

MPEI 2024-2025

Variáveis aleatórias
multidimensionais

Motivação

- Trabalhamos frequentemente com conjuntos de variáveis relacionadas
- Exemplos:
 - **Peso e altura** das pessoas
 - Os 256 valores medidos por sensores EEG

256 EEG sensors



Variáveis aleatórias multidimensionais

- Os resultados possíveis são conjuntos de várias variáveis aleatórias, X_1, X_2, \dots
- Dois tipos de casos:
 - Experiência aleatória produz várias saídas
 - Repetições da experiência aleatória (com uma única saída)
- A um vetor em que as componentes são as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n chama-se **vetor aleatório** ou **v.a. vetorial**

$$\mathbf{X} = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n)$$

Vetor aleatório

- Um vetor aleatório X é uma função que atribui um vetor de números reais a todos os resultados ζ no espaço de amostragem da experiência aleatória

- Exemplo: $\mathbf{X} = (H \ W \ A)$ com

$H(\zeta)$ = altura do estudante ζ em metros,

$W(\zeta)$ = peso do estudante ζ em Kg, e

$A(\zeta)$ = idade do estudante ζ em anos.

Como caracterizar estas variáveis aleatórias com n -dimensões ?

Funções de distribuição conjuntas

- Para situações envolvendo 2 ou mais variáveis, definem-se, estendendo as definições para uma variável:
 - Função massa de probabilidade conjunta
 - Função de distribuição cumulativa conjunta
 - Função de densidade de probabilidade conjunta

Função massa de probabilidade conjunta

- Para duas variáveis discretas, X e Y :

$$p_{X,Y}(i,j) = P(X = i \wedge Y = j)$$

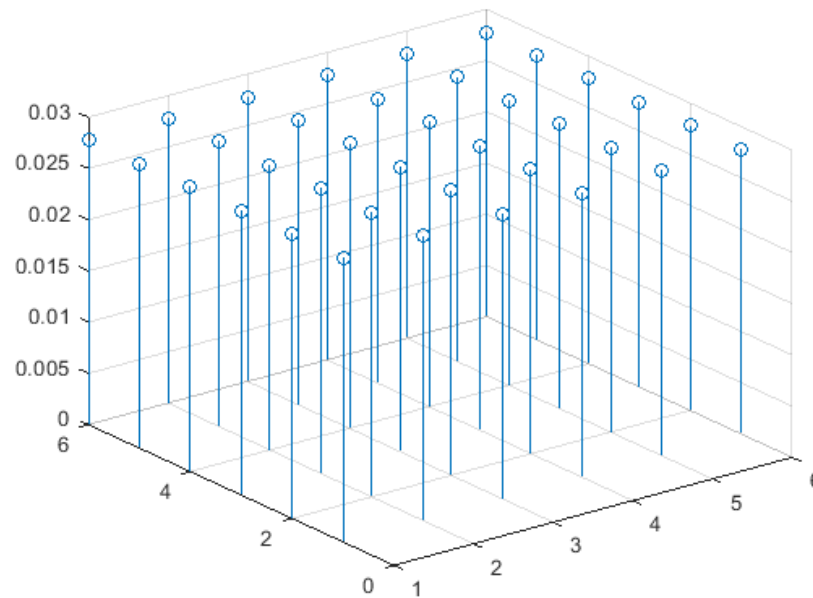
- Exemplo: X = dado 1; Y = dado 2

$$p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(1,2) = \dots = p_{X,Y}(6,6) = 1/36$$



Exemplo (continuação)

- Representação 3D



`stem3()` em Matlab

Função massa de probabilidade conjunta

- A expressão **generaliza para mais de 2 variáveis**:
- $$p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$
- Uma função em \mathbb{R}^n , não-negativa
- $\sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$



Função de distribuição acumulada conjunta

- Simples extensão ...
- Para duas variáveis, X e Y :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$$

- Para n variáveis:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

No caso discreto é uma função em terraços ...

