Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América Facultad de ingeniería electrónica y eléctrica

500 ejercicios resueltos de ecuaciones diferenciales

INFORME ACADÉMICO

Trabajo de investigación para el curso de ecuaciones diferenciales

AUTOR

Alvarado Cánova, André Manuel

https://orcid.org/0000-0001-7373-9920

DOCENTE

FERNANADEZ, Raymundo

Lima, Perú

2024

Índice

Capítulo I

Introducción a las ecuaciones diferenciales

1. **Ejemplo. –**

1. **C. Henry Edwards, David E. Penney; Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera; Editorial Pearson; Cuarta edición; pág. 2. Ejemplo 2:**

Si C es una constante y

$$y(x) = Ce^{x^2} \cdots$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = C\left(2xe^{x^2}\right) = (2x)\left(Ce^{x^2}\right) = 2xy.$$

Así, cada función de $y(x)$, de la forma de la ecuación (1) satisface - y de este modo es una solución de - la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

2. **Ejemplo. –**

2. **Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 336. Ejemplo 1.**

Si C es una constante y

$$y(x) = Ce^{x^2} \cdots$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = C\left(2xe^{x^2}\right) = (2x)\left(Ce^{x^2}\right) = 2xy.$$

Asi, cada función de $y(x)$, de la forma de la ecuación (1) satisface - y de este modo es una solución de - la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

3. **Ejemplo. –**

3. **Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 336. Ejemplo 1.**

Comprobar, que la función $y = \text{sen } x$ es solución de la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

Solución.

Tenemos: $y' = \cos x$, $y'' = -\text{sen } x$.

Y, por consiguiente: $y'' + y = -\text{sen } x + \text{sen } x = 0$.

4. Ejemplo. –

4. **Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 337. Ejemplo 2**

Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas

$$y = C_1(x - C_2)^2$$

Solución

Derivando dos veces la expresión (3), tendremos:

$$y' = C_1(x - C_2) \text{ e } y'' = 2C_1 \text{ ....}$$

Excluyendo de las ecuaciones (3) y (4) los parámetros C_1 y C_2, hallamos la ecuación diferencial que buscábamos: $2yy'' = y'^2$

5. Ejemplo. –

5. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 3. Prob. 1.3.**

Determine si $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ es una solución de $y'' + 2y' + y = 0$.

Solución

Derivando $y(x)$, se sigue que

$$y'(x) = -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$$
$$y'' = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + (2e^{-x} + xe^{-x}) = 0$$

Por lo tanto, $y(x)$ es una solución.

6. Ejemplo. –

6. **C. Henry Edwards, David E. Penney; Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera; Editorial Pearson; Cuarta edición; pág. 5. Ejemplo 7**

Si C es una constante y $y(x) = 1/(C - x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(C - x)^2} = y^2$$

Si $x \neq C$. Entonces:

$$y(x) = \frac{1}{C - x} \ldots.(8)$$

Define una solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ldots.$$

En cualquier intervalo de números reales que no contenga el punto $x = C$. En realidad, la ecuación (8) define una familia de soluciones de un parámetro $\frac{dy}{dx} = y^2$, una para cada valor de la constante arbitraria o "parámetro" C. Con $C = 1$ obtenemos la solución particular

7. Ejemplo. –

7. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 337. Ejemplo 3

Hallar la curva de la familia

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Que tiene $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$

Solución

Tenemos:

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}.$$

Poniendo $x = 0$, en las formulas (6) y (7), tenemos:

$$1 = C_1 + C_2, -2 = C_1 + C_2$$

De donde:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 1$$

Y, por consiguiente:

$$y = e^{-2x}$$

8. Ejemplo. –

8. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 2707

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' + y = 0,\ y = 3\text{sen } x - 4\cos\ x \ldots$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1): $y' = 3\cos\ x + 4\text{sen } x$

Hallando la 2 da derivada de (1): $y'' = -3\text{sen } x + 4\cos\ x \ldots (2)$

Luego: (1) +(2)

$$3\text{sen } x - 4\cos\ x - 3\text{sen } x + 4\cos\ x = 0$$

Se cumple:

$$y'' + y = 0$$

9. Ejemplo. –

9. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.08.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0,\ x = C_1\cos\ wt + C_2\text{sen } wt \ldots$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1): $\frac{dx}{dt} = -C_1\text{sen } wt * w + C_2\cos\ wt * w$

Hallando la 2 da derivada de (1): $\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1w^2\cos\ wt - C_2w^2\text{sen } wt$

Luego: $w^2(1) + (2)$

$$w^2C_1\cos\ wt + w^2C_2\text{sen } wt - C_1w^2\cos\ wt - C_2w^2\text{sen } wt = 0$$

Por lo tanto, se cumple: $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$

10. Ejemplo. –

10. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.09.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a) $y = xe^x$,

b) $y = x^2e^x$

Solución:

Para $y = xe^x \ldots (1)$

$$y' = e^x + xe^x \ldots (2)$$
$$y'' = e^x + e^x + xe^x \ldots .$$

Luego: $(3) - 2(2) + (1)$:

$$2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + e^x x = 0$$

Por lo tanto, se verifica: $y'' - 2y' + y = 0$

Para $y = x^2e^x \ldots (1)$

$$y' = 2xe^x + x^2e^x \ldots (2)$$
$$y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \ldots$$

Luego: $(3) - 2(2) + (1)$:

$$2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 4xe^x - 2x^2e^x + x^2e^x \neq 0$$

Por lo tanto, NO se cumple: $y'' - 2y' + y = 0$

11. Ejemplo. –

11. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.10

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' = (\gamma_1 + \gamma_2)y' + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$y = C_1e^{\gamma_1 x} + C_2e^{\gamma_2 x} \ldots (1)$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1):

$$y' = \gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x}$$

Hallando la 2 da derivada de (1):

$$y'' = \gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x}$$

Luego: (3) $-(\gamma_1 + \gamma_2)(2) + \gamma_1\gamma_2(1)$

$$\gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x} - (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x}) + \gamma_1\gamma_2(C_1e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x})$$

$$\gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x} - \gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} - \gamma_1\gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x} - \gamma_1\gamma_2 C_1 e^{\gamma_1 x}$$
$$+\gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x}\gamma_1\gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x} + \gamma_1\gamma_2 C_1 e^{\gamma_1 x} = 0$$

Por lo tanto, se cumple: $y'' = (\gamma_1 + \gamma_2)y' + \gamma_1\gamma_2 = 0$

12. Ejemplo. –

12. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.11

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

$$(x - 2y)y' = 2x - y$$
$$x^2 - xy + y^2 = C^2$$

Solución:

Acomodando (1):

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Derivando (2):

$$\frac{d(x^2 - xy + y^2)}{dx} = \frac{dc^2}{dx}$$

$$2x\frac{dx}{dx} - \frac{d(xy)}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$
$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

La relación queda demostrada ya que se cumple (3) = (4)

13. Ejemplo. –

13. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.12.

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

$$(x-y+1)y' = 1$$
$$y = x + Ce^{y}$$

Solución:

Acomodando (1):

$$y' = \frac{1}{x-y+1}$$

Reemplazando y:

$$y' = \frac{1}{x-x-Ce^{y}+1}$$
$$y' = \frac{1}{1-Ce^{y}} \ldots (3)$$

Derivando (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x+Ce^{y})}{dx}$$
$$y' = 1 + Ce^{y} * y'$$
$$y' - y'Ce^{y} = 1$$
$$y'(1-Ce^{y}) = 1$$
$$y' = \frac{1}{1-Ce^{y}} \ldots (4)$$

La relación queda demostrada ya que se cumple que $(3) = (4)$

14. Ejemplo. –

14. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 4. Prob. 1.4.

¿Es $y(x) = 1$ una solución de $y'' + 2y' + y = x$?

Solución:

A partir de $y(x) = 1$, tenemos que $y'(x) = 0$ y $y''(x) = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \neq x$$

De este modo, $y(x) = 1$ no es solución.

15. Ejemplo. –

15. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; píg. 4. Prob. 1.5

Demuestre que $y = \ln x$ es una solución de $xy'' + y' = 0$ en $l = (0, \infty)$ pero no es una solución en $l = (-\infty, \infty)$.

Solución: En $(0, \infty)$ tenemos $y' = 1/x$ y $y'' = -\frac{1}{x^2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$xy'' + y' = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = 0$$

De este modo, $y = \ln x$ es una solución en $(0, \infty)$. Observe que $y = \ln x$ no podria ser una solución en $(-\infty, \infty)$, pues el logaritmo no está definido para los números negativos y para el cero.

16. Ejemplo. –

16. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 4. Prob. 1.6.**

Demuestre que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución de $y' + 2xy^2 = 0$ en $l = (-1,1)$ pero no en cualquier intervalo más grande que contenga a l.

Solución:

En $(-1,1), y = 1/(x^2 - 1)$ y su derivada $y' = -2x/(x^2 - 1)^2$ son funciones bien definidas. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, tenemos

$$y' + 2xy^2 = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} + 2x\left[\frac{1}{x^2 - 1}\right]^2 = 0$$

De este modo, $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución en $l = (-1,1)$. Note, sin embargo, que $1/(x^2 - 1)$ no está definido en $x = \pm 1$, y por lo tanto no podria ser una solución en ningin intervalo que contenga cualquiera de estos dos puntos.

Capítulo II

Ecuaciones lineales de primer orden

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Una ecuación diferencial de variables separables tiene la forma $f(x)dx + g(y)dy = 0$, donde cada diferencial tiene como coeficiente una función de su propia variable o una constante.

MÉTODO DE SOLUCIÓN: integración directa.

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

Cuando no pueden separarse las variables de una ecuación y no pueden agruparse en términos, en cada uno de los cuales están las mismas variables, habrá que usar otros métodos para encontrar la solución.

17. **Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 1 (pág 39-40).**

Resolver $e^{x+y}y' = x$, con las condiciones iniciales $y = ln\ 2$ cuando $x = 0$

1. Separar las variables usando las propiedades de las funciones involucradas y los artificios algebraicos necesarios:

$$e^x\ e^y \frac{dy}{dx} = x, e^y dy = xe^{-x}dx$$

2. Integrar cada miembro de la ecuación:

$$\int e^y dy = \int xe^{-x}dx$$

$e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + c$, solución general en la forma implícita porque no está despejada la variable dependiente y, pero:

$y = ln|e^{-x}(-x - 1) + c|$, solución general en forma explícita:

$$y = f(x)$$

Aplicar las condiciones iniciales: $y(0) = ln\ 2$ en la solución general , ya sea en su forma explícita o implícita.

En la forma implícita: $e^{ln\ 2} = -0 - 1 + c$

$2 = -1 + c$

$c = 3$

$\therefore\ e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + 3$, solución particular

En la explícita $ln\ 2 = ln\ |1(0 - 1) + c|$; aplicando la exponencial, se tiene:

$2 = -1 + c$

$c = 3$

$\therefore\ y = ln|e^{-x}(-x - 1) + 3|$

18. **Dennis G. Zill. (2009). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Novena edición. Página 46. Ejemplo 1.**

Resuelva $(1 + x)dy - ydx = 0$.

Solución. –

Dividiendo entre $(1 + x)y$, podemos escribir $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1+x)}$, de donde tenemos que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}$$

$$ln\, ln\, |y| \;=ln\, ln\, |1 + x| \; + c_1$$

$$y = e^{lnln\,|1+x|\,+c_1} = e^{lnln\,|1+x|} * e^{c_1}$$

$$= |1 + x|e^{c_1}$$

$$= \pm e^{c_1}(1 + x).$$

Haciendo c igual a $\pm e^{c_1}$ se obtiene $y = c(1 + x)$.

19. **Yunus A. Cengel & William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 59 y 60. Ejemplo 2-10.**

Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando la separación de variables. $y' = 2xy^2, y(2) = 1$.

Solución. –

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre y^2 se obtiene

$$\frac{1}{y^2}y' = 2x$$

O

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx + C$$

La ecuación diferencial ahora está en la forma separada, ya que uno de sus lados contiene solo y y el otro contiene solo x. La solución se obtiene por integración como (figura 2-26).

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

La constante C se determina aplicando la condición inicial $y(2) = 1$, de modo que

$$1 = -\frac{1}{2^2 + C} \rightarrow C = -5$$

Sustituyendo,

$$y = -\frac{1}{x^2 - 5}$$

que es la solución deseada en forma explícita. Observe que al obtener este resultado dividimos ambos lados de la ecuación diferencial original entre y^2, que es cero en $y = 0$. Por tanto, debemos investigar si perdimos (o ganamos) algunas soluciones debido a esta división. Por sustitución directa podemos comprobar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial original, pero no satisface la condición inicial. Es una solución singular, ya que no puede obtenerse a partir de la anterior.

20. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Páginas 46 y 47. Ejemplo 2.**

Resuelva el problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = -3$.

Solución. –

Si reescribe la ecuación la ecuación como $y\,dy = -xdx$, obtiene

$\int ydy = -\int xdx$ y $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1$.

Podemos escribir el resultado de la integración como $x^2 + y^2 = c^2$, sustituyendo a la constante $2c_1$ por c^2. Esta solución de la ecuación diferencial representa una familia de circunferencias concéntricas centradas en el origen.

Ahora cuando $x = 4, y = -3$, se tiene $16 + 9 = 25 = c^2$. Así, el problema con valores iniciales determina la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ de radio 5. Debido a su sencillez podemos despejar de esta solución implícita a una solución explícita que satisfaga la condición inicial.

En el ejemplo 7 de la sección 1.1, vimos esta solución como $y = \emptyset_2(x)$ o $y = -\sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$. Una curva solución es la gráfica de la función derivable. En este caso la curva solución es la semicircunferencia inferior que se muestra en azul oscuro en la figura 2.2.1 que contiene al punto (4, -3).

21. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Páginas 47. Ejemplo 3.**

Resuelva $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$.

Solución. –

Poniendo la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y^2-4} = dx \qquad \text{o} \qquad \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx. \quad (5)$$

La segunda ecuación en la ecuación (5) es el resultado de utilizar fracciones parciales en el lado izquierdo de la primera ecuación. Integrando y utilizando las leyes de los logaritmos se obtiene

$$\frac{1}{4}\,ln\,ln\,|y-2| \,-\frac{1}{4}\,ln\,ln\,|y+2| \,= x + c_1$$

$$ln\,ln\,\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2 \quad \text{o} \qquad \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+c_2}$$

Aquí hemos sustituido $4c_1$por c_2. Por último, después de sustituir $\pm e^{c_2}$ por c y despejando y de la última ecuación, obtenemos una familia uniparamétrica de soluciones

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}. \quad (6)$$

Ahora, si factorizamos el lado derecho de la ecuación diferencial como $\frac{dy}{dx} = (y-2)(y+2)$, sabemos del análisis de puntos críticos de la sección 2.1 que $y = 2$ y $y = -2$ son dos soluciones constantes (de equilibrio). La solución $y = 2$ es un miembro de la familia de soluciones definida por la ecuación por la ecuación (6) correspondiendo al valor c=0. Sin embargo, $y = -2$ es una solución singular; ésta no se puede obtener de la ecuación (6) para cualquier elección del parámetro c. La última solución se perdió al inicio del proceso de solución. El examen de la ecuación (5) indica claramente que debemos excluir a $y = \pm 2$ en estos pasos.

22. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Páginas 47 y 48. Ejemplo 4.

Resuelva $(\mathrm{e}^{2y} - y)\,cos\,cos\,x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{y}\,sin\,sin\,2x\,,\, y(0) = 0$

Solución. –

Dividiendo la ecuación entre $e^{y}\,cos\,cos\,x$ se obtiene

$$\frac{e^{2y}-y}{e^{y}}\,dy = \frac{sen2x}{cos\,cos\,x}\,dx.$$

Antes de integrar, se realizar la división del lado izquierdo y utilizamos la identidad trigonométrica $sin\,sin\,2x \;= 2\,sin\,sin\,x\;\;cos\,cos\,x$ en el lado derecho. Entonces tenemos que

$$integración\;por\;partes\;\rightarrow\quad \int (e^{y} - ye^{-y})\,dy = 2\int sin\,sin\,x\,dx$$

Se obtiene

$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = -2\,cos\,cos\,x\; + c.$$

La condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$ implica que $c = 4$. Por tanto, una solución del problema con valores iniciales es

$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\,cos\,cos\,x\;.$$

23. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Páginas 49. Ejemplo 5.**

Resuelva $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}, y(3) = 5.$

Solución. –

La función $g(x) = e^{-x^2}$ es continua en $(-\infty, \infty)$, pero su antiderivada no es una función elemental. Utilizando a t como una variable muda de integración, podemos escribir

$$\int_3^x \frac{dy}{dt}dt = \int_3^x e^{-t^2}dt$$

$$y(t)]_3^x = \int_3^x e^{-t^2}dt$$

$$y(x) - y(3) = \int_3^x e^{-t^2}dt$$

$$y(x) = y(3) + \int_3^x e^{-t^2}dt.$$

Utilizando la condición inicial $y(3) = 5$, obtenemos la solución

$$y(x) = 5 + \int_3^x e^{-t^2}dt.$$

24. **Yunus A. Cengel & William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 59 y 60. Ejemplo 2-10.**

Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando la separación de variables.

$y' = 2xy^2, y(2) = 1.$

Solución. –

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre y^2 se obtiene

$$\frac{1}{y^2}y' = 2x$$

O

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx + C$$

La ecuación diferencial ahora está en la forma separada, ya que uno de sus lados contiene solo y "y" el otro contiene solo x. La solución se obtiene por integración como (figura 2-26).

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

o

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

La constante C se determina aplicando la condición inicial $y(2) = 1$, de modo que

$$1 = -\frac{1}{2^2 + C} \rightarrow C = -5$$

Sustituyendo,

$$y = -\frac{1}{x^2 - 5}$$

que es la solución deseada en forma explícita. Observe que al obtener este resultado dividimos ambos lados de la ecuación diferencial original entre y^2, que es cero en $y = 0$. Por tanto, debemos investigar si perdimos (o ganamos) algunas soluciones debido a esta división. Por sustitución directa podemos comprobar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial original, pero no satisface la condición inicial. Es una solución singular, ya que no puede obtenerse a partir de la anterior.

25. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 2 (pág 40-41).

Resolver $xyy' = 1 + y^2$, para $y = 3$ cuando $x = 1$, o bien, $y(1) = 3$.

Separar variables:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\frac{y}{1 + y^2}dy = \frac{dx}{x}$$

Integrar $\frac{1}{2}\, ln|1 + y^2| = ln|x| + ln|c|$

OBSERVACIÓN: La constante de integración no pierde su arbitrariedad, su carácter de cualquier número, si está afectada por funciones. Así, $ln|c| = c$ porque el logaritmo natural de una constante también es una constante; del mismo modo se puede usar $e^c, e^2, sen\ c, cosh\ c, etcétera.$

Usando las propiedades de los logaritmos (por eso se introdujo "$ln|c|$":

$$ln|1 + y^2|^{1/2} = ln|cx|$$

Aplicando exponencial:

$$|1 + y^2|^{1/2} = |cx|$$

Elevando al cuadrado:

$$1 + y^2 = cx^2$$

$\therefore\ cx^2 - y^2 = 1$, solución general implícita

26. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 3 (pág 41-42).

Resolver $sen\, x\, cos^2\, y\, dx - cos\, x\, sen\, y\, dy = 0$

Separar variables:

$$\frac{sen\, x}{cos\, x} dx - \frac{sen\, y}{cos^2\, y} dy = 0$$

Integrar término a término:

$$-ln|cos\, x| - \frac{1}{cos\, y} = c$$

$ln|cos\, x| + sec\, y = c$, solución general

En este caso no se dieron condiciones iniciales, así que vamos a comprobar la solución. Derivando implícitamente:

$$-\frac{sen\, x}{cos\, x} dx + sen\, y\, tan\, y\, dy = 0$$

$$-\frac{sen\, x}{cos\, x} dx + \frac{1}{cos\, y} \frac{sen\, y}{cos\, y} dy = 0$$

$$-sen\, xcos^2\, ydx + cos\, xsen\, ydy = 0$$

O bien,

$$sen\, xcos^2\, ydx - cos\, xsen\, ydy = 0$$

27. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 4 (pág 42).

Resolver:

$e^{-x} + y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 6x$ para $y(0) = e$

Separar variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 6x - e^{-x}$$

$$dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) + 6x - e^{-x} dx$$

Integrar $y = sen\, h^{-1} x + 3x^2 + e^{-x} + c$, solución general explícita

Aplicar condiciones iniciales: $c = e + 1$

$\therefore\ y = sen\, h^{-1} x + 3x^2 + e^{-x} + e + 1$, solución particular

28. **Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 1 (pág 21).**

Resolver $\frac{dy}{dx} = f(x)$, en donde $f(x)$ es una función integrable en un intervalo.

SOLUCIÓN

La ecuación se resuelve al integrar de manera directa, es decir

$dy = f(x)dx$ reescribimos

$\int dy = \int f(x)dx$ integramos ambos lados

$y = \int f(x)dx + c = F(x) + c$ agregamos una sola constante de integración

29. **Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 2 (pág 21).**

Resolver $y' = \frac{1}{x^2+1}$

SOLUCIÓN

La ecuación diferencial se puede escribir como

$dy = \frac{1}{x^2+1}dx$ reescribimos

$\int dy = \int \frac{1}{x^2+1}dx$ integramos ambos miembros

$y = tan^{-1}x + c$ agregamos una sola constante de integración

30. **Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 3 (pág 21).**

Resolver $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$ sujeta a $y(0) = \frac{5}{2}$

SOLUCIÓN

Si escribimos la ecuación en la forma $dy = e^{2x}dx$, tenemos

$\int dy = \int e^{2x}dx$ integramos ambos miembros

$y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$ familia de soluciones

Ahora consideramos la condición inicial $y(0) = \frac{5}{2}$ e interpretamos que $y = \frac{5}{2}$ cuando x=0

$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}e^{0} + c$ sustituimos $y = \frac{5}{2}, x = 0$

$c = 2$ valor particular de la constante

$y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2$ solución particular

31. **Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 4 (pág 22).**

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} - y = 0$ sujeta a $y(0) = -2$

SOLUCIÓN 1:

Al reescribir la ecuación $\frac{dy}{dx} - y = 0$ en la forma $\frac{dy}{y} = dx$ y al integrar, tenemos

$\int \frac{dy}{y} = \int dx$ integramos

$\ln y = x + c_1$ agregamos una constante

Resulta evidente que la condición $y(0) = -2$ no puede sustituirse porque la función logaritmo no lo permite. Si reescribimos la solución, tenemos

$y = e^{x+c_1}$ solución sin logaritmos

$y = e^x e^{c_1}$ definir $c = e^{c_1}$

$y = ce^x$ familia de soluciones

Observemos que en esta forma equivalente de la solución sí es posible sustituir la condición $y(0) = -2$, pues

$-2 = ce^0$ sustituimos $y(0) = -2$

$c = -2$ valor particular de la constante

De esta manera, tenemos que la solución particular al problema de condición inicial es

$y = -2e^x$ solución particular

32. Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 5 (pág 24).

Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x+2}$ sujeta a $y(1) = 2$

SOLUCIÓN

Si integramos ambos miembros de la ecuación, tenemos

$\int dy = \int \frac{2x}{x+2} dx$ reescribimos e integramos ambos miembros

$\int dy = \int \frac{2x+4-4}{x+2} dx$ sumamos 4 y restamos 4

$\int dy = 2\int \frac{x+2}{x+2} dx + \int \frac{-4}{x+2} dx$ separamos en dos integrales

$y = 2x - 4\ln(x + 2) + \ln c$ integramos y agregamos constante de la forma $\ln c$

$y - 2x = \ln \frac{c}{(x+2)^4}$ aplicamos propiedades de logaritmos

$e^{y-2x} = \frac{c}{(x+2)^4}$ tomamos exponencial

$(x + 2)^4 e^{y-2x} = c$ familia de soluciones en forma implícita

Ahora se considera la condición inicial $y(1) = 2$, y se interpreta que $y = 2$ cuando $x = 1$:

$c = (1 + 2)^4 e^{2-2(1)} = 81$ evaluamos $y = 2, x = 1$ en la familia de soluciones

$(x+2)^4 e^{y-2x} = 81$ solución particular

33. Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 6 (pág 24-25).

Resolver la ecuación diferencial $(x^2+1)dx - xy^2dy = 0$

SOLUCIÓN

La ecuación diferencial es de variables separables, de esta manera:

$\frac{(x^2+1)}{x}dx = y^2dy$ separamos las variables

$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int y^2dy$ integramos ambos miembros

$\frac{1}{2}x^2 + \ln x + \ln c_1 = \frac{1}{3}y^3$ multiplicamos por 6 y utilizamos logaritmos

$6\ln c_1x + 3x^2 = 2y^3$ tomamos exponencial

$(c_1x)^6e^{3x^2} = e^{2y^3}$ escribimos $c_2 = c_1^6$

$c_2x^6e^{3x^2} = e^{2y^3}$ familia de soluciones

$x^6e^{3x^2-2y^3} = c$ de manera equivalente con $c = \frac{1}{c_2}$

34. Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 7 (pág 25).

Resolver la siguiente ecuación diferencial $xdx - ydy = xy(xdy - ydx)$

SOLUCIÓN

La ecuación es separable, de manera que

$xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx$ desarrollamos

$x(y^2+1)dx = y(x^2+1)dy$ agrupamos

$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{2}\ln c$ tomamos $\frac{1}{2}$ln c como constante de integración

$\ln(x^2+1) = \ln c(y^2+1)$ tomamos exponencial

$x^2+1 = c(y^2+1)$ familia de soluciones

35. Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 8 (pág 25).

