Cálculo I

Ano Lectivo 2022/23

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Parte 1 - Complementos de Funções Reais de Variável Real

Aula 1

Definição

Dados dois conjuntos A, B, chamamos função de A para B a toda a correspondência que associa a cada elemento de A a um e um só elemento de B. Ao considerarmos a função

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

a x chamamos a variável independente, enquanto que y é dita variável dependente.

A função f dir-se-á uma função real de variável real quando $A, B \subseteq \mathbb{R}$. À expressão (ou fórmula) que traduz o modo como a variável y depende da variável x chamamos expressão analítica da função f.

Definição

Consideremos uma função $f : A \longrightarrow B$.

- Dizemos que A (conjunto dos elementos que têm imagem pela função f) é o domínio (de definição) de f.
- Dizemos que o conjunto B é o conjunto de chegada de f.
- Dizemos que o conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ é o contra-domínio (ou imagem) de f.

Definição

Dada uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, designamos o conjunto

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D_f, y = f(x)\}$$

por gráfico da função f.

Decorre da definição acima que G_f é o lugar geométrico descrito pelos pontos $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição

Dada uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, designamos por zeros de f todos os elementos $x \in D_f$ tais que $f(x) = 0$.

Definição

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- crescente (**estritamente**) quando, para todo $x_1, x_2 \in D_f$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)).$$

- decrescente (**estritamente**) quando, para todo $x_1, x_2 \in D_f$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \qquad (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)).$$

- monótona (**estritamente**) quando é crescente (**estritamente**) ou decrescente (**estritamente**).
- par quando, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$.
- ímpar quando, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f \wedge f(x) = -f(-x)$.

Definição

Dizemos que uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica se existir um $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo o $x \in D_f$.

Caso exista, dizemos que o menor p para o qual a igualdade acima é satisfeita é o período de f.

Dadas duas funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, e dado $x \in D_f \cap D_g$, podemos definir algumas operações:

- **Soma**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- **Produto**: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- **Quociente**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, se $g(x) \neq 0$.

Definição

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções. A composta de g com f, denotada por $g \circ f$, é a função definida de forma a que o domínio seja o conjunto $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e que, para cada $t \in D_{g \circ f}$, se tenha $(g \circ f)(t) = g(f(t))$.

Definição

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$. Então, f diz-se

- injectiva quando, para todo o $x_1, x_2 \in A$, se tiver
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$
- sobrejectiva quando, para todo o $y \in B$, existir um $x \in A$, tal que $f(x) = y$.
- bijectiva quando f for injectiva e sobrejectiva.

Definição

Uma função injectiva $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se invertível quando existir uma função $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = x$ e $(f \circ g)(y) = y$, ou seja,

$$\begin{cases} x = g(y) \\ y \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D_f \end{cases}.$$

Nesta situação, temos que $f(D_f) = D_g$ e que $g(D_g) = D_f$.

Nota: Caso exista, g é dita inversa de f e denotada por f^{-1}.

Pensando no gráfico de f^{-1},

$$G_{f^{-1}} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \in G_f\},$$

torna-se evidente que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à bissectriz dos quadrandes ímpares (ou seja, um gráfico é obtido a partir do outro por troca do eixo dos xx's com o eixo dos yy's), pois

$$(x_0, y_0) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y_0, x_0) \in G_{f^{-1}}.$$

Definição

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se limitada se existir um $c \in \mathbb{R}^+$, para todo o $x \in D_f$, tal que $|f(x)| < c$.

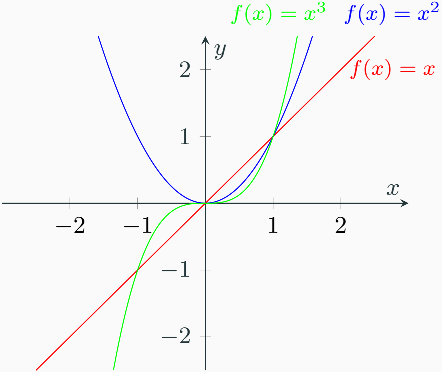
Definição

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $X \subseteq D_f$. A restrição de f a X, denotada por $f|_X$, é a aplicação $X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_X(x) = f(x)$, para cada $x \in X$.

Algumas Revisões

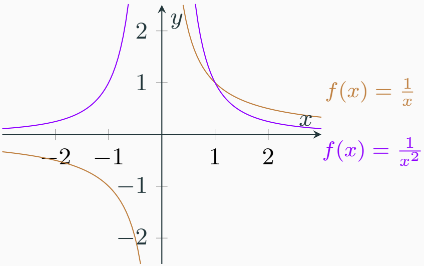
É conveniente saber-se de cor o aspecto dos gráficos de várias funções:

- **Linear/Afim:** $y = mx + b$.
- **Quadrática:** $y = ax^2 + bx + c \;\leftrightsquigarrow\; y = a(x+h)^2 + k$.
- **Pôtencia:** $y = x^n,\ (n \in \mathbb{N})$.

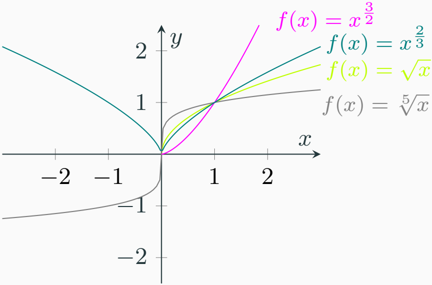


Algumas Revisões

- **Pôtencia:** $y = x^n, \; (n \in \mathbb{Z}^-)$



- **Pôtencia:** $y = x^n, \; (n = \frac{p}{q}, \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$



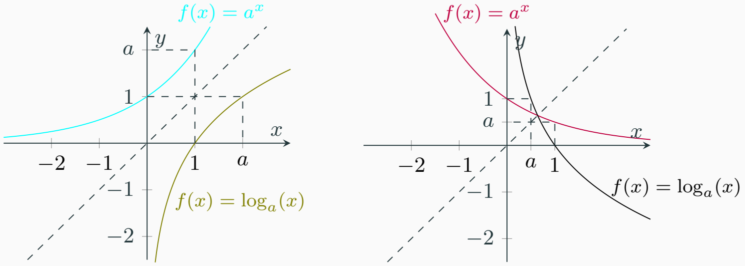
Algumas Revisões

Se considerarmos $p = 1$ no caso anterior:

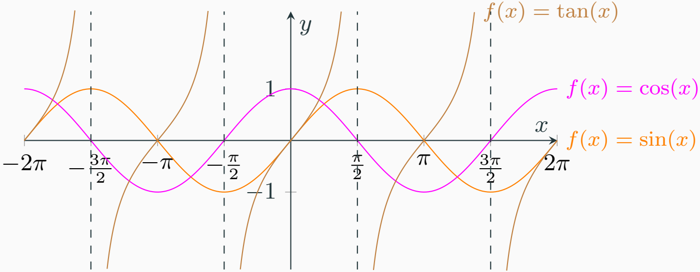
$$y = x^n = x^{\frac{1}{q}} := \sqrt[q]{x}, \qquad \begin{cases} x \geq 0 & \text{se } q \text{ par} \\ x \in \mathbb{R} & \text{se } q \text{ ímpar} \end{cases},$$

onde a função $x \mapsto \sqrt[q]{x}$ é a inversa da função $y \mapsto y^q$ (restrita a $\mathbb{R}_0^+$ quando q é par).

- **Exponencial:** $y = a^x,\ x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$.
- **Logarítmica:** $y = \log_a(x),\ x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.



- **Trigonométricas:** $y = \sin(x),\ y = \cos(x),\ y = \tan(x)$



É ainda útil, em certas ocasiões, considerar também as funções secante, co-secante e co-tangente, cuja definição se reduz à recíproca das funções co-seno, seno e tangente:

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}; \qquad \csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}; \qquad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

1. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ e $g(x) = x$, é verdade que $f = g$?
2. Um rectângulo tem 16 m^2 de área. Exprime o seu perímetro, p, em função do comprimento a de um dos seus lados.
3. Em cada um dos seguintes casos, determina o maior domínio adequado (subconjunto de $\mathbb{R}$) onde possas inverter a função f e calcula a sua inversa. Indica também o contra-domínio de f no domínio escolhido.
   - $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$.
   - $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$.
   - $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Não! Embora $f(x)$ e $g(x)$ tenham expressões iguais, dado que $\frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$, não há relação de igualdade entre domínios de definição: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \neq \mathbb{R} = D_g$.

2. $p(a) = \dfrac{32}{a} + 2a$.

3.
   - $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$. Escolhendo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
x = \tfrac{4y-1}{2y+3} \quad &\Leftrightarrow \quad x(2y+3) = 4y - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2xy + 3x = 4y - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2xy - 4y = -1 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad y(2x-4) = -1 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad y = \tfrac{-1-3x}{2x-4},
\end{aligned}
$$

   pelo que $f^{-1}(x) = \frac{-1-3x}{2x-4}$, onde $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Desta forma, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- $f(x) = 1 + \sqrt{2+3x}$. Escolhendo $D_f = [-\frac{2}{3}, \infty[$, obtemos

$$\begin{aligned} x = 1 + \sqrt{2+3y} \quad &\Leftrightarrow \quad x - 1 = \sqrt{2+3y} \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 2 + 3y \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 2 = 3y \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2-2}{3} = y, \end{aligned}$$

pelo que $f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^2-2}{3}$, onde $x \in [1, \infty[$. Desta forma, $f(D_f) = [1, \infty[$.