Exemplo 1

- Caso discreto

$Y_1 =$ número de tempestades em junho (0, 1, ou 2)

$Y_2 =$ número de tempestades em julho (0, 1, ou 2)

- Tabela com probabilidades

		Julho (y_2)		
Junho (y_1)		0	1	2
	0	0.05	0.1	0.15
	1	0.1	0.15	0.20
	2	0.15	0.05	0.05

$p_{y_1 y_2} (0, 2)$



Distribuição de cada uma das variáveis

- A distribuição acumulada de cada uma das variáveis pode ser obtida da distribuição conjunta
- Por exemplo, no caso com duas variáveis X e Y :
- $$\begin{aligned} F_X(a) &= P(X \leq a) \\ &= P(X \leq a, Y < \infty) \\ &= F_{X,Y}(a, \infty) \end{aligned}$$
- De forma similar:
$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = F_{X,Y}(\infty, b)$$



Distribuição de cada uma das variáveis

- Também se pode obter facilmente a função de massa de probabilidade de cada uma das variáveis
- Para o caso discreto temos:

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$
$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

Funções de probabilidade marginais

- No caso de duas variáveis (X e Y):
- Para obter a função massa de probabilidade de X somamos as linhas apropriadas da tabela representando a função de probabilidade conjunta
- De forma similar obtém-se Y somando as colunas



Exemplo - Probabilidades marginais

- Para o exemplo introduzido antes..

		Julho (y_2)			
Junho (y_1)		0	1	2	$p(y_1)$
	0	0.05	0.1	0.15	0.30
	1	0.1	0.15	0.20	0.45
	2	0.15	0.05	0.05	0.25
	$p(y_2)$	0.30	0.30	0.40	1.00

$$p_{Y1}(y1) =$$

y_1	$p_{Y1}(y_1)$
0	0.30
1	0.45
2	0.25
TOTAL	1.00

y_2	$p_{Y2}(y_2)$
0	0.30
1	0.30
2	0.40
TOTAL	1.00

Generalização

- O caso de **n variáveis discretas** é uma generalização simples
- Se X_1, X_1, \dots, X_n são variáveis aleatórias discretas no mesmo espaço de amostragem com função massa de probabilidade conjunta:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

- A função de probabilidade marginal para X_1 é:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, \dots, x_n} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

- A função (bidimensional) para a função de probabilidade marginal de X_1 e X_2 :

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3, \dots, x_n} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$



Independência

- Em termos de função de distribuição acumulada conjunta:

X e Y são independentes se e só se

$$F_{X,Y}(a, b) = F_X(a)F_Y(b)$$

qualquer que sejam a e b

- Também, no caso discreto, X e Y são independentes se e só se

$$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$$

- E no caso contínuo $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

Generalização – independência de n variáveis aleatórias

- n variáveis X_1, X_2, \dots, X_n são independentes se e só se

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Exemplo - Independência

- Y_1 e Y_2 são independentes ?