Resolver la ecuación diferencial por separación de variables $\tan x \operatorname{sen} y dx + \cos^3 x \cot y dy = 0$

SOLUCIÓN:

Al dividir la ecuación por $\cos^3 x \operatorname{sen} y$, tenemos

$$\frac{\tan x}{\cos^3 x}dx + \frac{\cot y}{\operatorname{sen} y}dy = 0$$

$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x}dx + \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy = 0$ utilizamos $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\cot y = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}$

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x}dx + \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy = 0$ integramos todos los términos

$-\int \frac{du}{u^4} + \int \frac{dw}{w^2} = 0$ donde $u = \cos x$ y $w = sen\, y$

$\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{w} = c_1$ integramos cada término

$\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{sen\, y} = c_1$ sustituimos $u = \cos x$ y $w = sen\, y$

$sec^3 x - 3csc\, y = c$ con $c = 3c_1$

36. Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 9 (pág 26).

Resolver $\frac{dx}{dy} = ye^{x-y} + ye^{-x-y}$, sujeta a $y(0) = 0$

SOLUCIÓN:

Al separar las variables tenemos

$\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = ye^{-y}dy$

$\frac{e^x dx}{e^x(e^x+e^{-x})} = ye^{-y}dy$ multiplicamos y dividimos por e^x

$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int ye^{-y}dy$ simplificamos e integramos

$\int \frac{du}{u^2+1} = \int ye^{-y}dy$ con $u = e^x$

$tan^{-1}e^x + (1 + y)e^{-y} = c$ familia de soluciones

Evaluando la condición inicial $y(0) = 0$, tenemos

$c = tan^{-1}e^0 + (1 + 0)e^{-0} = \frac{\pi}{4} + 1$ simplificamos

$tan^{-1}e^x + (1 + y)e^{-y} = \frac{\pi}{4} + 1$ solución particular

37. Ibarra, J. Matemáticas 5: Ecuaciones diferenciales (2013),McGraw Hill Education. Ejemplo 11 (pág 28).

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y + 2$ sujeta a la condición $y(0) = 1$

CASO 1

SOLUCIÓN:

Al considerar la ecuación separable $\frac{dy}{dx} = y + 2$, tenemos

$\int \frac{dy}{y+2} = \int dx$ separamos e integramos

$ln(y + 2) = x + c_1$ una familia de soluciones

$y = ce^x - 2$ definimos $c = e^{c_1}$

$1 + 2 = ce^0$ evaluamos $y(0) = 1$

$y = 3e^x - 2$ familia de soluciones

38. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 1, pág 59)

Resolver $\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$

Solución

Al comparar con la ecuación lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$, podemos identificar $p(x) = 3$ y $f(x) = x^2$

Luego, el factor integrante de la ecuación dada es $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$; de esta manera,

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$$

$e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3e^{3x}y = x^2e^{3x}$ multiplicamos factor integrante

$d(e^{3x}y) = x^2e^{3x}$ agrupamos

$e^{3x}y = \int x^2e^{3x}dx$ integramos ambos miembros

$e^{3x}y = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + C$ integramos por partes

$y = ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}$ solución general

39. **Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 2, pág 59-60)**

Resolver $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\ln x}{x^2}$

Solución

Identificando que $p(x) = \frac{3}{x}$, tenemos que el factor integrante correspondiente a la ecuación dada es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3 \quad \text{factor integrante}$$

Entonces,

$x^3\frac{dy}{dx} + x^3\left(\frac{3}{x}y\right) = x^3\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ multiplicamos factor integrante

$d(x^3y) = x\ln x$ agrupamos

$x^3y = \int x \ln x\, dx$ integramos ambos miembros

$x^3y = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ integramos por partes

$y = \frac{c}{x^3} + \frac{1}{2x}\ln x - \frac{1}{4x}$ solución general

40. **Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 3, pág 60-61)**

Resolver $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{x^2+4}y = x^2 - 4$ sujeta a $y(0) = 1$

Solución

Si consideramos $p(x) = \frac{2x}{x^2+4}$, tenemos que el factor integrante correspondiente a la ecuación dada es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{x^2+4}dx} = x^2 + 4 \quad \text{factor integrante}$$

Entonces,

$(x^2+4)\frac{dy}{dx} + (x^2+4)\frac{2x}{x^2+4}y = (x^2+4)(x^2-4)$ multiplicamos factor integrante

$d((x^2+4)y) = x^4 - 16$ agrupamos

$(x^2+4)y = \int (x^4-16)\,dx$ integramos ambos miembros

$(x^2+4)y = \frac{1}{5}x^5 - 16x + c$ agregamos la constante de integración

Al evaluar la condición $y(0) = 1$, tenemos $c = 4$, luego:

$$y = \frac{\frac{1}{5}x^5 - 16x + 4}{x^2+4}$$ solución particular

La gráfica puede observarse en la FIGURA 1.5.

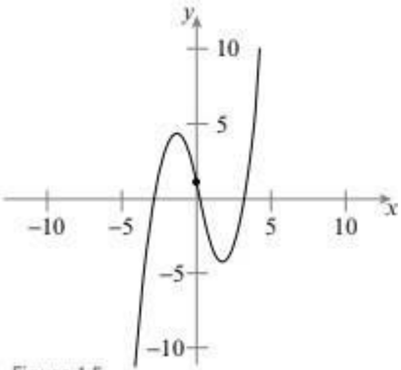


Figura 1.5

41. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 4, pág 61)

Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6y(1-x)+e^{-3y^2}}$ sujeto a $x(0) = -2$

Solución

Al reescribir la ecuación, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 6y(1-x) + e^{-3y^2} = 6y - 6xy + e^{-3y^2}$$

Al simplificar

$$\frac{dy}{dx} + 6yx = 6y + e^{-3y^2}$$

que es una ecuaciòn lineal no homogénea de primer orden en la variable y de la forma $\frac{dx}{dy} + p(y)x = f(y)$.

En este caso es necesario considerar a y como variable independiente y debemos adecuar la expresión que define el factor integrante.

De esta manera, si $p(y) = 6y$, tenemos que el factor integrante correspondiente a la ecuación es:

$\mu(x) = e^{\int 6y\,dy} = e^{3y^2}$ factor integrante

Entonces,

$e^{3y^2}\frac{dy}{dx} - 6yxe^{3y^2} = (6y + e^{-3y^2})e^{3y^2}$ multiplicamos por factor integrante

$d(e^{3y^2}x) = 6yxe^{3y^2} + 1$ agrupamos

$$e^{3y^2}x = \int (6yxe^{3y^2} + 1)dy$$ integramos ambos miembros

$$e^{3y^2}x = e^{3y^2} + y + c$$ agregamos la constante de integración

Al evaluar la condición $x(0) = 2$, tenemos $c = -3$, luego:

$$e^{3y^2}x = e^{3y^2}x + y - 3$$ solución particular

42. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 5, pág. 61-62)

Resolver $\frac{dy}{dx} + y\,tanx = 3\,secx\,tan^2x$ sujeto a $y(0) = 2$

Solución

Si consideramos $p(x) = tanx$, tenemos que el factor integrante correspondiente a la ecuación dada es

$$\mu(x) = e^{\int tanx\,dx} = sec\,x$$

Entonces

$$sec\,x\frac{dy}{dx} + y\,sec\,x\,tan\,x = 3\,sec^2\,x\,tan^2x$$ multiplicamos por factor integrante

$$d(y\,sec\,x) = 3\,sec^2\,x\,tan^2x$$ agrupamos términos

$$y\,sec\,x = 3\int sec^2\,x\,tan^2xdx$$ integramos ambos miembros

$$y\,sec\,x = tan^3\,x + c$$ agregamos la constante de integración

Al evaluar la condición $y(0) = 2$, tenemos $c = 2$, luego:

$$y\,sec\,x = tan^3\,x + 2$$ solución particular

43. García, E. Reich, D. Ecuaciones diferenciales: Una nueva visión (2015). Editorial Patria (problema resuelto 1, pág.82-83)

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$(3\frac{y}{x} - 8)dx + 3dy = 0$$

Solución

1. Escribir la ecuación diferencial en su forma canónica:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{8}{3}$$

En este caso:

$$p(x) = \frac{1}{x}\text{y } q(x) = \frac{8}{3}$$

2. Calcular el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{ln\,x} = x$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{x}\int \frac{8}{3}x\,dx + \frac{C}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{8}{3}\frac{x^2}{2}\right) + \frac{C}{x} = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x}$$

3. Comprobación de la solución:

- Derivar la solución:

$$y' = \frac{4}{3} - \frac{C}{x^2}$$

- Y de la ecuación:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x} \Rightarrow C = \left(y - \frac{4}{3}x\right)x = yx - \frac{4}{3}x^2$$

  sustituir C en y':

$$y' = \frac{4}{3} - \frac{yx - \frac{4}{3}x^2}{x^2} = \frac{4}{3} - \frac{y}{x} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - \frac{y}{x}$$

- Multiplicar por 3:

$$3y' = 8 - 3\frac{y}{x} \Rightarrow 3\frac{dy}{dx} + \left(3\frac{y}{x} - 8\right) = 0$$

$$\left(3\frac{y}{x} - 8\right)dx + 3\,dy = 0$$

44. García, E. Reich, D. Ecuaciones diferenciales: Una nueva visión (2015). Editorial Patria (problema resuelto 2, pág.83-84)

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$xy' - 5y = x^6 sec^2\, x$$

Solución

1. Escribir la ecuación diferencial en su forma canónica:

$$\frac{dy}{dx} - 5\frac{y}{x} = x^5 sec^2\, x$$

En este caso:

$$p(x) = -\frac{5}{x} \text{ y } q(x) = x^5 sec^2\, x$$

2. Calcular el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int \frac{5}{x} dx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5}$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)\,dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

$$y = x^5\int x^{-5}x^5 sec^2\, x\,dx + Cx^5 = x^5\int sec^2 x\,dx + Cx^5$$

$$y = x^5 tan\, x + Cx^5$$

3. Comprobación de la solución:

- Derivar la solución:

$$y' = x^5 sec^2 x\,dx + 5x^4\,tan\,x + 5Cx^4$$

- De $y' = x^5 tan\,x + Cx^5$ despejar a C:

$$C = \frac{y - x^5\,tan x}{x^5} = \frac{y}{x^5} - tan\,x$$

- Sustituir en y':

$$y' = x^5 sec^2 X + 5x^4\,tan\,x + 5\frac{Y}{X^5}(-tanx\; x^4)$$

$$y' = x^5 sec^2 X + 5x^4 \tan x + 5\frac{Y}{X^5} - 5x^4 tanx = x^5 sec^2\, x + 5\frac{y}{x}$$

$$y' - 5\frac{y}{x} = x^5 sec^2\, x$$

45. García, E. Reich, D. Ecuaciones diferenciales: Una nueva visión (2015). Editorial Patria (problema resuelto 3, pág.84-85)

$$x^2y' + 2xy = e^{3x}$$

Solución

1. Escribir la ecuación diferencial en su forma canónica:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

En este caso:

$$p(x) = \frac{2}{x} \text{ y } q(x) = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

2. Calcular el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)\,dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

$$y = \frac{1}{x^2}\int x^2\left(\frac{e^{3x}}{x^2}\right)dx + \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int e^{3x}\,dx + \frac{C}{x^2} = \frac{e^{3x}}{3x^2} + \frac{C}{x^2}$$

3. Comprobación de la solución:

- Derivar la solución:

$$y' = -\frac{2C}{x^3} + \frac{1}{x^2}e^{3x} - \frac{2}{3x^2}e^{3x}$$

- De $y' = \frac{e^{3x}}{3x^2} + \frac{C}{x^2}$ despejar a C:

$$C = x^2y - \frac{e^{3x}}{3}$$

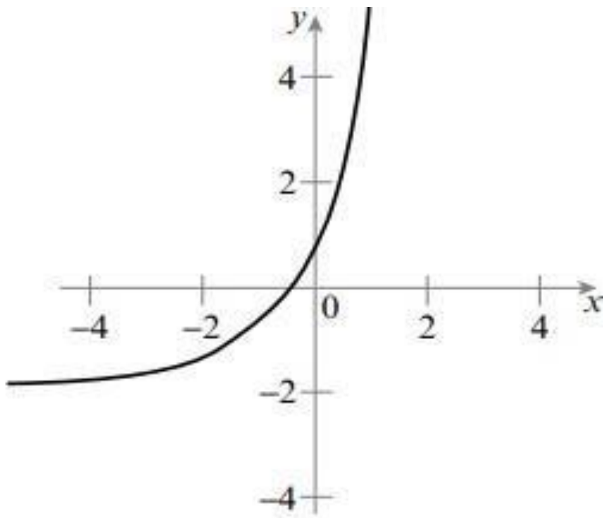
- Sustituir en y':

$$y' = -\frac{2\left(x^2y - \frac{e^{3x}}{3}\right)}{x^3} + \frac{1}{x^2}e^{3x} - \frac{2}{3x^2}e^{3x}$$

$$y' = -\frac{2y}{x} + \frac{2e^{3x}}{3x^3} + \frac{1}{x^2}e^{3x} - \frac{2}{3x^3}e^{3x} = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{x^2}e^{3x}$$

- Multiplicar por x^2, la ecuación anterior:

$$x^2y' = -2xy + e^{3x}x \Rightarrow x^2y' + 2xy = e^{3x}$$



Caso 1 $\frac{dy}{dx} = y+2,\ y(0)=1$

$y = 3e^{x} - 2$

46. **Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977) Quinta edición. Ejemplo resuelto 1 (pág. 341 – 342)**

Resolver la ecuación:

$$y' = -\frac{y}{x} \ldots . (3)$$

Hallar la solución que satisface a la condición inicial:

$$y\,(1) = 2$$

Solución: La ecuación (3) se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

De donde, separando las variables, tendremos:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Y, por consiguiente,

$$ln\, ln\, |y| = -\, ln\, ln\, |x| + ln\, C_1,$$

donde la constante arbitraria $ln\, C_1$ está tomada en forma logarítmica. Después de potenciar, se obtiene la solución general

$$y = \frac{C}{x}, \ldots . (4)$$

Donde $C = \pm C_1.$

Al dividir por y podríamos perder la solución $y = 0$, pero esta última está contenida en la fórmula (4) para $C = 0$.

Utilizando la condición inicial dada, obtenemos que $C = 2$, y, por consiguiente, la solución particular buscada es

$$y = \frac{2}{x}$$

47. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto a (pág.31)

a) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

$$\frac{1}{1 + x^2}dx + \frac{1}{1 + y^2}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{1 + x^2}dx + \int \frac{1}{1 + y^2}dy = \int 0dx$$

$$\Rightarrow arctan\,(x) + arctan\,(y) = C$$

48. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto b (pág.31-32)

b) $x^2y^2 - 4x^2 = (x^2y^2 - 9y^2)\frac{dy}{dx}$

$$x^2(y^2 - 4)dx - y^2(x^2 - 9)dy = 0 \Rightarrow \int \frac{x^2}{x^2 - 9}dx - \int \frac{y^2}{y^2 - 4}dy = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2 - 9 + 9}{x^2 - 9}dx - \int \frac{y^2 - 4 + 4}{y^2 - 4}dy = 0$$

$$\int \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}dx + \int \frac{9}{x^2 - 9}dx - \int \frac{y^2 - 4}{y^2 - 4}dy - \int \frac{4}{y^2 - 4}dy = 0$$

$$x - y + \frac{3}{2}ln\left(\frac{x - 3}{x + 3}\right) - ln\left(\frac{y - 2}{y + 2}\right) = C$$

49. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto c (pág.32)

c) $(e^y + 1)cos\,xdx + e^y(sen\,x + 1)dy = 0$

$$\frac{cos\,x}{sen\,x + 1}dx + \frac{e^y}{e^y + 1}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{cos\,x}{sen\,x + 1}dx + \int \frac{e^y}{e^y + 1}dy = 0$$

$$\int \frac{d(sen\,x + 1)}{(sen\,x + 1)} + \int \frac{d(e^y + 1)}{(e^y + 1)} = 0 \Rightarrow ln(sen\,x + 1) + ln(e^y + 1) = C$$

$$(sen\,x + 1)(e^y + 1) = C$$

50. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto d (pág.32)

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy - x + y}{xy - y^2}$

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{x(x - y) - (x - y)}}{\boldsymbol{y(x - y)}} \Rightarrow \frac{(x - y)(x - 1)}{y(x - y)} = \frac{x - 1}{y}$$

$$\int y\,dy - \int (x-1)dx = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + x = C$$

51. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto e (pág.32-33)**

e) $\frac{dx}{dy} = \frac{ay+b}{cy+d}$

$$\int \frac{ay+b}{cy+d}\,dy - \int dy = 0 \Rightarrow \int \left(\frac{a}{b} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cy+d}\right)dy - \int dx = 0$$

$$\frac{a}{c}y + \frac{bc-ad}{c^2}\ln\left(y+\frac{d}{c}\right) - x = C_1$$

52. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto f (pág.33)**

e) $(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - x^2y = 0$

$$(y^2 + xy^2)dy + (x^2 - x^2y)dx = 0 \Rightarrow y^2(1+x)dy + x^2(1-y)dx = 0$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx + \int \frac{y^2}{1-y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx - \int \frac{(y^2-1)+1}{y-1}dy = 0$$

$$\int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx - \int \frac{(y-1)(y+1)+1}{y-1}dy = 0$$

$$\int \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx + \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{(y-1)(y+1)}{y-1}dy - \int \frac{dy}{y-1} = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) - \frac{y^2}{2} - y - \ln(y-1) = C$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 2\ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right) = C$$

53. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto g (pág.33)**

g) $e^x \operatorname{sen} y\,dx + (1+e^x)\operatorname{sen} y \tan y\,dy = 0 \quad \therefore y = 60, x = 0$

$$\frac{e^x}{(1+e^x)}dx + \tan y\,dy = 0 \Rightarrow \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int \tan y\,dy = 0$$

$$\ln(1+e^x) - \ln(\cos y) = c \Rightarrow \ln\left(\frac{1+e^x}{\cos y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + e^x = \cos y$$

Ecuaciones lineales

54. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Páginas 55. Ejemplo 1.**

Resuelva $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$.

Solución. –

Esta ecuación lineal se puede resolver por separación de variables. En otro caso, puesto que la ecuación ya está en la forma estándar (2), vemos que $P(x) = -3$ y por tanto el factor integrante es $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Multiplicando la ecuación por este factor y reconociendo que

$$\frac{e^{-3}dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0\ es\ la\ misma\ que \frac{d}{dx}[e^{-3xy}] = 0,$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y = c$. Despejando y se obtiene la solución explícita $y = ce^{3x}, -\infty < x < \infty$.

55. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 56. Ejemplo 2.**

Resuelva$\frac{dy}{dx} - 3y = 6$.

Solución. –

La ecuación homogénea asociada a esta ED se resolvió en el ejemplo 1. Nuevamente la ecuación está ya en la forma estándar (2) y el factor integrante aún es $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Ahora al multiplicar la ecuación dada por este factor se obtiene.

$\frac{e^{-3}dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x}$, que es la misma que $\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 6e^{-3x}$.

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y = -2e^{-3x} + c$ o $y = -2 + ce^{3x},\ -\infty < x < \infty$.

56. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 56 y 57. Ejemplo 3.**

Resuelva $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

Solución. –

Dividiendo entre x, obtenemos la forma estándar

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x.\ (10)$$

En esta forma identificamos a $P(x)=-\frac{4}{x}$ y $f(x)=x^5e^x$ y además veamos que P y f son continuas en $(0,\infty)$. Por tanto, el factor integrante es

$$Podemso\ utilizar\ ln\ ln\ x\ \ en\ lugar\ de\ ln\ ln\ |x|\ \ ya\ que\ x>0$$

$$\downarrow$$

$$e^{-4\int\frac{dx}{x}}=e^{-4lnx}\ =e^{lnx^{-4}}=x^{-4}.$$

Aquí hemos utilizado la identidad básica $b^N\ =N,N>0$. Ahora multiplicamos la ecuación (10) por x^{-4} y reescribimos

$$x^{-4}\frac{dy}{dx}-4x^{-5}y=xe^x\ como\frac{d}{dx}[x^{-4}y]=xe^x.$$

De la integración por partes se tiene que la solución general definida en el intervalo $(0,\infty)$ es $x^{-4}y=xe^x-e^x+c$ o $y=x^5e^x-x^4e^x+cx^4$.

57. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 57. Ejemplo 4.**

Determine la solución general de $(x^2-9)\frac{dy}{dx}+xy=0$.

Solución. –

Escribimos la ecuación diferencial en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{x^2-9}y=0\ \ (11)$$

E identificando $P(x)=\frac{x}{x^2-9}$. Aunque P es continua en $(-\infty,-3),(-3,3)\ y\ (3,\infty)$, resolveremos la ecuación en el primer y tercer intervalos. En estos intervalos el factor integrante es

$$e^{\int\frac{xdx}{x^2-9}}=e^{\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2-9}}=e^{\frac{1}{2}ln\,|x^2-9|}\ =\sqrt{x^2-9}.$$

Después multiplicando la forma estándar (11) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-9}y\right]=0.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $\sqrt{x^2-9}y = c$. Por

tanto para cualquiera $x > 3$ o $x < -3$ la solución general de la ecuación es

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2-9}}$$

58. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 58. Ejemplo 5.

Resuelva $\frac{dy}{dx} + y = x, y(0) = 4$.

Solución. –

La ecuación está en forma estándar, y $P(x) = 1$ y $f(x) = x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. El factor integrante es $e^{\int dx} = e^x$, entonces integrando

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = xe^x$$

se tiene que $e^x y = xe^x - e^x + c$. Despejando y de esta última ecuación se obtiene la solución general $y = x - 1 + ce^{-x}$. Pero de la condición general sabemos que $y = 4$ cuando $x = 0$. El sustituir estos valores en la solución general implica que $c = 5$. Por

tanto la solución del problema es

$$y = x - 1 + 5e^{-x}, -\infty < x < \infty. (12)$$

59. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 58 y 59. Ejemplo 6.

Resuelve $\frac{dy}{dx} + y = f(x), y(0) = 0$ donde $f(x) = \{1,\ 0 \leq x \leq 1, 0, \qquad x \leq 1$.

Solución. –

En la fi gura 2.3.3 se muestra la gráfica de la función discontinua f. Resolvemos la ED para $y(x)$ primero en el intervalo $[0,1]$ y después en el intervalo $(1, \infty)$. Para $0 \leq x \leq 1$ se tiene que $\frac{dy}{dx} + y = 1$ o, el equivalente, $\frac{d}{dx}[e^x y] = e^x$.

Integrando esta última ecuación y despejando y se obtiene $y = 1 + c_1 e^{-x}$.Puesto que $y(0) = 0$, debemos tener que $c_1 = -1$ y por tanto $y = 1 - e^{-x}, 0 \leq x \leq 1$. Entonces para $x > 1$ la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Conduce a $y = c_2 e^{-x}$. Por tanto, podemos escribir

$$y = \{1 - e^{-x}, \qquad 0 \leq x \leq 1;\ c_2 e^{-x}, \qquad x > 1.$$

Invocando a la definición de continuidad en un punto, es posible determinar c_2 así la última función es continua en $x = 1$. El requisito de $(x) \; = y(1)$ implica $c_2 e^{-1} = 1 - e^{-1}$ o $c_2 = e - 1$. Como se muestra en la fi gura 2.3.4, la función

$$y = \{1 - e^{-x}, \qquad 0 \le x \le 1, (e-1)e^{-x}, \qquad x < 1 \quad (13)$$

Es continua en $(0, \infty)$.

60. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 59. Ejemplo 7.**

Resuelva el problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2, y(0) = 1$.

Solución. –

Puesto que la ecuación ya se encuentra en la forma normal, el factor integrante es $e^{-x^2}dx$, y así de

$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}y\right] = 2e^{-x^2}$ obtenemos $y| = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + ce^{x^2}$. (15)

Aplicando $y(0) = 1$ en la última expresión obtenemos $c = 1$. Por tanto, la solución del problema es

$$y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2} \; o \; y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}(x)\,\right].$$

En la figura 2.3.5 se muestra en azul oscuro, la gráfica de esta solución en el intervalo $(-\infty, \infty)$ junto con otros miembros de la familia definida en la ecuación (15), obtenida con la ayuda de un sistema algebraico de computación.

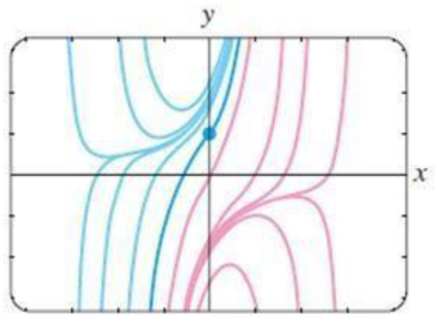


FIGURA 2.3.5 Algunas soluciones de $y' - 2xy = 2$.

Ecuaciones exactas

61. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 65. Ejemplo 1.**

Resuelva $2xy\,dx + (x^2 - 1)dy = 0$.

Solución. –

Con $M(x, y) = 2xy \; yN(x, y) = x^2 - 1$ tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Se tiene que $g'(y) = -1$ y $g(y) = -y$. Por lo tanto $f(x, y) = x^2y - y$, así la solución de la ecuación en la forma implícita es $x^2y - y = c$. La forma explícita de la solución se ve fácilmente como $y = \frac{c}{1-x^2}$ y está definida en cualquier intervalo que no contenga ni a $x = 1$ ni a $x = -1$.

62. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 65 y 66. Ejemplo 2.

Resuelve $(e^{2y} - ycos\ xy\ )dx + (2xe^{2y} - xcos\ xy\ + 2y)dy = 0$.