- $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Escolhendo $D_f = \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} x = \frac{e^y}{e^y+1} \quad &\Leftrightarrow \quad x(e^y+1) = e^y \\ &\Leftrightarrow \quad xe^y + x = e^y \\ &\Leftrightarrow \quad xe^y - e^y = -x \\ &\Leftrightarrow \quad e^y(x-1) = -x \\ &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{-x}{x-1} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \end{aligned}$$

pelo que $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, onde $x \in]0, 1[$. Desta forma, $f(D_f) =]0, 1[$.

Uma sucessão é um tipo especial de função real em que o domínio, em geral, é $\mathbb{N}_0$ ou $\mathbb{N}$.

Nota: Ao invés de escrevermos que a lei de transformação de u é $u(n)$, é comum escrever que o termo geral é u_n e que $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição

Uma sucessão u é convergente para um $a \in \mathbb{R}$ se e só se a diferença entre u_n e a se pode torna arbitrariamente pequena à medida que aumentamos o valor de n, ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \underset{n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} |u_n - a| < \varepsilon,$$

caso em que se resume esta propriedade escrevendo-se simplesmente

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = a.$$

Definição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Seja $b \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é b, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

quando $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} b$ sempre que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, com $u_n \in D \setminus \{a\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Teorema

O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.

Nota: O valor de uma função f num ponto a é completamente irrelevante para o cálculo de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Tal limite depende somente do comportamento de f em conjuntos da forma $]a-\delta, a+\delta[\cap (D \setminus \{a\})$, para $\delta > 0$, sendo que o δ positivo a considerar pode ser tão pequeno quanto se queira.

O seguinte resultado, que se apresenta sem demonstração, sugere uma abordagem geométrica na determinação de limites de funções de alguns casos:

Teorema

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $b \in \widehat{\mathbb{R}}$*.*

1. *Seja* $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, tal que existe pelo menos uma sucessão de elementos de* D_f*, todos menores do que* a*, que tende para* a*. As duas condições seguintes são equivalentes:*
   i. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.
   ii. $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} b$ *sempre que* $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ *com* $u_n \in D_f$ *e* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *estritamente crescente.*
2. *Seja* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, tal que existe pelo menos uma sucessão de elementos de* D_f*, todos maiores do que* a*, que tende para* a*. As duas condições seguintes são equivalentes:*
   i. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.
   ii. $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} b$ *sempre que* $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ *com* $u_n \in D_f$ *e* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *estritamente decrescente.*

Teorema

Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* a *um ponto de acumulação de* D*.*

1. *Se* $g(x) \leq f(x)$*, para todo o* $x \in D$*, então* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \leq \lim\limits_{x \to a} f(x)$*, desde que estes limites existam.*
2. *Se* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$*, para todo o* $x \in D$*, e se* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b = \lim\limits_{x \to a} h(x)$*, então também* $\lim_{x \to a} f(x) = b$*.*
3. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *e* g *é limitada, então* $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = 0$*.*

Teorema

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* a *(finito ou infinito) um ponto de acumulação de* D*. As seguintes igualdades são válidas desde que existam e sejam finitos os limites que constam nos segundos membros (e os denominadores não sejam nulos):*

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Nota: O último resultado vale também quando nos segundos membros ocorrem valores infinitos (usando uma extensão natural das regras operatórias) desde que não se fique com uma configuração de indeterminação nesses membros. Assim,

$$\begin{array}{rcl}
\pm\infty + b \ \text{ e } \ b + (\pm\infty) & \text{resultam em} & \pm\infty \ \text{ se } b \in \mathbb{R} \text{ ou } b = \pm\infty \\
\pm\infty - b \ \text{ e } \ -b - (\mp\infty) & \text{resultam em} & \pm\infty \ \text{ se } b \in \mathbb{R} \text{ ou } b = \mp\infty \\
b \cdot (\pm\infty) \ \text{ e } \ (\pm\infty) \cdot b & \text{resultam em} & \begin{cases} \pm\infty & \text{se } b > 0 \text{ ou } b = \infty \\ \mp\infty & \text{se } b < 0 \text{ ou } b = -\infty \end{cases}, \\
\dfrac{b}{\pm\infty} & \text{resultam em} & 0 \ \text{ desde que } b \neq \pm\infty \\
\dfrac{\pm\infty}{b} & \text{resultam em} & \begin{cases} \pm\infty & \text{se } b > 0 \text{ (com } b \text{ finito)} \\ \mp\infty & \text{se } b < 0 \text{ (com } b \text{ finito)} \end{cases}
\end{array}$$

O último caso também é válido quando $b = 0^+$ na primeira linha e quando $b = 0^-$ na segunda linha. Em contrapartida, no caso de ocorrência de

$$\pm\infty + (\mp\infty), \quad \pm\infty - (\pm\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0, \quad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \tfrac{\mp\infty}{\pm\infty} \ \text{ ou } \ \tfrac{0}{0}$$

diz-se que estamos perante uma indeterminação e nada se pode concluir sem um estudo adicional em cada situação particular.

Definição

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$. Dizemos que f é contínua em a se e só se $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$ sempre que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, com $u_n \in D_f$ $(n \in \mathbb{N})$.

Nota: Esta última definição pode assemelhar-se à definição de limite de função dada, mas contém as algumas diferenças importantes:

- não se exige que a seja ponto de acumulação de D_f, mas em contrapartida exige-se que a pertença a D.
- não se exige que os termos u_n das sucessões consideradas a convergir para a sejam escolhidos diferentes de a.
- b é aqui tomado inequivocamente como sendo $f(a)$.

Como consequências simples temos os seguintes resultados:

1. Se $a \in D_f$ é um ponto de acumulação de $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua se e só se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Se $a \in D_f$ é um ponto isolado de $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua em a.

É possível provar que a definição que demos para um $b \in \mathbb{R}$ ser o limite de uma função f num ponto de acumulação a do seu domínio D_f é equivalente à seguinte afirmação:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \underset{x \in D_f}{\Longrightarrow} |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Analogamente, é também possível provar que a definição que demos para uma função f ser contínua num ponto a do seu domínio D_f é equivalente à seguinte afirmação:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \underset{x \in D_f}{\Longrightarrow} |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

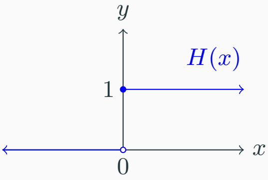
Teorema (Bolzano-Cauchy)

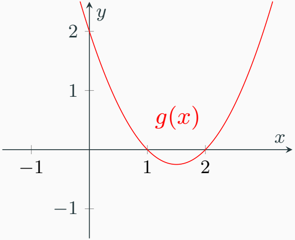
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua. Então* f *passa por todos os valores em* $[f(a), f(b)]$.

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(a)f(b) < 0$. *Então* f *possui um zero em* $]a, b[$.

1. Sejam $H(x)$ a função degrau unitário, mais conhecida por passo de Heaviside, e $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Calcula, em cada uma das alíneas seguintes, o limite indicado ou, no caso de não existir, os respectivos limites laterais:
   - $\lim_{x\to 1}(H \circ g)(x)$.
   - $\lim_{x\to 2}(H \circ g)(x)$.
   - $\lim_{x\to 0}(g \circ H)(x)$.





2. Calcula, caso existam,
   - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{2x^3 - x - 2}$.
   - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1+2\ln(x)), & x \in \,]0,1] \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4}, & x \in \,]1,\infty[. \end{cases}$$

   Averigue se f é contínua em $x = 1$.

4. Seja g a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = x\cos(x) + \sin(x)$. Mostre que existe pelo menos um ponto do gráfico de g onde a recta tangente tem declive $-\frac{1}{2}$.

1

- Não existe $\lim_{x\to 1}(H\circ g)(x)$.

$$\lim_{x\to 1^+}(H\circ g)(x) = H(g(1^+)) = H(0^-) = 0.$$
$$\lim_{x\to 1^-}(H\circ g)(x) = H(g(1^-)) = H(0^+) = 1.$$

- Não existe $\lim_{x\to 2}(H\circ g)(x)$.

$$\lim_{x\to 2^+}(H\circ g)(x) = H(g(2^+)) = H(0^+) = 1.$$
$$\lim_{x\to 2^-}(H\circ g)(x) = H(g(2^-)) = H(0^-) = 0.$$

- Não existe $\lim_{x\to 0}(g\circ H)(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+}(g\circ H)(x) = g(H(0^+)) = g(1) = 0.$$
$$\lim_{x\to 0^-}(g\circ H)(x) = g(H(0^-)) = g(0) = 2.$$

2

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^3+x^2+1}{2x^3-x-2} = \dfrac{3}{2}$.

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+5}{x^2+1} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x+5}{x^2+1} \cdot \lim_{x\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0 \cdot \lim_{x\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0.$

3

$$\lim_{x\to 1^-} \left(-x^2(1+2\ln(x))\right) = -1^2(1+2\ln(1)) = -1.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} &= -5 \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} \\
&= -5 \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+4} \\
&= -5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = -1.
\end{aligned}$$

Concluímos assim, e porque $f(1) = -1$, que f é contínua em $x = 1$.

