

Árvores Binárias I

06/11/2023

Ficheiro ZIP

- Está disponível no Moodle um **ficheiro ZIP** de suporte aos tópicos de hoje
- **1ª versão** do tipo abstrato **Árvore Binária**
- **Funções incompletas**, que permitem trabalho autónomo de desenvolvimento e teste

Sumário

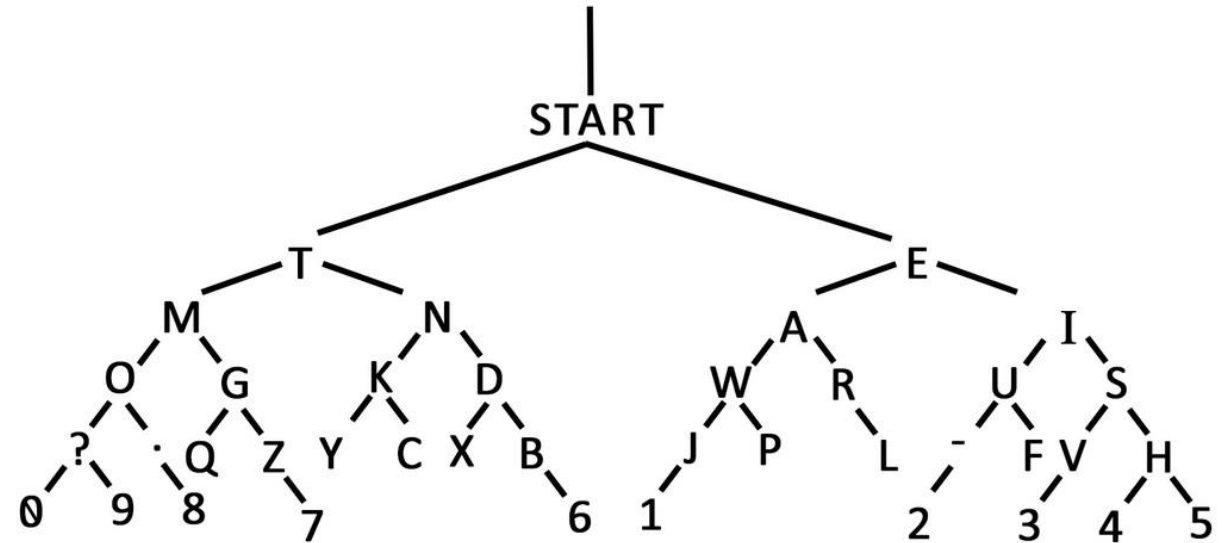
- Árvores binárias; terminologia e algumas propriedades
- O TAD Árvore Binária
- Possíveis estruturas de dados
- Algoritmos recursivos – exemplos simples
- Tarefas adicionais

Árvores

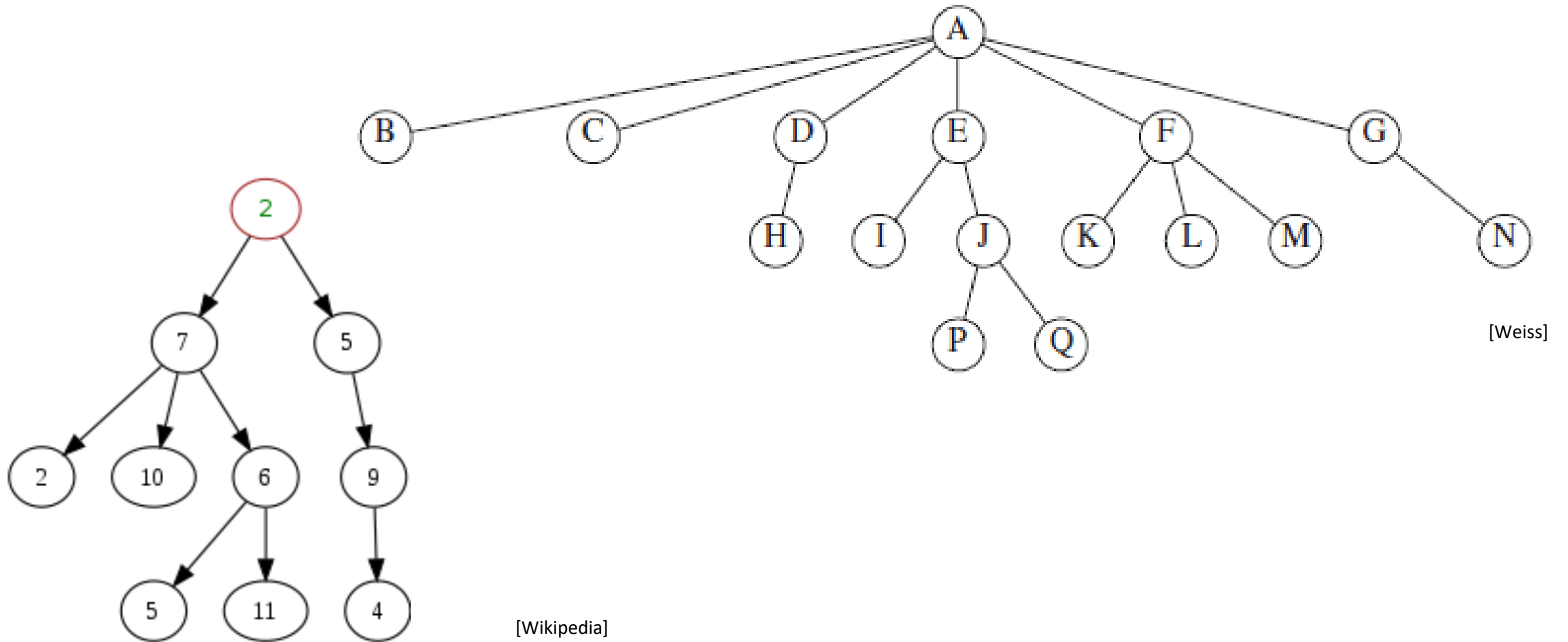
← DASH

DOT →

[weebly.com]



Árvores – Arcos ? – Ordem ?



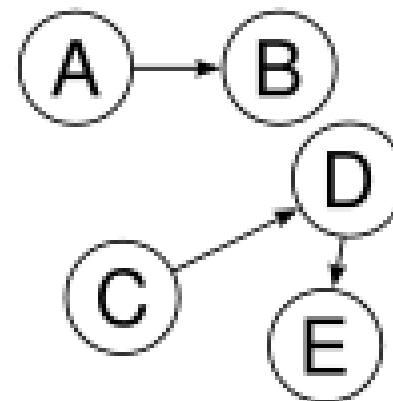
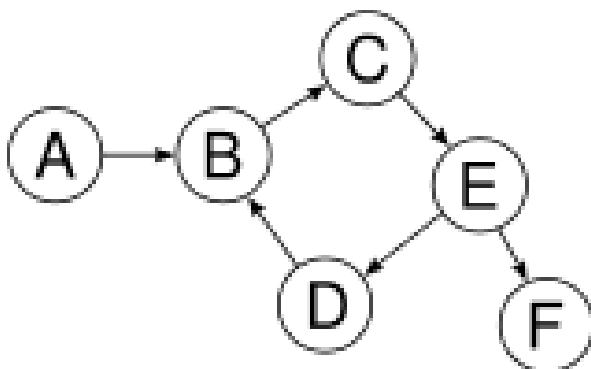
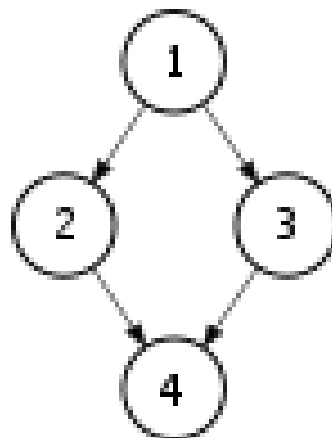
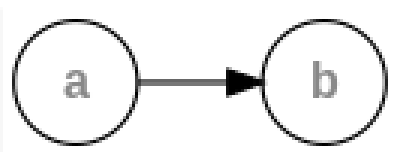
Árvores vs Grafos

- Todas as árvores são grafos !
- MAS, nem todos os grafos são árvores !!
- Definição ?