Solución. –

La ecuación es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{2y} + xysin\ x\ y - cos\ x\ y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por tanto, existe una función f (x, y) para la cual

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\ \ y\ N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ahora, para variar, comenzaremos con la suposición de que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$; es decir

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xZ^{a_1} - x\ cos\ cos\ x\ y + 2y$$

$$f(x, y) = 2x\int e^{2y}dy - x\int cos\ xy\ dy + 2\int y\ dy.$$

Recuerde que la razón por la que x sale del símbolo "∫" es que en la integración respecto a "y" se considera que "x" es una constante ordinaria. Entonces se tiene que

$$f(x, y) = xe^{2y} - sin\ sin\ xy\ + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{jx} = \mathrm{e}^{2y} - 9\ cos\ cos\ x\ y + h'(x) = e^{2y} - y\ cos\ cos\ xy\ , \leftarrow M(x, y)$$

Y así $h'(x) = 0\ o\ h(x) = c$. Por lo tanto, una familia de soluciones es

$$xe^{2y} - sin\ sin\ xy\ + y^2 + c = 0.$$

63. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 66. Ejemplo 3.

Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - coscos\ x\ sinsin\ x}{y(1-x^2)}$, $y(0) = 2$.

Solución. –

Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(cos\ cos\ x\ \ sin\ sin\ x\ - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0,$$

reconocemos que la ecuación es exacta porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2 + s = \frac{\partial N}{\partial x},$$

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1-x^2)$$

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\mathrm{d}x} = -xy^2 + h'(x) = \cos\cos x \ \ \sin\sin x \ - xy^2.$$

La última ecuación implica que $h'(x) = \cos\cos x \ \ \sin\sin x$. Integrando se obtiene

$$h(x) = -\int (\cos\cos x\,)(-\sin\sin x \ \mathrm{d}x) = -\frac{1}{2}x$$

Por tanto $\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}x \ = c_1$ o $y^2(1-x^2) - x \ = c,$ (7)

donde se sustituye $2c_1$ por c. La condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$ exige que $4(1) - (0) \ = c$, y por tanto $c = 3$. Una solución implícita del problema es entonces $y^2(1-x^2) - x \ = 3$. En la figura 2.4.1, la curva solución del PVI es la curva dibujada en azul oscuro, y forma parte de una interesante familia de curvas. Las gráficas de los miembros de la familia uniparamétrica de soluciones dadas en la ecuación (7) se puede obtener de diferentes maneras, dos de las cuales son utilizando un paquete de computación para trazar gráficas de curvas de nivel (como se analizó en la sección 2.2) y usando un programa de graficación para dibujar cuidadosamente la gráfica de las funciones explícitas obtenidas para diferentes valores de c despejando a y de $y^2 = (c+x\,)/(1-x^2)$ para y.

64. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 71. Ejemplo 2-17.

Demuestre que la ecuación diferencial $2xy + x^2y' = 0$ es exacta, y resuélvala.

Solución. –

Comparando la ecuación dada con la ecuación 2-58 y dado que el coeficiente de y' es N, tenemos $M = 2xy$ y $N = x^2$. Después de una prueba observamos que $M = 2xy$ es la derivada parcial de la función x^2y con respecto a x, y que $N = x^2$ es la derivada parcial de la misma función con respecto a y. Por tanto, la ecuación diferencial dada es exacta (figura 2-37) y es posible expresarla como

$$\frac{d(x^2y)}{dx} = 0$$

Este resultado puede verificarse fácilmente al realizar la derivada indicada. Así, la ecuación diferencial compacta es equivalente a la ecuación diferencial original, y su solución se obtiene por integración directa como $x^2y = C$, donde C es la constante arbitraria de integración. Para $x \neq 0$, la solución también puede expresarse como $y = C/x^2$. También podríamos resolver esta ecuación diferencial usando otros métodos, como la separación de variables.

65. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 74. Ejemplo 2-19.

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = -\frac{2e^{2x}\sin y + 2xy}{e^{2x}}, y(0) = \frac{\pi}{2}$$

Solución. –

La ecuación diferencial dada puede reacomodarse como

$$(2e^{2x}sen\ y + 2xy)(e^{2x}cos\ y\ x^2)y' = 0$$

Esta vez tenemos $M = 2e^{2x}sen\ y + 2xy$ y $N = e^{2x}\cos y + x^2$. Esta ecuación diferencial es exacta ya que, por la ecuación 2-61,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2e^{2x}\cos y + 2x = \frac{\partial N(x.y)}{\partial x}$$

La solución de la ecuación diferencial reacomodada es idéntica a la de la ecuación original, salvo en los puntos donde el denominador es cero. La solución de este problema se encuentra así: por la ecuación 2-62, tenemos

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2e^{2x}sen\ y + 2xy$$

Integrando obtenemos

$$S(x,y) = e^{2x}sen\ y + x^2y + g(y)$$

Diferenciando con respecto a y "y" manteniendo x constante, tenemos

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = e^{2x}\cos y + x^2 + \frac{dg(y)}{dy}$$

También,

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N = e^{2x}\cos y + x^2$$

De ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{dg(y)}{dy} = 0$$

y entonces, $g(y) = C_1 = 0$. Sustituyendo en la relación $S\,(x,y)$ tenemos $S\,(x,y) = e^{2x}sen\ y + x^2y$. De modo que la solución de la ecuación diferencial en forma implícita es $e^{2x}sen\ y + 2x^2y = C$, donde C es una constante arbitraria y la condición inicial determina que es

$$e^0 sen\frac{\pi}{2} + 0 = C \rightarrow C = 1$$

Sustituyendo, obtenemos $e^{2x}sen\ y + x^2y = 1$.

66. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 33; Ejemplo. 5.2

Determine si la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$ es exacta.
Solución: Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x,y) = y$ y $N(x,y) = -x$. Aquí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \; y \; \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Que no son iguales, de modo que la ecuación diferencial dada no es exacta.

67. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial Mcfraw Hill; Tercera edición; pág. 34; P.R. 5.3

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x + \text{sen } y)dx + (x\cos \; y - 2y)dy = 0$$

Solución. Buscamos una función $g(x,y)$ que satisfaga (5.4) y (5.5). Sustituyendo $M(x,y)$ en (5.4), obtenemos $\frac{\partial y}{\partial x} = x + \text{sen } y$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, encontramos que

$$\int \frac{\partial y}{\partial x} dx = \int \; (x + \text{sen } y)dx$$

Obien

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\text{sen } y + h(y) \;....$$

Para hallar $h(y)$, derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial y}{\partial x} = x\cos \; y + h'(y)$, y luego sustituimos este resultado junto con $N(x,y) = x\cos \; y - 2y$ en (5.5). Asi, hallamos

$$x\cos \; y + h'(y) = x\cos \; y - 2y \text{ obien } h'(y) = -2y$$

De lo cual se sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo esta $h(y)$ en (1), obtenemos

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\text{sen } y - y^2 + c_1$$

La solución de la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) como

$$\frac{1}{2}x^2 + xsen \; y - y^2 = c_2 \; (c_2 = c - c_1)$$

68. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 34; P.R. 5.5

Resuelva

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

Solución. Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, obtenemos

$$(2 + xe^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$$

Aqui, $M(x,y) = 2 + ye^{xy}$ y $N(x,y) = xe^{xy} - 2y$ y, pues $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{ky}$, la ecuación diferencial es exacta. Sustituyendo $M(x,y)$ en (5.4), encontramos que $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 + ye^{xy}$; integrando luego con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{\partial y}{\partial x} dx = \int [2 + ye^{xy}]dx$$

O bien

$$g(x,y) = 2x + e^{xy} + h(y)$$

Para hallar $h(y)$, primero derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial y}{\partial x} = xe^{xy} + h'(y)$; luego sustituimos este resultado junto con $N(x,y)$ en (5.5) para obtener

$$xe^{xy} + h'(y) = xe^{xy} - 2y \text{ obien } h'(y) = -2y$$

Luego sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo está $h(y)$ en (2), obtenemos

$$g(x,y) = 2x + e^{xy} - y^2 + c_1$$

La solución a la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) asi

$$2x + e^{xy} - y^2 = c_2 \ (c_2 = c - c_1)$$

69. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 37; P.R. 5.14

Determine si $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$.

Solución. En el problema 5.3 se demostró que la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicándola por $-1/x^2$, obtenemos

$$-\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) = 0 \text{ obien } -\frac{y}{x}dx + \frac{1}{x}dy = 0 \ldots..$$

La ecuación (1) tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x,y) = -y/x^2 y\ N(x,y) = 1/x$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Asi que (1) es exacta, lo que implica que $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial original.

70. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 37; P.R. 5.15

Resuelva

$$ydx - xdy = 0$$

Solución. Usando los resultados del problema 5.14 podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

La cual es exacta. La ecuación (1) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones (5.4) a la (5.6). De manera alternativa, de la tabla 5-1 vemos que (1) se puede reescribir como $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$. Por lo tanto, por integración directa, tenemos $\frac{y}{x} = c$, o $y = cx$, como la solución.

71. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 37; P.R. 5.16

Determine si $-1/(xy)$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial definida en el problema 5.14

Solución. Multiplicando la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$ por $-1(xy)$, obtenemos

$$-\frac{1}{xy}(ydx - xdy) = 0 \text{ obien } -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \ldots (1)$$

La ecuación (1) tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x, y) = -\frac{1}{x}yN(x, y) = 1/y$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

De modo que (1) es exacta, lo cual implica que $-1/xy$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial original.

72. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 38; P.R. 5.17

Resuelva el problema 5.15 usando el factor de integración dado en el problema 5.16

Solución. Usando los resultados del problema 5.16, podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{xy} = 0 \ldots \ldots (1)$$

La cual es exacta. La ecuación (1) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6). De manera altemativa, vemos que la tabla 1 5 que (1) se puede reescribir como $d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0$. Luego, por integración directa, $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = c_1$. Tomando la exponencial de ambos lados, encontramos que $\frac{y}{x} = e^{c_1}$, o finalmente $y = cx$ $(c = e^{c_1})$.

73. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 38; P.R. 5.18

Resuelva $(y^2 - y)dx + dy = 0.$

Solución. Esta ecuación diferencial no es exacta y ningín factor de integración es inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que, si los términos se agrupan estratégicamente, la ecuación diferencial se puede volver a escribir como

$$-(ydx - xdy) + y^2dx = 0$$

El grupo de términos entre paréntesis tiene muchos factores de integración (véase tabla 5-1). Tratando cada factor de integración en forma separada, encontramos que el único que hace que toda la ecuación sea exacta es $I(x, y) = 1/y^2$. Utilizando este factor de integración, podemos reescribir (1) como

$$-\frac{ydx - xdy}{y^2} + 1dx = 0$$

Dado que (2) es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6). Alternativamente, vemos la tabla 8-1 que (2) se puede volver a escribir como $-d\left(\frac{x}{y}\right) + 1dx = 0$, o como $d\left(\frac{x}{y}\right) = 1dx$. Integrando, obtenemos la solución

$$\frac{x}{y} = x + c \text{ obien } y = \frac{x}{x + c}$$

74. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.1. Una ED homogénea tiene lo forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Teorema 1: Una ED homogénea se soluciona, si $u = \frac{y}{x}$

$$\mathbb{E}_{j1}) 2yy' \quad = 3y - 4x + 3xy'$$

$$y' \quad = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}, x\mu = v \rightarrow (\mu x)' = y' \rightarrow y' = \mu + \mu' x$$

Solución

Sustituyendo en y^{r} :

$$y' = \mu + \mu' x = \frac{3xv - 4x}{2xu - 3x} + \mu' x = \frac{-2\mu^2 + 6\mu - 4}{2\mu - 3}$$

Entonces: $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2u-3}{-2u^2+6u-4} du \, \omega \ln\, |x| + \ln\, c = -\frac{1}{2} \ln |u^2 \cdot 3v - 2|$

Devolviendo:

$$\frac{1}{c^2x^2} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{3y}{x} + 2$$

$$\therefore y^2 - 3xy + 2x^2 = c$$

75. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.2. $y' - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$

Solución:

Como $f(x,y) = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$, $y = xu \rightarrow y' = u + u'x$

$$y' = u + u'x = \frac{\chi u + \sqrt{(x)^2 - x^2}}{x} \rightarrow u + u'x = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\mu^2 - 1}} = \int \frac{dx}{|\, x} \rightarrow \text{Ln } \left|\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right| = \text{Lm } |x| + \text{Ln } C$$

$$e^{\text{Ln } \left|\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right|} = e^{\text{Lm } |x|} \rightarrow \left|\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right| = xc$$

Devolviendo las bases, se tiene:

$$\left|\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}\right| = xc \rightarrow y = \frac{1 + x^2c}{2c}$$

76. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.3. $x^2(y' + 4) - y(x + 5y - xy')y' = 0$

Solución:

$$\text{Despejamos } y' = f(x,y) = \frac{4x^2 - xy + y^2}{xy - x^2 - 4y^2}, y = ux \rightarrow y' = u + u'x$$

$$y' = u + u'x = \frac{4x^2 - x^2u + \mu^2x^2}{x^2\mu - x^2 - 4x^2\mu^2} \rightarrow \mu + \mu'x = \frac{4 - u - u^2}{-1 + u - 4x^2}$$

$$xu' = \frac{-4(1 - u^3)}{1 - \mu + 4x^2} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-4(1 - u^3)}{1 - u + 4x^2}$$

$$\frac{-1}{4}\int \frac{1 - u - u^2}{(1 + \mu)(1 - \mu + \mu^2)} du - \frac{1}{4}\int \frac{3u^2}{1 + u^3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-\ln |u + 1|}{4} - \frac{dn|\mu^3 + 1|}{4} = \ln |x| + \ln |C|$$

$$1 + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x} + \frac{y^4}{x^4} = \frac{1}{x^4C^4}$$

$$(x + y)(x^3 + y^3) = C$$

77. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap.2.4. $y' = \frac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2}$

Solución:

$f(x,y) = y' = \frac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2}$, es homogenea

$$y = xu \rightarrow y' = u + u'x$$

Sustituyendo: $$f(x,y) = y' = v + v'x = \frac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2} = \frac{x^2(-3v^2-v+4)}{x^2(v^2-2v+5)}$$

Despejando:

$$u'x = \frac{u^2+4v-u^3-4}{u^2+2v-5} \to \int \frac{dx}{x} = \int \frac{u^2+2v-5}{u^3-u^2-4v+4} du$$
$$\ln |x| + \ln |c| = \frac{2}{3}\ln (u-1) + \frac{3}{4}\ln (u-2) - \frac{5}{12}\ln (u+2)$$

Simplificando y devolviendo base:

$$\frac{c}{x} = \sqrt{\frac{\frac{(y-x)^8(y-2x)^9}{x^8}}{\frac{(y+2x)^5}{x^5}}} \to (y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5$$

78. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2.

Cap. 2.5. $y' = \frac{2}{3}y + \frac{2y^3}{3(3x^2-y^2)}$

Solución:

$f(x,y) = y' = \frac{2}{3}y + \frac{2y^3}{3(3x^2-y^2)}$ es homogénea

$$y = ux \to y' = u + u'x$$

Sustituyendo:

$$y' = u + u'x = \frac{2}{3}y + \frac{2y^3}{3(3x^2-y^2)} = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$$
$$u'x = \frac{2u+u^3-3u}{3-u^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int_{u^3-u}^{3-u^2} du \to |x| + \ln |c| = -\int \frac{3}{v}du + \int \frac{1}{u-1}du + \int \frac{1}{v+1}dv$$
$$\text{In } |xc| = -3 \text{ in } |u| + \text{In } |v-1| + \text{In } |v+1|$$

Devolviendo a su base y simplificando:

$$cx = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{y^3}{x^3}}$$

Entonces: $cy^3 = y^2 - x^2$

79. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.6.

$$y^2(y-2xy') + 2x^2y - 2x^3y' = 0$$

Solución:

Despejamos y', tal que:

$$f(x,y) = y' = \frac{y^3 + 2x^2y}{2x^3 + 2x^3y^2} \text{ es homogénea,} \qquad \begin{matrix} y = ux \\ y' = u + u'x \end{matrix}$$

Sustituyendo:

$$f(x,y) = y' = u + u'x = \frac{y^3 + 2x^2y}{2x^3 + 2x^3y^2} = \frac{u^3x^3 + 2x^3u}{2x^3 + 2x^3u^2} = \frac{u^3 + 2u}{2 + 2u^2}$$

$$u'x = \frac{-u^3}{2(u+1)} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-2(u^2+1)}{u^3} du$$

$$\text{In } |x| + \text{In } |c| = -2\text{In } |u| + \frac{1}{u^2}$$

Simplificando y devolviendo el cambio:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{cx} e^{\frac{x^2}{y^2}} \rightarrow y^2 = cxe^{x^2/y^2}$$

80. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap 2.7. $xdy - \sqrt{y^2 - x^2}dx = 0$

SOLUCIONARIO

Despejamos y', tal que:

$$y = ux$$

$$f(x,y) = y' = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x} \text{ es homogénea, } y' = u + u'x$$

Sustituyendo $f(x,y) = y' = u + v'x = \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$

$$u + u'x = \sqrt{u^2 - 1} \rightarrow u'x = \sqrt{u^2 - 1} - u \rightarrow \int \frac{x}{dx} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1} - u}$$

Resolviendo:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u} \frac{\sqrt{u^2-1}+u}{\sqrt{u^2-1}+u} du = -\int \left(\sqrt{u^2-1} + u\right) du = -\int \sqrt{u^2-1} - \int udu$$

Para resolver la integral

resolver la integral $U = \sec\ t$

$I = \int \sqrt{u^2 - 1}du, du = \sec\ t\text{tg}\ tdt$

$$I = \int \text{tg}^2\ t\sec\ tdt = \int (\sec^2\ t - 1)\sec\ tdt = \frac{\sec\ t\text{tg}\ t}{2} + dn(\sec\ t + \text{tg}^2)$$

Devolvemos el cambio:

$$\ln\ |xc| = \frac{-u\sqrt{v^2-1} + \text{dn}\ \left|u+\sqrt{v^2-1}\right| - u^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2}}du\left|\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2}}\right| - \frac{y}{x}}{2} \rightarrow y + y^2 - x^2$$

$$= cx^3 e^{\frac{y}{x^2}(y+y^2+x^2)}$$

81. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIIER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2.

Cap. 2.8. $y' = \frac{-2bxy-ax^2-cy^2}{bx^2+2cxy+fy^2}$

Solución:

La expresión $y' = f(x,y)$ es una función homogérea por ello $y = ux \rightarrow y' = u + u'x$

$$y' = v + u'x = \frac{-2bxy - ax^2 - cy^2}{bx^2 + 2cxy + fy^2} = \frac{-(ax^2 + 2bx^2u + cu^2\ |}{bx^2 + 2cx^2u + fx^2u^2}$$

$$u'x = \frac{-(a + 3bu + 3cv^2 + fv^3)}{b + 2uc + fu^2}$$

$$-\int\ \frac{dx}{x} = \int\ \frac{(b + 2uc + fv^2)du}{a + 3bv + 3cv^2 + fu^3} \rightarrow -\int\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\int\ \frac{3b + 6uc + 3fu^2)du}{a + 3bv + 3cv^2 + fu^3}$$

$$-(\ln\ |x| + \ln\ |c|) = \frac{1}{3}\ln\ |\ a + 3bu + 3cv^2 + \int\ u^3\Big)$$

Devolvemos el cambio:

$$a + 3b\frac{y}{x} + 3c\frac{y^2}{x^2} + f\frac{y^3}{x^3} = \frac{1}{x^3c^3} \rightarrow ax^2 + 3bx^2y + 3cxy^2 + fy^3 = c$$

82. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2. Ejercicio 152.

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + fy^2) = 0$

Solución:

$(ax^2 + 2bxy + cy^2)dx + (bx^2 + 2exy + fy^2)dy = 0$, es homogénea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación

$$(ax^2 + 2bx^2u + cx^2u^2)dx + (bx^2 + 2c^2u + fx^2u^2)(udx + xdu) = 0,$$

Simplificando:

$(a + 2bu + cu^2)dx + (b + 2cu + fu^2)(udx + xdu) = 0$, separando la variable.

$\frac{dx}{x} + \frac{b+2cu+fu^2}{a+3arctan^2+fu^3}du = 0$, integrando

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{b+2cu+fu^2}{a+3\text{arctan}\ ^2+fu^3}du = c$, entonces

In $|x|^+ = \frac{1}{3}\ln|a + 3bu + 3cu^2 + fu^3| = c$, donde para $u = y/x$ se tiene:

$$\therefore fy^3 + 3cxy^2 + 3bx^2y + ax^3 = c$$

Factores Integrales

83. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 43. Ejemplo 2-1.

Resuelva el siguiente problema lineal de valor inicial:

$$y' - 3y = -9x \ldots (I)$$

$$y(2) = 13$$

Solución. -

Como el coeficiente de y' es 1, tenemos $P(x) = -3$. Entonces el factor de integración puede determinarse mediante la ecuación $u(x) = e^{\int P(x)dx}$ como…

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por e^{-3x} se obtiene…

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = -9xe^{-3x}$$

$$[e^{-3x}y]' = -9xe^{x} \ldots (2 - 13)$$

Integrando tenemos…

$$e^{-3x}y = \int (-9xe^{-3x})\,dx = e^{-3x}(3x + 1) + c$$

Aplicando la condición inicial $y(2) = 13$, tenemos…

$$13 = 3 * 2 + 1 + Ce^{3x^2} \rightarrow C = 6e^{-6}$$

Sustituyendo tenemos

$$y = 6e^{3x-6} + 3x + 1 \ldots (2 - 14)$$

84. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 67 y 68. Ejemplo 4.

La ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

es no exacta. Identificando $M = xy, N = 2x^2 + 3y^2 - 20$, encontramos que las derivadas parciales $M_x = x$ y $N_x = 4x$. El primer cociente de la ecuación (13) no nos conduce a nada, ya que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4x}{2x^2 + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$$

depende de x y de y. Sin embargo, la ecuación (14) produce un cociente que depende sólo de y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}$$

El factor integrante es entonces $e^{\int \frac{3dy}{y}} = e^{3 ln ln\, y} = e^{ln ln\, y^3} = y^3$. Después de multiplicar la ED dada por $\mu(y) = y^3$, la ecuación resultante es

$$xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)dy = 0.$$

Usted debería comprobar que la última ecuación es ahora exacta así como mostrar, usando el método que se presentó en esta sección, que una familia de soluciones es

$$\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c.$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas y reducibles

La ecuación diferencial homogénea es de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde M y N tienen la propiedad de que toda $t > 0$, la sustitución de x por tx y la de y por ty hace que M y N sean del mismo grado n.

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y)$$
$$N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN:

usando sustituciones algebraicas apropiadas, las ecuaciones diferenciales homogéneas se convierten en ecuaciones de variables separables. Una de las sustituciones más comunes es:

$$\frac{y}{x} = v \Rightarrow y = vx$$

85. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 71 y 72. Ejemplo 1.**

Resuelva $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$.

Solución. –

Examinando a se muestra que estas funciones coeficientes son homogéneas de grado 2. Si hacemos $y = ux$, entonces $dy = udx + xdu$, de modo que después de sustituir, la ecuación dada se convierte en

$$(x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)[udx + xdu] = 0$$

$$x^2(1 + u)dx + x^3(1 - u)du = 0$$

$$\frac{1 - u}{1 + u}du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0. \ \leftarrow división\ larga$$

Después de integrar la última ecuación se obtiene

$$-u + 2\,ln\,ln\,|1 + u| \ + ln\,ln\,|x| \ = ln\,ln\,|c|$$

$$-\frac{y}{x} + 2\,ln\,ln\,\left|1 + \frac{y}{x}\right| \ + ln\,ln\,|x| \ = ln\,ln\,|c| \ \leftarrow sustituyendo\ de\ nuevo\ u = y/x$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, podemos escribir la solución anterior como

$$ln\,ln\,\left|\frac{(x + y)^2}{cx'}\right| \ = \frac{y}{x} \ \ o \ \ (x + y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}$$

86. **Yunus A. Cengel & William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 69 y 70. Ejemplo 2-16.**

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Solución. –

Por inspección, reconocemos esta ecuación como homogénea porque todos los términos en el numerador y el denominador son de primer grado en el lado derecho (figura 2-36). Por tanto, tomando $v = y/x$ o $y = xv$, esta ecuación puede reacomodarse como

$$(xv)' = \frac{x\left(\frac{y}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{y}{x} + 1\right)} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

$$xv' + v = \frac{v+1}{v^2+1}v'$$

Integrando con respecto a x,

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|v^2+1| - \tan^{-1} v + C$$

O

$$\ln\left|x\sqrt{v^2+1}\right| + \tan^{-1} v = C$$

donde C es la constante arbitraria de integración. Volviendo a sustituir $v = y/x$, obtenemos

$$\ln\left|\sqrt{y^2+x^2}\right| + \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$$

Observe que la solución es implícita porque ninguna de las dos variables puede expresarse explícitamente en términos de la otra.

Esta ecuación diferencial es un buen ejemplo de por qué usted necesita familiarizarse con los métodos de solución que se presentan en este capítulo, a pesar de tener disponibles herramientas modernas de computadora. Varios programas de procesamiento simbólico fueron incapaces de obtener la solución.

87. Bedient, E. Rainville, V. Ecuaciones diferenciales (octava edición) (1998).Pearson Education. (ejercicio 2.5, pág. 26)

Resuelva la ecuación:

$$(x^2 - xy + y^2)\,dx + xy\,dy = 0 \;\ldots(4)$$

Ya que los coeficientes en (4) son homogéneos y de grado dos en x y y, hacemos y = vx.