(4) Dado que a questão se centra no declive de uma recta tangente ao gráfico da função, vamos estudar a derivada (de primeira ordem).

Sabemos que $f'(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$ é contínua em $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, assim como a função $g(x) = f'(x) + \frac{1}{2}$, não podendo, no entanto, calcular o valor da derivada nos extremos do intervalo: $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$).

Porém, podemos escolher "convenientemente" dois elementos no interior deste intervalo para o cálculo da derivada.

$$g(\pi) = 2\cos(\pi) - \pi\sin(\pi) + \frac{1}{2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0.$$

$$g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \frac{5\pi}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{5\pi}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} > 0.$$

Por aplicação directa do corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy segue que, para $a = \pi$ e $b = \frac{5\pi}{4}$, $g(a)g(b) < 0$, o que implica a existência de um $c \in]a, b[$ tal que $g(c) = f'(c) + \frac{1}{2} = 0$, i.e., $f'(c) = -\frac{1}{2}$.

Definição

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto interior de D_f. A derivada de f em a define-se como o limite, caso exista,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nota: No caso de tal limite não existir, diz-se que f não tem derivada em a.

Em vez de $f'(a)$ também se pode utilizar a notação $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, dita notação diferencial (já que, nesta simbologia, $\mathrm{d}f$ e $\mathrm{d}x$ designam-se por diferenciais) para a derivada.

Em termos geométricos, a razão indicada acima dá-nos o declive da recta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ num sistema de eixos cartesianos.

Definição

Uma função diz-se diferenciável num ponto (interior do seu domínio) se tiver derivada finita nesse ponto. Diz-se diferenciável se for diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Como, dado um ponto interior a do domínio de uma função f diferenciável em a, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)+f(a)) \\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)\right) \\ &= f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a).\end{aligned}$$

Teorema

Se uma função f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Algumas Revisões

Sendo finita a derivada de uma função no conjunto de pontos onde esta é diferenciável, pode definir-se uma f.r.v.r. (nesse conjunto) com lei de transformação $x \mapsto f'(x)$.

A uma tal função chamamos função derivada de f ou, mais simplesmente, derivada de f, e denotando-a por f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$).

Teorema

Sejam f, g duas funções diferenciáveis em a. Então $f+g$ e fg são também diferenciáveis em a e

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Teorema

Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ diferenciável num ponto interior a de A e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $f(a)$ (naturalmente, suposto ponto interior de B). Então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Algumas Revisões

Função	Derivada
$mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$	m
$x^n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$

1. A partir da definição formal de derivada, e para duas funções f, g, diferenciáveis num ponto x_0. Mostre que $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

   Adicionalmente, se $g(x_0) \neq 0$, mostre que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

2. Recorrendo à definição formal de derivada, mostre que $(e^x)' = e^x$ e que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$. Utilize estes resultados e as regras básicas de derivação para deduzir as expressões para $(\log_a(x))'$ e $(a^x)'$.

(1) Para a regra da cadeia, comecemos por considerar $g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $x_0 \in A$, e $f : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $g(x_0)$, com $g(A) \subseteq B$.

Vamos definir uma função φ em B como sendo

$$\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)}, & y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)), & y = g(x_0) \end{cases}.$$

Então, tendo presente que o limite quando y tende para $g(x_0)$ envolve somente valores de y diferentes de $g(x_0)$, temos

$$\lim_{y \to g(x_0)} \varphi(y) = \lim_{y \to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0)) = \varphi(g(x_0)).$$

Assim, φ é contínua em $g(x_0)$. Além disso, para todo o $x \in A \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \varphi(g(x_0)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \varphi(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \varphi(g(x)) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \varphi(g(x_0))g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

Para a regra do quociente, devemos notar que a diferenciabilidade de g em x_0 garante-nos a sua continuadade nesse mesmo ponto. Temos então $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\right)
\end{aligned}$$

(expressão transita do último slide)

$$\begin{aligned}
(\cdots) &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\right)\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\right)\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}$$

(2)

$$(\ln(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \overline{\overline{\underset{t=\frac{h}{x}}{}}} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{xt}$$

$$= \lim_{t\to 0} \ln([1+t]^{\frac{1}{xt}}) = \lim_{t\to 0} \ln\left(([1+t]^{\frac{1}{t}})^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{t\to 0} \ln\left([1+t]^{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{t\to 0}[1+t]^{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}.$$

$$(e^x)' = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{x} = e^x.$$

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{\frac{\ln(a)}{x}}{(\ln(a))^2} = \frac{\ln(a)}{x(\ln(a))^2} = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

$$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = (x\ln(a))'e^{x\ln(a)} = a^x \ln(a).$$

1. Resolve as seguintes inequações:
   - $\dfrac{4x-1}{2x+3} > 1.$
   - $\dfrac{2x^2+1}{2\sqrt{2}x} \leq 1.$
   - $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 2.$
   - $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{x}.$
   - $\ln(x) > \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}.$

     (**Sugestão:** Observe que $x = 1$ iguala as expressões de cada lado da desigualdade)

1

- $\boxed{\dfrac{4x-1}{2x+3} > 1}$

$$((4x-1 > 2x+3) \wedge (2x+3 > 0)) \vee ((4x-1 < 2x+3) \wedge (2x+3 < 0))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((2x > 4) \wedge (2x > -3)) \vee ((2x < 4) \wedge (2x < -3))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((x > 2) \wedge (x > -\tfrac{3}{2})) \vee ((x < 2) \wedge (x < -\tfrac{3}{2}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x > 2) \vee (x < -\tfrac{3}{2}).$$

$\therefore\ x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]2, \infty[.$

- $\boxed{\dfrac{2x^2+1}{2\sqrt{2}x} \leq 1}$

$$((2x^2+1 \leq 2\sqrt{2}x) \wedge (2\sqrt{2}x > 0)) \vee ((2x^2+1 \geq 2\sqrt{2}x) \wedge (2\sqrt{2}x < 0))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\boxed{(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \leq 0)} \wedge (x > 0)) \vee (\boxed{(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0)} \wedge (x < 0))$$

$$\boxed{2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \vee ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x < 0))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \vee (x < 0)$$

$\therefore\ x \in]-\infty, 0[\cup \{\tfrac{\sqrt{2}}{2}\}$.

- $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x < -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2^{-1})^x > 2^1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{-x} > 2^1 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2(2^{-x}) > \log_2(2^1) \\
&\Leftrightarrow \quad -x > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -1
\end{aligned}$$

$\therefore \; x \in]-\infty, -1[.$

- $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{x}}$

$$((1 > \tfrac{\sqrt{x-1}}{x}) \wedge (\sqrt{x-1} > 0)) \cancel{\vee ((1 < \tfrac{\sqrt{x-1}}{x}) \wedge (\sqrt{x-1} < 0))}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((1 > \frac{\sqrt{x-1}}{x}) \wedge (x > 1))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((x > \sqrt{x-1}) \wedge (x > 0) \wedge (x > 1)) \cancel{\vee ((x < \sqrt{x-1}) \wedge (x < 0) \wedge (x > 1))}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((x > \sqrt{x-1}) \wedge (x > 1))$$

$\therefore \; x \in \,]1, \infty[.$

Aula 2

No que se segue, dadas condições $a(x)$ e $b(x)$ num mesmo universo Ω, designaremos por A e B os respectivos conjuntos das soluções. Temos então as seguintes definições:

- **Implicação:** $a(x) \Rightarrow b(x)$ significa que $A \subset B$, isto é, que qualquer solução de $a(x)$ é também solução de $b(x)$. Compreende-se, assim, que uma maneira alternativa de ler a frase "$a(x)$ implica $b(x)$" seja "se $a(x)$, então $b(x)$". Numa implicação $a(x) \Rightarrow b(x)$ diz-se que $a(x)$ é o antecedente e que $b(x)$ é o consequente.

- **Equivalência:** $a(x) \Leftrightarrow b(x)$ significa que se verifica tanto $a(x) \Rightarrow b(x)$ como $b(x) \Rightarrow a(x)$, ou, em termos de conjuntos das soluções, que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que as duas condições têm o mesmo conjunto das soluções, i.e., $A = B$. Compreende-se, assim, que uma maneira alternativa de ler a frase "$a(x)$ é equivalente a $b(x)$" seja "$a(x)$ se e só se $b(x)$".

- **Disjunção:** $a(x) \vee b(x)$ é a condição que tem como conjunto das soluções a união $A \cup B$. Como consequência, dado um qualquer $x \in \Omega$, a afirmação $a(x) \vee b(x)$ é verdadeira se e só se pelo menos uma das afirmações $a(x)$, $b(x)$ o for. Compreende-se, assim, o motivo pelo qual o símbolo "$\vee$" se lê "ou".

- **Conjunção:** $a(x) \wedge b(x)$ é a condição que tem como conjunto das soluções a interseção $A \cap B$. Como consequência, dado um qualquer $x \in \Omega$, a afirmação $a(x) \wedge b(x)$ é verdadeira se e só se ambas as afirmações $a(x), b(x)$ o forem. Compreende-se, assim, o motivo pelo qual o símbolo "$\wedge$" se lê "e".