Árvores vs Grafos

- Todas as árvores são grafos !
- MAS, nem todos os grafos são árvores !!
- Árvore: existe um só caminho entre qualquer par de nós distintos
- Árvore: apagar um qualquer arco origina duas árvores desconexas
- Árvore com n nós tem $(n - 1)$ arcos e não contém nenhum ciclo
- Árvore com n nós tem $(n - 1)$ arcos e é conexa

São árvores orientadas ou **não** ?



[Wikipedia]

Árvores orientadas vs Grafos orientados

- Todas as **árvores orientadas** são **grafos orientados** !
- **MAS**, nem todos os grafos orientados são árvores orientadas !!
- Definição ?

Árvores orientadas vs Grafos orientados

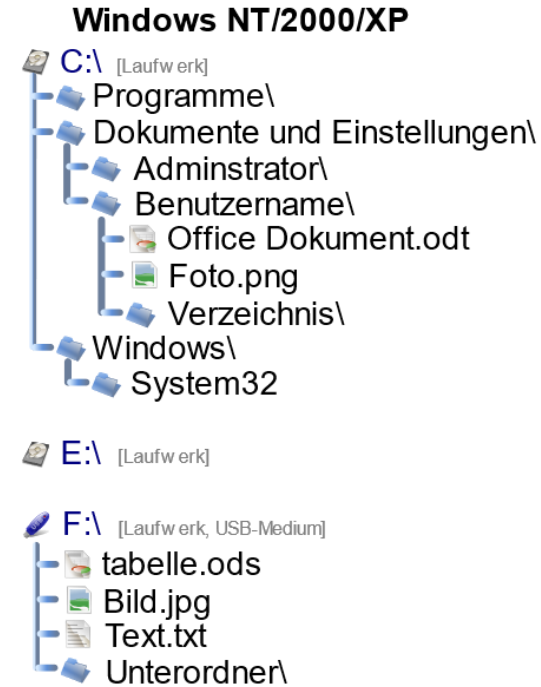
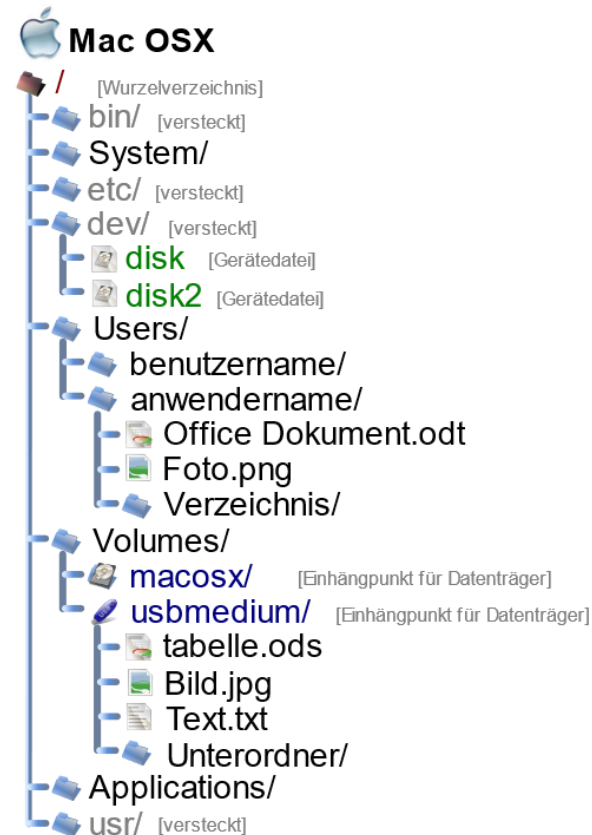
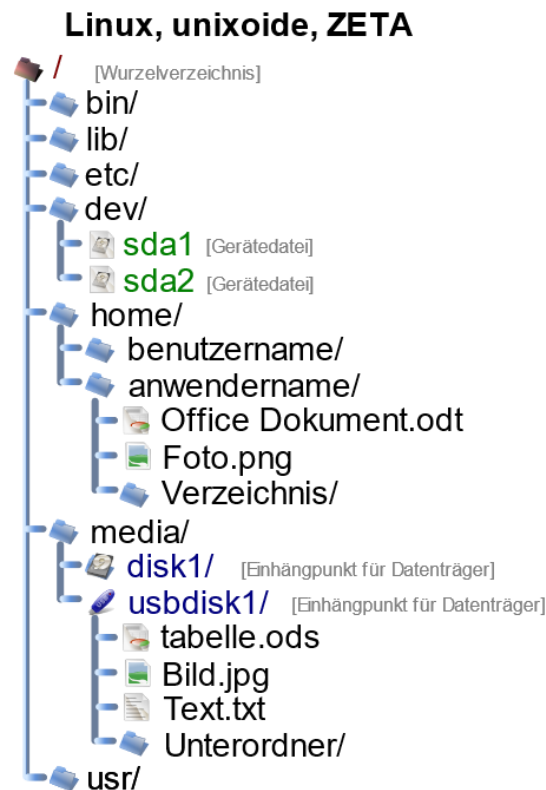
- Todas as **árvores orientadas** são **grafos orientados** !
- **MAS**, nem todos os grafos orientados são árvores orientadas !!
- **Árvore orientada:**
- O nó **raiz** não tem qualquer arco incidente
- Cada um dos outros nós tem **um só arco incidente**
- Existe **um só caminho orientado** entre a **raiz** e cada um dos outros **nós**

Exemplos de aplicação

- Árvores **genealógicas**
- Árvores de **pedigree**
- Torneios
- Hierarquia de uma organização
- Estrutura de um livro
- Taxonomias hierárquicas
- ...