Entonces (4) se transforma en:

$$(x^2 - x^2v + x^2v^2)\,dx + x^2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

de la cual el factor x^2 será eliminado de inmediato. Hecho eso, tenemos que resolver:

$$(1 - v + v^2)\,dx - v\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

o

$$(1 - v)\,dx - xv\,dv = 0$$

Por lo que separamos las variables para obtener:

$$\frac{dx}{x} + \frac{v\,dv}{v-1} = 0$$

Entonces de:

$$\frac{dx}{x} + \left[1 + \frac{1}{v-1}\right]dv = 0$$

Una familia de soluciones será:

$$ln|x| + v + ln|v - 1| = ln|c|$$

o

$$x(v - 1)e^{v} = c$$

$$x(\frac{y}{x} - 1)e^{\frac{y}{x}} = c$$

$$(y - x)e^{\frac{y}{x}} = c$$

88. Bedient, E. Rainville, V. Ecuaciones diferenciales (octava edición) (1998).Pearson Education. (ejercicio 2.6, pág. 27-28)

Resuelva la ecuación

$$xy\,dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

donde los coeficientes son de nuevo homogéneos y de grado dos. Podríamos usar $y = vx$ pero la simplicidad relativa del término dx en (5) sugiere que hagamos $x = vy$. Entonces $dx = vdy + ydv$, y la ecuación (5) es reemplazada por:

$$vy^2(vdy + ydv) + (v^2y^2 + y^2)dy = 0$$

o

$$v(v\,dy + yd) + (v^2 + 1)dy = 0$$

De aquí que necesitemos resolver:

$$vydv + (2v^2 + 1)dy = 0$$

lo cual nos conduce de inmediato a:

$$ln(2v^2 + 1) + 4ln|y| = ln\,c$$

o

$$y^4(2v^2 + 1) = c$$

Así las soluciones están dadas por:

$$y^4\,(\frac{2x^2}{y^2} + 1) = c$$

esto es:

$$y^2(2x^2 + y^2) = c$$

Ya que el miembro izquierdo de la ecuación (7) no puede ser negativo, podemos, por simetría, cambiar la constante arbitraria a c_1^4, escribiendo:

$$y^2(2x^2 + y^2) = c_1^4$$

Es útil, principalmente para el estudiante, resolver la ecuación (5) usando $y = vx$. Este método conduce directamente a la ecuación:

$$(v^3 + 2v)dx + x(v^2 + 1)dv = 0$$

En las ecuaciones con coeficientes homogéneos, a menudo es por completo irrelevante si se utiliza $y = vx$ o $x = vy$. Sin embargo, algunas veces es más fácil sustituir la variable cuya diferencial tenga el coeficiente más sencillo.

89. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. (pág.34-35)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de coeficientes homogéneos. Ejercicio resuelto a

a) $[xcsc\frac{y}{x} - y]dx + xdy = 0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x, y) = xcsc(\frac{y}{x}) - y \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda xcsc(\frac{\lambda y}{\lambda x}) - \lambda y$$

$$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda[xcsc(\frac{y}{x}) - y]$$

$$N(x, y) = x \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$[xcsc\frac{zx}{x} - zx]dx + x(zdx + xdz) = 0$$

$(cscz - z)dx + zdx + xdz = 0 \Rightarrow csczdx + xdz = 0$

Se resuelve por el método de separación de variable:

$$\frac{cx}{x} + senzdz = 0 \Rightarrow ln(x) - cosz = c$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow ln(x) + cos(\frac{y}{x}) = c$$

90. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto b (pág.35-36)

b) $xy´ln(\frac{y}{x}) = x + yln(\frac{y}{x})$

Se expresa de la forma diferencial como la ecuación (2.1):

$$[x + yln(\frac{y}{x})]dx - xln(\frac{y}{x}) = 0$$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x, y) = x + yln(\frac{y}{x}) \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda yln(\frac{\lambda y}{\lambda x})$$

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda[x + \lambda y ln\,(\frac{y}{x})]$$

$$N(x,y) = -xln(\frac{y}{x}) => N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x ln\,(\frac{\lambda y}{\lambda x})$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda[-xln\,(\frac{y}{x})]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx => dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$[x + zxln(\frac{zx}{x})] - xln(\frac{zx}{x})(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 + zlnz)dx - lnz(zdx + xdz) = 0 => dx - xlnzdz = 0$$

Se resuelve por el método de variable separable:

$$\frac{dx}{x} - lnzdz = 0 => lnx - (zlnz - z) = c$$

$$=> lnx - z(lnz - 1) = c$$

Se regresa a variables originales:

$$z\frac{y}{x} => ln(x) - \frac{y}{x}[ln(\frac{y}{x}) - 1] = c$$

91. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto c (pág.36-37)**

c) $\boldsymbol{ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0}$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$\boldsymbol{M(x,y) = y} => \boldsymbol{M}(\lambda x, \lambda y) = \lambda y$$

$$\boldsymbol{N(x,y) = 2\sqrt{xy}} => \boldsymbol{N}(\lambda x, \lambda y) = 2\sqrt{\lambda^2 xy} - \lambda x = \lambda[2\sqrt{xy} - x]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = zy => dx = zdy + ydz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$y(zdy + ydz) + (2\sqrt{zy^2} - \boldsymbol{zy})\boldsymbol{dy = 0} => \boldsymbol{zdy + ydz + (2\sqrt{z} - z)dy = 0}$$

$$=> \boldsymbol{2\sqrt{z}dy + ydz = 0}$$

Se resuelve por el método de variable separable:

$$2\frac{dy}{y} + \frac{dz}{\sqrt{z}} = 0 => 2\,lny + 2\sqrt{z} = c => lny + \sqrt{z} = \bar{c}$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{x}{y} => lny + \sqrt{\frac{x}{y}} = c$$

92. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto d (pág.37-38)**

d) $\boldsymbol{(6x^2 - 7y^2)dx - 14xydy = 0}$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$\boldsymbol{M(x,y) = 6x^2 - 7y^2} => \boldsymbol{M}(\lambda x, \lambda y) = 6(\lambda x)^2 - 7(\lambda y)^2$$

$$=> \boldsymbol{M}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(6x^2 - 7y^2)$$

$$\boldsymbol{N(x,y) = -14xy} => \boldsymbol{N}(\lambda x, \lambda y) = -14(\lambda x)(\lambda y)$$

$$=> \boldsymbol{N}(\lambda x, \lambda y) = -14\lambda^2 xy$$

$$=> \boldsymbol{N}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(-14xy)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx => dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(6x^2 - 7z^2x^2)dx + 14x^2z(zdx + xdz) = 0 => (6 - 7z^2)dx - 14z(zdx + xdz) = 0$$

$$=> (6 - 21z^2)dx - 14xzdz = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} - \frac{14z}{6 - 21z^2}dz = 0 => \frac{dx}{x} \quad \frac{14z}{21(z^2 - \frac{2}{7})}dz = 0$$

$$=> lnx - \frac{14}{42}ln(z^2 - \frac{2}{7}) = c$$

Se regresa a las variables originales:

$$z = \frac{y}{x} => lnx - \frac{1}{3}ln[(\frac{y}{x})^2 - \frac{2}{7}] = c$$

$$=> 3lnx + ln(\frac{7y^2 - 2x^2}{7x^2}) = c$$

$$=> ln[x^3(\frac{7y^2 - 2x^2}{7x^2})] = c$$

$$=> x(7y^2 - 2x^2) = c$$

93. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto e (pág.38)**

e) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2x^2 + 3\lambda^2xy + \lambda^2y^2$$

$$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 + 3xy + y^2)$$

$$N(x,y) = -x^2 \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda^2x^2 = \lambda^2(-x^2)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(x^2 + 3x^2z + z^2x^2)dx - x^2(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 + 3z + z^2)dx - zdx = 0 \Rightarrow (z^2 + 2z + 1)dx - xdz = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{(z+1)^2} = 0 \Rightarrow \ln x + \frac{1}{z+1} = c$$

Se regresa a las variables originales:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln x + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = c \Rightarrow \ln x + \frac{x}{x+y} = c$$

94. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto f (pág.38-39)**

f) $\left[x - y\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx + x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x - y\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y\arctan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left[x - y\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$N(x,y) = x\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\arctan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$\Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left[x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\left[x - xz\arctan\left(\frac{xz}{x}\right)\right]dx + x\arctan\left(\frac{xz}{x}\right)(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 - z\arctan z)dx + \arctan z(zdx + xdz) = 0 \Rightarrow dx + x\arctan z\,dz = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} + arctan\, zdz = 0 => lnx + zarctanz - \frac{1}{2} ln(z^2 + 1) = c$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} => lnx + \frac{y}{x} arctan(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2} ln(\frac{y^2}{x^2} + 1) = c$$

95. **Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto g(pág.39-40)**

g) $\boldsymbol{(y - \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0; x = \sqrt{3}. y = -1}$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x, y) = (y - \sqrt{x^2 + y^2}) => M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y - \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}$$

$$=> M(\lambda x, \lambda y) = \lambda(y - \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$N(x, y) = -x => N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x$$

$$=> N(\lambda x, \lambda y) = \lambda(-x)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx => dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(zx - \sqrt{x^2 + x^2 z^2})dx - x(zdx + xdz) = 0$$

$$(z - \sqrt{1 + z^2})dx - zdx - xdz = 0 => -\sqrt{1 + z^2}dx - xdz = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = 0 => lnx + ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = c$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} => lnx + ln(\frac{y}{x} + \sqrt{(1 + \frac{y^2}{x^2})}) = c$$

$$=> ln[x(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x})] = c => y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

Mediante las condiciones iniciales se encuentra el valor de c:

$$y(\sqrt{3}) = -1 => -1 + \sqrt{3 + 1} = c$$

96. **Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 1 (pág 49-50)**

Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

Usando $y = vx$ y $dy = vdx + xdv$

$$(x^2 + v^2x^2)dx = vx^2(vdx + xdv)$$

Dividiendo entre x^2

$$(1 + v^2)dx = v(vdx + xdv)$$

Separando variables:

$$(1 + v^2 - v^2)dx = vxdv$$

$$\frac{dx}{x} = vdv$$

Integrando:

$$ln|x| = \frac{v^2}{2} + c$$

Como: $v = \frac{y}{x} \Rightarrow ln|x| = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + c$

Entonces: $ln|x| = \frac{y^2}{2x^2} + c$

97. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 2 (pág 50)

Resolver $(x + y)dx - (x + y - 4)dy = 0$ para $y = 0$ cuando $x = -1$

Usando $v = x + y \Rightarrow y = v - x$ y $dy = dv - dx$

$$vdx + (v - 4)(dv - dx) = 0$$

$$vdx + (v - 4)dv - (v - 4)dx = 0$$

Separando variables:

$$(v - 4)dv = -4dx$$

Integrando:

$$\frac{v^2}{2} - 4v = -4x + c$$

$$v^2 - 8v = -8x + c$$

Como: $v = x + y \Rightarrow (x + y)^2 - 8(x + y) = -8x + c$

$$\therefore (x + y)^2 - 8y = c$$

Aplicando condiciones iniciales:

$$(-1)^2 - 0 = c \Rightarrow c = 1 \qquad \therefore (x + y)^2 - 8y = c$$

98. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 1(pág.43-44)

Resolver la ecuación

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Solución. Escribamos la ecuación en la forma

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Como la ecuación es homogénea, hacemos $u = \frac{y}{x}$ o bien, $y = ux$. Entonces, $y' = xu' + u$. Sustituyendo en la ecuación las expresiones para y e y', obtenemos

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$$

Separamos las variables

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$$

De aquí, integrando hallamos:

$arcsen\, u = ln|x| + lnC_1 (C_1 > 0)$, o bien, $arcsen\, u = lnC_1|x|$. Como $C_1|x| = \pm C_1|x|$, haciendo la notación $\pm C_1 = C_1$ obtenemos $arcsen\, u = ln\, Cx$, donde $|ln\, Cx| \leqq \frac{\pi}{2}$, o bien, $e^{-\frac{\pi}{2}} \leqq Cx \leqq e^{\frac{\pi}{2}}$. Sustituyendo u por $\frac{y}{x}$ tendremos la integral general

$$arcsen\, \frac{y}{x} = ln\, Cx$$

Por consiguiente, la solución general es: $y = xsen\, ln\, Cx$.

Al separar las variables dividíamos ambos miembros de la ecuación por el producto $x\sqrt{1 - u^2}$, por lo cual, se podrían perder las soluciones que convierten en cero sus factores. Pongamos ahora $x = 0$ y $\sqrt{1 - u^2} = 0$. Pero $x = 0$ no es solución de la ecuación, debido a lo cual resulta, $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$, de donde $y = \pm x$. Con una prueba directa nos convencemos de que las funciones $y = -x$ e $y = x$ son soluciones de la ecuación. Estas son soluciones, singulares de la ecuación dada.

99. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 2(pág.44-45)

Resolver la ecuación

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

Solución. Examinemos el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\left.\begin{matrix} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

El determinante de este sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

El sistema tiene solución única: $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Hacemos la sustitución $x = \varepsilon - 1$, $y = n + 3$. Entonces, la ecuación (1) toma la forma

$$(\varepsilon + n)d\varepsilon + (\varepsilon - n)dn = 0$$

Esta es una ecuación homogénea. Haciendo $n = u.g$ obtenemos

$$(\varepsilon + \varepsilon u)d\varepsilon + (\varepsilon - \varepsilon u)(\varepsilon du + ud\varepsilon) = 0$$

de donde

$$(1 + 2u - u^2)d\varepsilon + \varepsilon(1 - u)du = 0$$

Separamos las variables

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1 - u}{1 + 2u - u^2}du = 0$$

Integrando, hallamos

$$ln|\varepsilon| + \frac{1}{2}ln|1 + 2u - u^2| = lnC; \ \varepsilon^2(1 + 2u - u^2) = C$$

Volviendo a las variables x,y, obtenemos:

$$(x + 1)^2\left[1 + 2\frac{y - 3}{x + 1} - \frac{(y - 3)^2}{(x + 1)^3}\right] = C_1$$

O bien,

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C, (C = C_1 + 14)$$

100. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 3(pág.45-46)

Resolver la ecuación

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\left.\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ 2x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

es incompatible. El determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

En este caso no es aplicable el método empleado en el párrafo anterior. Para integrar la ecuación hacemos la sustitución

$$x + y = z, dy = dx + dz$$

La ecuación toma la forma

$$(2 - z)dx - (2z - 1)dz = 0$$

Separando las variables obtenemos

$$dx - \frac{2z - 1}{z - 2} dz = 0$$

De aquí que

$$x - 2z - 3\ ln|z - 2| = C$$

Volviendo a las variables x,y, obtenemos la integral general de la ecuación dada: $x + 2y + 3\ ln|x + y - 2| = C$

101. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 4(pág.46-47)

Resolver la ecuación

$$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$$

Hacemos la sustitución $y = z^{\alpha}, dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$, donde por ahora α es un número arbitrario que se elegirá a continuación. Sustituyendo y y dy en la ecuación por sus expresiones, obtenemos:

$$(x^2z^{2\alpha} - 1)\alpha z^{\alpha-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

o bien

$$(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})\alpha dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

Pongamos ahora $z = ux, dz = dz = udx + xdu$. Entonces, esta ecuación toma la forma $(u^2 - 1)(udx + xdu) + 2\ udx = 0$

De donde

$$u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0$$

Separando las variables en esta ecuación, obtenemos:

$$\frac{dx}{x} - \frac{u^2 - 1}{u^3 + u} du = 0$$

Integrando, hallamos:

$$ln|x| + ln\ (u^2 + 1) - ln\ |u| = ln\ C$$

o bien

$$\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C$$

Sustituyendo u por $\frac{1}{xy}$, obtenemos la integral general de la ecuación considerada: $1 + x^2y^2 = Cy$

La ecuación tiene además la solución trivial $y = 0$, que se obtiene de la integral general escribiéndola en la forma $y = \frac{1+x^2y^2}{C}$ y pasando después a límites para $C \Rightarrow \infty$. Por consiguiente, la función $y = 0$ es una solución particular de la ecuación dada.

102. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 1. pág.36.

Demostrar que la expresión es homogénea y determinar su grado.

$$F(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$$

$$F(tx,ty) = (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 4(ty)^2$$

$$F(tx,ty) = t^2x^2 - 3t^2xy + 4t^2y^2$$

$$F(tx,ty) = t^2(x^2 - 3xy + 4y^2)$$

$$F(tx,ty) = t^2F(x,y)$$

$$\therefore F(x,y)\ es\ homogenea\ y\ de\ grado\ 2.$$

103. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 2. pág.36.

Demostrar que la expresión es homogénea y determinar su grado.

$$F(x,y) = x^4y + 7y^5$$

$$F(tx,ty) = (tx)^4(ty) + 7(ty)^5$$

$$F(tx,ty) = (t^4x^4)(ty) + 7t^5y^5$$

$$F(tx,ty) = t^5x^4y + 7t^5y^5$$

$$F(tx,ty) = t^5(x^4y + 7y^5)$$

$$F(tx,ty) = t^5F(x,y)$$

$$\therefore F(x,y)\ es\ homogenea\ y\ de\ grado\ 5$$

104. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 1. pág.37.

Demostrar que la expresión es homogénea y determinar su grado.

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + xSen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + (tx)Sen\left(\frac{(tx)}{(ty)}\right)$$

$$F(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2} + txSen\left(\frac{tx}{ty}\right)$$

$$F(tx, ty) = \sqrt{t^2}\sqrt{x^2 - y^2} + txSen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F(tx, ty) = t\sqrt{x^2 - y^2} + txSen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F(tx, ty) = t\left(\sqrt{x^2 - y^2} + xSen\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$F(tx, ty) = tF(x, y)$$

$$\therefore F(x, y)\ es\ homogenea\ y\ de\ primer\ grado$$

105. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 2. pág.42-43.

Resuelve

$$x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2} \ldots\ldots (1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \ldots\ldots (2)$$

De donde

$$M(x, y) = y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$N(x, y) = x$$

Son funciones homogéneas de grado 1. Manipulando un poco la ecuación (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

O bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \ldots\ldots (3)$$

Donde la ecuación (3) tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Usando la transformación

$$y = vx \ldots\ldots (4)$$

O bien

$$v = \frac{y}{x} \ldots . (5)$$

Donde de (4)

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (3) se tiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sqrt{1 + v^2}$$

Separando variables

$$-\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}$$

O bien

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = 0 \ldots . (7)$$

Integrando (7)

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}dv = 0$$

$$ln\, ln\, |x| + ln\, ln\, |v + \sqrt{1 + v^2}| = ln\, ln\, |C|$$

Simplificando

$$ln\, ln\, |x(v + \sqrt{1 + v^2})| = ln\, ln\, |C|$$

O equivalente, aplicando exponenciales en ambos miembros de la expresión anterior

$$x(v + \sqrt{1 + v^2}) = C \ldots\ldots (8)$$

Sustituyendo (5) en (8)

$$x\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=C$$

$$y+\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

Por tanto

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$$

Es solución general de la ecuación diferencial.

106. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 3. pág.45-48.

Resuelva

$$y^3dy+3y^2xdx+2x^3dx=0\ \ldots.(1)$$

Solución:

Llevando la ecuación diferencial a la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Se tiene

$$y^3dy+(3y^2x+2x^3)dx=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3y^2x+2x^3}{y^3}\ \ldots\ldots.(2)$$

Donde

$$M(x,y)=(3y^2x+2x^3)$$

$$N(x,y)=y^3$$

Son funciones homogéneas de grado 3. Multiplicando por $\frac{1}{x^3}$ en el numerador y denominador de (2) tenemos

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3\frac{y^2}{x^2}+2}{\frac{y^3}{x^3}}=F\left[\frac{y}{x}\right]\ldots(3)$$

Usando la transformación

$$y=vx\ \ldots.(4)$$

O bien

$$v=\frac{y}{x}\ldots(5)$$

Donde de (4)

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots .(6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (3)

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{3v^2 + 2}{v^3}$$

Separando variables

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{3v^2 + 2}{v^3} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{(3v^2 + 2) - v^4}{v^3}$$

$$-\frac{v^3 dv}{(3v^2 + 2) + v^4} = \frac{dx}{x}$$

O bien

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^3 du}{v^4 + 3v^2 + 2} = 0 \ldots ..(7)$$

Integrando (7)

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v^3 du}{v^4 + 3v^2 + 2} = 0 \ldots \ldots (8)$$

De (8)

$$\int \frac{v^3 du}{v^4 + 3v^2 + 2} = \int \frac{v^3 dv}{(v^2 + 1)(v^2 + 2)} \ldots (9)$$

Donde la descomposición en fracciones parciales del integrando de (9) es

$$\frac{v^3}{(v^2 + 1)(v^2 + 2)} = \frac{Av + B}{v^2 + 1} + \frac{Cv + D}{v^2 + 2}$$

$$= \frac{(v^2 + 2)(Av + B) + (v^2 + 1)(Cv + D)}{(v^2 + 1)(v^2 + 2)}$$

$$= \frac{v^3(A + C) + v^2(B + D) + v(2A + C) + 2B + D}{(v^2 + 1)(v^2 + 2)}$$

De lo anterior se tiene que

$$A + C = 1 \; 2A$$

$$+ C = 0$$

$$B + D = 0$$

$$2B + D = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$A = -1 \qquad C = 2$$

$$B = 0 \qquad D = 0$$

Por tanto (8) se puede escribir en la forma equivalente

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{v}{v^2+1}dv + 2\int \frac{v}{v^2+2}dv = 0 \ldots\ldots(10)$$

Haciendo los cambios

$$u = v^2 + 1 \qquad w = v^2 + 2$$

$$du = 2vdv \qquad dw = 2wdw$$

Entonces (10) se reduce a

$$\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{dw}{w} = 0$$

Y por integración inmediata se tiene que

$$ln\, ln\, |x| - \frac{1}{2}\, ln\, ln\, |v^2 + 1| + ln\, ln\, |v^2 + 2| = ln\, ln\, |C|$$

Simplificando

$$ln\, ln\, |x|^2 - ln\, ln\, |v^2 + 1| + ln\, ln\, |v^2 + 2|^2 = ln\, ln\, |C|$$

$$ln\, ln\, \left|\frac{x^2}{v^2+1}\right| + ln\, ln\, |v^2 + 2|^2 = ln\,|C|$$

$$ln\, ln\, \left|\frac{x^2(v^2+2)^2}{v^2+1}\right| = ln\, ln\, |C|$$

O bien

$$\frac{x^2(v^2+2)^2}{v^2+1} = C$$

Luego de (5) se tiene por tanto que

$$\frac{x^2\left(\frac{y^2}{x^2}+2\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = C$$

Es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Caso 1: Raíces realies y desiguales $(m_1 \neq m_2)$

1. **Ejemplo. –**

107. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 114. Ejemplo 3-14.
Determine la solución general de la ecuación diferencial y– y¿ 2y 0.

Solución. -

Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica se obtiene reemplazando el orden por el grado, esto es, y'' por m^2, y' por m y y por 1 para obtener $m^2 + m - 2 = 0$, que puede factorizarse como $(m - 1)(m + 2) = 0$.

Las raíces de esta ecuación son $m_1 = 1$ y $m_2 = -2$, que son reales y desiguales. Entonces, por la ecuación 3-32, la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Por sustitución directa podemos comprobar que esta solución general, así como las soluciones individuales e^x y e^{-2x} satisfacen la ecuación diferencial.

Caso 2: Raíces reales e iguales $(m_1 = m_2)$

2. **Ejemplo. -**

108. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 117. Ejemplo 3-14.
Determine la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 6y' + 9y = 0$. Solución.
–

Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica es

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

que puede factorizarse como

$$(m + 3)^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $m_1 = m_2 = m = -3$, que son reales e iguales. De modo que una solución de la ecuación dada es e^{-3x}, y la segunda solución linealmente independiente es xe^{-3x}. Entonces, la solución general resulta (ecuación 3-41) y $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$. Por sustitución directa podemos verificar que las funciones e^{-3x} y xe^{-3x}, así como cualquier combinación lineal de éstas, satisfacen la ecuación diferencial dada. Además, cualquier solución de la ecuación diferencial puede obtenerse de la solución general que precede mediante la asignación de valores adecuados a las constantes C_1 y C_2.

3. **Ejemplo. –**

109. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 168. Ejemplo 1.

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \ldots (5)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Por lo tanto, una solución de la ecuación (5) es $y_1(x) = e^{-2x}$. Para encontrar la solución general de (5) se necesita una segunda solución que no sea un múltiplo de y_1. Puede hallarse esta segunda solución por un método ideado por D'Alembert [6] en el siglo XVIII. Recuerde que como $y_1(x)$ es una solución de (1), también lo es $cy_1(x)$ para cualquier constante c. La idea básica es generalizar esta observación al sustituir c por una función $v(x)$ y luego intentar determinar $v(x)$ de modo que el producto $v(x)y_1(x)$ sea una solución de la ecuación (1).

A fin de realizar este procedimiento se sustituye $y = v(x)y_1(x)$ en (1) y se usa la ecuación resultante para hallar $v(x)$. Si parte de

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-2x}$$

se tiene

$$y' = v'(x)e^{-2x} - 2v(x)e^{-2x}$$

y

$$y'' = v''(x)e^{-2x} - 4v'(x)e^{-2x} + 4v(x)e^{-2x}.$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones (6), (7) y (8) en (5) y agrupar términos, se obtiene

$$[v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) + 4v'(x) - 8v(x) + 4v(x)]e^{-2x} = 0$$

que se simplifica a

$$v''(x) = 0$$

Por consiguiente,

$$v'(x) = c_1$$

y

$$v(x) = c_1x + c_2$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por último, al sustituir $v(x)$ de la ecuación (6) por la expresión dada en la (10), se obtiene

$$y = c_1xe^{-2x} + c_2e^{-2x}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (11) corresponde a la solución original $y_1(x) = \exp(-2x)$, pero el primer término surge de una segunda solución a saber, $y_2(x) = x\exp(-2x)$. Es evidente que estas dos soluciones no son proporcionales, pero puede verificarse que son linealmente independientes al calcular su wronskiano:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x} \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$y_1(x) = e^{-2x},\ y_2(x) = xe^{-2x}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (5), y la solución general de esa ecuación queda dada por (11).