- **Negação:** $\sim a(x)$ é a condição que tem como conjunto das soluções o complementar A^c de A. Como consequência, dado um qualquer $x \in \Omega$, a afirmação $\sim a(x)$ é verdadeira se e só se a afirmação $a(x)$ for falsa. Compreende-se, assim, o motivo pelo qual o símbolo "$\sim$" se lê "não".

Regras Básicas do Raciocínio Dedutivo:

Modus Ponens:

$$\begin{array}{ccc} a(x) & \Rightarrow & b(x) \\ a(x) & & \\ \hline & \therefore & b(x) \end{array}$$

Nota: Uma concretização de $b(x)$ não garante que, para o mesmo x, a correspondente concretização de $a(x)$ seja verdadeira.

Modus Tollens:

$$\begin{array}{ccc} a(x) & \Rightarrow & b(x) \\ \sim b(x) & & \\ \hline & \therefore & \sim a(x) \end{array}$$

Nota: Uma concretização falsa para $a(x)$ não garante que, para o mesmo x, a correspondente concretização de $b(x)$ seja falsa.

Definição

- Um teorema é essencialmente uma afirmação verdadeira que não é evidente perante os dados disponíveis e que, portanto, necessita de uma demonstração ou prova.
- Um corolário é um teorema que é consequência de um outro teorema e cuja demonstração, tirando partido desse outro teorema, é, em princípio, mais simples do que a deste.
- Um lema é um teorema preliminar, com uma demonstração em princípio não tão complicada como a do teorema principal, que ajuda a provar este último.

Nota: Por vezes também se usa a palavra proposição como sinónimo de teorema. A ideia é que, neste sentido, a importância do resultado que uma proposição estabelece não justifica a distinção como teorema.

Exemplo

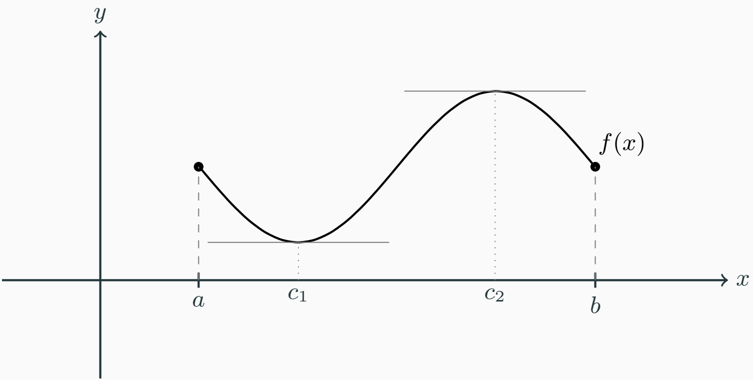
Teorema: Seja $f :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$, onde $]c, d[$ é um dado intervalo aberto de números reais. Se f é diferenciável, então f é contínua.

Definição

Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se regular se e só se for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

Teorema (Rolle)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função regular tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe (pelo menos) um $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

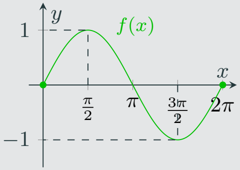


Exemplo

Vamos aplicar o Teorema de Rolle às seguintes funções (nos intervalos indicados):

- $f(x) = \sin(x),\ x \in [0, 2\pi]$.

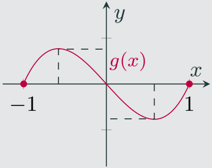
Sabemos que $f(x)$ é contínua e diferenciável, i.e., regular. Além disso, $f(0) = f(2\pi) = 0$. Desta forma, pelo Teorema de Rolle, existirá (pelo menos) um $c \in \,]0, 2\pi[$ tal que $f'(c) = 0$.



$$\cos(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad c \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

- $g(x) = x^3 - x,\ x \in [-1, 1]$.

Sabemos que $g(x)$ é contínua e diferenciável, i.e., regular. Adicionalmente, $g(-1) = g(1) = 0$. Então, pelo Teorema de Rolle, existirá (pelo menos) um $c \in \,]-1, 1[$ tal que $g'(c) = 0$.



$$3c^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Funções Regulares e Teoremas do Cálculo - Exercícios

1. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função regular.
   i. Porque é que entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'?
   ii. Porque é que entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f?

2. Mostre que a função definida por $f(x) = \sin(x) + x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

3. Mostre que se $a > 0$, a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raíz real, qualquer que seja o $b \in \mathbb{R}$.

4. Utilize o Teorema de Rolle para mostrar que:
   i. O polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem, no máximo, duas raízes reais.
   ii. O polinómio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem, no máximo, três raízes reais.

5. Seja f uma f. r. v. r. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe um $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

1

i. É uma consequência do Teorema de Rolle no caso em que $f(a) = f(b) = 0$.

ii. Observemos que se houvesse dois zeros de f nas condições indicadas, então a resposta anterior garantiria a existência de mais um zero de f' entre os dois zeros consecutivos de f'. Mas então estes zeros não seriam consecutivos, logo a hipótese de existirem dois (ou mais) zeros de f é falsa.

2 Comecemos por ver que $f(0) = \sin(0) + 0 = 0$. Caso houvesse outro zero de f, pelo exercício acima teria que haver entre eles um zero de f'. No entanto é fácil verificar que $f'(x) = \cos(x) + 1$ não tem zeros em $]-\pi, \pi[$ e, portanto, ter-se-ia uma contradição. Assim, a única maneira de não haver contradição é 0 ser o único zero de f.

3 Caso houvesse dois zeros de f, pelo exercício acima teria que haver entre eles um zero de f'. No entanto é fácil verificar que $f'(x) = 3x^2 + a$ não tem zeros em $\mathbb{R}$ (de facto, é estritamente positiva) e, portanto, ter-se-ia uma contradição. Assim, a única maneira de não haver contradição é haver apenas um único zero para f.

4

i. Caso houvesse pelo menos três raízes de f, pelos exercícios anteriores, teriam de existir dois zeros de f'. No entanto, é fácil verificar que $f'(x) = 102x^{101} + a$ admite apenas uma raíz real. Desta forma, a hipótese haver três (ou mais) zeros de f é falsa.

ii. Caso houvesse pelo menos quatro raízes de f, pelos exercícios anteriores, teriam de existir três zeros de f'. No entanto, é fácil verificar que $f'(x) = 101x^{100} + a$ admite, no máximo, duas raízes reais. Desta forma, a hipótese haver quatro (ou mais) zeros de f é falsa.

5

$$f(a) = f'(a) \qquad\qquad f(b) = f'(b)$$

(T. Rolle)

$$\exists d \in \,]a,b[\colon\ f'(d) = 0$$

(T. Rolle)

$$\exists e \in \,]a,d[\colon\ f''(e) = 0$$

(T. Rolle)

$$\exists \ell \in \,]d,b[\colon\ f''(\ell) = 0$$

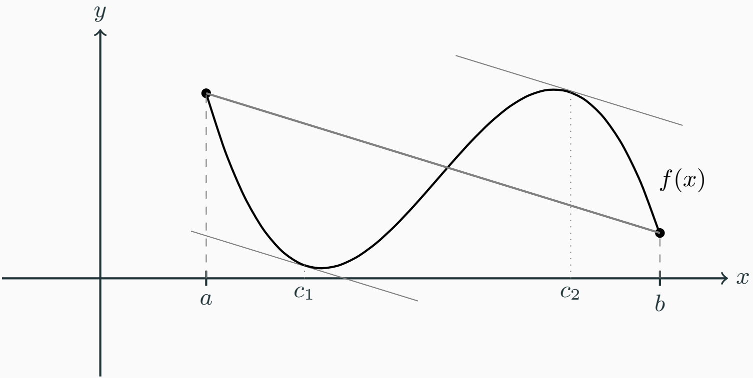
(T. Rolle)

$$\exists c \in \,]e,\ell[\colon\ f'''(c) = 0$$

Teorema (Lagrange)

Seja f uma função regular em $[a, b]$. Então, existe (pelo menos) um $c \in \,]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Demonstração.

Tendo em mente a equação da recta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e que é dada por

$$y - f(a) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

definamos $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

A ideia é aplicar o Teorema de Rolle à função h. Vejamos que tal é possível, uma vez que:

1. h é contínua em $[a,b]$ (soma de uma função contínua com um polinómio de 1º. grau).
2. h é diferenciável em $]a,b[$ (pelo mesmo motivo).
3. $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existirá um $c \in \,]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

♦

Exemplo

Vamos determinar que valores c satisfazem as condições do Teorema de Lagrange para a função $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$ no intervalo $[-1, 2]$.

Comecemos por calcular a primeira derivada da função em questão: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$. Agora, para encontrar os números c que satisfazem as conclusões do Teorema de Lagrange, é apenas necessário introduzir a informação na fórmula dada pelo enunciado.

$$\begin{aligned} f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \quad &\Leftrightarrow \quad 3c^2 + 4c - 1 = \frac{14 - 2}{3} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 3c^2 + 4c - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6}. \end{aligned}$$

No entanto, só um destes valores se situa em $[-1, 2]$: $c = \frac{-4+\sqrt{76}}{2}$.