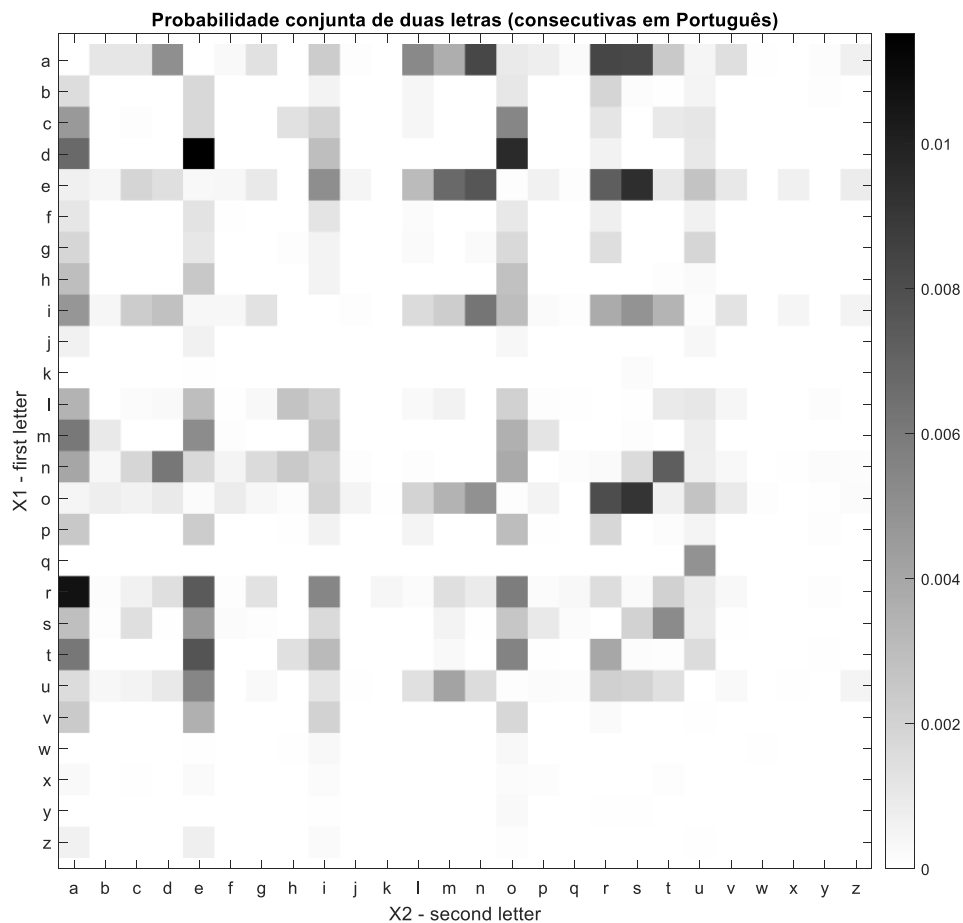
		Julho (y_2)			
Junho (y_1)		0	1	2	$P(y_1)$
	0	0.05	0.1	0.15	0.30
	1	0.1	0.15	0.20	0.45
	2	0.15	0.05	0.05	0.25
	$f(y_2)$	0.30	0.30	0.40	1.00

		Julho (y_2)			
Junho (y_1)		0	1	2	$p(y_1)$
	0	0.09			0.30
	1				0.45
	2				0.25
	$p(y_2)$	0.30	0.30	0.40	1.00