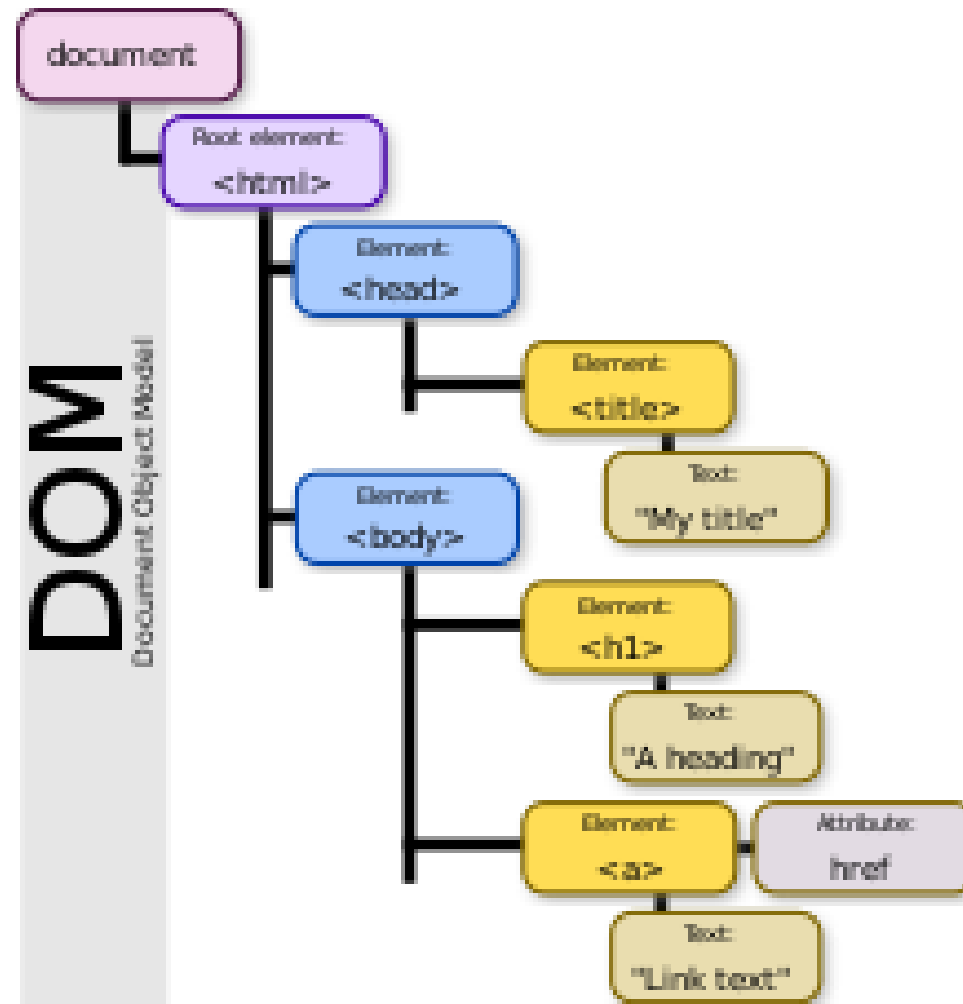


Organização do sistema de ficheiros



[Wikipedia]

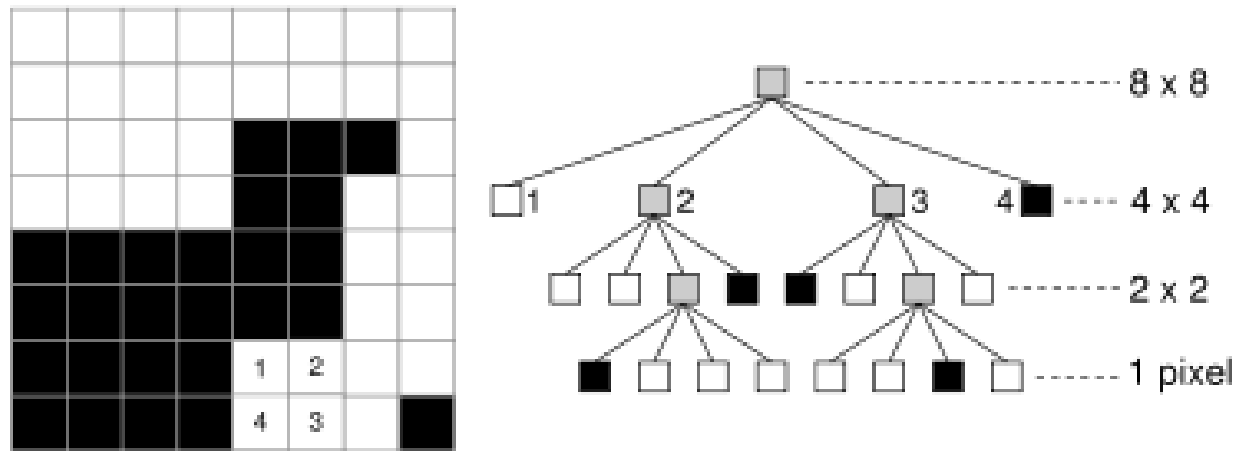
DOM tree



[Wikipedia]

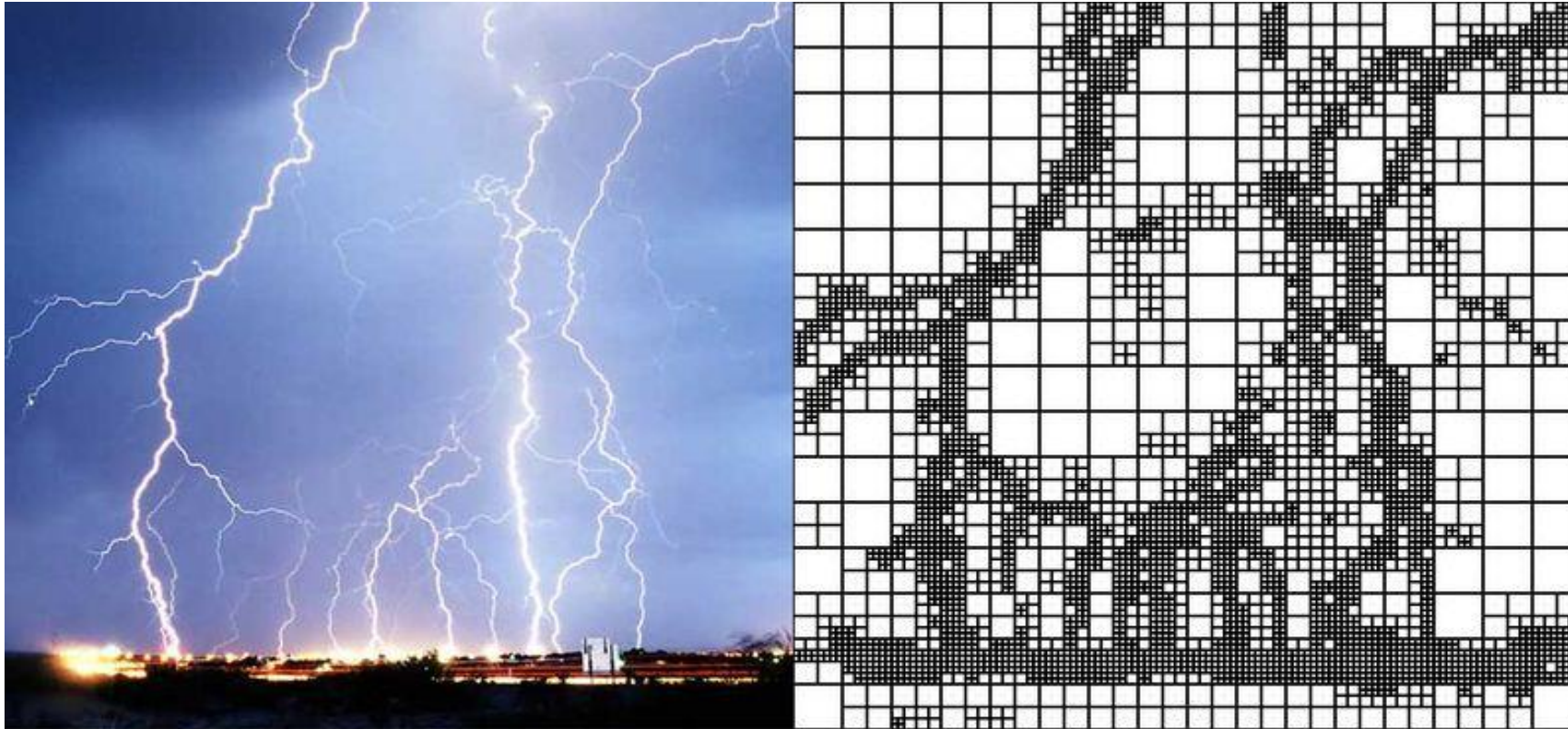
Quadrees – Árvores quaternárias

- Representação de imagens binárias
 - Subdivisão recursiva em 4 quadrantes
 - Nós pretos, brancos e cinzentos