Exemplo

Suponhamos que $f(x)$ é uma função contínua em $[6, 15]$, diferenciável em $]6, 15[$, que $f(6) = -2$ e que $f'(x) \leq 10$. Qual o valor máximo que $f(15)$ pode atingir?

Pelo Teorema de Lagrange,

$$f(15) - f(6) = f'(c)(15 - 6) \quad \Leftrightarrow \quad f(15) = f(6) + 9f'(c)$$

No entanto, sabemos que $f'(x) \leq 10$ (e que, em particular, $f'(c) \leq 10$). Desta forma,

$$\begin{aligned} f(15) &= f(6) + 9f'(c) \\ &\leq -2 + 9 \cdot 10 \\ &\leq 88, \end{aligned}$$

concluindo que $f(15) \leq 88$.

É o Teorema de Lagrange que permite demonstrar o conhecido critério de monotonia; o qual permite determinar o sentido da monotonia de uma função através do sinal da sua derivada.

Corolário (Critério de Monotonia)

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Então:

1. *Se $f'(x)=0$, para todo o $x \in\ ]a,b[$, f é constante em $[a,b]$.*
2. *Se $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$), para todo o $x \in\ ]a,b[$, então f é crescente (**estritamente**) em $[a,b]$.*
3. *Se $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$), para todo o $x \in\ ]a,b[$, então f é decrescente (**estritamente**) em $[a,b]$.*

Demonstração.

Sejam x_1, x_2 dois pontos arbitrários em $[a, b]$ e assuma-se, s.p.g, que $x_1 < x_2$. Podemos aplicar o Teorema de Lagrange ao intervalo $[x_1, x_2]$ e, portanto, existirá um $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(x) = 0$ (≤ 0//≥ 0), para todo o $x \in [a, b]$, resulta que $f'(c) = 0$ (≤ 0//≥ 0) e, portanto,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \; (\leq 0 // \geq 0).$$

Pela arbitrariedade de x_1 e x_2, concluímos que f é constante (decrescente//crescente). ♦

Aula 3

1. Determine todos os $c \in \mathbb{R}$ que satisfazem a conclusão do Teorema de Lagrange para as funções:
   i. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x - 2$ no intervalo $[2, 5]$.
   ii. $f(x) = 8x + e^{-3x}$ no intervalo $[-2, 3]$.
2. Suponha que a função $f(x)$ é contínua e diferenciável no intervalo $[-7, 0]$, que $f(-7) = -3$ e que $f'(x) \leq 2$. Qual é o valor máximo de $f(0)$?
3. Mostre que $\sin(x) \leq x$, para $x \in \mathbb{R}_0^+$, e que $\dfrac{y}{1+y} < \ln(1+y) < y$, para $y \in \mathbb{R}^+$.

1

i. Devemos notar que a função f é um polinómio (contínuo e diferenciável em $\mathbb{R}$) e, portanto, contínuo em $[2,5]$ e diferenciável em $]2,5[$. Além disso,

$$f(2) = 12, \qquad f(5) = 333, \qquad f'(x) = 12x^2 - 16x + 7.$$

Resta-nos então introduzir a informação na fórmula dada pelo enunciado:

$$\begin{aligned} 12c^2 - 16c + 7 = \tfrac{333-12}{5-2} \quad &\Leftrightarrow \quad 12c^2 - 16c - 100 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c = \tfrac{2 \pm \sqrt{79}}{3}. \end{aligned}$$

No entanto, apenas um destes valores pertence a $[2,5]$, $c = \frac{2+\sqrt{79}}{3}$.

ii. Vejamos que a função f é soma de uma exponencial com um polinómio e, portanto, será contínua em $[-2,3]$ e diferenciável em $]-2,3[$. Além disso,

$$f(-2) = -16 + e^6, \qquad f(3) = 24 + e^{-9}, \qquad f'(x) = 8 - 3e^{-3x}.$$

Resta-nos então introduzir a informação na fórmula dada pelo enunciado:

$$\begin{aligned} 8 - 3e^{-3c} = \tfrac{(24+e^{-9})-(-16+e^6)}{3-(-2)} \quad &\Leftrightarrow \quad 8 - 3e^{-3c} = \tfrac{40+e^{-9}-e^6}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad c = \frac{\ln\left(-\frac{e^{-9}-e^6}{15}\right)}{-3}. \end{aligned}$$

Ao aplicar o Teorema de Rolle à função $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$, conseguimos obter a seguinte generalização do Teorema de Lagrange:

Teorema (Cauchy)

Se f, g são funções regulares em $[a,b]$ com $g'(x) \neq 0$, para $x \in]a,b[$, então $g(b) - g(a) \neq 0$ e existirá um $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Corolário (Regra de Cauchy)

Sejam f, g diferenciáveis num intervalo I, onde, para algum $\varepsilon > 0$, $I =]a - \varepsilon, a[$ (resp. $I =]a, a+\varepsilon[$) com $a \in \mathbb{R}$. Se $g(x), g'(x) \neq 0$ para $x \in I$, se $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ (resp. $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$) configura uma situação de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $\frac{\mp\infty}{\pm\infty}$, e se existe $\lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (resp. $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$), então também existe $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ (resp. $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$) e

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \left(\textit{resp. } \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right).$$

Exemplo

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (ind. tipo 1^∞)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = e^{\boxed{1}} = e$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \boxed{1}$$

Exemplo

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ (ind. tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Exemplo

$\lim\limits_{x\to 0} x^x$ (ind. tipo 0^0)

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)}} = e^{\boxed{0}} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \underset{RC}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = \boxed{0}$$

Exemplo

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (ind. tipo 1^∞)

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}} = e^{\boxed{1}} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{RC}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \boxed{1}$$

1. Calcula os seguintes limites.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} = [\cos(2x)]^{\frac{1}{x^2}}$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left[x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} [e^x + x]^{\frac{1}{x}}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \left[(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} [\ln(3x^2+2) - \ln(x^2)]$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

2. Diz o que está errado no seguinte cálculo, onde se aplica duas vezes a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$$

1

- $\lim\limits_{x\to 0} = [\cos(2x)]^{\frac{1}{x^2}}$ (ind. tipo 1^{∞})

$$\lim_{x\to 0} = [\cos(2x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}}} = e^{\boxed{-2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\tan(2x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=}} \lim_{x\to 0} -2\sec^2(2x) = \boxed{-2}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$ (ind. tipo $\infty \cdot 0$)

$$\lim_{x\to\infty} \left[x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\frac{3}{x}} = 3.$$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}[e^x+x]^{\frac{1}{x}}}$ (ind. tipo ∞^0)

$$\lim_{x\to\infty}[e^x+x]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}} = e^{\boxed{1}} = e$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \boxed{1}$$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]}$ (ind. tipo $0\cdot\infty$)

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to 1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}$$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}}$ (ind. tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sec^2(x)}{3x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - 2\sec^2(x)\tan(x)}{6x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) - 4\sec^2(x)\tan^2(x) - 2\sec^4(x)}{6} = -\frac{1}{2}$$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}}$ (ind. tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}} \lim_{x\to 0} n(1+x)^{n-1} = n$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x$ (ind. tipo ∞^0)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} = e^{\boxed{0}} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{RC}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = \boxed{0}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\ln(3x^2+2)-\ln(x^2)\right]$ (ind. tipo $\infty-\infty$)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\ln(3x^2+2)-\ln(x^2)\right] &= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^2+2}{x^2}\right)\\ &= \ln\left(\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2}}\right) = \ln(\boxed{3})\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2}} \underset{RC}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x} \underset{RC}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{6}{2} = \boxed{3}$$

- $\displaystyle\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}}$ (ind. tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} \underset{RC}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{\sin(x)} \underset{RC}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x\to 0}[2-x\tan(x)] = 2$$

- $\displaystyle\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}}$ (ind. tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2} \underset{RC}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x\to 1}\frac{4x^3-6x^2+2}{3x^2-3}$$

$$\underset{RC}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x\to 1}\frac{12x^2-12x}{6x} = 0$$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}}$ (ind. tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{RC}{=\!=}}\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}$ (ind. tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{RC}{=\!=}}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=-1$$

2 A segunda aplicação que se faz da regra de Cauchy não é legítima, pois não se está em presença de nenhuma indeterminação. O limite não existe neste caso: o limite à esquerda dá $-\infty$, enquanto que o limite à direita dá ∞.

Definição

Diz-se que a recta $x = a$, onde $a \in \mathbb{R}$, é uma assimptota vertical do gráfico de uma função $f(x)$ se e só se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Definição

Diz-se que a recta $y = b$, onde $b \in \mathbb{R}$, é uma assimptota horizontal do gráfico de uma função $f(x)$ se e só se $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Definição

Diz-se que a recta $y = mx + b$, onde $m, b \in \mathbb{R}$, é uma assimptota não vertical do gráfico de uma função $f(x)$ se e só se $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$.