4. **Ejemplo. –**

110. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 171. Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' - y' + 0.25y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{3} \dots (21)$$

La ecuación característica es

$$r^2 - r + 0.25 = 0$$

de modo que las raíces son $r_1 = r_2 = 1/2$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2} \dots (22)$$

La primera condición inicial exige que

$$y(0) = c_1 = 2.$$

Para satisfacer la segunda condición inicial en primer lugar se deriva la ecuación (22) y se hace $x = 0$; esto da

$$y'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3}$$

de modo que $c_2 = -2/3$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial es

$$y = 2e^{x/2} - \frac{2}{3}xe^{\frac{x}{2}} \dots (23)$$

Caso 3: Raíces complejas $(m_{1,2} = a \pm i\text{Q})$

5. **Ejemplo. –**

111. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 118 y 119. Ejemplo 3-18.

Determine la solución general de la ecuación diferencial

Escriba aquí la ecuación.

6. **Ejemplo. –**

112. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 163. Ejemplo 1.

Encontrar la solución general de

$$y'' + y' + y = 0$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r + 1 = 0$$

y sus raíces son

$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, $\lambda = -1/2$ y $\mu = \sqrt{3}/2$, de modo que la solución general de la ecuación (18) es

$$y = c_1 e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

7. **Ejemplo. –**

113. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 163. Ejemplo 2.

Encontrar la solución general de

$$y'' + 9y = 0$$

La ecuación característica es $r^2 + 9 = 0$ con las raíces $r = \pm 3i$; por tanto, $\lambda = 0$ y $\mu = 3$. La solución general es

$$y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x$$

observe que si la parte real de las raíces es cero, como en este ejemplo, entonces no hay factor exponencial en la solución.

8. **Ejemplo. –**

114. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 163 y 164. Ejemplo 3.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$$

La ecuación característica es $16r^2 - 8r + 145 = 0$ y sus raíces son $r = 1/4 \pm 3i$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/4}\cos 3x + c_2 e^{x/4}\operatorname{sen} 3x.$$

Para aplicar la primera condición inicial se hace $x = 0$ en la ecuación (23); esto da

$$y(0) = c_1 = -2$$

Para la segunda condición inicial es necesario derivar la (23) y después hacer $x = 0$. Así, se encuentra que

$$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1$$

de lo cual $c_2 = 1/2$. Si se usan estos valores de c_1 y c_2 en la (23), se obtiene

$$y = -2e^{x/4}\cos 3x + \frac{1}{2}e^{x/4}\operatorname{sen} 3x$$

como la solución del problema con valor inicial (22).

Reducción a separación de variables

1. **Ejemplo. –**

115. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 73. Ejemplo 3.

Resuelva $\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7, y(0) = 0.$

Solución. –

Si hacemos $u = -2x + y$, entonces $\frac{du}{dx} = -2 + \frac{dy}{dx}$, por lo que la ecuación diferencial se expresa como

$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7$ o $\frac{du}{dx} = u^2 - 9$

La última ecuación es separable. Utilizando fracciones parciales

$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx$ o $\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right] du = dx$

Y después de integrar se obtiene

$\frac{1}{6} \ln \ln \left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1$ o $\frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c1} = e^{6x}. \leftarrow sustituyendo\ e^{6c} por\ c$

Despejando u de la última ecuación y resustituyendo a u en términos de x y y, se obtiene la solución

$u = \frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}$ o $y = 2x + \frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}$. (6)

Por último, aplicando la condición inicial $y(0) = 0$ a la última ecuación en (6) se obtiene $c =$ -1. La fi gura 2.5.1, obtenida con la ayuda de un programa de graficación, muestra en azul oscuro la gráfica de la solución particular $y = 2x + \frac{3(1-e^{6x})}{1+e^{6x}}$ junto con las gráficas de algunos otros miembros de la familia de soluciones (6).

2. **Ejemplo. –**

116. **Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición, pág. 348; Ejemplo 2**

Resolver la ecuación $y'=4xy+x\sqrt{y}$

Solución:

Esta es una ecuación de Bernoulli (en la que α=12). Poniendo $y=uv$,

Obtenemos: $u'v+v'u=4xuv+x\sqrt{uv}$ o $(u'-4xu)+v'u=x\sqrt{uv}$….(8)

Para determinar la función u exigimos que se cumpla la relación $u'-4xu=0$, De donde $u=x4$.

Poniendo esta expresión en la ecuación (8), tenemos:

$v'x4=x\sqrt{vx4}$, De donde hallamos v: $v=(12\ln|x|+C)2$,

Y, por consiguiente, obtenemos la solución general en la forma $y=x4(12\ln|x|+C)2$.

3. **Ejemplo. –**

117. **A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 49 - 50; Ejemplo 1**

Resolver la ecuación $y'=2xy=2xe-x2\ldots.(5)$

Solución.

Apliquemos el método de variación de la constante. Consideremos la ecuación homogénea

$y'+2xy=0$

Correspondiente a la ecuación no homogénea dada. Esta es una ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma

$y=c(x)e^{-x^2}$….(6)

Donde $c(x)$ es una función incógnita de x.

Poniendo (6) en (5), obtenemos $c'(x)=2x$. De donde $c(x)=x^2+x$. Resumiendo, la solución general de la ecuación no homogénea es $y=(x^2+c)e^{-x^2}$,

Donde c es la constante de integración.

4. **Ejemplo. –**

118. **A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 50-51; Ejemplo 2**

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\operatorname{sen} 2y}$.

Solución. La ecuación dada es lineal, considerando x como función de y: $\frac{dx}{dy}-x\cos y=\operatorname{sen} 2y$….(7)

Buscamos la solución general de la ecuación en la forma $x=u(y).v(y)$. Se tiene $\frac{dx}{dy}=v\frac{du}{dv}+u\frac{dv}{dy}$.

Sustituyendo x y $\frac{dx}{dy}$ en ecuación (7), obtenemos $v\frac{du}{dy}+u\left(\frac{dv}{du}-v\cos y\right)=\operatorname{sen} 2y$. Hallamos $v(y)$ de la condición $\frac{dv}{dy}-v\cos y=0$.

Tomamos cualquier solución particular (no trivial) de esta ecuación, por ejemplo $v(y)=e^{\operatorname{sen} y}$. Entonces, $e^{\operatorname{sen} y}\frac{du}{dy}=\operatorname{sen} 2y$.

De donde $u=\int e^{-\operatorname{sen} v}\operatorname{sen} 2y\,dy=-2e^{-\operatorname{sen} y}(1+\operatorname{sen} y)+c$.

Por consiguiente, la solución general es $x=ce^{\operatorname{sen} y}-2\operatorname{sen} y-2$.

5. **Ejemplo. –**

119. **A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 52; Ejemplo 3**

Resolver la ecuación de Bernoulli: $xy'+y=y^2\ln x$.

Solución. Hagamos $y=u(x)v(x)$. Tendremos $xvy'+u(xv'+v)=u^2v^2\ln x$.

Hallamos la función $v(x)$ como solución particular de la ecuación $xv'+v=0$.

Resuelta, $v(x)=\frac{1}{x}$. Entonces, $u'=\frac{u^2}{x^2}\ln x$. Separando las variables e integrando, obtenemos

$-\frac{1}{u}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-c$, O sea, $u=\frac{x}{1+cx+\ln x}$.

La solución general de la ecuación es: $y=\frac{1}{1+cx+\ln x}$.

6. **Ejemplo. –**

120. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.1**

Encuentre un factor de integración para $y'-3y=6$.

Solución: La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x)=-3$ y $q(x)=6$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int -3dx=-3x$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e-3x$…..(1)

7. **Ejemplo. –**

121. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.2**

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución.

Multiplicando la ecuación por el factor de integración definido por (1) del problema 6.1, obtenemos

$e-3xy'-3e-3xy=6e-3x$ *o bien* $ddx(ye-3x)=6e-3x$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos $\int ddx(ye-3x)dx=\int 6e-3xdx$ $ye-3x=-2e-3x+c$ $y=ce-3x-2$

8. **Ejemplo. –**

122. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.3**

Encuentre un factor de integración para $y'-2xy=x$.

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x)=-2x$ y $q(x)=x$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int(-2x)dx=-x2$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e-x2$……(1)

9. **Ejemplo. –**

123. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.4**

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución.

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración definido por (1) del problema 6.3, obtenemos

$e-x2y'-2xe-x2y=xe-x2$ *o bien* $ddx[ye-x2]=xe-x2$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, encontramos que $\int ddx(ye-x2)dx=\int xe-x2dx$ $ye-x2=-12e-x2+c$ $y=cex2-12$

10. **Ejemplo. –**

124. **Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43-44; P.R. 6.5**

Encuentre un factor de integración para $y'+(4x)y=x4$.

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x)=4/x$ y $q(x)=x4$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int 4xdx=4\ln|x|=\ln x4$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e\ln x4=x4$…..(1)

Ecuaciones diferenciales exactas

125. **Bedient, E. Rainville, V. Ecuaciones diferenciales (octava edición) (1998).Pearson Education. (ejemplo 2.7, pág. 32-33).**

Resuelva la ecuación

$$3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0\ldots(7)$$

Primero como:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2 \qquad y \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2$$

concluimos que la ecuación (7) es exacta. Por lo tanto, su solución es F = c, donde:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x^2y - 6x\ldots(8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^3 + 2y\ldots(9)$$

Tratemos de determinar F a partir de la ecuación (8). Al integrar ambos miembros de (8) con respecto a x, manteniendo constante a y, se obtiene:

$$F = x^3y - 3x^2 + T(y)\ldots(10)$$

Donde la constante arbitraria usual en la integración indefinida ahora es necesariamente una función T (y), hasta ahora desconocida. Para determinar T (y), usamos el hecho de que la función T de la ecuación (10) debe satisfacer la ecuación (9). De aquí que:

$$x^3 + T`(y) = x^3 + 2y$$

$$T`(y) = 2y$$

No se necesita una constante arbitraria en la obtención de T (y), puesto que será introducida una en el lado derecho en la solución F = c. Entonces:

$$T(y) = y^2 \text{ y de } (10)$$

$$F = x^3y - 3x^2 + y^2$$

Por último, un conjunto de soluciones para la ecuación (7) está definido por:

$$x^3y - 3x^2 + y^2 = c$$

126. **Bedient, E. Rainville, V. Ecuaciones diferenciales (octava edición) (1998).Pearson Education. (ejemplo 2.8, pág. 33-34)**

Resuelva la ecuación

$$(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)\,dx - (x^2y + 2x)\,dy = 0\ldots(11)$$

Aquí:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2xy - 2 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

de modo que la ecuación (11) es exacta. Un conjunto de soluciones para (11) es F = c, donde:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3 \ldots (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = -x^2y - 2x \ldots (13)$$

Ya que (13) es más sencilla que (12), y para variar un poco, iniciamos la determinación de F a partir de la ecuación (13). Veamos,

$$F = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + Q(x) \ldots (10)$$

Donde Q (x) será determinado en (12). De la última se obtiene:

$$-xy^2 - 2y + Q'(x) = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$$

y el conjunto de soluciones deseado para (11) está definido de manera implícita por:

$$-\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4 + 3x = \frac{1}{2}c$$

$$x^4 - x^2y^2 - 4xy + 6x = c$$

127. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 4, pág.57-58)

Resolver:

$$(6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy)dy = 0, \text{ si es exacta}$$

1. $M = (6xy - 2y^2)$, $N = (3x^2 - 4xy)$

$$My = (6x - 4y), \qquad Nx = (6x - 4y)$$

Es exacta porque My=Nx

2. Existirá una función f tal que |fx|=M(x,y) y |fy|=N(x,y), por definición se toma cualquiera de las 2 igualdades, por ejemplo:

fx=M(x,y) => fx=$(6xy - 2y^2)$

3. Integrando con respecto a x:

$$\int fx = \int (6xy - 2y^2)dx$$

$$f = 3x^2y - 2xy^2 + f(y)$$

La constante arbitraria de integración será una función de y, puesto que "y" funge como constante de esta integral.

4. Integrando con respecto a x:

$$fy = 3x^2 - 4xy + f´(y)$$

5. Se sabe que $fy = N(x.y)$, por definición entonces:

$$fy = 3x^2 - 4xy$$

Como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$3x^2 - 4xy = 3x^2 - 4xy + f´(y) \Rightarrow f´(y) = 0$$

6. Integrando f(y)=c

La solución es: $f(x,y) = 3x^2 - 2xy^2 + c$ o bien, $3x^2 - 2xy^2 + c = 0$ o bien, $3x^2 - 2xy^2 = c$

La comprobación se reduce a encontrar la diferencial total de la función solución

Se obtiene el mismo resultado, si en vez de tomar la ecuación

$$fx = M(x,y) \ se \ toma \ fy = N(x,y)$$

128. Carmona, I y López E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 5, pág.58-59)

Verificar la solución del problema del ejercicio 4, tomando $fy = N(x,y)$:

1. Se vio que Mx=Ny
2. $fy = 3x^2 - 4xy$
3. Integrando con respecto a y:

$$\int fy = \int (3x^2 - 4xy)dy$$

$$f = 3x^2y - 2xy^2 + f(x)$$

4. Derivando con respecto a x:

$$fx = 6xy - 2y^2 + f´(x)$$

5. $fx = 6xy - 2y^2 + f´(x) = 6xy - 2y^2 \Rightarrow f´(x) = 0.$
6. Integrando: $f(x) = c$

$$3x^2 - 2xy^2 = c \ es \ la \ misma \ solución \ obtenida \ anteriormente.$$

129. Carmona, I y López E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 6, pág.58-59)

$$(2y - 2xy^3 + 4x + 6)dx + (2x - 3x^2y^2 - 1)dy = 0 \ para \ y(-1) = 0$$

1. $My = 2 - 6xy^2 = Nx$, sí es exacta.
2. $fx = M(x,y)$, por definición, entonces:

$$fx = 2y - 2xy^3 + 4x + 6$$

3. Integrando con respecto a x:

$$f = 2xy - x^2y^3 + 2x^2 + 6x + f(y)$$

4. Derivando con respecto a y:

$$fy = 2x - 3x^2y^2 + f´(y)$$

5. Sabemos que fy=N(x,y)

$$2x - 3x^2y^2 - 1 = 2x - 3x^2y^2 + f´(y)$$

$$f´(y) = -1$$

6. Integrando:

$$f(y) = -y + c$$

La solución es:

$$f = 2xy - x^2y^3 + 2x^2 + 6x - y = c; \text{ para } y(-1)=0$$

$$2(-1)^2 + 6(-1) = c$$

$$c = -4$$

$$2xy - x^2y^3 + 2x^2 + 6x - y + 4 = 0 \text{ es una solución particular}$$

130. Carmona, I y López E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 7, pág.59-60)

Resolver $(2x + 6x^2y)dx + (3x^3 - 2xy)dy = 0$

1. $M = 2x + 6x^2y$ $\qquad N = 3x^3 - 2xy$

$$My = 6x^2 \qquad Ny = 9x^2 - 2x$$

$$My \neq Mx \qquad No\ es\ exacta$$

Observando la ecuación, vemos que puede dividirse entre x ≠0 por lo que:

$(2 + 6xy)dx + (3x^2 - 2y)dy = 0$

$$My = 6x = Nx \text{ ya es exacta.}$$

2. $fx = M(x, y)$

$$fx = 2 + 6xy$$

3. $Integrando\ con\ respecto\ a\ x$: $f = 2x + 3x^2y + f(y)$

4. $Derivando\ con\ respecto\ a\ y$: $fy = 3x^2 + f´(y)$

5. $fy = N(x, y)$

$$3x^2 - 2y = 3x^2 + f´(y) => f´(y) = -2y$$

6. Integrando: $f(y) = -y^2 + c$

$$2x + 3x^2y - y^2 = c$$

Solución que satisface a las dos ecuaciones diferenciales.

131. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto a (pág.50-51)

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (lnx - 2)dy = 0$$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x, y) = \frac{y}{x} + 6x \Rightarrow M_y = \frac{1}{x}$$

$$N(x, y) = lnx - 2 \Rightarrow N_x = \frac{1}{x}$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x, y) = \int \left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + g(y) \Rightarrow ylnx + 3x^2 + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$lnx + g'(y) = lnx - 2 \Rightarrow g'(y) = -2$$

$$\Rightarrow g(y) = -2y$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$y\,lnx + 3x^2 - 2y = c$$

132. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto b (pág.51)

$$4x^3 - e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Se debe representar como la ecuación (2.1):

$$(4x^3 - ye^{xy})dx - xe^{xy}dy = 0$$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x, y) = 4x^3 - ye^{xy} \Rightarrow M_y = -e^{xy}$$

$$N(x, y) = -xe^{xy} \Rightarrow N_x = -e^{xy}$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x, y) = \int (4x^3 - ye^{xy})dx + g(y) \Rightarrow x^4 - e^{xy} + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$-xe^{xy} + g'(y) = -xe^{xy} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$x^4 - e^{xy} + c_1 = C \Rightarrow x^4 - e^{xy} = C$$

133. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto c (pág.52)

a) $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x, y) = 2xy^2 + 2y => M_y = 4xy + 2$$

$$N(x, y) = 2x^2y + 2x => N_x = 4xy + 2$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x, y) = \int (2xy^2 + 2y)dx + g(y) => x^2y^2 + 2xy + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$2x^2y + 2x + g'(y) = 2x^2y + 2x => g'(y) = 0 => g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$x^2y^2 + 2xy + c_1 = C => x^2y^2 + 2xy = C$$

134. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto d (pág.53)

b) $(e^x siny - 2y\ sinx)dx + (e^x cosy + 2\ cosx)dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x, y) = e^x siny - 2y\ sinx => M_y = e^x cosy - 2\ sinx$$

$$N(x, y) = e^x cosy + 2\ cosx => N_x = e^x cosy - 2\ sinx$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x, y) = \int (e^x siny - 2y\ sinx)dx + g(y) => e^x siny + 2y\ cosx + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$e^x cosy + 2y\ cosx + g'(y) = e^x cosy + 2\ cosx => g'(y) = 0 => g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$e^x seny + 2y\ cosx + c_1 = C => e^x seny + 2y\ cosx = C$$

135. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto e (pág.54)

c) $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x, y) = 1 + y^2 + xy^2 => M_y = 2y + 2xy$$

$$N(x, y) = x^2y + y + 2xy => N_x = 2y + 2xy$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x,y) = \int (1 + y^2 + xy^2)dx + g(y) \Rightarrow \frac{x^2}{2} + xy^2 + \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$2xy + x^2y + g'(y) = x^2y + y + 2xy \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2}$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$x + xy^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

136. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto f (pág.54-55)

d) $(\frac{y}{x} + 6x)dx + (lnx - 2)dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x,y) = \frac{y}{x} + 6x \Rightarrow M_y = \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = lnx - 2 \Rightarrow N_x = \frac{1}{x}$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x,y) = \int (\frac{y}{x} + 6x)dx + g(y) \Rightarrow y\ ln\,x + 3x^2 + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$ln\,x + g'(y) = ln\,x - 2 \Rightarrow g'(y) = -2 \Rightarrow g(y) = -2y$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$y\ lnx + 3x^2 - 2y = C$$

137. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto g (pág.55-56)

e) $[y + y\cos(xy)]dx + [x + x\cos(xy)]dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x,y) = y + y\cos(xy) \Rightarrow M_y = 1 + \cos(xy) - xy\ sen(xy)$$

$$N(x,y) = x + x\cos(xy) \Rightarrow N_x = 1 + \cos(xy) - xy\ sen(xy)$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x,y) = \int [y + y\cos(xy)]dx + g(y) \Rightarrow xy + sen(xy) + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$x + x\cos(xy) + g'(y) = x + x\cos(xy) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$xy + sen(xy) + c_1 = C \Rightarrow xy + sen(xy) = C$$

138. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto g (pág.55-56)

f) $[sen(xy) + xy\,cos(xy)]dx + x^2\,cos(xy)]dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si se cumple con la ecuación(2.7):

$$M(x,y) = sen(xy) + xy\,cos(xy) \Rightarrow M_y = 2\,xcos(xy) - x^2y\,sen(xy)$$

$$N(x,y) = x^2\,cos(xy) \Rightarrow N_x = 2\,xcos(xy) - x^2y\,sen(xy)$$

Se emplea la ecuación(2.8):

$$f(x,y) = \int [sen(xy) + xy\,cos(xy)]dx + g(y)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y}cos(xy) + x\,sen(xy) + \frac{1}{y}cos(xy) + g(y) = x\,sen(xy) + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$x^2cos(xy) + g'(y) = x^2cos(xy) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$x\,sen(xy) + c_1 = C \Rightarrow x\,sen(xy) = C$$

139. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 1, pág 42)

Calcular el diferencial total de la función $z = 4x^3 + 2y^2$

Solución

Dado que $\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y$, entonces $dz = 12x^2dx + 4y\,dy$

140. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 2, pág 42)

Calcular el diferencial total de la función $z = x^3y^2 - 2y\,senx$

Solución

Dado que $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2y\,cosx$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 2\,senx$, entonces $dz = (3x^2y^2 - 2y\,cosx)dx + (2x^3y - 2\,senx)dy$

141. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 3, pág 45)

Resolver la ecuación $8xy^3dx + 12x^2y^2dy = 0$

Solución

Dado que $\frac{\partial}{\partial y}(8xy^3) = 24xy^2$ y que $\frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^2) = 24xy^2$, concluimos que la ecuación diferencial en cuestión es exacta.

De esta manera, y con base en la demostración del teorema 1 de esta sección tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3$$

$\partial f = 8xy^3 \partial x$ resolvemos para ∂f

$\int \partial f = \int 8xy^3 \partial x$ integramos parcialmente respecto a x

$f = 4x^2y^3 + c_1(y)$ agregamos constante $c_1(y)$

Continuando con el procedimiento, y dado que la integral anterior se realizó respecto a la variable x, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 + c_1(y))$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 + c_1'(y)$ derivamos respecto a y

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 + c_1'(y) = 12x^2y^2$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2$

$c_1'(y) = 0$ resolvemos para $c_1'(y)$

De esta manera, al integrar respecto a y tenemos $c_1(y) = c_0$, por lo que la familia de soluciones buscada es $f = 4x^2y^3 + c_0 = constante$, es decir, $4x^2y^3 = c$

142. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 4, pág 46)

Resolver la ecuación $8xy^3dx + 12x^2y^2dy = 0$

Solución

En este ejemplo utilizaremos el procedimiento descrito en la observación 1. En el ejemplo 3 verificamos que la ecuación diferencial es exacta. Luego:

De esta manera, y con base en la demostración del teorema 1 de esta sección tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2$$

$\partial f = 12x^2y^2 \partial y$ resolvemos para ∂f

$\int \partial f = \int 12x^2y^2 \partial y$ integramos parcialmente respecto a y

$f = 4x^2y^3 + c_1(x)$ agregamos constante $c_1(x)$

Derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable y, y consideramos que $\frac{\partial f}{\partial y} = 18xy^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3 + c_1(x))$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 8xy^3 + c_1'(x)$ derivamos respecto a x

$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3 + c_1'(x) = 8xy^3$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3$

$c_1'(y) = 0$ resolvemos para $c_1'(y)$

De esta manera, al integrar respecto a y tenemos $c_1(y) = c_0$, por lo que la familia de soluciones buscada es $f = 4x^2y^3 + c_0 = constante$, es decir, $4x^2y^3 = c$, que es la misma familia de soluciones obtenida en el ejemplo 3.

143. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 5, pág 46-47)

Resolver $(2x + \frac{y}{x})dx + (4y + \ln x)dy = 0$ sujeta a $y(1) = 2$

Solución

Como $\frac{\partial}{\partial y}(2x + \frac{y}{x}) = \frac{1}{x}$ y además $\frac{\partial}{\partial x}(4y + \ln x) = \frac{1}{x}$, concluimos que la ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta.

De esta manera, y con base en la demostración del teorema 1 de esta sección, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{y}{x}$$

$\partial f = (2x + \frac{y}{x})\partial x$ resolvemos para ∂f

$\int \partial f = \int (2x + \frac{y}{x})\partial x$ integramos parcialmente respecto a x

$f = x^2 + y \ln x + c_1(y)$ agregamos constante $c_1(y)$

Como la integral anterior se realizó con respecto a la variable x, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y \ln x + c_1(y))$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x + c_1'(y)$ derivamos respecto a x

$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x + c_1'(y) = 4y + \ln x$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + \ln x$

$c_1'(y) = 4y$ resolvemos para $c_1'(y)$

$c_1(x) = 2y^2$ integramos respecto a y

Por lo que la familia de soluciones buscada es $x^2 + y \ln x + 2y^2 = c$

Al evaluar la condición y(1)=2, tenemos $c = (1)^2 + (2)\ln 1 + 2(2)^2 = 9$, de esta manera que la solución particular al problema de valor inicial es $x^2 + y \ln x + 2y^2 = 9$

144. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 6, pág 47-48)

Resolver $(2x + \frac{y}{x})dx + (4y + \ln x)dy = 0$ sujeta a $y(1) = 2$

Solución

De igual manera que en el ejemplo 5, iniciamos calculando $\frac{\partial}{\partial y}(2x + \frac{y}{x}) = \frac{1}{x}$ y $\frac{\partial}{\partial x}(4y + \ln x) = \frac{1}{x}$, para concluir que la ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta.