[Wikipedia]

Quadtrees



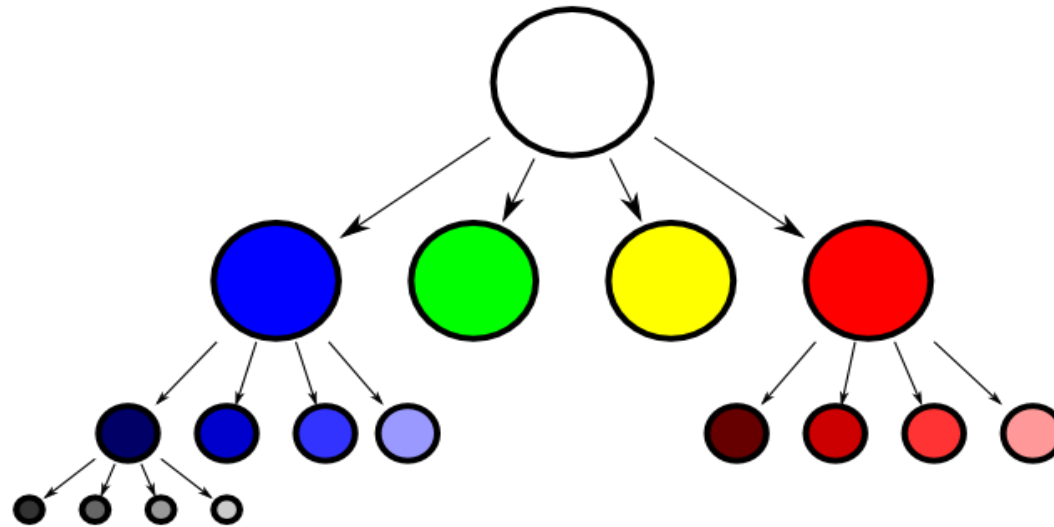
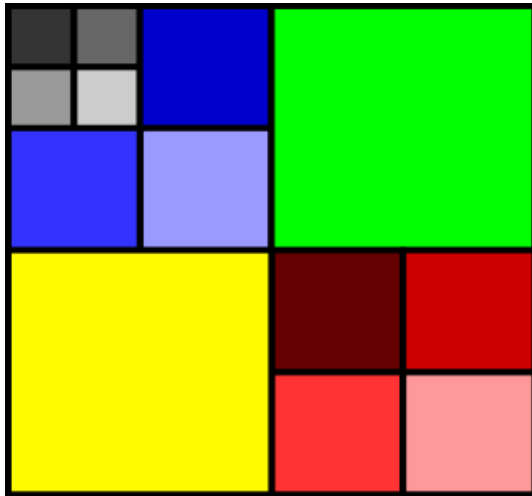
Originalbild

Aus Konturwerten
erstellter Quadtree
(Größe: 1229 Byte)

[Wikipedia]

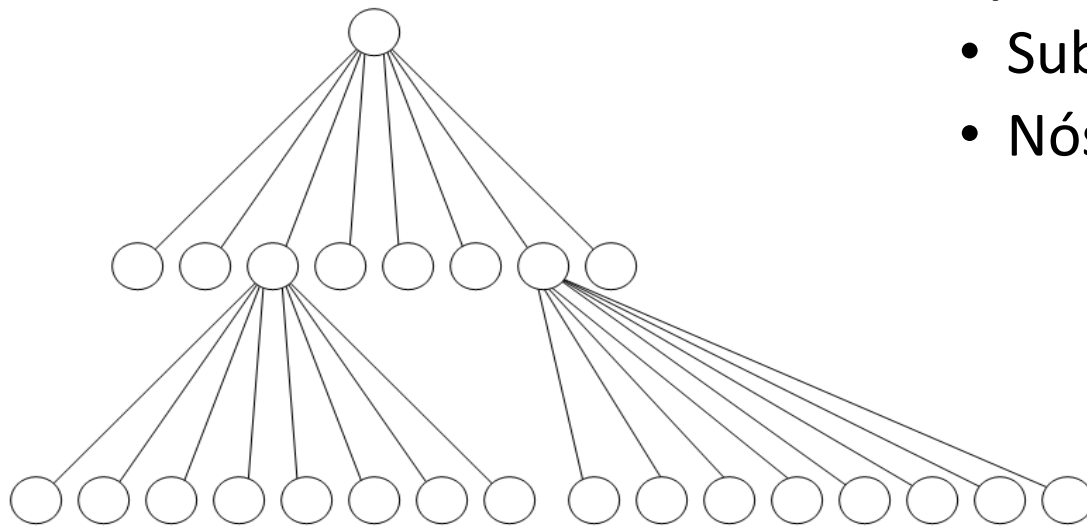
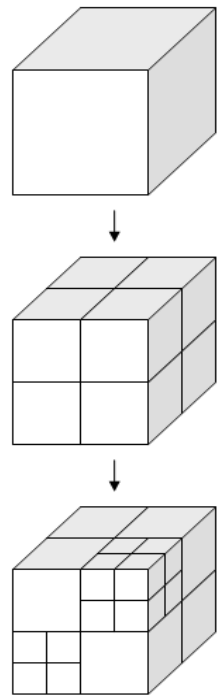
Quadrees

- Representação de imagens a cores



[Wikipedia]

Octrees – Árvores octais



- Representação de volumes
 - Subdivisão recursiva em 8 octantes
 - Nós pretos, brancos e cinzentos

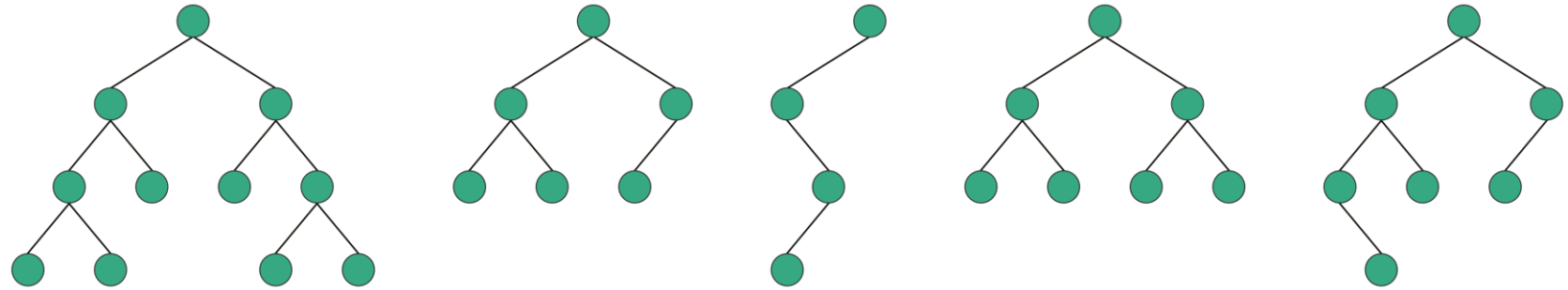
[Wikipedia]

Mais exemplos de aplicação

- Herança **simples** em POO
- Comportamento dinâmico de algoritmos “**divide-and-conquer**”
- ...

Resumo – Tipos de árvores

- Árvores orientadas vs não orientadas
- Árvores binárias, ternárias, quaternárias, ... , m-árias
- Árvores binárias ordenadas – Como ?
- Árvores binárias equilibradas em altura – Como ?