Teorema

O gráfico de uma função $f(x)$ tem a recta $y = mx+b$ como assimptota não vertical quando $x \to -\infty$ se e só se

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = b \in \mathbb{R}.$$

O gráfico de uma função $f(x)$ tem a recta $y = mx+b$ como assimptota não vertical quando $x \to \infty$ se e só se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = b \in \mathbb{R}.$$

1. Determina os extremos e o contra-domínio de cada função no domínio de definição da expressão:
    - $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$.
    - $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2$.
    - $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.
    - $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18 + 2$.
2. Mostra que se a soma de dois números é constante então a soma dos seus quadrados é mínima quando os números são iguais.
3. Determina as dimensões de um rectângulo de $16m^2$ de área com o perímetro mais pequeno possível.
4. Determina o ponto da curva $y = \sqrt{x}$ que está mais próximo do ponto $(3, 0)$.

Aula 4

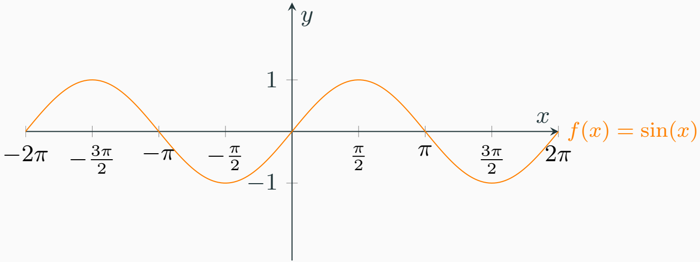
Função Seno

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

- Domínio: $\mathbb{R}$.
- Contra-Domínio: $[-1, 1]$.
- Função periódica: período 2π, ou seja,

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função ímpar: $\sin(x) = -\sin(-x)$.
- Não é injectiva.



Trigonométricas Inversas

A restrição principal da função seno é a função

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \sin(x), \end{aligned}$$

que já é injectiva.

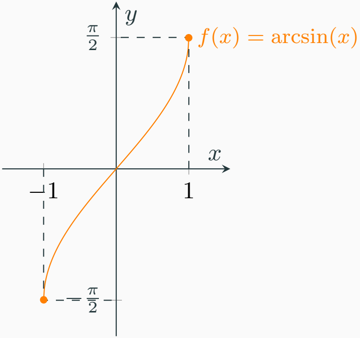
A **inversa** de f é dita função arco seno, denota-se por $\arcsin$, e define-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto y = \arcsin(x), \end{aligned}$$

onde $y = \arcsin(x)$ se e só se $\sin(y) = x$, $\forall x \in [-1, 1],\ \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nota: $\arcsin(x)$ deve ler-se como **arco cujo seno é** x.

Trigonométricas Inversas



Caracterize a inversa das seguintes funções:

- $f(x) = \dfrac{\sin(x + \frac{\pi}{2})}{2}$.
- $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\arcsin(1-x)}{3}$.
- $f(x) = 2\arcsin(\sqrt{x}) - \pi$.

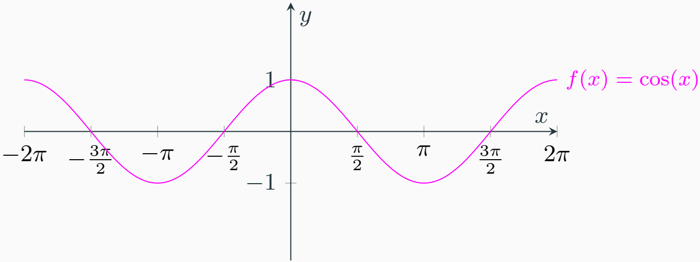
Função Co-Seno

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

- Domínio: $\mathbb{R}$.
- Contra-Domínio: $[-1, 1]$.
- Função periódica: período 2π, ou seja,

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi),\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função par: $\cos(x) = \cos(-x)$.
- Não é injectiva.



A restrição principal da função co-seno é a função

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x), \end{aligned}$$

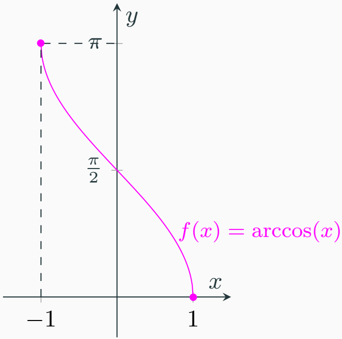
que já é injectiva.

A **inversa** de f é dita função arco co-seno, denota-se por $\arccos$, e define-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \arccos(x), \end{aligned}$$

onde $y = \arccos(x)$ se e só se $\cos(y) = x$, $\forall x \in [-1, 1],\ \forall y \in [0, \pi]$.

Nota: $\arccos(x)$ deve ler-se como **arco cujo co-seno é** x.



Caracterize a inversa das seguintes funções:

- $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos(x)}$.
- $f(x) = 2\pi - \arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

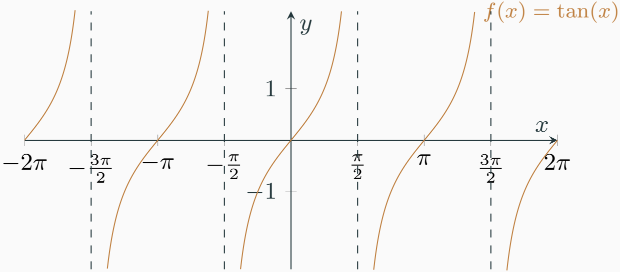
Função Tangente

$$\begin{aligned} \tan : D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) \end{aligned}$$

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Contra-Domínio: $\mathbb{R}$.
- Função periódica: período π, ou seja,

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi),\ \forall x \in D,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função ímpar: $\tan(x) = -\tan(-x)$.
- Não é injectiva.



A restrição principal da função tangente é a função

$$\begin{aligned} f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \tan(x), \end{aligned}$$

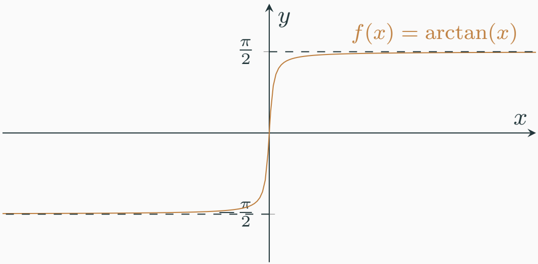
que já é injectiva.

A **inversa** de f é dita função arco tangente, denota-se por $\arctan$, e define-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \arctan(x), \end{aligned}$$

onde $y = \arctan(x)$ se e só se $\tan(y) = x$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Nota: $\arctan(x)$ deve ler-se como **arco cujo tangente é** x.



Caracterize a inversa das seguintes funções:

- $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2 - x}\right)$.
- $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(1 - x)$.

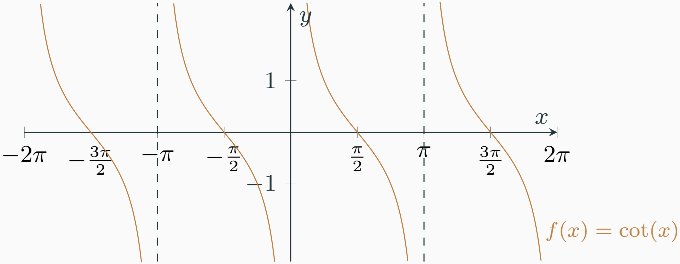
Função Co-Tangente

$$\begin{aligned} \cot : D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cot(x) \end{aligned}$$

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Contra-Domínio: $\mathbb{R}$.
- Função periódica: período π, ou seja,

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi),\ \forall x \in D,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função ímpar: $\cot(x) = -\cot(-x)$.
- Não é injectiva.



A restrição principal da função co-tangente é a função

$$\begin{aligned} f :]0,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cot(x), \end{aligned}$$

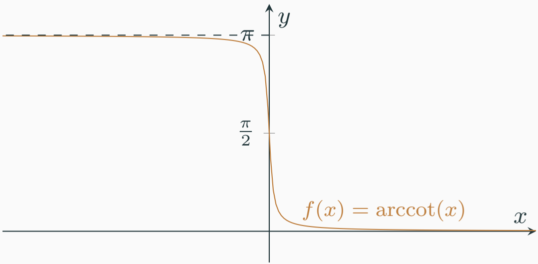
que já é injectiva.

A **inversa** de f é dita função arco co-tangente, denota-se por arccot, e define-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \operatorname{arccot}(x), \end{aligned}$$

onde $y = \operatorname{arccot}(x)$ se e só se $\cot(y) = x$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]0,\pi[$.

Nota: $\operatorname{arccot}(x)$ deve ler-se como **arco cuja co-tangente é** x.



Caracterize a inversa das seguintes funções:

- $f(x) = 2\cot\left(\dfrac{x}{3}\right)$.
- $f(x) = \pi + \text{arccot}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$.

Função	Domínio	Contra-Domínio
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\mathbb{R}$	$]0,\pi[$

Aula 5

Regra da Cadeia - Exercícios

1. Determina f' em cada um dos casos seguintes:
   - $f(x) = \tan(\pi x)$.
   - $f(x) = (2x^3 + 5)^4$.
   - $f(x) = e^{\cos(x)} + x\sin(x)$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada f'. Explicita o mais possível a derivada de
   - $f(-x)$.
   - $f(e^x)$.
   - $f(\ln(x^2 + 1))$.
   - $f(f(x))$.