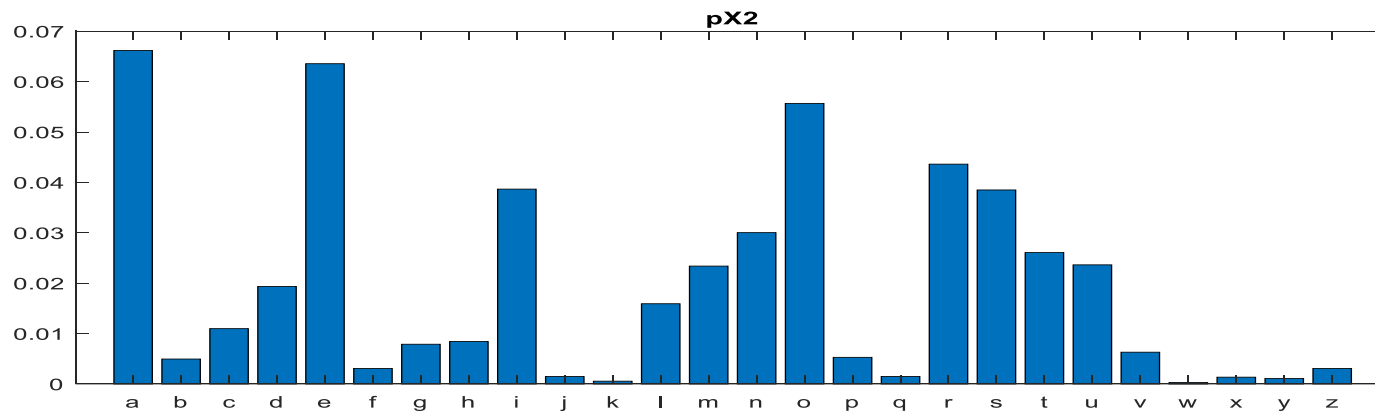
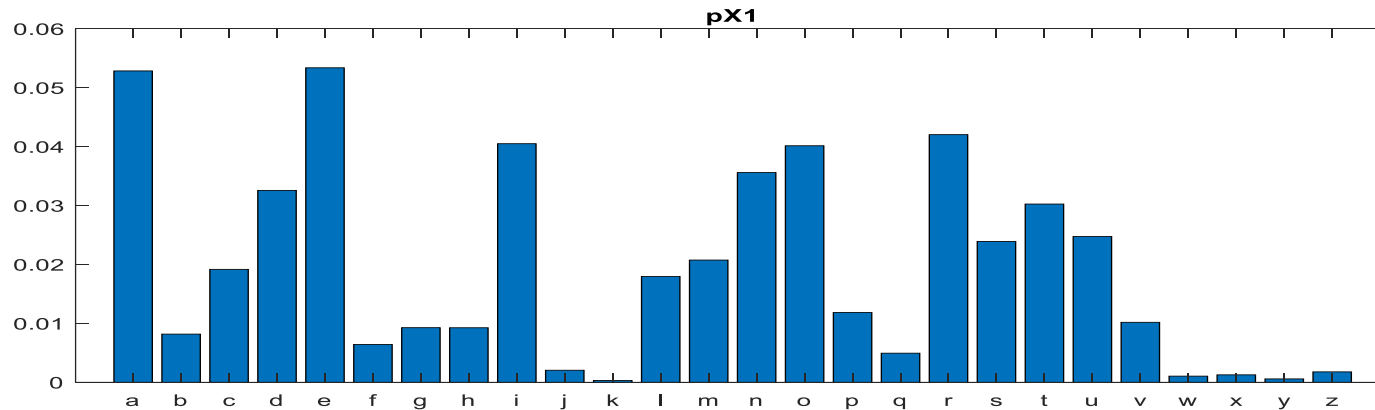
Outro exemplo

- Consideremos sequências de 2 letras (consecutivas) em Português
 - X_1 representa a primeira; X_2 a segunda
- Função massa de probabilidade conjunta?
- Distribuições marginais?
- X_1 e X_2 são independentes?

Função massa de probabilidade conjunta

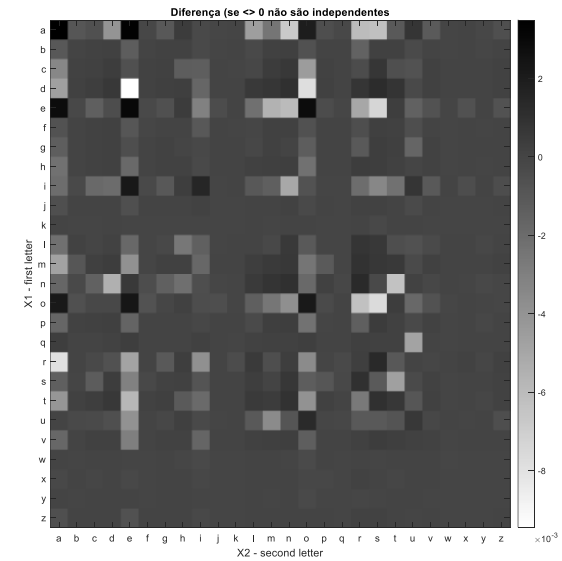
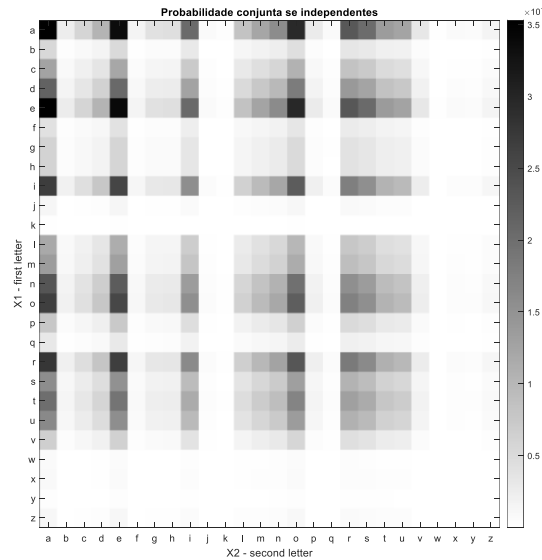
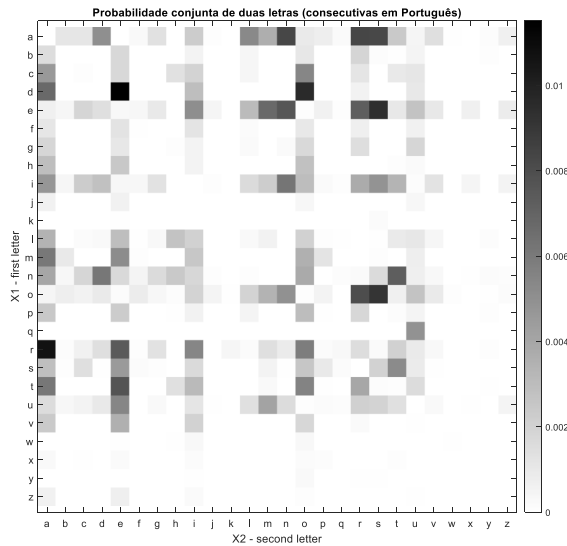