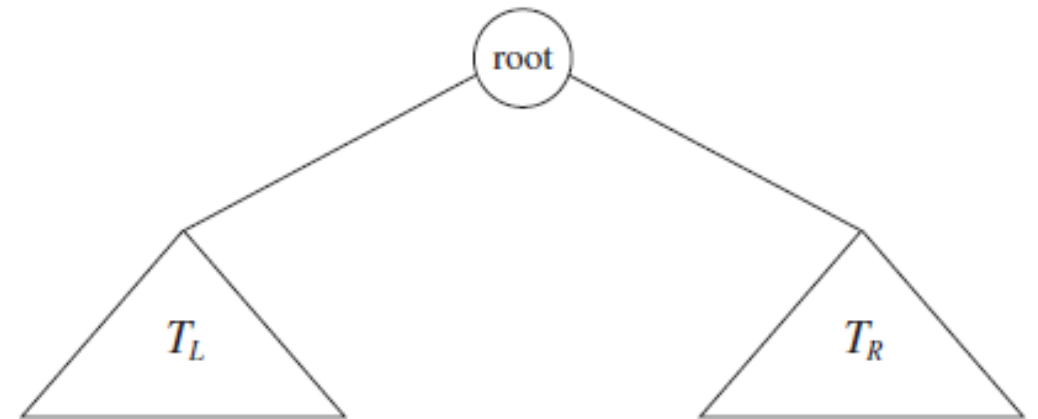


[towardsdatascience.com]

Árvores Binárias

Definição recursiva

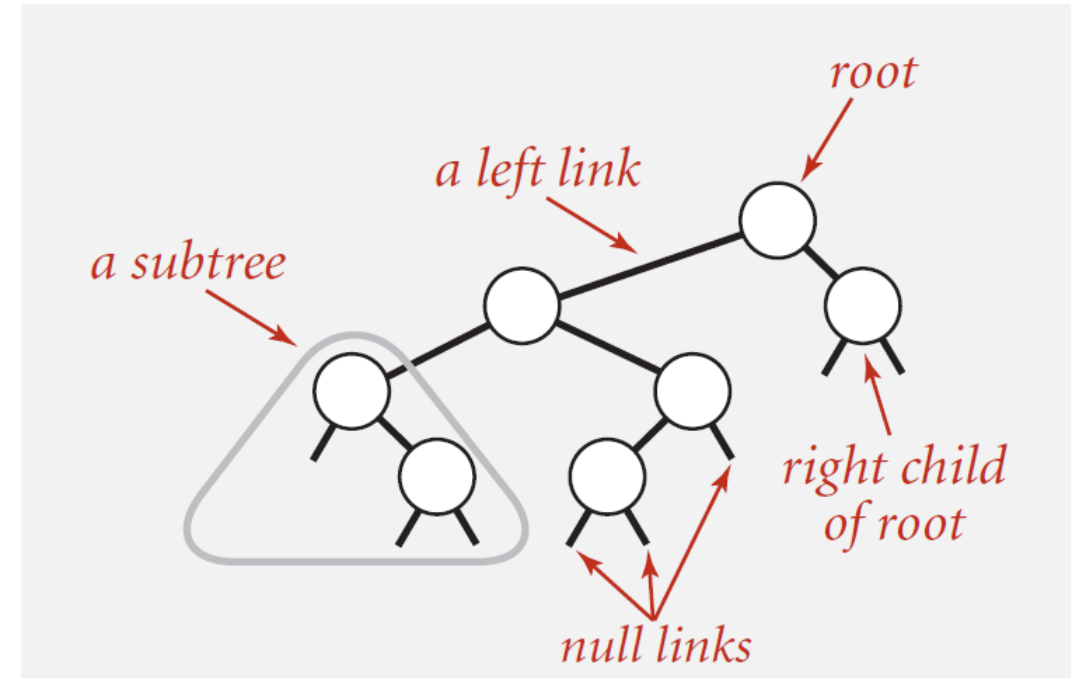
- Uma árvore binária é formada por um conjunto finito de nós ($n \geq 0$)
- Uma árvore binária é vazia
- OU é constituída por um nó raiz que referencia duas (sub-)árvores binárias disjuntas (SAEsq e SADir)
 - Arcos orientados para a SAEsq e para a SADir



[Weiss]

Terminologia

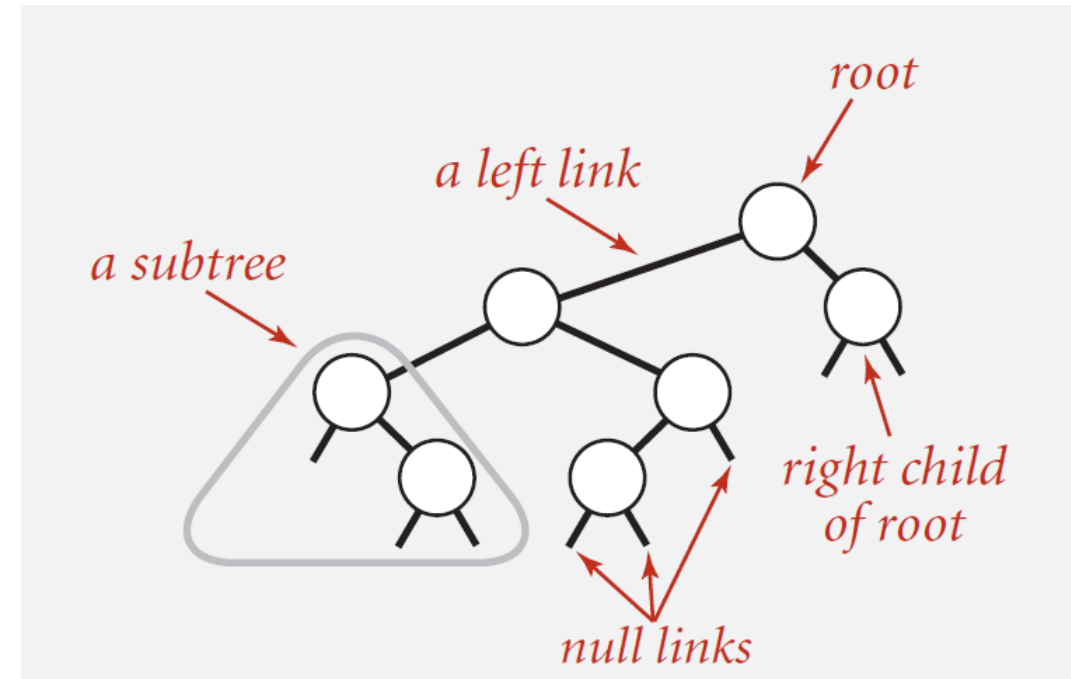
- **Grau** de um **nó**: nº das suas subárvores não-vazias
- **Grau** de uma **árvore** ?
- Nós **não-terminais** vs **Folhas**
- Pai, **filhos**, irmãos
- Antepassados, descendentes



[Sedgewick & Wayne]

Terminologia

- **Nível** de um nó ?
- A **raiz** está no nível 0
- Qual é a **definição recursiva** ?
- **Altura** de uma árvore ?
- Nº de arcos do **caminho mais longo** da raiz da árvore para uma das suas folhas
- Índice do **último nível**



[Sedgewick & Wayne]

Algumas propriedades das árvores binárias

- Questões simples !!
- Nº **máximo** de nós no **nível i** ? 2^i
- Nº **máximo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ? $\sum_{m=0}^h 2^m$
- Nº **mínimo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ? $h+1$

Algumas propriedades das árvores binárias

- Questões simples !!
- Nº **máximo** de nós no **nível i** ?
- Nº **máximo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ?
- Nº **mínimo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ?