Regra da Cadeia - Resolução

1.
   - $f(x) = \tan(\pi x), \qquad f'(x) = \pi \tan(\pi x).$
   - $f(x) = (2x^3 + 5)^4, \qquad f'(x) = 4(2x^3 + 5)^3(6x^2).$
   - $f(x) = e^{\cos(x)} + x\sin(x), \qquad f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)} + \sin(x) + x\cos(x).$

2.
   - $-f(-x).$
   - $e^x f(e^x).$
   - $\frac{2x}{x^2+1} f(\ln(x^2 + 1)).$
   - $f'(x)f'(f(x)).$

Derivada da Inversa

Teorema

Sejam $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e injectiva e $f^{-1} : J := f([c,d]) \longrightarrow \mathbb{R}$ a sua inversa. Se f é diferenciável em $a \in]c,d[$ e $f'(a) \neq 0$, então $b := f(a)$ é um ponto interior de J, f^{-1} é diferenciável em b e

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Sabendo que tanto f como f^{-1} são diferenciáveis nos interiores dos intervalos respetivos, a fórmula acima apresentada é uma simples consequência da regra da cadeia. De facto, sendo f e f^{-1} inversa uma da outra, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo o $x \in]c,d[$, de modo que a regra da cadeia permite escrever

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = x' = 1,$$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1,$$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Derivada da Inversa

O facto de, nessa fórmula, num dos membros se calcular a derivada da função em a e no outro se calcular a derivada da inversa em b pode causar muita confusão. Talvez ajude escrever na forma equivalente

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

onde se usou a letra x, em vez de b, para designar a variável e se escreveu a como função de x ($a = f^{-1}(b) = f^{-1}(x)$). Ou, em notação diferencial, designando por x e y respectivamente as variáveis independentes de f^{-1} e f,

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(f^{-1}(x))}.$$

Uma **mnemónica** para esta regra consiste em omitir os pontos onde as derivadas são calculadas, pensar nas funções f^{-1} e f respetivamente como $y = f^{-1}(x)$ e $x = f(y)$ e substituir na fórmula acima as funções pelas respetivas variáveis dependentes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Derivada da Inversa - Exercícios

1. Verifica que, para $x \in \mathbb{R}^+$, a regra de derivação da função potência x^n, é ainda válida quando o expoente é da forma $\frac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{N}$.
2. Determina as derivadas das funções trigonométricas inversas:
   - $\arcsin(x)$.
   - $\arccos(x)$.
   - $\arctan(x)$.
   - $\operatorname{arccot}(x)$.
3. Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha recta. Designando por $s(t)$ a distância total percorrida até ao instante t, por $v(t)$ a velocidade em t e por $a(t)$ a aceleração em t, mostra que

$$a(t) = v(t)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

onde $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ designa, como a notação indica, a velocidade de variação da variável v relativamente à variável s (comparadas em cada instante).

(Observação: em caso de dúvida, supõe que a partícula nunca pára, de modo a que a função $t \longmapsto s$ se possa inverter.)

Derivada da Inversa - Resolução

1. Seja $f(x) = x^n$ e $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Então, para $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}(x^{\frac{1}{n}})' = (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{n\,(f^{-1}(x))^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n\,(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

2.

- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{(\sin(y))'|_{y=\arcsin(x)}} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $(\arccos(x))' = \dfrac{1}{(\cos(y))'|_{y=\arccos(x)}} = -\dfrac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{(\tan(y))'|_{y=\arctan(x)}} = \dfrac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}.$
- $(\text{arccot}(x))' = \dfrac{1}{(\cot(y))'|_{y=\text{arccot}(x)}} = -\dfrac{1}{\csc^2(\text{arccot}(x))} = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Aula 6

Funções Hiperbólicas

Designa-se por seno hiperbólico a função

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

e chamamos co-seno hiperbólico à função

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

É relativamente simples observar que $\sinh$ é uma função ímpar, com contra-domínio $\mathbb{R}$, que $\cosh$ é uma função par, com contra-domínio $[1, \infty[$. Adicionalmente,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

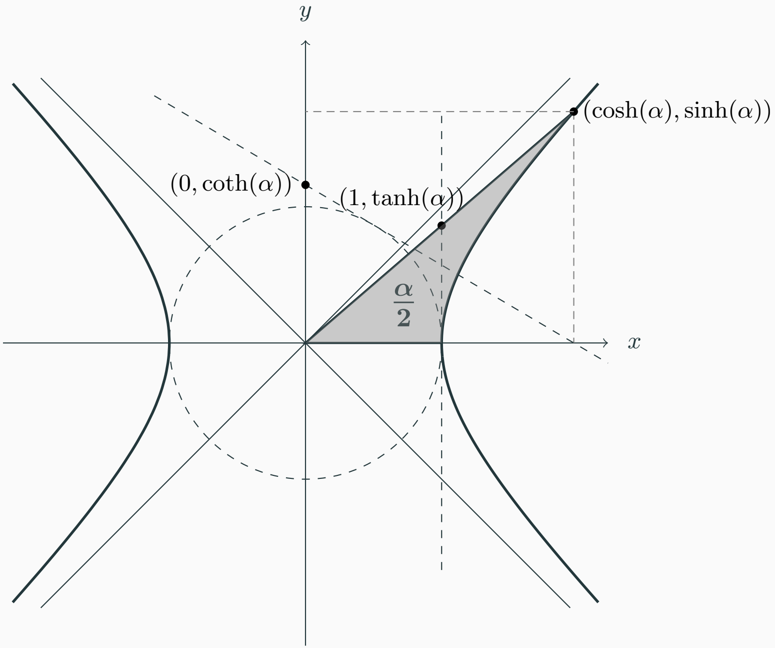
Nota: Na realidade, é desta última relação que provém o nome das funções hiperbólicas dado que, se escolhermos $x = \cosh(\alpha)$ e $y = \sinh(\alpha)$, obtemos a equação da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Funções Hiperbólicas

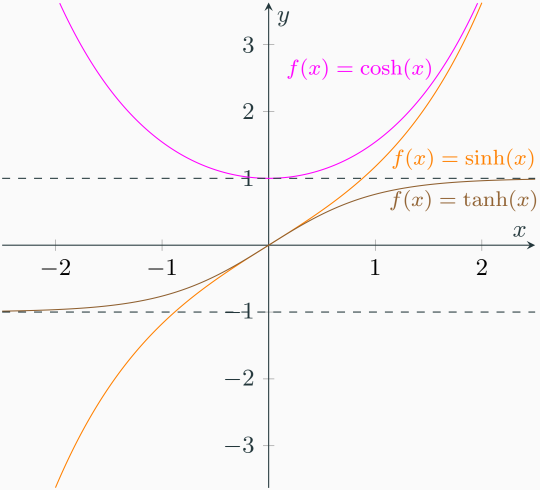
Com o uso destas duas últimas funções podem ainda considerar-se as novas funções

- tangente hiperbólica: $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.
- co-tangente hiperbólica: $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$, com $x \neq 0$.
- secante hiperbólica: $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$.
- co-secante hiperbólica: $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)}$, com $x \neq 0$.

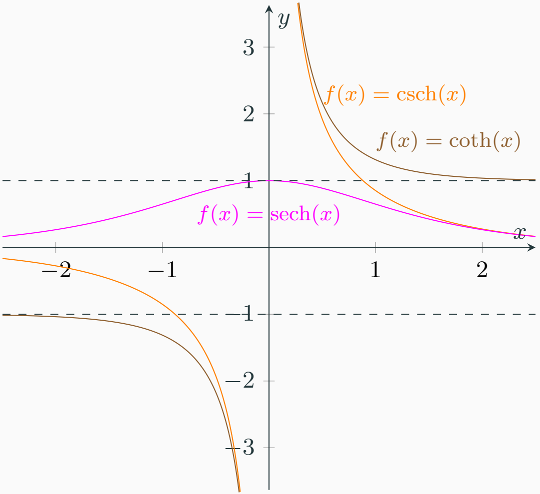
Funções Hiperbólicas



Funções Hiperbólicas



Funções Hiperbólicas



Tal como ocorre nas funções trigonométricas, existem várias relações entre as funções hiperbólicas:

$$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x) \qquad \coth^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y) \qquad \sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y) \qquad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)} \qquad \tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \qquad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x \qquad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Definição

Consideremos $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. O mínimo valor e o máximo valor que f pode atingir dizem-se, respectivamente, o mínimo absoluto (ou global) e o máximo absoluto (ou global) de f, também globalmente designados por extremos absolutos (ou globais) de f.

Seja $c \in D_f$. Diz-se que $f(c)$ é um máximo local (resp. mínimo local) de f se e só se for o máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) de $f|_{D_f \cap\,]c-\varepsilon, c+\varepsilon[}$ para algum $\varepsilon > 0$. Mínimos e máximos locais (ou relativos) de f são designados por extremos locais (ou relativos) de f.

Nota: Naturalmente, o máximo (resp. mínimo) absoluto de uma função é um dos seus máximos (resp. mínimos) locais, mas uma função pode ter muitos extremos locais, enquanto só pode ter no máximo dois extremos absolutos (um mínimo, o outro máximo).

Teorema (Fermat)

Se $f(c)$ é um extremo local de uma função f cuja derivada existe no ponto interior c do domínio de f, então $f'(c) = 0$.

A prova do resultado é mais ou menos imediata. Por exemplo, no caso de $f(c)$ ser um máximo local teremos que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, para $x \in \,]c-\varepsilon, c[$ (com $\varepsilon > 0$ considerado anteriormente), enquanto que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, para $x \in \,]c, c+\varepsilon[$.