De esta manera, y con base en la demostración del teorema 1 de esta sección, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + \ln x$$

$\partial f = (4y + \ln x)\partial y$ resolvemos para ∂f

$\int \partial f = \int (4y + \ln x)\partial y$ integramos parcialmente respecto a y

$f = 2y^2 + y\ln x + c_1(x)$ agregamos constante $c_1(x)$

Como la integral anterior se realizó con respecto a la variable y, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable x, e igualamos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y^2 + y\ln x + c_1(x))$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + c_1'(x)$ derivamos respecto a x

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x} + c_1'(x) = 2x + \frac{y}{x}$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{y}{x}$

$c_1'(x) = 2x$ resolvemos para $c_1'(x)$

$c_1(x) = x^2$ integramos respecto a x

por lo que la familia de soluciones buscada es $2y^2 + y\ln x + x^2 = c$

Al evaluar la condición y(1)=2, obtenemos la solución particular $x^2 + y\ln x + 2y^2 = 9$

145. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 7, pág 47-48)

Resolver $(3x^2y^2 + \cos y + x)dx + (2x^3y - x\,\mathrm{sen}\,y + y)dy = 0$ sujeta a $y(1) = 0$

Solución

Como $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + \cos y + x) = 6x^2y - \mathrm{sen}\,y$ y $\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - x\,\mathrm{sen}\,y + y) = 6x^2y - \mathrm{sen}\,y$, concluimos que la ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta.

De esta manera, y con base en la demostración del teorema 1 de esta sección, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + \cos y + x$$

$\int \partial f = \int (3x^2y^2 + \cos y + x)\partial x$ integramos parcialmente respecto a x

$f = x^3y^2 + x\cos y + \frac{1}{2}x^2 + c_1(y)$ agregamos constante $c_1(y)$

Como la integral anterior se realizó con respecto a la variable x, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + x\cos y + \frac{1}{2}x^2 + c_1(y))$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - x\,\mathrm{sen}\,y + c_1'(y)$ derivamos respecto a y

$2x^3y - x\,\mathrm{sen}\,y + c_1'(y) = 2x^3y - x\,\mathrm{sen}\,y + y$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - x\mathrm{sen}y + y$

$c_1'(y) = y$ resolvemos para $c_1'(y)$

$c_1(y) = \frac{1}{2}y^2$ integramos respecto a y

Por lo que la familia de soluciones buscada es $x^2y^2 + x\cos y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$

Al evaluar la condición $y(1) = 0$, tenemos $c = \frac{3}{2}$, de manera que la solución particular al problema de valor inicial es $2x^3y^2 + 2x\cos y + x^2 + y^2 = 3$

146. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 8, pág 51-52)

Resolver la ecuación diferencial $(y^2 + 1)dx + xy\,dy = 0$

Solución

En la observación 2 verificamos que la ecuación no es exacta

Al considerar $M(x, y) = y^2 + 1$ y $N(x, y) = xy$, se tiene $M_y(x, y) = 2y$ y $N_x(x, y) = y$, tenemos

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)}dx} = e^{\int \frac{2y-y}{xy}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

Se verifica que el factor integrante solo depende de x, de manera que la aplicación del caso 1 en esta ecuación es correcta; luego

$$(y^2 + 1)dx + xydy = 0$$

$(xy^2 + x)dx + x^2ydy = 0$ multiplicamos por $\mu(x) = x$

donde $\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$, es decir, la ecuación obtenida es exacta

Luego, al considerar $(xy^2 + x)dx + x^2y\,dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + x$$

$\int \partial f = \int (xy^2 + x)\partial x$ integramos parcialmente respecto a x

$f = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + c_1(y)$ agregamos constante $c_1(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + c_1'(y)$ derivamos respecto a y

$x^2y + c_1'(y) = x^2y$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y$

$c_1'(y) = 0$ resolvemos para $c_1'(y)$

$c_1(y) = c_0$ integramos respecto a y

por lo que la familia de soluciones buscada es $\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + c_0 = constante$, de manera equivalente

$x^2y^2 + x^2 = c$

147. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 9, pág 52-53)

Resolver la ecuación diferencial $(y^2 + 1)dx + xy\,dy = 0$

Solución

En la observación 2 y en el ejercicio 8 se ha verificado que la ecuación no es exacta.

Al considerar $M(x,y) = y^2 + 1$ y $N(x,y) = xy$, se tiene $M_y(x,y) = 2y$ y $N_x(x,y) = y$, tenemos

$$\mu(x) = e^{\int \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)}dx} = e^{\int \frac{y-2y}{y^2+1}dy} = e^{\int \frac{-y}{y^2+1}dy} = e^{\ln(y^2+1)^{-1/2}} = \frac{1}{(y^2+1)^{1/2}}$$

Verificamos que el factor integrante solo depende de y, de manera que la aplicación del caso 1 en esta ecuación es correcta; luego

$$(y^2 + 1)dx + xydy = 0$$

$\frac{(y^2+1)}{(y^2+1)^{1/2}}dx + \frac{xy}{(y^2+1)}dy = 0$ multiplicamos por $\mu(x) = \frac{1}{(y^2+1)}$

$(y^2 + 1)^{1/2}dx + \frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}}dy = 0$ simplificamos

donde $\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 1)^{1/2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}}\right) = \frac{y}{(y^2+1)^{1/2}}$, es decir, la ecuación obtenida es exacta.

Luego, al considerar $(y^2 + 1)^{1/2}dx + \frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}}dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y^2 + 1)^{1/2}$$

$\int \partial f = \int (y^2 + 1)^{1/2}\partial x$ integramos parcialmente respecto a x

$f = x(y^2 + 1)^{1/2} + c_1(y)$ agregamos constante $c_1(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}} + c_1'(y)$ derivamos respecto a y

$\frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}} + c_1'(y) = \frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}}$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{(y^2+1)^{1/2}}$

$c_1'(y) = 0$ resolvemos para $c_1'(y)$

$c_1(y) = c_2$ integramos respecto a y

por lo que la familia de soluciones buscada es $x(y^2 + 1)^{1/2} + c_2 = constante$, de manera equivalente $x(y^2 + 1)^{1/2} = c_0$. Un breve desarrollo muestra que la familia de soluciones puede expresarse en la forma $x^2(y^2 + 1) = c$, que es la misma familia obtenida en el ejemplo 8.

148. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 10, pág 53-54)

Resolver la ecuación diferencial $(3xy + 2\cos y)dx + (x^2 - x\,sen\,y)\,dy = 0$

Solución

Dado que $\frac{\partial}{\partial y}(3xy + 2\cos y) = 3x - 2\,sen\,y$ y $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x\,sen\,y) = 2x - seny$, se encuentra que la ecuación no es exacta.

Al considerar $M(x,y) = 3xy + 2\cos y$ y $N(x,y) = x^2 - x\,sen\,y$, se tiene $M_y(x,y) = 3xy + 2\cos y$ y $N_x(x,y) = 2x - sen y$, tenemos

$$\mu(x) = e^{\int \frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{M\ (x,y)} dy} = e^{\int \frac{2x-sen\,y-(3x-2\,sen\,y)}{3xy+2\cos y} dy} = e^{\int \frac{sen\,y-x}{3xy+2\cos y} dy}$$

Podemos observar que la expresión anterior no esta bien definida, dado que el factor integrante no depende únicamente de la variable y, de manera que el caso 2 no puede aplicarse

Sin embargo

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N\ (x,y)} dx} = e^{\int \frac{3x-2\,sen\,y-(2x-\,sen\,y)}{x^2-x\,sen\,y} dx} = e^{\int \frac{x-sen\,y}{x(x-sen\,y)} dx} = x$$

Se verifica que el factor integrante solo depende de x, de manera que la aplicación del caso 1 en esta ecuación es correcta, luego

$$(3xy + 2\cos y)dx + (x^2 - x\,sen y)dy = 0$$

$(3x^2y + 2x\cos y)dx + (x^3 - x^2\,sen y)dy = 0$ multiplicamos por $\mu(x) = x$

donde $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 2x\cos y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - x^2\,sen y) = 3x^2 - 2x\,sen\,y$, es decir, la ecuación obtenida es exacta.

Luego, al considerar $(3x^2y + 2x\cos y)dx + (x^3 - x^2\,sen y)dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2x\cos y$$

$\int \partial f = \int (3x^2y + 2x\cos y)\partial x$ integramos parcialmente respecto a x

$f = x^3y + x^2\cos y + c_1(y)$ agregamos constante $c_1(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x^2 sen y + c_1'(y)$ derivamos respecto a y

$x^3 - x^2 sen y + c_1'(y) = x^3 - x^2 sen y$ igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x^2 sen y$

$c_1'(y) = 0$ resolvemos para $c_1'(y)$

$c_1(y) = c_0$ integramos respecto a y

por lo que la familia de soluciones buscada es $x^3y + x^2\cos y = c$.

149. Demidovich, B. Problemas y ejercicios de análisis matemático (Quinta edición) (1977). Editorial Mir. ejemplo 1. pág. 350

Hallar la integral de la ecuación diferencial

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Solución: Esta es una ecuación diferencial exacta, ya que $\frac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x} = 12xy$ y, por consiguiente, la ecuación tiene la forma $dU = 0$.

Aquí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

De donde,

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Derivando U con respecto a y, hallamos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

(Por la condición); de donde $\varphi'(y) = 4y^3$ y $\varphi(y) = y^4 + C_0$. En definitiva, obtenemos $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_0$, y, por consiguiente, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ es la integral general que se busca en la ecuación dada.

150. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.1 (pág.33)

Resuelva la ecuación diferencial dada

$$2xydx + (1 + x^2)dy = 0$$

Solución: Determinemos una función $g(x,y)$ que satisfaga las ecuaciones (5.4) y (5.5). Sustituyendo $M(x,y) = 2xy$ en (5.4), obtenemos $\frac{\partial y}{\partial x} = 2xy$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, hallamos

$$\int \frac{\partial y}{\partial x} dx = \int 2xy\, dx$$

O bien

$$g(x,y) = x^2y + h(y) \ldots\ldots (1)$$

Obsérvese que cuando integramos con respecto a x, la constante $(con\ respecto\ a\ x)$ de integración puede depender de y. Ahora determinamos $h(y)$. Derivando (1) con respecto a y, obtenemos $\frac{\partial y}{\partial x} = x^2 + h'(y)$. Sustituyendo esta ecuación junto con $N(x,y) = 1 + x^2$ en (5.5), tenemos

$$x^2 + h'(y) = 1 + x^2 \qquad o\ bien \quad h'(y) = 1$$

Integrando esta última ecuación con respecto a y, obtenemos $h(y) = y + c_1$ (c_1 = constante). Sustituyendo esta expresión en (1) se tiene

$$g(x,y) = x^2y + y + c_1$$

La solución de la ecuación diferencial, que está dada implícitamente por (5.6) como $g(x,y) = c$ es

$$x^2 + y + y = c_2 \qquad (c_2 = c - c_1)$$

Resolviendo para y explícitamente, obtenemos la solución así $y = c_2/(x^2 + 1)$

151. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.2 (pág.33)

Determine si la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$ es exacta.

Solución: Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x,y) = y$ y $N(x,y) = -x$. Aquí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Que no son iguales, de modo que la ecuación diferencial dada no es exacta.

152. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.3 (pág.34)

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x + sen\, y)dx + (xcos\, y - 2y)dy = 0$$

Solución. Buscamos una función $g(x,y)$ que satisfaga (5.4) y (5.5). Sustituyendo $M(x,y)$ en (5.4), obtenemos $\frac{\partial y}{\partial x} = x + sen\, y$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, encontramos que

$$\int \frac{\partial y}{\partial x} dx = \int (x + sen\, y)dx$$

O bien

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xsen\, y + h(y) \ldots\ldots (1)$$

Para hallar $h(y)$, derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial y}{\partial x} = xcos\, y + h'(y)$, y luego sustituimos este resultado junto con $N(x,y) = xcos\, y - 2y$ en (5.5). Así, hallamos

$$xcos\, y + h'(y) = xcos\, y - 2y \quad o\ bien \quad h'(y) = -2y$$

De lo cual se sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo esta $h(y)$ en (1), obtenemos

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xsen\, y - y^2 + c_1$$

La solución de la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) como

$$\frac{1}{2}x^2 + xsen\, y - y^2 = c_2 \qquad (c_2 = c - c_1)$$

153. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.5 (pág.34)

Resuelva

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

Solución. Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, obtenemos

$$(2 + xe^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$$

Aquí, $M(x,y) = 2 + ye^{xy}$ y $N(x,y) = xe^{xy} - 2y$ y, pues $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$, la ecuación diferencial es exacta. Sustituyendo $M(x,y)$ en (5.4), encontramos que $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 + ye^{xy}$; integrando luego con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{\partial y}{\partial x} dx = \int [2 + ye^{xy}]dx$$

O bien

$$g(x,y) = 2x + e^{xy} + h(y) \ldots\ldots (1)$$

Para hallar $h(y)$, primero derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial y}{\partial x} = xe^{xy} + h'(y)$; luego sustituimos este resultado junto con $N(x,y)$ en (5.5) para obtener

$$xe^{xy} + h'(y) = xe^{xy} - 2y \qquad o\ bien\ \ h'(y) = -2y$$

Luego sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo está $h(y)$ en (2), obtenemos

$$g(x,y) = 2x + e^{xy} - y^2 + c_1$$

La solución a la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) así

$$2x + e^{xy} - y^2 = c_2 \qquad (c_2 = c - c_1)$$

154. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.14 (pág.37)

Determine si $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$.

Solución. En el problema 5.3 se demostró que la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicándola por $-1/x^2$, obtenemos

$$-\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) = 0 \qquad o\ bien\ \ -\frac{y}{x}dx + \frac{1}{x}dy = 0 \ldots\ldots (1)$$

La ecuación (1) tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x,y) = -y/x^2$ y $N(x,y) = 1/x$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Así que (1) es exacta, lo que implica que $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial original.

155. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.15 (pág.37)

Resuelva

$$ydx - xdy = 0$$

Solución. Usando los resultados del problema 5.14 podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

La cual es exacta. La ecuación (1) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones (5.4) a la (5.6). De manera alternativa, de la tabla 5-1 vemos que (1) se puede reescribir como $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$. Por lo tanto, por integración directa, tenemos $\frac{y}{x} = c$, o $y = cx$, como la solución.

156. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.16 (pág.37)

Determine si $-1/(xy)$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial definida en el problema 5.14

Solución. Multiplicando la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$ por $-1(xy)$, obtenemos

$$-\frac{1}{xy}(ydx - xdy) = 0 \quad o\ bien \quad -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \ldots.(1)$$

La ecuación (1) tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x, y) = -\frac{1}{x}$ y $N(x, y) = 1/y$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

De modo que (1) es exacta, lo cual implica que $-1/xy$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial original.

157. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.17 (pág.38)

Resuelva el problema 5.15 usando el factor de integración dado en el problema 5.16

Solución. Usando los resultados del problema 5.16, podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{xy} = 0 \ldots \ldots (1)$$

La cual es exacta. La ecuación (1) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6). De manera alternativa, vemos que la tabla 1-5 que (1) se puede reescribir como $d\left[ln\ ln\ \left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0$. Luego, por integración directa, $ln\ ln\ \left(\frac{y}{x}\right) = c_1$. Tomando la exponencial de ambos lados, encontramos que $\frac{y}{x} = e^{c_1}$, o finalmente

$$y = cx \ \ (c = e^{c_1})$$

158. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 5.18 (pág.38)

Resuelva $(y^2 - y)dx + dy = 0$.

Solución. Esta ecuación diferencial no es exacta y ningún factor de integración es inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que, si los términos se agrupan estratégicamente, la ecuación diferencial se puede volver a escribir como

$$-(ydx - xdy) + y^2dx = 0 \ldots.(1)$$

El grupo de términos entre paréntesis tiene muchos factores de integración (véase tabla 5-1). Tratando cada factor de integración en forma separada, encontramos que el único que hace que toda la ecuación sea exacta es $I(x, y) = 1/y^2$. Utilizando este factor de integración, podemos reescribir (1) como

$$-\frac{ydx - xdy}{y^2} + 1dx = 0 \ldots\ldots (2)$$

Dado que (2) es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6). Alternativamente, vemos la tabla 8-1 que (2) se puede volver a escribir como $-d\left(\frac{x}{y}\right) + 1dx = 0$, o como $d\left(\frac{x}{y}\right) = 1dx$. Integrando, obtenemos la solución

$$\frac{x}{y} = x + c \quad o\ bien \quad y = \frac{x}{x + c}$$

159. García, A. Ecuaciones Diferenciales (2014). Editorial Patria. problema resuelto 1 (pág.46)

Comprobar que la ecuación diferencial $(2x - 5y + 2)dx + (1 - 6y - 5x)dy = 0\ es\ exacta$

Solución

En este caso:

$$M(x, y) = 2x - 5y + 2 \text{ y } N(x, y) = 1 - 6y - 5x$$

Entonces, derivamos a M respecto de y, y a N respecto de x:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x - 5y + 2) = -5 \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(1 - 6y - 5x) = -5 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Puesto que sí se satisface la condición de exactitud, la ecuación diferencial es exacta.

160. García, A. Ecuaciones Diferenciales (2014). Editorial Patria. problema resuelto 2 (pág.47)

Resolver la ecuación diferencial $(2x - 5y + 2)dx + (1 - 6y - 5x)dy = 0$

En este caso:

$$M(x, y) = 2x - 5y + 2 \text{ y } N(x, y) = 1 - 6y - 5x$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 5y + 2) = -5$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1 - 6y - 5x) = -5$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial sí es exacta.

2. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y + 2$$

$$f = \int (2x - 5y + 2)dx + g(y)$$

$$f = x^2 - 5xy + 2x + g(y)$$

3. Derivamos a f respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -5x + \frac{dg}{dy}$$

4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y}$ a N:

$$-5x + \frac{dg}{dy} = 1 - 6y - 5x \Rightarrow \frac{dg}{dy} = 1 - 6y$$

5. Integramos:

$$g(y) = \int (1 - 6y)dy = y - 3y^2$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$x^2 - 5xy + 2x + y - 3y^2 = C$$

6. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$2x - 5y - 5xy' + 2 + y' - 6yy' = 0$$

- Despejamos a y′:

$$y' = \frac{-2x + 5y - 2}{-5x + 1 - 6y} = -\frac{(2x - 5y + 2)}{(1 - 6y - 5x)} \Rightarrow (1 - 6y - 5x)dy = -(2x - 5y + 2)dx$$

$$(2x - 5y + 2)dx + (1 - 6y - 5x)dy = 0$$

161. García, A. Ecuaciones Diferenciales (2014). Editorial Patria. problema resuelto 3 (pág.48)

Resolver la ecuación diferencial $\left(1 - \frac{y}{x^2} e^{y/x}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{x} e^{y/x}\right)dy = 0$

En este caso:

$$M(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2} e^{y/x} \text{ y } N(x, y) = 1 + \frac{1}{x} e^{y/x}$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{y}{x^2} e^{y/x}\right) = -e^{y/x}\left(\frac{x + y}{x^3}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{1}{x} e^{y/x}\right) = -e^{y/x}\left(\frac{x + y}{x^3}\right)$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial sí es exacta.

2. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = 1 + \frac{1}{x} e^{y/x}$$

3. Integramos respecto de y:

$$f = \int \left(1 + \frac{1}{x} e^{y/x}\right) dy = y + e^{y/x} + g(x)$$

4. Derivamos a f respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x} e^{y/x} + \frac{dg}{dx}$$

5. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y}$ a M:

$$-\frac{y}{x^2} e^{y/x} + \frac{dg}{dx} = 1 - \frac{y}{x^2} e^{y/x} \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 1$$

6. Integramos:

$$g(x) = \int dx = x$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y + e^{y/x} + x = C$$

7. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$y' + \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) e^{y/x} + 1 = 0$$

$$y' + \frac{y'}{x} e^{y/x} = \frac{y}{x^2} e^{y/x} - 1$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x^2} e^{y/x} - 1}{\left(1 + \frac{e^{y/x}}{x}\right)} \Rightarrow \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(1 + \frac{1}{x} e^{y/x}\right) dy = 0$$

162. García, A. Ecuaciones Diferenciales (2014). Editorial Patria. problema resuelto 4 (pág.49-50)

Resolver la ecuación diferencial $x^2 \, sen \, x dx + xy \, dy = 0$

En este caso:

$$M(x, y) = x^2 \, sen \, x \text{ y } N(x, y) = xy$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \, sen \, x) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

2. Construimos el factor integrante $\mu(x)$:

$$p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{0 - y}{xy} = -\frac{1}{x}$$

Por tanto:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$$

3. Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$x^{-1}x^{2} sen\, x dx + x^{-1}xy\, dxdy = 0$$

$$x\, senx dx + y\, dy = 0$$

4. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\, senx) = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial ya es exacta.

5. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y$$

6. Integramos:

$$f = \int y dy = \frac{y^2}{2} + g(x)$$

7. Derivamos a f respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{dx}$$

8. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y}$ a M:

$$\frac{dg}{dx} = x\, senx$$

9. Integramos:

$$g(x) = \int x\, senxdx = senx - x\cos x$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$\frac{y^2}{2} + sen\, x - x\cos x = C$$

10. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$yy' + \cos x - \cos x + x\, sen\, x = 0$$

$$yy' + x\, sen\, x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x\, senx}{y} \Rightarrow x\, senx\, dx + y\, dy = 0$$

- Multiplicamos esta última ecuación por x y obtenemos:

$$x^2 sen\, x\, dx + xy\, dy = 0$$

Factores Integrales

11. Ejemplo. –

163. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 43. Ejemplo 2-1.

Resuelva el siguiente problema lineal de valor inicial:

$$y' - 3y = -9x \ldots (I)$$

$$y(2) = 13$$

Solución. -

Como el coeficiente de y' es 1, tenemos $P(x) = -3$. Entonces el factor de integración puede determinarse mediante la ecuación $u(x) = e^{\int P(x)dx}$ como…

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por e^{-3x} se obtiene…

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = -9xe^{-3x}$$

$$[e^{-3x}y]' = -9xe^{x} \ldots (2-13)$$

Integrando tenemos…

$$e^{-3x}y = \int (-9xe^{-3x})\, dx = e^{-3x}(3x+1) + c$$

Aplicando la condición inicial $y(2) = 13,$ tenemos…

$$13 = 3 * 2 + 1 + Ce^{3x^2} \to C = 6e^{-6}$$

Sustituyendo tenemos

$$y = 6e^{3x-6} + 3x + 1 \ldots \; (2-14)$$

que es la solución deseada.

12. Ejemplo. –

164. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 67 y 68. Ejemplo 4.

La ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

es no exacta. Identificando $M = xy$, $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$, encontramos que las derivadas parciales $M_x = x$ y $N_x = 4x$. El primer cociente de la ecuación (13) no nos conduce a nada, ya que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4}{2x^2 + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$$

depende de x y de y. Sin embargo, la ecuación (14) produce un cociente que depende sólo de y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}$$

El factor integrante es entonces $e^{\int \frac{3dy}{y}} = e^{3\ln\ln y} = e^{\ln\ln y^3} = y3.$ Después de multiplicar la ED dada por $\mu(y) = y^3$, la ecuación resultante es

$$xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)dy = 0.$$

Usted debería comprobar que la última ecuación es ahora exacta así como mostrar, usando el método que se presentó en esta sección, que una familia de soluciones es

$$\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c.$$

Ecuación de Bernoulli

165. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 72 y 73. Ejemplo 2.

Resuelva $x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

Solución. –

Primero reescribimos la ecuación como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

al dividir entre x. Con $n = 2$ tenemos $u = y^{-1}$ o $y = u$^(−1). Entonces sustituimos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \leftarrow Regla\ de\ la\ cadena$$

En la ecuación dada y simplificando. El resultado es

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

El factor integrante para esta ecuación lineal en, digamos, $(0, \infty)$ es

$$e^{-\int_0^\infty \frac{dx}{x}} = e^{-lnx} = e^{lnln\,x^{-1}} = x^{-1}.$$

Integrando

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}u] = -1$$

Se obtiene $x^{-1}u = -x + c$ o $u = -x^2 + cx$. Puesto que $u = y^{-1}$, tenemos que $y = 1/u$, asi una solución de la ecuación dada es $y = 1/(-x^2 + cx)$.

166. Demidovich, B. Problemas y ejercicios de análisis matemático (Quinta edición) (1977). Editorial Mir. ejemplo 2. pág. 348

Resolver la ecuación

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

Solución: Esta es una ecuación de Bernoulli (en la que $\alpha = \frac{1}{2}$).

Poniendo

$$y = uv$$

Obtenemos:

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv} \quad o \quad \left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv} \ldots . (8)$$

Para determinar la función u exigimos que se cumpla la relación

$$u' - \frac{4}{x}u = 0,$$

De donde

$$u = x^4.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación (8), tenemos:

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

De donde hallamos v:

$$v = (\frac{1}{2} \ln\ln |x| + C)^2,$$

Y, por consiguiente, obtenemos la solución general en la forma

$$y = x^4(\frac{1}{2} \ln\ln |x| + C)^2.$$

167. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 1(pág.49-50)

Resolver la ecuación

$$y' = 2xy = 2xe^{-x^2} \ \ldots. (5)$$

Solución. Apliquemos el método de variación de la constante. Consideremos la ecuación homogénea

$$y' + 2xy = 0$$

Correspondiente a la ecuación no homogénea dada. Esta es una ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma

$$y = c(x)e^{-x^2} \ \ldots. (6)$$

Donde $c(x)$ es una función incógnita de x.

Poniendo (6) en (5), obtenemos $c'(x) = 2x$. De donde $c(x) = x^2 + x$. Resumiendo, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y = (x^2 + c)e^{-x^2},$$

Donde c es la constante de integración.

168. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 2(pág.50-51)

Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + sen\, 2y}.$$

Solución. La ecuación dada es lineal, considerando x como función de y:

$$\frac{dx}{dy} - x\cos\cos y = sen\, 2y \ \ldots. (7)$$

Buscamos la solución general de la ecuación en la forma $x = u(y).v(y)$. Se tiene

$$\frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dv} + u\frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo x y $\frac{dx}{dy}$ en ecuación (7), obtenemos

$$v\frac{du}{dy} + u\left(\frac{dv}{du} - v\ cosy\right) = sen\ 2y\ .$$

Hallamos $v(y)$ de la condición

$$\frac{dv}{dy} - v\ cos\ cos\ y = 0\ .$$

Tomamos cualquier solución particular (no trivial) de esta ecuación, por ejemplo $v(y) = e^{seny}$. Entonces,

$$e^{seny}\frac{du}{dy} = sen2y\ .$$

De donde

$$u = \int e^{-senv} sen2ydy = -2e^{-seny}(1 + seny) + c\ .$$

Por consiguiente, la solución general es

$$x = ce^{seny} - 2seny - 2\ .$$

169. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 3(pág.51)

Resolver la ecuación de Bernoulli:

$$xy' + y = y^2\ ln\ ln\ x\ .$$

Solución. Hagamos $y = u(x)v(x)$. Tendremos

$$xvy' + u(xv' + v) = u^2v^2\ ln\ ln\ x\ .$$

Hallamos la función $v(x)$ como solución particular de la ecuación $xv' + v = 0$. Resuelta, $v(x) = \frac{1}{x}$. Entonces, $u' = \frac{u^2}{x^2} ln\ ln\ x$. Separando las variables e integrando, obtenemos

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{ln\ ln\ x}{x^2} dx = -\frac{ln\ ln\ x}{x} - \frac{1}{x} - c,$$

O sea,

$$u = \frac{x}{1 + cx + ln\ ln\ x}.$$

La solución general de la ecuación es:

$$y = \frac{1}{1 + cx + lnx}.$$

170. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 6.1 (pág.43)

Encuentre un factor de integración para $y' - 3y = 6$.

Solución: La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x) = -3$ y $q(x) = 6$, y es lineal. Aquí

$$\int p(x)dx = \int -3dx = -3x$$

De modo que (6.2) se convierte en

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-3x} \ldots\ldots (1)$$

171. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 6.2 (pág.43)

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución.

Multiplicando la ecuación por el factor de integración definido por (1) del problema 6.1, obtenemos

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x} \quad o\ bien \quad \frac{d}{dx}(ye^{-3x}) = 6e^{-3x}$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{d}{dx}(ye^{-3x})dx = \int 6e^{-3x}dx$$

$$ye^{-3x} = -2e^{-3x} + c$$

$$y = ce^{-3x} - 2$$

172. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 6.3 (pág.43)

Encuentre un factor de integración para $y' - 2xy = x$.

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x) = -2x$ y $q(x) = x$, y es lineal. Aquí

$$\int p(x)dx = \int (-2x)dx = -x^2$$

De modo que (6.2) se convierte en

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-x^2} \ldots\ldots (1)$$

***173.* Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 6.4 (pág.43)**

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución. Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración definido por (1) del problema 6.3, obtenemos

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2} \quad o\ bien \quad \frac{d}{dx}\left[ye^{-x^2}\right] = xe^{-x^2}$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, encontramos que

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{-x^2}\right) dx = \int xe^{-x^2}\, dx$$

$$ye^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

174. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 6.5 (pág.43-44)

Encuentre un factor de integración para

$$y' + \left(\frac{4}{x}\right) y = x^4.$$

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x) = 4/x$ y $q(x) = x^4$, y es lineal. Aquí

$$\int p(x)dx = \int \frac{4}{x}dx = 4\, ln\, ln\, |x| = ln\, ln\, x^4$$

De modo que (6.2) se convierte en

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{ln ln\, x^4} = x^4 \ldots\ldots (1)$$

175. Bronson, R. Costa, G. Ecuaciones Diferenciales (Tercera edición). Editorial McGraw Hill. problema resuelto 6.6 (pág.44)

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución. Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración definido por (1) del problema 6.5, obtenemos

$$x^4y' + 4x^3y = x^8 \quad o\ bien \quad \frac{d}{dx}(yx^4) = x^8$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos

$$yx^4 = \frac{1}{9}x^9 + c \quad o\ bien \quad y = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$$

176. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 1. pág.93-94.

1) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2 \ldots (1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=xy^2\ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x)=y^{1-n}$ con $n=2$ se tiene

$$u(x)=y^{1-n}\ldots(3)$$

o bien

$$y=u^{-1}\ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx}=-u^{-2}\frac{du}{dx}\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}+\frac{u^{-1}}{x}=xu^{-2}\ldots(6)$$

multiplicando a (6) por el inverso de $-u^{-2}$

$$\left(\frac{1}{-u^{-2}}\right)\left(-u^{-2}\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{1}{-u^{-2}}\right)\frac{u^{-1}}{x}=x\left(\frac{1}{-u^{-2}}\right)u^{-2}$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}=-\frac{u}{x}=-x\ldots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden, en donde

$$P(x)=-\frac{1}{x}$$

$$Q(x)=-x$$

entonces

$$\mu=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}=\frac{1}{x}$$

luego

$$\mu=\frac{1}{x}\ldots(8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\frac{u}{x}=-\frac{x}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right]=-1$$

$$\int d\left[\frac{1}{x}u\right] = \int -dx$$

$$\frac{1}{x}u = -x + C$$

$$\frac{u}{x} = -x + C$$

esto es

$$u(x) = x(-x + C)\ldots(9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^{-1} = x(-x + C)$$

es solución general de (1).

177. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 2. pág.95-96.

2) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^{-2}\ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x}\ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x) = y^{1-n}$ con $n = -2$ se tiene

$$u(x) = y^{3}\ldots(3)$$

o bien

$$y = u^{\frac{1}{3}}\ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx}\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx} + \frac{u^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{x}\ldots(6)$$

multiplicando a (6) por $\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)$

$$\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{3}\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)\frac{u^{\frac{1}{3}}}{x} = \left(\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{x}\right)\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx} - \frac{3}{x}u = \frac{3}{x} \ldots (7)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden, en donde

$$P(x) = \frac{3}{x}$$

$$Q(x) = \frac{3}{x}$$

entonces

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

luego

$$\mu = x^3 \ldots (8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$x^3\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}x^3 u = \frac{3}{x}x^3$$

$$\frac{d}{dx}[x^3u] = 3x^2$$

$$\int d[x^3u] = \int 3x^2 dx$$

$$\frac{1}{x}u = -x + C$$

$$x^3u = x^3 + C$$

esto es

$$u(x) = 1 + \frac{C}{x^3} \ldots (9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^3 = 1 + x^{-3}C$$

es solución general de (1).

178. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 3. pág.97-99.

3) Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1) \ldots (1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx}+y=xy^4 \ldots (2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x)=y^{1-n}$ con $n=4$ se tiene

$$u(x)=y^{-3} \ldots (3)$$

o bien

$$y=u^{-\frac{1}{3}} \ldots (4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\frac{du}{dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\frac{du}{dx}+u^{-\frac{1}{3}}=xu^{-\frac{4}{3}} \ldots (6)$$

multiplicando a (6) por $(-\frac{3}{u^{-\frac{4}{3}}})$

$$\left(-\frac{3}{u^{-\frac{4}{3}}}\right)\left(-\frac{u^{-\frac{4}{3}}}{3}\frac{d}{dx}\right)=xu^{-\frac{4}{3}}\left(-\frac{3}{u^{-\frac{4}{3}}}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}-3u=-3x \ldots (7)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden, en donde

$$P(x)=-3$$

$$Q(x)=-3x$$

entonces

$$\mu=e^{\int -3dx}=e^{-3x}$$

luego

$$\mu=e^{-3x} \ldots (8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$e^{-3x}\frac{du}{dx}-3u(e^{-3x})=-3xe^{-3x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}u]=-3xe^{-3x}$$

$$\int d[e^{-3x}u]=\int -3xe^{-3x}dx \ldots (9)$$

donde la integral del lado derecho de (9) es por partes. Haciendo

$$u(x) = 1 + \frac{C}{x^3} \ldots (9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$w = x$ $\qquad dv = \int e^{-3x}$

$dw = dx$ $\qquad v = \frac{e^{-3x}}{-3}$

entonces

$$e^{-3x}u = -3[-\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx]$$

$$e^{-3x}u = xe^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{3} + C$$

esto es

$$u(x) = x + \frac{1}{3} + e^{3x}C \ldots (10)$$

sustituyendo (3) en (10) tenemos por tanto que

$$y^{-3} = x + \frac{1}{3} + e^{3x}C$$

es solución general de (1).

179. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 4. pág.99-101.

4) Resuelva

$$x^2\frac{dy}{dx} + y = xy^2 \ldots (1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x} \ldots (2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x) = y^{1-n}$ con $n = 2$ se tiene

$$u(x) = y^{-1} \ldots (3)$$

o bien

$$y = u^{-1} \ldots (4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{u^{-1}}{x}=-\frac{(u^{-1})^2}{x^2}\dots(6)$$

multiplicando a (6) por $\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)$

$$\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)\left(-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{u^{-1}}{x}\right)=-\frac{1}{u^{-2}}\left(-\frac{u^{-2}}{x^2}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x^2}\dots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden, en donde

$$P(x)=\frac{1}{x}$$

$$Q(x)=\frac{1}{x^2}$$

entonces

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

luego

$$\mu=x\dots(8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}[xu]=\frac{1}{x}$$

$$\int d[xu]=\int\frac{dx}{x}$$

$$xu=\ln|x|+C$$

esto es

$$u(x)=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C}{x}\dots(9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^{-1}=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C}{x}$$

es solución general de (1).

180. Silva, J. Olvera, M. Gonzalez, M. Apuntes de Ecuaciones Diferenciales (2002).Ejemplo 5. pág.101-103.

5) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx}-(1+x)y=xy^2\ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx}-\frac{(1+x)y}{x}=y^2\ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x)=y^{1-n}$ con $n=2$ se tiene

$$u(x)=y^{-1}\ldots(3)$$

o bien

$$y=u^{-1}\ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx}=-u^{-2}\frac{du}{dx}\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{(1+x)(u^{-1})}{x}=u^{-2}\ldots(6)$$

multiplicando a (6) por $(-\frac{1}{u^{-2}})$

$$\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)\left(-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{(1+x)(u^{-1})}{x}\right)=u^{-2}\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}+\frac{(1+x)}{x}u=-1\ldots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden, en donde

$$P(x)=\frac{1+x}{x}$$

$$Q(x)=-1$$

entonces

$$\mu=e^{\int\frac{1+x}{x}dx}=e^{\int\frac{dx}{x}+\int dx}=e^{\ln|x|+x}=e^{\ln|x|}e^{x}$$

luego

$$\mu=xe^x\ldots(8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$xe^x\frac{du}{dx}+e^x(1+x)u=-xe^x$$

$$\frac{d}{dx}[xe^x u] = -xe^x$$

$$\int d[xe^x u] = \int -xe^x\, dx \ldots (9)$$

donde la integral del lado derecho de (9) es por partes. Haciendo

$u = x$ $\qquad\qquad\qquad dv = e^x\, dx$

$du = dx$ $\qquad\qquad\qquad v = e^x$

entonces

$$xe^x u = -xe^x + \int e^x\, dx$$

$$xe^x u = -xe^x + e^x + C$$

esto es

$$u(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x} \ldots (10)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^{-1} = -1 + \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x}$$

es solución general de (1).

Reducción a separación de variables

181. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 73. Ejemplo 3.

Resuelva $\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7, y(0) = 0.$

Solución. –

Si hacemos $u = -2x + y$, entonces $\frac{du}{dx} = -2 + \frac{dy}{dx}$, por lo que la ecuación diferencial se expresa como

$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7$ $\qquad$ o $\qquad$ $\frac{du}{dx} = u^2 - 9$

La última ecuación es separable. Utilizando fracciones parciales

$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx$ $\qquad$ o $\qquad$ $\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right] du = dx$

Y después de integrar se obtiene

$\frac{1}{6} ln\, ln \left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1$ o $\frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c_1} = ce^{6x}. \leftarrow sustituyendo\ e^{6c} por\ c$

Despejando u de la última ecuación y resustituyendo a u en términos de x y y, se obtiene la solución

$u = \frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}$ o $y = 2x + \frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}$. (6)

Por último, aplicando la condición inicial $y(0) = 0$ a la última ecuación en (6) se obtiene $c = -1$. La fi gura 2.5.1, obtenida con la ayuda de un programa de graficación, muestra en azul oscuro la gráfica de la solución particular $y = 2x + \frac{3(1-e^{6x})}{1+e^{6x}}$ junto con las gráficas de algunos otros miembros de la familia de soluciones (6).

182. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición, pág. 348; Ejemplo 2

Resolver la ecuación $y'=4xy+x\sqrt{y}$

Resolver la ecuación $y'=4xy+x\sqrt{y}$

Solución:

Esta es una ecuación de Bernoulli (en la que α=12).

Poniendo $y=uv$,

Obtenemos: $u'v+v'u=4xuv+x\sqrt{uv}$ o $(u'-4xu)+v'u=x\sqrt{uv}$… (8)

Para determinar la función u exigimos que se cumpla la relación $u'-4xu=0$,

De donde $u=x4$.

Poniendo esta expresión en la ecuación (8), tenemos: $v'x4=x\sqrt{v}x4$,

De donde hallamos v: v=(12ln|x|+C)2,

Y, por consiguiente, obtenemos la solución general en la forma y=x4(12ln|x|+C)2.

183. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 49 - 50; Ejemplo 1

Resolver la ecuación $y'=2xy=2xe-x2$… (5)

Solución.

Apliquemos el método de variación de la constante. Consideremos la ecuación homogénea $y'+2xy=0$

Correspondiente a la ecuación no homogénea dada. Esta es una ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma $y=c(x)e-x2$….(6)

Donde $c(x)$ es una función incógnita de x.

Poniendo (6) en (5), obtenemos $c'(x)=2x$. De donde $c(x)=x2+x$. Resumiendo, la solución general de la ecuación no homogénea es $y=(x2+c)e-x2$,

Donde c es la constante de integración.

184. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 50-51; Ejemplo 2

Resolver la ecuación $dydx=1xcos\ y+sen\ 2y$.

Solución. La ecuación dada es lineal, considerando x como función de y: $dxdy-x\cos y=sen$ $2y$… (7)

Buscamos la solución general de la ecuación en la forma $x=u(y)$. $v(y)$. Se tiene $dxdy=vdudv+udvdy$.

Sustituyendo x y $dxdy$ en ecuación (7), obtenemos $vdudy+u\ (dvdu-v\ cosy)\ =sen\ 2y$.

Hallamos $v(y)$ de la condición $dvdy-v\cos y=0$.

Tomamos cualquier solución particular (no trivial) de esta ecuación, por ejemplo, $v(y)=eseny$.

Entonces, $esenydudy=sen2y$.

De donde $u=\int e-senvsen2ydy=-2e-seny(1+seny)\ +c$.

Por consiguiente, la solución general es $x=ceseny-2seny-2$.

185. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 52; Ejemplo 3

Resolver la ecuación de Bernoulli: $xy'+y=y2\ln x$.

Solución. Hagamos $y=u(x)v(x)$. Tendremos $xvy'+u(xv'+v)=u2v2\ln x$.

Hallamos la función $v(x)$ como solución particular de la ecuación $xv'+v=0$. Resuelta, $v(x)=1x$.

Entonces, $u'=u2x2\ln x$. Separando las variables e integrando, obtenemos $-1u=\int \ln xx2dx=-\ln xx-1x-c$,

O sea, $u=x1+cx+\ln x$.

La solución general de la ecuación es: $y=11+cx+lnx$.

186. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.1

Encuentre un factor de integración para $y'-3y=6$.

Solución: La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x)=-3$ y $q(x)=6$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int -3dx=-3x$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e-3x$…..(1)

187. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.2

Solución.

Multiplicando la ecuación por el factor de integración definido por (1) del problema 6.1, obtenemos

$e-3xy'-3e-3xy=6e-3x\ o\ bien\ ddx(ye-3x)\ =6e-3x$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos $\int ddx(ye-3x)$ $dx=\int 6e-3xdx\ ye-3x=-2e-3x+c\ y=ce-3x-2$

188. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.3

Encuentre un factor de integración para $y'-2xy=x$.

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x)=-2x$ y $q(x)=x$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int(-2x)dx=-x2$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e-x2$……(1)

189. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.4

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución.

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración definido por (1) del problema 6.3, obtenemos

$e-x2y'-2xe-x2y=xe-x2$ *o bien* $ddx[ye-x2]=xe-x2$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, encontramos que $\int ddx(ye-x2)dx=\int xe-x2dx$ $ye-x2=-12e-x2+c$ $y=cex2-12$

190. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43-44; P.R. 6.5

Encuentre un factor de integración para $y'+(4x)\ y=x4$.

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x)=4/x$ y $q(x)=x4$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int 4xdx=4\ln|x|=\ln x4$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e\ln x4=x4$…(1)

Un método numérico

Método de Euler

191. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 77. Ejemplo 1.

Considere el problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2, y(2) = 4$. Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de y (2.5) usando primero $h = 0.1$ y después h=0.05.

Solución. –

Con la identificación $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$ la ecuación (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h\left(0.1\sqrt{y_n} + 0.4x_n^2\right).$$

Entonces para $h = 0.1, x_0 = 2, y_0 = 4$ y $n = 0$ encontramos

$$y_1 = y_0 + h\left(0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2\right) = 4 + 0.1\left(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2\right) = 4.18$$

que, como ya hemos visto, es una estimación del valor y(2.1). Sin embargo, si usamos el paso de tamaño más pequeño $h = 0.05$, le toma dos pasos alcanzar $x = 2.1$. A partir de

$$y_1 = 4 + 0.05\left(0.14\sqrt{4} + 0.4(2)^2\right) = 4.09$$

$$y_2 = 4.09 + 0.05\left(0.1\sqrt{4.09} + 0.4(2.05)^2\right) = 4.18416187$$

Tenemos $y_1 \approx y(2.05)$ y $y_2 \approx y(2.1)$. El resto de los cálculos fueron realizados usando un paquete computacional. En las tablas 2.1 y 2.2 se resumen los resultados, donde cada entrada se ha redondeado a cuatro lugares decimales. Vemos en las tablas 2.1 y 2.2 que le toma cinco pasos con $h = 0.1$ y 10 pasos con $h = 0.05$, respectivamente, para llegar a $x = 2.5$.

Intuitivamente, esperaríamos que $y_{10} = 5.0997$correspondiente a $h = 0.05$ sea la mejor aproximación de y(2.5) que el valor $y_5 = 5.0768$ correspondiente a $h = 0.1$.

192. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera 4° Edición – R. Nagle; E. Saff y A. Snider – Editorial Pearson – Ejemplo 1 – Pagina 25-26

Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial.

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 4 \qquad (4)$$

En los puntos $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ y 1.5.

Solución:

En este caso, $x_0 = 1, y_0 = 4, h = 0.1$ y $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Así la formula recursiva para y_n es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + (0.1)x_n\sqrt{y_n}$$

Al sustituir $n = 0$, obtenemos

$$x_1 = x_0 + 0.1 = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$y_1 = y_0 + (0.1)x_0\sqrt{y_0} = 4 + (0.1)(1)\sqrt{4} = 4.2$$

Al hacer $n = 1$, se tiene

$$x_2 = x_1 + 0.1 = 1.1 + 0.1 = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + (0.1)x_1\sqrt{y_1} = 4.2 + (0.1)(1.1)\sqrt{4.2} = 4.42543$$

Si continuamos de esta forma, obtenemos los resultados de la tabla 1.1. Como comparación, hemos incluido el valor exacto (hasta cinco cifras decimales) de la solución $\phi(x) = (x^2 + 7)^2/16$ de (4), la que puede obtenerse mediante separación de variables (véase la sección 2.2). Como era de esperar, la aproximación se deteriora cuando x se aleja de 1.

TABLA 1.1 CÁLCULOS PARA $y' = x\sqrt{y}, y(1) = 4$

n	x_n	Método de Euler	Valor exacto
0	1	4	4
1	1.1	4.2	4.21276

193. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera 4° Edición – R. Nagle; E. Saff y A. Snider – Editorial Pearson – Ejemplo 2 – Pagina 26-27

Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$(5) \qquad y' = y, \quad y(0) = 1$$

En $x = 1$, considerando 1, 2, 4, 8 y 16 pasos.

Solución:

Observación: note que la solución de (5) es simplemente $\phi(x) = e^x$, de modo que el método de Euler generará aproximaciones algebraicas del número transcendente $e =$ 2.71828 ...

En este caso, $f(x, y) = y, x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. La fórmula recursiva del método de Euler es

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1 + h)y_n$$

Para obtener aproximaciones en $x = 1$ con N pasos, consideramos el tamaño del paso $h = 1/N$. Para $N = 1$, tenemos

$$\phi(1) \approx y_i - (1+1)(1) - 2$$

Para $N = 2$, $\phi(x_2) = \phi(1) \approx y_2$. En este caso, obtenemos

$$y_1 = (1+0.5)(1) = 1.5$$

$$\phi(1) \approx y_2 = (1+0.5)(1.5) = 2.25$$

Para $N = 4$, $\phi(x_4) = \phi(1) \approx y_4$, donde

$$y_1 = (1+0.25)(1) = 1.25$$

$$y_2 = (1+0.25)(1.25) = 1.5625$$

$$y_3 = (1+0.25)(1.5625) = 1.95313$$

$$\phi(1) \approx y_4 = (1+0.25)(1.95313) = 2.44141$$

(En los cálculos anteriores redondeamos a cinco cifras decimales). De manera análoga, al considerar $N = 8$ y 16 obtenemos estimaciones cada vez mejores de $\phi(1)$. Es tas aproximaciones aparecen en la tabla 1.2. Como comparación, la figura 1.16 de la página 28 muestra las aproximaciones poligonales de e^x usando el método de Euler con $h = 1/4$ $(N = 4)$ y $h = 1/8$ $(N = 8)$. Observe que el menor tamaño del paso proporciona la mejor aproximación.

TABLA 1.2 METODO DE EULER PARA $y' = y, y(0) = 1$

N	h	Aproximación de $\phi(1) = e$
1	1.0	2.0
2	0.5	2.25
4	0.25	2.44141
8	0.125	2.56578
16	0.0625	2.63793

194. Ecuaciones Diferenciales 5° Edición – I. Jover y E. Lopez – Ejemplo 1 – Editorial Pearson – Pagina 152

Las funciones $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ Son soluciones de la ecuación lineal homogénea: $y'' - y = 0$, para toda x. Así:

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y'' = e^x$$

Sustituyendo en la ecuación dada, $e^x - e^x = 0$. De modo similar para:

$$y = e^{-x}$$

$$y' = e^{-x}$$

$$y'' = e^{-x}$$

$\therefore$ Sustituyendo $e^{-x} - e^{-x} = 0$.

195. Ecuaciones Diferenciales 5° Edición – I. Jover y E. Lopez – Ejemplo 2 – Editorial Pearson – Pagina 171

Resolver: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

$$a = 3, \qquad b = 1$$

Solución:

La ecuación característica es:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

$$\rightarrow \quad m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -1$$

$\therefore y = \frac{1}{x}(c_1 + c_2 \ln x)$ es solución general.

196. Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones – M. Braun – Editorial Iberoamérica – Ejemplo 2 – Pagina 257

Encontrar la solución general de la ecuación:

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 3\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 0 \ldots (I)$$

Solución:

La ecuación característica de (I) es

$$0 = r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = r(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = r(r-1)^3$$

Sus raíces son $r_1 = 0,\ r_2 = 1$, con $r_2 = 1$ una raíz de multiplicidad tres. Por lo tanto, la solución general de (I) es

$$y(t) = c_1 + (c_2 + c_3 t\ c_4 t^2)e^t$$

La teoría para la ecuación no homogénea

$$L[y] = a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + \cdots + a_0(t)y = f(t), \qquad a_n(t) \neq 0$$

También es completamente análoga a la teoría para la ecuación no homogénea de segundo orden.

197. Resolver la ecuación:

$$y' + \frac{2}{x}y = -2xy^2$$

Solución:

1. Aquí: $n = 2$

Entonces, $u = y^{-1} \to y = u^{-1}$ y $y' = -u^{-2}u'$

Sustituyendo, $-u^{-2}u' + \frac{2}{x}u^{-1} = -2xu^{-2}$

Dividiendo entre $-u^{-2}$:

$$u' - \frac{2}{x}u = 2x$$

Que ya es una ecuación lineal en variable u, con solución:

$$u = 2x^2 \ln x + cx^2$$

Como $u = y^{-1}$, entonces:

$$y = \frac{1}{2x^2 \ln x + cx^2}$$

2. Sea $y = uv$

Sea $v(x)$ la solución de $y' + \frac{2}{x}y = 0$, es decir, $v(x) = \frac{1}{x^2}$ la ecuación dada se transforma en:

$$vu' + u\left(v'\frac{2}{x}v\right) = -2xu^2v^2$$

Sustituyendo $v(x)$, después de haber dividido la ecuación:

$$u' + u\left(\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x}v\right) = -2xu^2\frac{1}{x^2}$$

$$u' = -\frac{2}{x}u^2$$

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{2dx}{x} \qquad u^{-1} = 2\ln x + c$$

$$u = \frac{1}{2\ln x + c}$$

Como $y = uv$

$$y = \frac{1}{x^2(2\ln x + c)}$$

198. M. Braun. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Grupo Editorial Iberoamericana, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. (Ejemplo 1, pag.4).

Obtener la solución general de la ecuación (dy/dt) + 2ty=0

SOLUCIÓN

En este caso, a(t)=2t

Así que:

yt=c exp(-∫2t dt) = c𝑒-t2

199. M. Braun. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Grupo Editorial Iberoamericana, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. (Ejemplo 3, pag.6).

Obtener la solución del problema de valor inicial

𝑑y𝑑t+sen ty=0 , y0=32

SOLUCIÓN

Aquí a(t) =sen t

Así que:

yt=32exp -0tsens𝑑s =32𝑒cos t -1

200. M. Braun. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Grupo Editorial Iberoamericana, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. (Ejemplo 5, pag.8).