$$2^i$$

$$2^{h+1} - 1$$

$$h + 1$$

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

Algumas propriedades das árvores binárias

- Completar a frase:

no máximo:

$$y = 2^{h+1} - 1$$

$$y+1 = 2^{h+1}$$

$$(y+1)/2 = 2^h$$

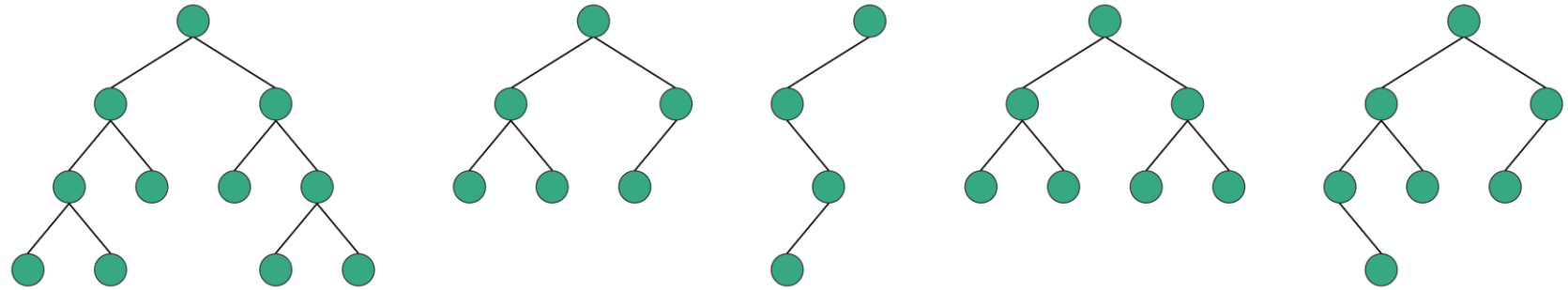
$$h = \log((y+1)/2)$$

no mínimo:

$$y = h+1$$

$$h = y-1$$

- A altura de uma árvore binária com n nós é pelo menos ... e quando muito ...
- Façam exemplos !!




[towardsdatascience.com]

O TAD Árvore Binária

TAD Árvore Binária – Funcionalidades

- Conjunto de **elementos** do **mesmo tipo**
- **Armazenados sem qualquer ordem particular**
- Procura / inserção / remoção / substituição
- Pertença
- **search() / insert() / remove() / replace()**
- **size() / isEmpty() / contains()**
- **create() / destroy()**

Funcionalidades

```
#ifndef _INTEGERS_BINTREE_  
#define _INTEGERS_BINTREE_  
  
// JUST storing integers  
typedef int ItemType;   
  
typedef struct _TreeNode Tree;  
  
Tree* TreeCreate(void);  
  
void TreeDestroy(Tree** pRoot);
```



```
// Tree properties  
  
int TreeIsEmpty(const Tree* root);  
  
int TreeEquals(const Tree* root1, const Tree* root2);  
  
int TreeMirrors(const Tree* root1, const Tree* root2);  
  
// ...
```

Funcionalidades

```
// Getters

int TreeGetNumberOfNodes(const Tree* root);

int TreeGetHeight(const Tree* root);

ItemType TreeGetMin(const Tree* root);

ItemType TreeGetMax(const Tree* root);

Tree* TreeGetPointerToMinNode(const Tree* root);

Tree* TreeGetPointerToMaxNode(const Tree* root);

// ...
```



Funcionalidades


```
// Operations with items

int TreeContains(const Tree* root, const ItemType item);

int TreeAdd(Tree** pRoot, const ItemType item);

int TreeRemove(Tree** pRoot, const ItemType item);

// ...
```



Funcionalidades

```
// Traversals
```


```
void TreeTraverseInPREOrder(Tree* root, void (*function)(ItemType* p));
```

```
void TreeTraverseINOrder(Tree* root, void (*function)(ItemType* p));
```

```
void TreeTraverseInPOSTOrder(Tree* root, void (*function)(ItemType* p));
```

```
// ...
```


Ficheiro de teste



```
#include "IntegersBinTree.h"

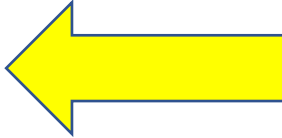
void printInteger(int* p) { printf("%d ", *p); }

void multiplyIntegerBy2(int* p) { *p *= 2; }

int main(void) {
    Tree* tree = createExampleTree();

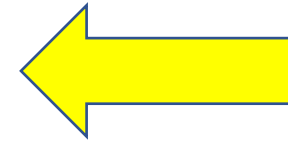
    printf("Created an example tree\n");

    if (TreeIsEmpty(tree)) {
        printf("The created tree is EMPTY\n");
    } else {
        printf("The created tree is OK\n");
    }
}
```

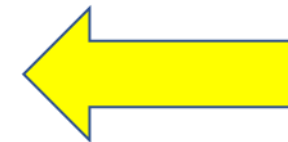


Ficheiro de teste

```
printf("PRE-Order traversal : ");  
TreeTraverseInPREOrder(tree, printInteger);  
printf("\n");
```



```
printf("Multiply each value by 2\n");  
TreeTraverseInPREOrder(tree, multiplyIntegerBy2);
```



Possíveis representações internas

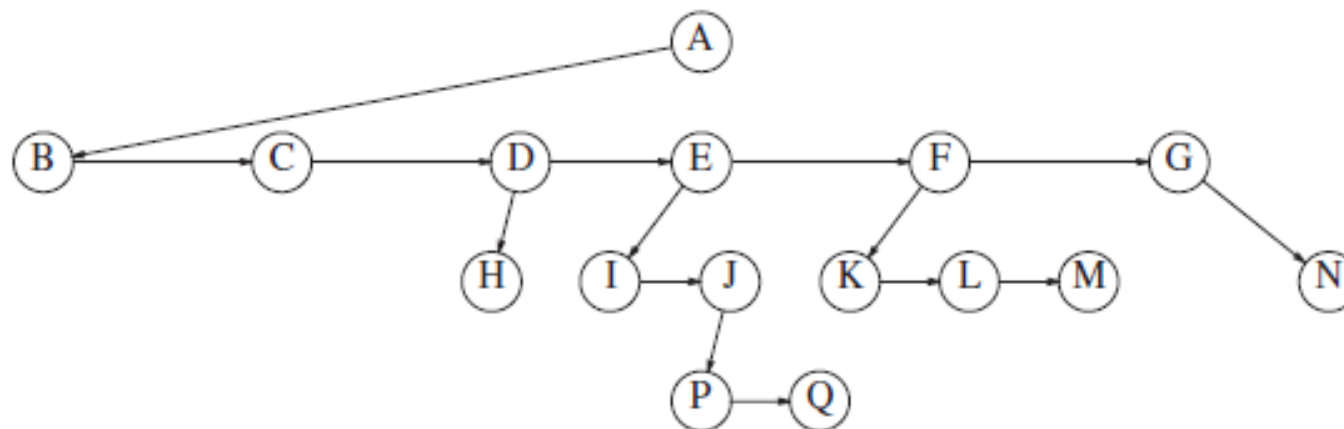
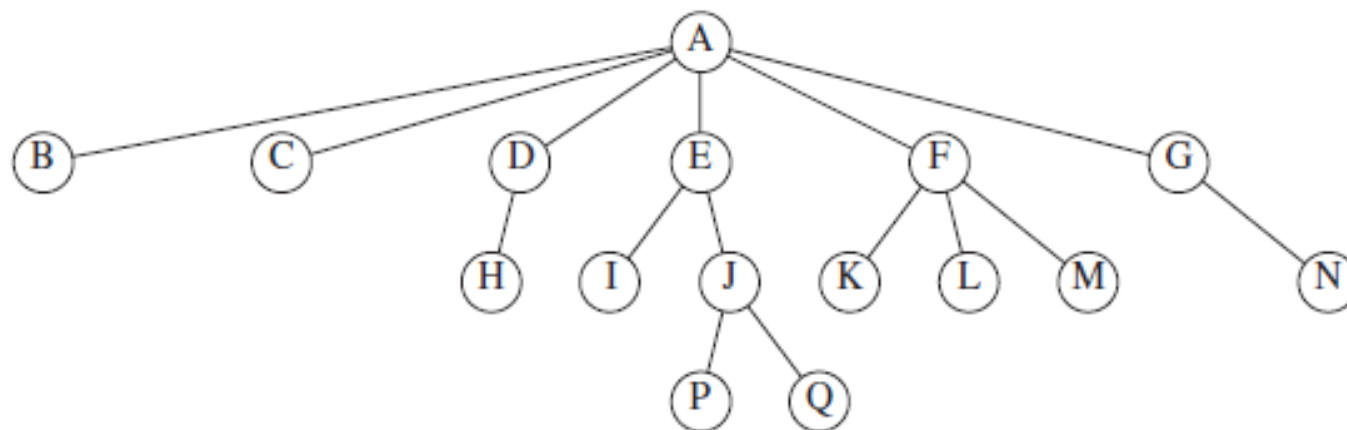
- **Array** – representação sequencial **por níveis** ✓
- **Lista de listas** – 1º filho e irmãos
- Nó com **2 ponteiros** para as subárvores esquerda e direita
- Nó com **mais 1 ponteiro** para o **progenitor**
- ...
- Que **operações** são mais **fáceis** / **difíceis** com uma dada representação interna ?

