlet de ordem p e aplicar os Critérios do Quociente de D'Alembert e da Raíz de Cauchy: tomando $a_n = \frac{1}{n^p}$, conseguimos ver que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \right| = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{\left| \frac{1}{n^p} \right|} = \lim_{n\to\infty} (n^{-p})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{-p} = 1.$$

Embora saibamos que uma série deste tipo diverge quando $p \leq 1$ e converge quando $p > 1$, não poderemos determinar se a série converge ou diverge: tanto o Critério da Raíz de Cauchy como o Critério do Quociente de D'Alembert nos dão valor 1, independentemente do p em causa.

Como podemos ver, estes critérios deixam de ter utilidade no que toca a análise de convergência. Neste caso específico, poderemos utilizar o Critério de Comparação, mas quando quisermos examinar séries com termos gerais mais complexos, podemos complicar substancialmente o problema. É nesse sentido que são necessários alguns critérios "mais avançados"...

Nas extensões que vamos tratar, assumimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos. No entanto, há que observar que estes critérios também podem ser aplicados a séries com um número finito de termos negativos: qualquer uma dessas séries pode ser escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N_0} a_n + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n,$$

onde a_{N_0} é o termo negativo indexado mais alto.

Teorema (Critério de Kummer)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de reais positivos, e

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left(b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right).$$

Se o limite existir, verificam-se as seguintes condições:

1. *Se $\ell \in \mathbb{R}^+$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.*
2. *Se $\ell \in \mathbb{R}^-$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é diverge.*

Nota: Se concretizarmos $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, então ℓ é positivo e a série converge. Tal diz-nos que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, i.e., que a série converge pelo Critério do Quociente de D'Alembert. De forma semelhante, se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$, então ℓ é negativo e a série diverge. O mesmo pode ser concluído relativamente ao Critério do Quociente de D'Alembert.

- O Critério de Kummer é inconclusivo quando $\ell = 0$, mas quando tal acontece é possível refinar a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por forma a obter um resultado.
- No entanto, como não existe estratégia específica para escolher $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a tarefa em mãos pode tornar-se altamente tediosa e demorada se quisermos obter resultados pelo Critério de Kummer.

É neste sentido que surge o Critério de Raabe, onde concretizamos $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema (Critério de Raabe)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Caso exista

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$

então:

1. *Se $\ell > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.*
2. *Se $\ell < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*
3. *Se $\ell = 1$, nada podemos concluir.*

Exemplo

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!n}$. Sabemos que, pelo Critério do Quociente de D'Alembert,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+2)} = 1,$$

pelo que nada podemos concluir relativamente ao problema em mãos. No entanto, se aplicarmos o Critério de Raabe, atingimos

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)(2n+2)}{n(2n+1)} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+2) - n(2n+1)}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

e conseguimos concluir que a série diverge.

Exemplo

Como vimos anteriormente, nem o Critério do Quociente de D'Alembert, nem o Critério da Raíz de Cauchy nos permitem concluir o que quer que seja acerca da série de Dirichlet de ordem geral p. Porém,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^p}{n^p}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{(n+1)^p}{n^p}-n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^p-1}{\frac{1}{n}} = p.\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que se $p>1$, então a série de Dirchlet de ordem p converge; por outro lado, se $p<1$, concluímos que a série diverge. Contudo, continuamos a não conseguir concluir a convergência para $p=1$.

Teorema (Critério de Gauß)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Caso exista uma ordem $N_0 \in \mathbb{N}$, um $r > 1$ e um $M > 0$ tal que, para todo o $n \geq N_0$, se tenha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^r},$$

onde $|f(n)| \leq M$, para todo o n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $A > 1$ e diverge se $A \leq 1$.

Nota: Enquanto que no Critério de Kummer é necessário encontrar uma sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adequado, o Critério de Gauß não tem esse problema. De facto, o melhor coeficiente A pode ser detemrinado através de

$$A = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

Adicionalmente, podemos considerar uma função $g(n)$ tal que

$$g(n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{A}{n}.$$

Por último, resta-nos encontrar um $r > 1$ tal que $f(n) = g(n) \cdot n^r$ seja limitada.

Exemplo

Vamos determinar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} x^{n-1}$, para $x > 0$. Comecemos por ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} x = x.$$

Assim (pelo Critério do Quociente de D'Alembert), se $x < 1$, a série converge; se $x > 1$, a série diverge. No entanto, o caso $x = 1$ permanece "misterioso". Ao aplicar o Critério de Raabe, temos que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^2 - (2n+1)^2}{(2n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+3n}{(2n+1)^2}\right) = 1,$$

o que nos deixa com a convergência deste caso por descobrir. Ao "forçar" as questões com o Critério de Gauß, atingimos

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2} \\ &= \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{3}{4n^2}+\dots\right) = 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Como o coeficiente A é igual a 1, a série diverge para $x = 1$.

1. Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+6}(1+n^2)}{n^4}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^3(n)}{n^3-n}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt[3]{n-1}}$

2. Estude a convergência (absoluta) das seguintes séries:

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6^{-2n}(n-4)}{4^{3-2n}(2-n^2)}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6-9n}{2+4n}\right)^{\frac{n}{3}}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{4n}}{(n-2)!}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n^2-2n+1}{3n^2+n-3}\right)^{-n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

3. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$, com $p \in \mathbb{N}$

Definição

Uma série alternada é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n,$$

onde $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Critério de Leibniz)

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão decrescente de termos positivos e tivermos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$$

é convergente.

Demonstração.

Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão das somas parciais desta série:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n.$$

Vamos estudar as sub-sucessões de índices pares e de índices ímpares. Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer;

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k}$$
$$S_{2k+1} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1}$$

A sub-sucessão $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente porque, como a_n é decrescente,

$$\begin{aligned} S_{2k+2} - S_{2k} &= a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} \\ &\quad - (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k}) \\ &= a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0 \end{aligned}$$

e é uma sucessão limitada dado que $S_2 \leq 2_{2k} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + a_{2k}] < a_1$. Sendo uma sucessão monótona e limitada, $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Por outro lado, de $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$ conclui-se que $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k}$ visto que, por hipótese, a_n é um infinitésimo. ♦

Exemplo

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Se $\alpha \leq 0$, então a série diverge, dado que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (Condição Necessária de Convergência).
- Se $\alpha > 0$, a série é convergente porque $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, com $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo

Seja a_n o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

- Como a_n é um infinitésimo e $a_n > 0$, para todo o $n > 1$, mas a_n não é decrescente, pelo Critério de Leibniz nada podemos concluir.
- Contudo, vê-se fácilmente que a série dada é divergente porque é a soma de uma série convergente - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - com uma série divergente - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Exemplo

Vamos estudar a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}\sqrt{n}}{n+4}$, onde $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+4}$. O primeiro passo será verificar o limite de a_n; de facto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4} = 0.$$

A monotonia (decrescente) já será um pouco mais complicada de verificar... passamos ao estudo da derivada.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4} \qquad \text{e} \qquad f'(x) = \frac{4-x}{2\sqrt{x}(x+4)^2}.$$

Existem dois pontos críticos relativos a f', $x = 0$ e $x = 4$ ($x = -4$ não é considerado por não fazer parte de D_f). Utilizando pontos de teste, vemos que

$$f'(1) = \frac{3}{50} \qquad \text{e} \qquad f'(5) = -\frac{\sqrt{5}}{810},$$

portanto f será crescente em $x \in [0,4]$ e decrescente em $x \in [4,\infty]$. Porque a convergência da série não depende dos seus primeiros termos, podemos aplicar o Critério de Leibniz e concluir que a série em mãos é convergente.

Teorema

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão decrescente de termos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *e* S *a soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$*. Então, para todo o* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$0 \leq (-1)^n (S - S_n) \leq a_{n+1}.$$

Corolário

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão decrescente de termos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *e* S *a soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$*. Então, para todo o* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Nota: Do último resultado ressalta que, nas condições indicadas, o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma de uma série alternada alguma soma parcial é, em valor absoluto, inferior ao valor absoluto do primeiro dos termos desprezados. Com efeito,

$$|(-1)^n (S - S_n)| \leq |(-1)^n a_{n+1}| \qquad \text{ou seja,} \qquad |S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Exemplo

Consideremos a série alternada de Dirichlet de ordem $p = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Pelo Critério de Leibniz, a série é convergente, dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de termos positivos, decrescente e com limite zero.

Se nesta série tomarmos para valor aproximado da soma a soma parcial S_9, cometeremos um erro que, em valor absoluto, é inferior a $\frac{1}{10}$, valor de a_{10}.

Séries Numéricas - Termos Alternados - Exercícios

1. Estude a natureza (divergência ou convergência) das seguintes séries numéricas:
   - $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n(2^n+3^n)}$
   - $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(1-n)}{3n-n^2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+5}(2n+1)}{n^2+8}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{n^3+4n+1}$
   - $\displaystyle\sum_{n=3} \frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$