Da hipótese de existência de $f'(c)$ sai que então que

$$f'(c) = f'_e(c) \geq 0 \geq f'_d(c) = f'(c)$$

e, portanto, só podemos ter $f'(c) = 0$.

Nota: O recíproco do teorema anterior não é verdadeiro ($f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$).

Nota: Pode acontecer que a derivada de f não exista num dado ponto x_0, mas x_0 ser extremante ($f(x) = |x|$, no ponto $x = 0$).

Tal como sai do Teorema de Bolzano-Cauchy, qualquer função contínua transforma intervalos em intervalos. No caso de funções contínuas injetivas, o Teorema da Inversão garante mesmo que transforma intervalos limitados e fechados em intervalos limitados e fechados.

Teorema (Inversão)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva. Então, f e f^{-1} são ambas estritamente crescentes ou ambas estritamente decrescentes, a imagem $f([a, b]) =: J$ é um intervalo limitado e fechado e $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

No entanto, é ainda possível provar que isto vale mesmo quando a função contínua não é injectiva:

Teorema (Weierstraß)

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então o contra-domínio de f, $f([a, b])$, é um intervalo fechado e limitado.

Extremos Absolutos de Funções Contínuas

Corolário

No caso de $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *contínua, os extremos absolutos ocorrem nos extremos do intervalo, nos pontos críticos, ou nos pontos de* $]a,b[$ *onde não haja derivada.*

Início

$\downarrow$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua

$\swarrow \qquad \searrow$

Determinar $C := \{x\in\,]a,b[\colon f'(x)=0\}$

Determinar $N := \{x\in\,]a,b[\colon f'(x)$ não existe$\}$

$\searrow \qquad \swarrow$

Comparar os valores de $f(a), f(b), f(x)$ com $x\in C$, $f(x)$ com $x\in N$.

$\downarrow$

O maior é o máximo absoluto de f.
O menor é o mínimo absoluto de f.

$\downarrow$

Fim

Extremos Absolutos de Funções Contínuas - Exercícios

1. Em cada caso dá um exemplo de uma função contínua cujo contra-domínio não seja um intervalo limitado e fechado e cujo domínio seja:
   i. um intervalo limitado.
   ii. um intervalo fechado.

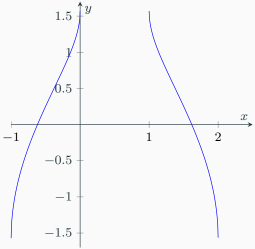
2. Dá um exemplo de uma função contínua cujo domínio seja um intervalo aberto e limitado e cujo contra-domínio seja um intervalo semi-aberto e limitado.

3. Determina os extremos absolutos das seguintes funções contínuas nos intervalos indicados. Depois indica também os respectivos contra-domínios.
   - $f(x) = x^3 + 2x + 1$ em $[-2, 1]$.
   - $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ em $[-1, \frac{1}{2}]$.
   - $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ em $[-1, 1]$.
   - $f(x) = x - 2\arctan(x)$ em $[0, 4]$.

4. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \frac{\pi}{2} - \arccos(1 + x - x^2).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



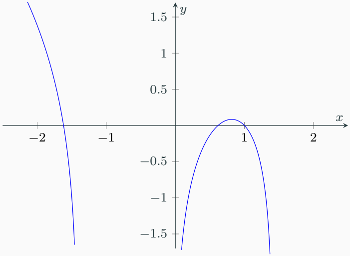
Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

- Determina o domínio D_f de definição de f.
- Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de f (se achares que não existem, explica porquê).

5. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \ln(2x - x^3).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é util, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

- Determina o domínio D_f de definição de f.
- Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de f (se achares que não existem, explica porquê).

1

i. $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := x$ tem por contra-domínio $]0,1]$, que, embora sendo limitado, não é fechado.

ii. $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := x$ tem por contra-domínio $[0,\infty[$, que, embora sendo fechado, não é limitado.

2 $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := x^2$ tem por contra-domínio $[0,1[$.

3 Neste exercício o contra-domínio é sempre o intervalo que vai desde o mínimo até ao máximo (absolutos) porque, tratando-se de funções contínuas em intervalos, sabemos que os contra-domínios têm que ser intervalos (cf. Teorema de Bolzano-Cauchy).

- $\boxed{f(x) = x^3 + 2x + 1}$ em $D_f = [-2,1]$.

  Pelo facto de ser uma função polinomial, sabemos que f é contínua e que a sua primeira derivada, $f'(x) = 3x^2 + 2$, existe em $]-2,1[$. Desta forma, vamos determinar os conjuntos C e N do esquema no slide 106.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2 = 0 \text{ (impossível em }]-2,1[) \quad \Rightarrow \quad C = \varnothing.$$

$$f'(x) \text{ admite valor para todo o } x \in]-2,1[\quad \Rightarrow \quad N = \varnothing.$$

Calculando agora os valores $f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) + 1 = -11$ e $f(1) = 1^3 + 2(1) + 1 = 4$, concluímos que -11 é o mínimo absoluto de f (ligado ao minimizante $x = -2$) e que 4 é o máximo absoluto de f (ligado ao maximizante $x = 1$). Além disso, $f(D_f) = [-11, 4]$.

- $\boxed{f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}}$ em $D_f = [-1, \frac{1}{2}]$.

Pelo facto de ser um quociente de funções polinomiais (onde a função denominador não se anula), sabemos que f é contínua e que a sua primeira derivada, $f'(x) = 3x^2 + 2$, existe em $]-1, \frac{1}{2}[$. Desta forma, vamos determinar os conjuntos C e N do esquema no slide 106.

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2-2x+1=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=-1\pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

No entanto, destes dois valores, apenas um pertence a D_f, $-1+\sqrt{2}$. Assim, $C=\{-1+\sqrt{2}\}$.

$$f'(x) \text{ admite valor para todo o } x\in\,]-2,1[\quad \Rightarrow \quad N=\varnothing.$$

Calculando agora os valores $f(-1+\sqrt{2})=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $f(-1)=0$ e $f(\frac{1}{2})=\frac{12}{10}$, concluímos que 0 é o mínimo absoluto de f (ligado ao minimizante $x=-1$) e que $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ é o máximo absoluto de f (ligado ao maximizante $x=-1+\sqrt{2}$). Além disso, $f(D_f)=[0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

- $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ em $D_f = [-1, 1]$.

Comecemos por ver que $x^2 + x + 1$ é uma função polinomial estritamente positiva, o que leva a que $\ln(x^2 + x + 1)$ esteja bem definida (seja contínua em $[-1, 1]$ e admita derivada em $]-1, 1[$). Desta forma, vamos determinar os conjuntos C e N do esquema no slide 106.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2} \in D_f$, concluímos que $C = \{-\frac{1}{2}\}$.

$$f'(x) \text{ admite valor para todo o } x \in\,]-1, 1[\quad \Rightarrow \quad N = \varnothing.$$

Calculando agora os valores $f(-1) = \ln(1) = 0$, $f(1) = \ln(3)$ e $f(-\frac{1}{2}) = \ln(\frac{3}{4})$, concluímos que $\ln(\frac{3}{4})$ é o mínimo absoluto de f (ligado ao minimizante $x = -\frac{1}{2}$) e que $\ln(3)$ é o máximo absoluto de f (ligado ao maximizante $x = 1$). Além disso, $f(D_f) = [\ln(\frac{3}{4}), \ln(3)]$.

- $f(x) = x - 2\arctan(x)$ em $D_f = [0, 4]$.

Comecemos por ver que $x - 2\arctan(x)$ é uma função bem definida (é contínua em $[0, 4]$ e admite derivada em $]0, 4[$). Desta forma, vamos determinar os conjuntos C e N do esquema no slide 106.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 1. \end{aligned}$$

Como $-1 \notin D_f$, concluímos que $C = \{1\}$.

$$f'(x) \text{ admite valor para todo o } x \in \,]0, 4[\quad \Rightarrow \quad N = \varnothing.$$

Calculando agora os valores $f(0) = 0$, $f(4) = 4 - \arctan(4)$ e $f(1) = 1 - 2\arctan(1) = 1 - 2\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}$, concluímos que $4 - \arctan(4)$ é o máximo absoluto de f (ligado ao maximizante $x = 4$) e que $1 - \frac{\pi}{2}$ é o mínimo absoluto de f (ligado ao minimizante $x = 1$). Além disso, $f(D_f) = [1 - \frac{\pi}{2}, 4 - 2\arctan(4)]$.

Teorema (Rolle)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função regular tal que* $f(a) = f(b)$*. Então, existe (pelo menos) um* $c \in \,]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Demonstração.

Se f for constante em $[a, b]$ então $f'(x) = 0$ (para todo $x \in \,]a, b[$). Logo, neste caso, pode ser tomado qualquer $c \in \,]a, b[$.

Suponhamos então agora que f não é constante em $[a, b]$. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstraß, existem x_1, x_2 tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$. Porque f não é constante, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, x_1 ou x_2 pertence ao intervalo $]a, b[$ e, como são pontos extremantes, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$ (cf. Teorema de Fermat). Consequentemente, existe neste caso (pelo menos) um $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. ♦