Possíveis representações internas

- Não alterar as funcionalidades do TAD !!
- Que operações são mais fáceis / difíceis com uma dada representação interna?
- P.ex., listar por níveis
- Ou encontrar antepassados de um dado nó

Lista de listas – 1º filho e irmãos

[Weiss]

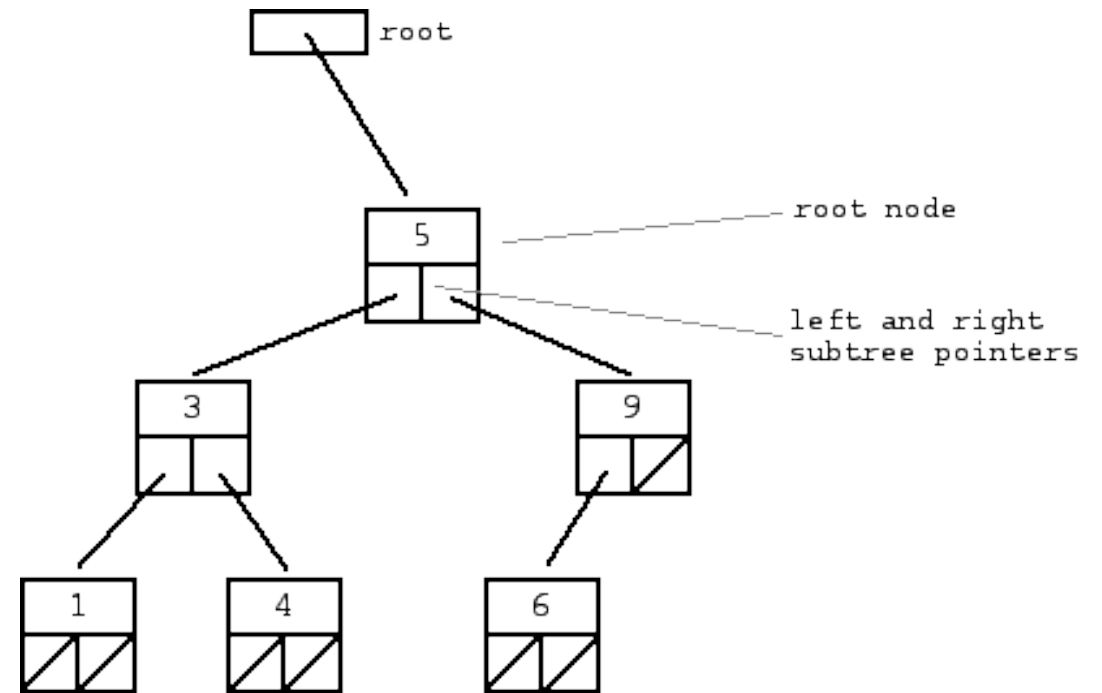


```
struct TreeNode
{
    Object    element;
    TreeNode *firstChild;
    TreeNode *nextSibling;
};
```

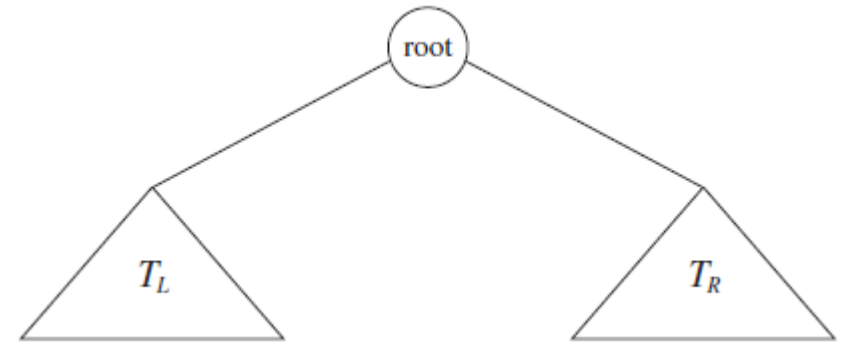


Nó com 2 ponteiros

```
struct _TreeNode {  
    ItemType item;  
    struct _TreeNode* left;  
    struct _TreeNode* right;  
};
```



[stanford.edu]



[Weiss]


Algoritmos Recursivos

– Exemplos simples

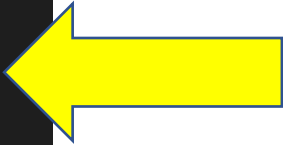
Desenvolver funções recursivas

- Contar o nº de nós de uma árvore
- Determinar a altura de uma árvore
- Destruir uma árvore
- Verificar se duas árvores são iguais
- As operações anteriores dependem da ordem de visita das subárvores ?