Distribuições marginais



Independência

$$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y)?$$



Diferença

Esperança matemática

Extensão das definições

- Os **momentos de ordem j, k das variáveis X, Y** definem-se como sendo ...

- Caso discreto:

$$E[X^j Y^k] = \sum_m \sum_n x_m^j y_n^k p_{XY}(x_m, y_n)$$

- Caso contínuo:

$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^j y^k f_{XY}(x, y) dx dy$$

- Se $j=1$ e $k=0$ ou $j=0$ e $k=1$ temos os valores médios de X e Y
- Se $j=2$ e $k=0$ ou $j=0$ e $k=2$ temos os valores quadráticos médios

Extensão das definições (cont.)

- Os **momentos centrais conjuntos** de ordem j, k das variáveis X, Y definem-se como:

$$E[(X - E[X])^j (Y - E[Y])^k]$$

- Para $j=2$ e $k=0$ ou $j=0$ e $k=2$ obtemos as **variâncias** de X e Y

Correlação

- Alguns dos momentos são particularmente relevantes...
- O momento de ordem $j=k=1$, $E[XY]$, é designado de correlação das variáveis X e Y
- Quando $E[XY] = 0$ as variáveis são ortogonais



$E[XY]$ e Independência

- Sendo X e Y independentes

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

- Demonstração (caso discreto):

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{x,y} xy p_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{x,y} xy p_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{x,y} xy p(x)p_Y(y) \\ &= [\sum_x x p_X(x)] [\sum_y y p_Y(y)] \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Covariância

- A covariância de duas variáveis X e Y é o seu momento central de ordem $j = k = 1$
 - Ou seja $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
 - Designa-se por $\text{Cov}(X, Y)$
- $$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]\end{aligned}$$
- $E[X] = 0$ ou $E[Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X, Y) = E[XY]$

Covariância

- É uma **generalização da Variância**

$$\begin{aligned} Cov(X, X) &= E[(X - E[X])(X - E[X])] \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

- A covariância é uma **medida de relação linear entre as variáveis aleatórias**
- Se a relação for não linear, a covariância pode não ser sensível à relação.

Covariância e independência

- Se X e Y são independentes então $\text{Cov}(X, Y) = 0$
- “Demonstração”:
- Como vimos $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
- X e Y são independentes implica
$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Nota: o contrário não é verdadeiro

pode ter-se $\text{Cov}(X, Y) = 0$ e as variáveis não serem independentes



Propriedades da Covariância

- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(cX, Y) = c Cov(X, Y)$
- $Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} &= E[X(Y + Z)] - E[X]E[Y + Z] = \\ &= E[XY] + E[XZ] - E[X]E[Y] - E[X]E[Z] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] + E[XZ] - E[X]E[Z] \\ &= Cov(X, Y) + Cov(X, Z) \end{aligned}$$

- Generalização:
$$Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$$

Covariância de n variáveis

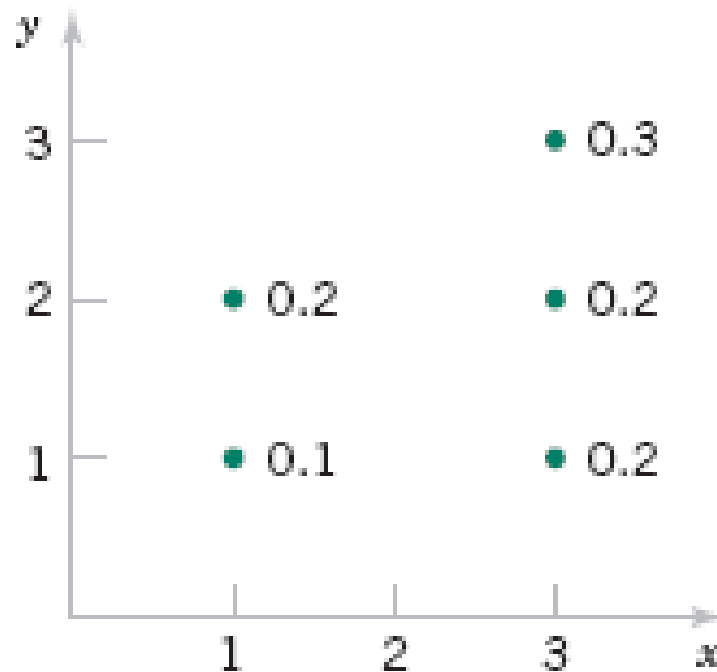
- Se tivermos um vector de n variáveis aleatórias $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

- $$Cov(Y) = \begin{bmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{bmatrix}$$

- $$= \begin{bmatrix} Var(Y_1) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \textcolor{red}{Cov(Y_1, Y_n)} & \cdots & Var(Y_n) \end{bmatrix}$$

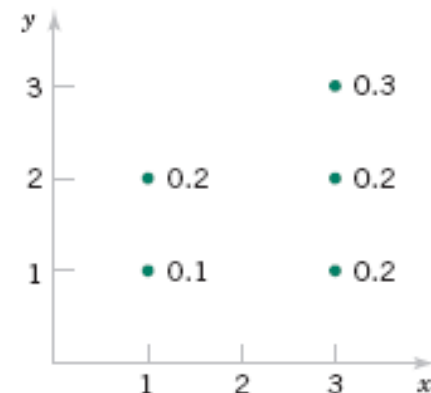
Exemplo

- Considere a seguinte distribuição conjunta de X e Y e calcule $Cov(X, Y)$



Cov(X,Y)= ?

- $\text{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X]) (Y-E[Y])]$
- $E(X) = ?$
 $= 1 \times 0,3 + 3 \times 0,7 = 2,4$
- $E(Y) = ?$
- $= 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,3 = 2,0$
- $\text{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X]) (Y-E[Y])]$
- $= (1-2,4)(1-2,0) \times 0,1 + (1-2,4)(2-2,0) \times 0,2$
- $+ (3-2,4)(1-2,0) \times 0,2 + (3-2,4)(2-2,0) \times 0,2$
- $+ (3-2,4)(3-2,0) \times 0,3 = 0,2$



x_i	$p_X(x_i)$
1	0.3
3	0.7

y_i	$p_Y(y_i)$
1	0.3
2	0.4
3	0.3

Coeficiente de correlação

- A **coeficiente de correlação** das variáveis X e Y é:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Demonstra-se que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
- E que os valores extremos (1 e -1) se obtêm para a relação linear $Y = a X + b$ com $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente

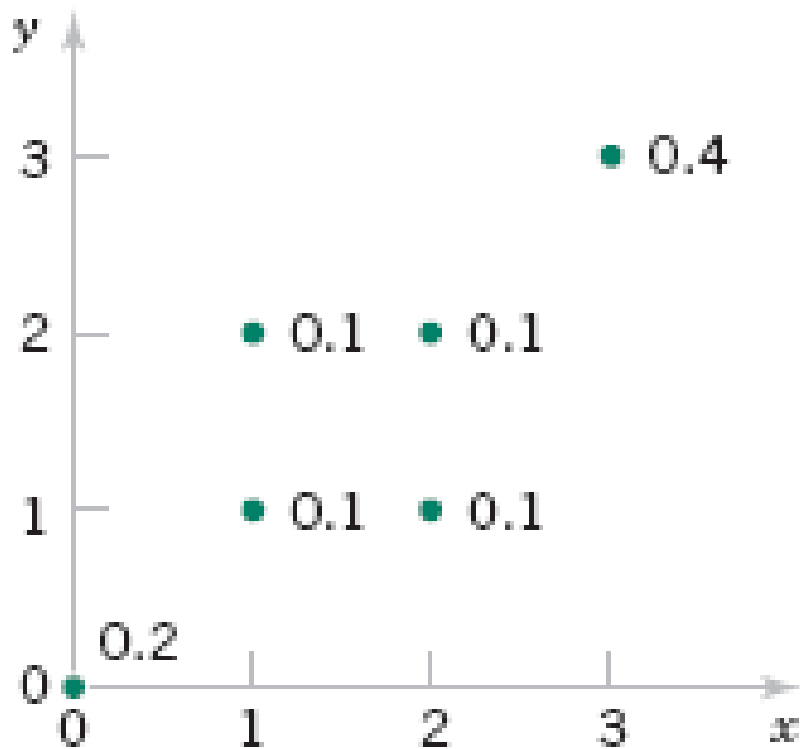


Coeficiente de correlação

- Se $\rho_{XY} = 0$ as variáveis dizem-se **descorrelacionadas**
- Como se viu, se X e Y são independentes, a sua covariância é nula e portanto **são descorrelacionadas**
 - Mas o contrário não é (necessariamente) verdadeiro

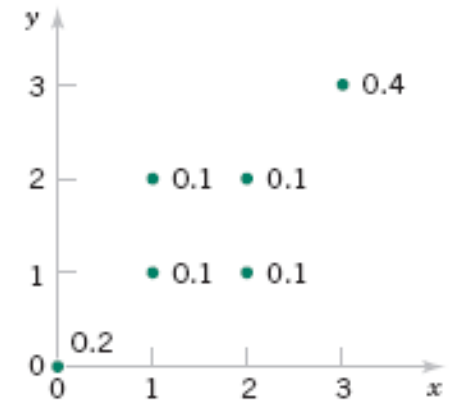


Exemplo de cálculo de ρ_{XY}



x	y	P(x,y)
0	0	0,2
1	1	0,1
1	2	0,1
2	1	0,1
2	2	0,1
3	3	0,4
SOMA		1,0

Cálculo de $E[XY]$, $E[X]$ e $E[Y]$



x	y	P(x,y)	$E[XY] = xy P(x,y)$	$E[X] = x P(x)$	$E[Y] = y P(y)$	$E[X^2] = x^2 P(x)$
0	0	0,2	$0 \times 0 \times 0,2 = 0$	0	0	0
1	1	0,1	$1 \times 1 \times 0,1 = 0,1$	0,1	0,1	0,1
1	2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
2	1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
2	2	0,1	0,4	0,2	0,2	0,4
3	3	0,4	3,6	1,2	1,2	3,6
	SOMA	1,0	4,5	1,8	1,8	4,6

Exemplo de cálculo de ρ_{XY}

- $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 4,6 - 3,24 = 1,36$
- $\text{Var}(Y)$ é igual à de X
- $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
 $= 4,5 - (1,8)(1,8) = 1,26$
- Finalmente:
- $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1,26}{(\sqrt{1,36})(\sqrt{1,36})} = 0,926$