Contar o nº de nós de uma árvore



```
int TreeGetNumberOfNodes(const Tree* root) {  
    if (root == NULL) return 0;  
  
    return 1 + TreeGetNumberOfNodes(root->left) +  
           TreeGetNumberOfNodes(root->right);  
}
```

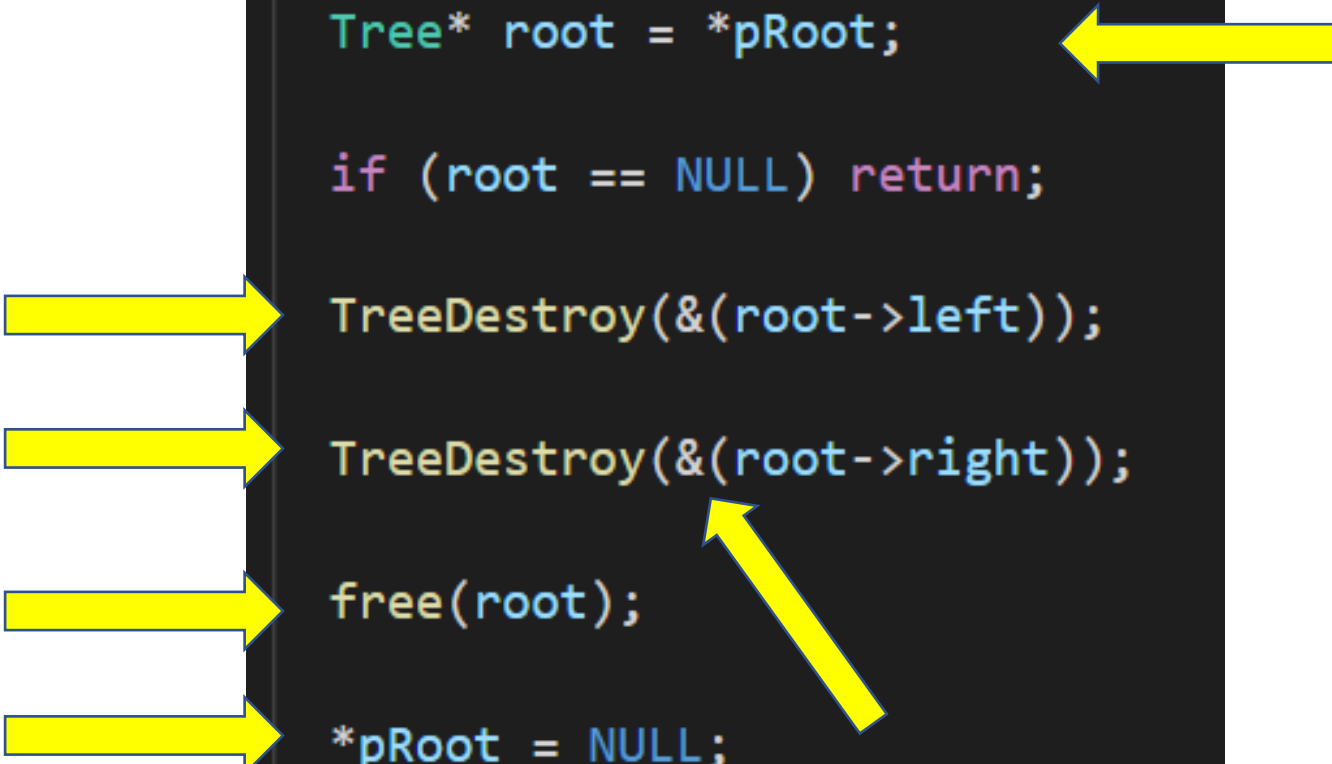


Determinar a altura de uma árvore

```
int TreeGetHeight(const Tree* root) {  
    if (root == NULL) return -1;  
  
    int heightLeftSubTree = TreeGetHeight(root->left);  
    int heightRightSubTree = TreeGetHeight(root->right);  
  
    if (heightLeftSubTree > heightRightSubTree) {  
        return 1 + heightLeftSubTree;  
    }  
  
    return 1 + heightRightSubTree;  
}
```

Destruir uma árvore

```
void TreeDestroy(Tree** pRoot) {  
    Tree* root = *pRoot;  
  
    if (root == NULL) return;  
  
    TreeDestroy(&(root->left));  
    TreeDestroy(&(root->right));  
  
    free(root);  
  
    *pRoot = NULL;  
}
```



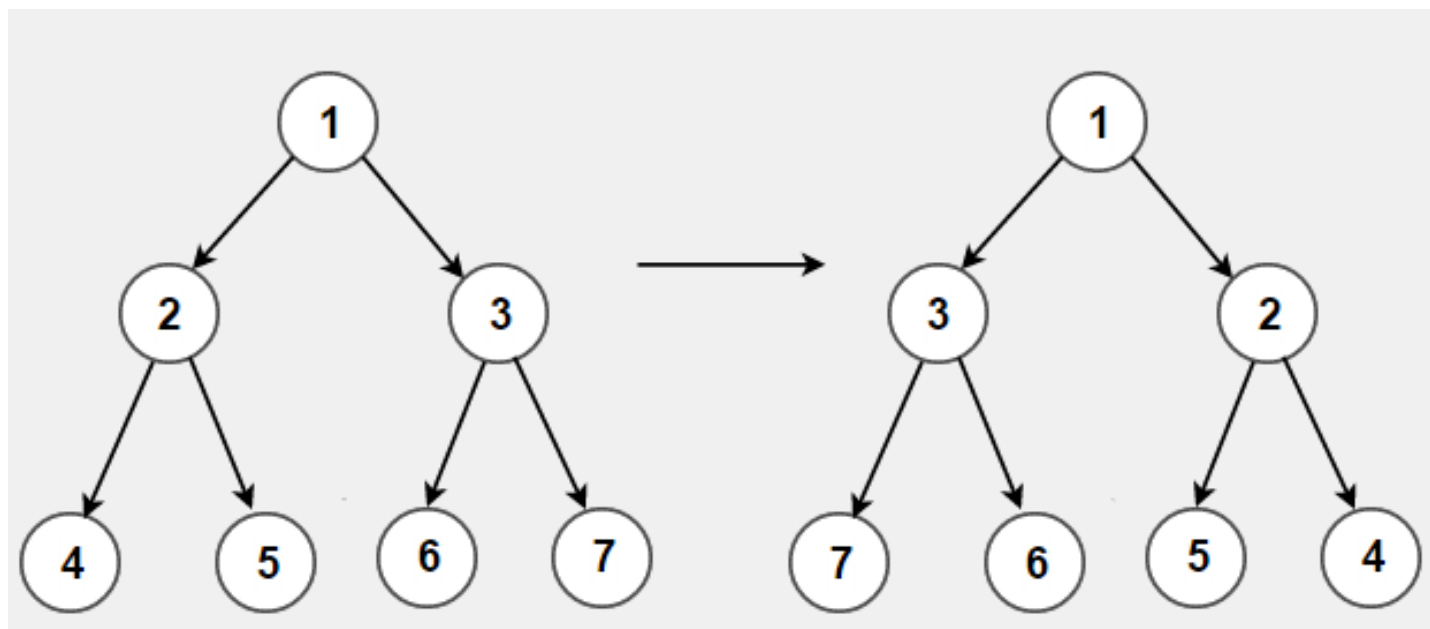
The diagram illustrates the recursive process of destroying a tree. A yellow arrow points from the right to the line `Tree* root = *pRoot;`. Four yellow arrows point from the left to the recursive calls: `TreeDestroy(&(root->left));`, `TreeDestroy(&(root->right));`, `free(root);`, and `*pRoot = NULL;`. A fifth yellow arrow points from the bottom right to the `free(root);` line.

Verificar se duas árvores são iguais

```
int TreeEquals(const Tree* root1, const Tree* root2) {  
    if (root1 == NULL && root2 == NULL) {  
        return 1;  
    }  
    if (root1 == NULL || root2 == NULL) {  
        return 0;  
    }  
    if (root1->item != root2->item) {  
        return 0;  
    }  
    return TreeEquals(root1->left, root2->left) &&  
           TreeEquals(root1->right, root2->right);  
}
```

Tarefa : duas árvores são espelhadas ?

- Desenvolver uma função recursiva



[techiedelight.com]

Tarefa : verificar se um item **pertence** à árvore

- Desenvolver uma função recursiva

Tarefas adicionais – Funções recursivas

- Determinar o **valor** do **menor** elemento
- Determinar o **valor** do **maior** elemento
- Devolver um **ponteiro** para o nó contendo o **menor** elemento
- Devolver um **ponteiro** para o nó contendo o **maior** elemento