SOLUCIÓN.

Aquí a(t)= -2t,

Así que:

ut=exp ∫at𝒹t =exp -∫2t𝒹t =ℯ-t2

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por u(t) se obtiene la siguiente ecuación equivalente

ℯ-t2𝒹y𝒹t-2ty=tℯ-t2, o bien, 𝒹𝒹tℯ-t2y=te-t2

De aquí sigue que

ℯ-t2=∫tℯ-t2dt+c=-ℯ-t22+c

Y

yt=-12+cℯt2

201. M. Braun. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Grupo Editorial Iberoamericana, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. (Ejemplo 6, pág. 8-9).

𝒹y𝒹t+2ty=t, y1=2

SOLUCIÓN

Aquí a(t) = 2t

Así que:

ut=exp ∫at𝒹t =exp ∫2t𝒹t =ℯt2

Multiplicando ambos lados de la ecuación por u(t) se obtiene

ℯ-t2𝒹y𝒹t+2ty=tℯt2, o bien, 𝒹𝒹tet2y=tet2

De modo que

1t𝒹𝒹ses2ys𝒹s=1tsℯs2𝒹s

Así pues

es2ys|1t=ℯs22|1t

Como consecuencia

ℯt2y-2ℯ=ℯt22-ℯ2

y=12+3ℯ2ℯ-t2=12+32ℯ1-t2

202. Boyce. W. y DiPrima R. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Editorial Limusa Wiley, Ecuaciones diferenciales y problemas con la frontera (Ejemplo 3, pag.37).

Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y'-2xy=x, \quad y0=0$$

<u>**solución.**</u>

Para resolver la ecuación en primer lugar se encuentra el factor integrante

x=ⅇxp-∫2xⅆxⅇ-x2

Luego, al multiplicar por x, obtiene

ⅇ-x2y'-2xⅇ-x2y=xⅇ-x2

O bien,

yⅇ-x2'=xⅇ-x2

Por consiguiente,

yⅇ-x2=∫xe-x2ⅆx+c=-12ⅇ-x2+c

Y se concluye que

y=-12+cⅇx2

Es la solución general de la ecuación diferencial dada. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 0$ es necesario elegir $c = 1/2$.

203. Boyce. W. y DiPrima R. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Editorial Limusa Wiley, Ecuaciones diferenciales y problemas con la frontera (Ejemplo 1 ,pag.55).

Resolver el problema con valor inicial

y'=y1⁄3, y0=0

Para x≥0

Este problema se resuelve con facilidad ya que la ecuación diferencial es separable. Por tanto, se tiene

y-13ⅆy=ⅆx,

De modo que

32y23=x+C

Y

$$y=23x+c32$$

La condición inicial se satisface si c=0, por lo que

$$y=\emptyset 1x=23x3/2, \qquad x\geq 0$$

Satisface ambas soluciones (3). Por otra parte, la función

$$y=\emptyset 2x=-23x32, \quad x\geq 0$$

204. **Boyce. W. y DiPrima R. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Editorial Limusa Wiley, Ecuaciones diferenciales y problemas con la frontera (Ejemplo 2, pag.56-57).**

Resolver el problema con valor inicial

$$y'=y2, \qquad y0=1,$$

Y determinar el intervalo en el que existe la solución.

Solución.

El teorema 2.4.1 garantiza que este problema tiene una solución única, ya que fx,y=y2 y $\partial f/\partial y=2$ y son continuas en todo punto. Para encontrar la solución, primero se escribe la ecuación diferencial en la forma

$$y\text{-}2dy=dx$$

Luego

$$-y\text{-}1=x+c$$

Y

$$y=-1x+c.$$

Para satisfacer la condición inicial debe elegirse c=-1, de modo que

$$y=11\text{-}x$$

Es la solución del problema con valor inicial dado. Es evidente que la solución se vuelve acotada cuando x→1; por consiguiente, la solución existe solo en el intervalo $-\alpha<x<1$. Sin embargo, la ecuación diferencial por si sola no indica que el punto x=1 sea de alguna manera notable. Es más, si se reemplaza la condición inicial por

$$y0=y0,$$

La constante c de la (11) debe elegirse como c=-1y0, y se concluye que

$$y=y01\text{-}y0x$$

205. M. Braun. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Grupo Editorial Iberoamericana, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. (Ejemplo 7, pág. 9).

Encontrar la solución del problema de valor inicial.

ⅆyⅆt+y=11+t2, y2=3.

Solución.

Aquí at=1, así que

ut=exp ∫atⅆt =exp ∫1ⅆt =ⅇt.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por t se obtiene

ⅇtⅆyⅆt+y=ⅇt1+t2 , o bien , ⅆⅆtⅇty=ⅇt1+t2 .

Por lo tanto,

21ⅆdsⅇsysⅆs=21ⅇs1+t2ⅆs,

Así que

ⅇty-3ⅇ2=2tⅇs1+s2ⅆs

Y

y=ⅇ-t3ⅇ2+2tⅇs1+s2ⅆs

206. K. Nagle et al. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Addison Wesley (Ejemplo 1, pág. 41-42).

ⅆyⅆx=x-5y2 .

Solución

Siguiendo el método ya delineado, separamos las variables y escribimos la ecuación en la forma

y2ⅆy=x-5ⅆx.

Al integra tenemos

∫y2ⅆy=∫x-5ⅆx

y33=x22-5x+C ,

Y al despejar y en esta última ecuación se tiene

y=3x22-15x+3C13.

Como C es una constante de integración que puede ser cualquier número real, 3C también puede ser cualquier número real. A l reemplazar 3C por el símbolo K, tenemos

y=3x22-15x+k13.

207. K. Nagle et al. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Addison Wesley (Ejemplo 2, pág. 42-43).

Resolver el problema con valor inicial

ⅆyⅆx=y-1x+3,   y-1=0.

Solución

Al separa las variables e integrar tenemos

ⅆyy-1=ⅆxx+3 ,

∫ⅆyy-1=∫ⅆxx+3 ,

ln y-1 =ln x+3 +c

En este momento podemos despejas y de manera explícita (conservando al constante C) o usar la condición inicial para determinar C y luego despejar y. Sigamos el primer camino. Al exponencial la ecuación (5), tenemos

ⅇln y-1 =ⅇln x+3 +c=ⅇcⅇln x+3 ,

y-1=ⅇCx+3=C1x+3 ,

Donde C1=ⅇc. Ahora, dependiendo de los valores de y, tenemos y-1=±y-1; y de manera análoga, x+3=±x+3. Así podemos escribir (6) con

y-1=±C1x+3 o y=1±C1x+3 ,

Donde el signo depende (como ya indicamos) de los valores de x e y. Como C1 es una constante positiva (recuerde que C1=eC>0), podemos reemplazar C1 por K, donde K representa ahora una constante arbitraria no nula. Obtenemos

y=1+kx+3

Por último, determinamos k de modo que se satisfaga la condición inicial y-1=0. Al hacer x=-1 y y=0 en la ecuación (7) tenemos

0=1+k-1+3=1+2k

Por lo que k=-12. Así, la solución del problema con valor inicial es

y=1-12x+3=-12x+1

Aplicaciones de ecuaciones lineales de primer orden

Crecimiento poblacional: Ley de Malthus

208. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página.48 y 49 Ejemplo 2-3.

Se observa que en ciertos periodos la tasa de cambio poblacional de las sociedades humanas, de las especies animales, insectos y colonias bacterianas aumenta con una rapidez proporcional a la población misma. Suponiendo que $N(t)$ represente la población en el tiempo t, obtenga una ecuación diferencial que describa el cambio en la población con respecto al tiempo t; comente su solución. Suponga que la población inicial en el tiempo $t = 0$ es N_0.

Solución. –

Dado que la tasa de cambio en la población es proporcional a la población misma, una ecuación diferencial que describa el cambio de población con respecto al tiempo puede expresarse como

$$\frac{dN}{dt} = kN \ldots (2-21)$$

donde k es la tasa neta de población, es decir, la diferencia entre las tasas de nacimientos y muertes. A menudo, el valor de la constante k se calcula para varios países y se usa como medida de comparación para el crecimiento poblacional de tales naciones durante ciertos años,

determinadas décadas o incluso algunos siglos. Por ejemplo, un valor de k de $0.015/año$ representa una tasa de crecimiento poblacional de 15 personas al año por cada mil personas.
La ecuación 2-21 es lineal de primer orden con coeficientes constantes. La condición inicial se especifica como $N(0) = N_0$. Entonces, por la ecuación 2-20, la solución de este problema de valor inicial es

$$N = N_0 e^{kt} \ldots (2-22)$$

Por tanto, la suposición de que la cantidad de individuos aumenta con una rapidez proporcional a la población da como resultado el crecimiento exponencial con respecto al tiempo. Este modelo de cambio en la población se llama **ley de crecimiento exponencial o ley de Malthus**, por el economista británico Thomas Malthus (1766-1834), quien fue el primero en observar este fenómeno. A pesar de su simplicidad, se comprueba que la exactitud de dicha ley es notable al predecir el crecimiento poblacional de los seres humanos, diversas especies animales y colonias de bacterias, por lo menos durante periodos limitados. Pero en valores muy altos de t, predice que la población de ciertas especies tenderá al infinito (figura 2-11). Obviamente, esto es bastante irrealista, por las limitaciones de espacio vital, disponibilidad de alimentos y otros recursos. Más adelante en este capítulo se explica un modelo más realista de crecimiento poblacional llamado **ley de crecimiento** logístico.

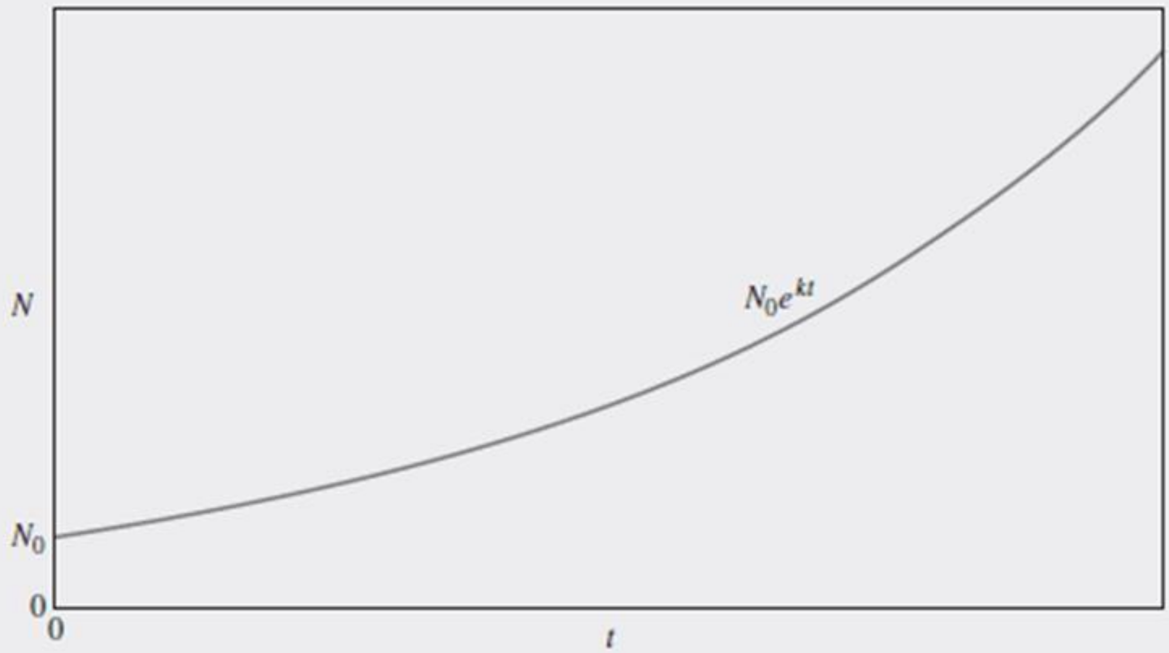


FIGURA 2-11
Ley de Malthus de crecimiento poblacional.

Estimación del tiempo de respuesta con la constante de tiempo

209. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página.51 y 52 Ejemplo 2-4.

Se ha observado que los materiales radiactivos como el plutonio, el radio y el isótopo del carbono C14 se desintegran naturalmente para formar otro elemento u otro isótopo del mismo elemento con una rapidez proporcional a la cantidad del material radiactivo presente. Así, el proceso de desintegración radiactiva puede describirse mediante la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dM}{dt} = -kM \ldots (2-24)$$

donde $M(t)$ es la cantidad de material radiactivo en el tiempo t y k es una constante positiva llamada *constante de desintegración* del material, que representa la fracción de la sustancia que se desintegra por unidad de tiempo. El signo negativo se debe a que $M(t)$ está disminuyendo con el tiempo. En consecuencia, dM/dt debe ser una cantidad negativa.

Un arqueólogo descubrió ciertos huesos cuyo contenido de C14 resultó ser 8% del que se encuentra en animales vivos. Tomando la constante de desintegración del C^{14} como $k = 1.24 \times 10^{-4}$ por año, estime la edad de esos huesos.

Solución. –

La ecuación 2-24 es lineal de primer orden con coeficientes constantes. Tomando la cantidad de material radiactivo en el tiempo $t = 0$ como M_0, la solución de este problema de valor inicial resulta, por la ecuación 2-20,

$$M(t) = M_0 e^{-kt} \ldots (2-25)$$

Entonces, si se conocen la masa inicial del material radiactivo M_0 y la constante de desintegración k, la masa restante del material radiactivo en cualquier tiempo t puede determinarse mediante la ecuación 2-25. Observe que el exponente kt debe ser una cantidad adimensional. Por tanto, si k se da por año, entonces t debe expresarse en años.

La solución anterior también puede manifestarse explícitamente para el tiempo como

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{M(t)}{M_0} \ldots (2-26)$$

La rapidez de desintegración del material radiactivo dM/dt es proporcional a su masa $M(t)$, que disminuye con el tiempo. En consecuencia, la rapidez del proceso de desintegración es elevada al principio, pero disminuye con el tiempo. En vez de usar la constante de tiempo $\tau = 1/k$ para estimar la rapidez de desintegración, los físicos miden la rapidez de desintegración de los materiales radiactivos mediante la **vida media** del material, que se define como el tiempo necesario para que la mitad del material radiactivo se desintegre (figura 2-14).

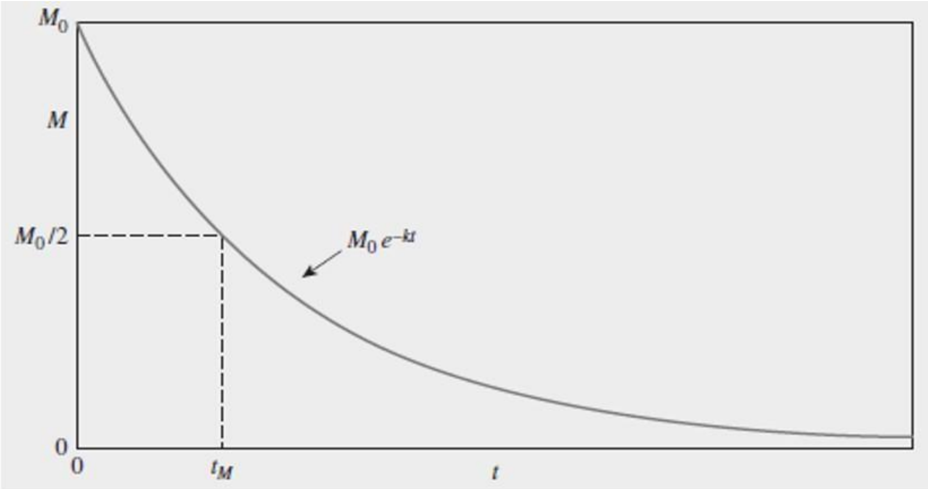


FIGURA 2-14
Desintegración de materiales radiactivos con el tiempo y la vida media t_M.

Una relación para la vida media se determina fácilmente sustituyendo $M(t) = \frac{1}{2}M_0$ en la ecuación 2-25 y despejando t. Esto da

$$t_M = \frac{\ln 2}{k} \dots (2-27)$$

En laboratorios se han medido las vidas medias de muchas sustancias radiactivas, y aparecen tabuladas en diversos manuales. Conociendo t_H, k puede calcularse con facilidad a partir de la ecuación 2-27.

Un área de aplicación interesante de la desintegración radiactiva es el **fechado por radiocarbono**, que se basa en la desintegración del isótopo radiactivo del carbono (C^{14}). Es común usar este método para estimar la edad de ciertas plantas o animales, así como artefactos arqueológicos. El método se basa en el hecho de que una pequeña fracción de los átomos de carbono en cualquier ser viviente está constituida por C^{14}. Esta fracción permanece más o menos constante durante la vida del ser viviente, porque éste adquiere continuamente nuevo carbono de su entorno mediante la ingestión y la respiración, y la fracción de C^{14}en la atmósfera permanece esencialmente constante.

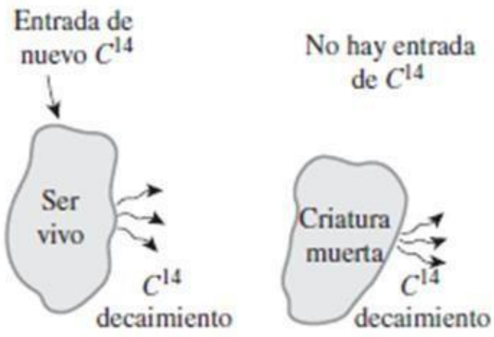


FIGURA 2-15
Cuando muere un ser vivo, deja de adquirir nuevo C^{14} y su contenido comienza a disminuir por la desintegración radiactiva.

Cuando muere un ser vivo, deja de adquirir nuevo carbono, incluyendo el C^{14}, y el contenido de este comienza a agotarse por desintegración radiactiva (figura 2-15). Se sabe que la vida media del C^{14}es cercana a 5 568 años, y su constante de desintegración es de casi 1.24×10^{-4} por año. Entonces, el tiempo transcurrido entre la muerte del ser vivo puede calcularse a partir de la ecuación 2-25 midiendo la fracción remanente de C^{14}.

La cantidad de C^{14} en la atmósfera se repone en forma constante mediante la conversión del nitrógeno a C^{14} por los rayos cósmicos en la atmósfera y, de este modo, la relación del C^{14} al carbono ordinario en la atmósfera permanece esencialmente en los mismos niveles. Mediante las tablas de factores de corrección se toman en cuenta las pequeñas variaciones a lo largo de los siglos.

A la luz de esta información, se determina la edad de los huesos descubiertos por el arqueólogo, mediante la ecuación 2-26, dado que $\frac{M(t)}{M_0} = 0.08$, como

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{M(t)}{M_0} = -\frac{1}{1.24 \times \frac{10^{-4}}{año}}\ln 0.08 = 20369\ años$$

Así, el animal que tenía esos huesos murió hace más de 20 000 años.

210. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 52 Ejemplo 2-5.

Una pequeña bola de cobre macizo que inicialmente $(t = 0)$ está a una temperatura $T_1 = 20°C$, se deja caer en un recipiente grande lleno de agua hirviendo a $T_0 = 100°C$, como se muestra en la figura 2-16. Como era de esperarse, se transfiere calor del agua a la bola, y su temperatura comienza a aumentar. La masa m, el área superficial A, el calor específico de la bola c y el coeficiente de transferencia de calor por convección h son tales que $\lambda = \frac{hA}{mc} = 0.1s^{-1}$. La ecuación diferencial que rige este proceso se determinó en el primer capítulo como

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T_0 - T)$$

o, en forma estándar, como

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dT}{dt}\right) + T = T_0$$

Así, vemos que la constante de tiempo es $\tau = 1/\lambda$. Con base en esto, podemos decir que una esfera con una masa grande m o un alto calor específico c se calentará más lentamente. Esto tiene sentido porque se necesita más energía para aumentar la temperatura de tal esfera. De manera similar, una esfera con un área superficial pequeña A también se calentará más lentamente porque el calor debe transferirse a través de un área superficial menor.

Para nuestro problema específico, $T_0 = 100°C$ y

$$T(0) = T_1 = 20°C$$

Determine la temperatura de la bola en t 5 20 s resolviendo este problema de valor inicial.

Solución, -

Se trata de un problema de valor inicial lineal de primer orden, y su solución es

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_1)e^{-\lambda t} \ldots (2 - 28)$$

Sustituyendo los valores específicos, la temperatura de la bola 20 s después de dejarla caer en agua hirviendo se determina como

$$T(20) = 100 - (100 - 20)e^{-0.1\times 20} \cong 89.2°C$$

Observe que la temperatura de la bola se acercará a la del agua hirviendo (100°C) cuando $t \to \infty$.

211. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 53 Ejemplo 2-6.

El coeficiente de absorción del agua para la luz roja es cercano a 0.5 m^{-1}. Determine a qué distancia puede viajar la luz roja en agua antes de que se absorba 90% de ella

Solución. –

En el primer capítulo se explicó la absorción de la radiación y se determinó la ecuación diferencial rectora (ecuación 1-8) como

$$\frac{dE}{ds} = -\alpha E$$

donde α es el coeficiente de absorción, s es la distancia que la luz viaja en dirección del haz, y E es la energía radiante de la luz roja. Ésta es una ecuación lineal de primer orden con un coeficiente constante, y su solución mediante la ecuación 2-20 es $E(s) = E_0 e^{-\alpha s}$ o

$$\frac{E(s)}{E_0} = e^{-\alpha s}$$

donde E_0 es la energía radiante del haz cuando toca el medio de transmisión en $s = 0$. La relación $E(s)/E_0$ será 0.1 en la ubicación s cuando se absorba 90% de la radiación. Entonces,

$$0.1 = e^{-0.5s} \rightarrow s \cong 4.64m$$

Por tanto, el agua absorberá 90% de la luz roja antes de que esta viaje una distancia de 4.64 m (figura 2-17).

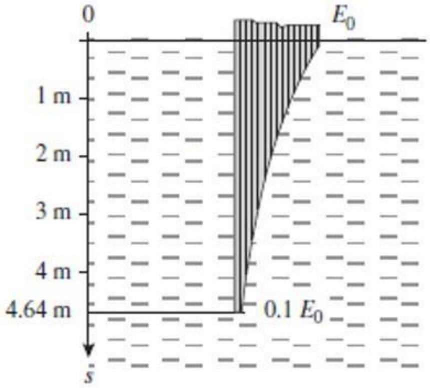


FIGURA 2-17
La absorción de luz en el agua (ejemplo 2-6).

212. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 53 y 54 Ejemplo 2-7.

Considere que un tanque contiene 1 000 L de agua pura y está conectada a líneas de abasto y de descarga, como se muestra en la figura 2-18. En $t = 0$, tanto la línea de abasto como la de descarga están abiertas, y la salmuera (solución de agua con sal) que contiene 0.1 kg de sal por litro entra y sale del tanque a razón de 50 L/min después de mezclarse perfectamente con el agua del tanque. Suponga que la sal disuelta no cambia el volumen del agua. Como es de esperarse, el contenido de sal en el tanque aumenta con el tiempo, aun cuando el volumen de agua permanezca constante. Obtenga la relación para la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t, y determine la cantidad máxima de sal que el tanque contendrá finalmente.

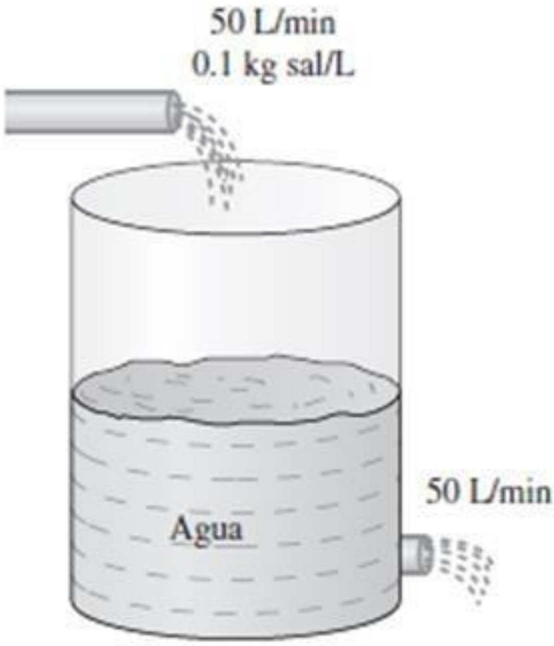


FIGURA 2-18
Esquema para el ejemplo 2-7.

Solución. –

Sea M la masa de sal en el tanque en un determinado tiempo t. El principio de conservación de la masa para la sal en el tanque puede expresarse como

$$\frac{dM}{dt} = \left(50\frac{L}{min}\right)\left(0.1\frac{kg}{L}\right) = \left(50\frac{L}{min}\right)\left(\frac{M}{1000}\frac{kg}{L}\right)$$

Esto se reduce a

$$\frac{dM}{dt} + 0.05M = 5 \ldots (2-29)$$

Ésta es la ecuación diferencial que describe la variación de sal en el tanque con el tiempo. La condición inicial para este problema es $M(0) = 0$, ya que el tanque inicialmente no contiene sal. Observe que se trata de un problema de valor inicial lineal de primer orden con coeficientes constantes, y su solución es, por la ecuación 2-17,

$$M = 100(1 - e^{-0.05t}) \ldots (2-30)$$

Observe que cuando $t \to \infty$, el término $e^{-0.05t}$ se vuelve cero y obtenemos $M = 100\ kg$. Ésta es la cantidad máxima de sal que puede contener el tanque bajo las condiciones específicas. La solución se grafica en la figura 2-19. Como la constante de tiempo es $\frac{1}{0.05} = 20$, M tardará alrededor de 80 s para llegar a 100 kg.

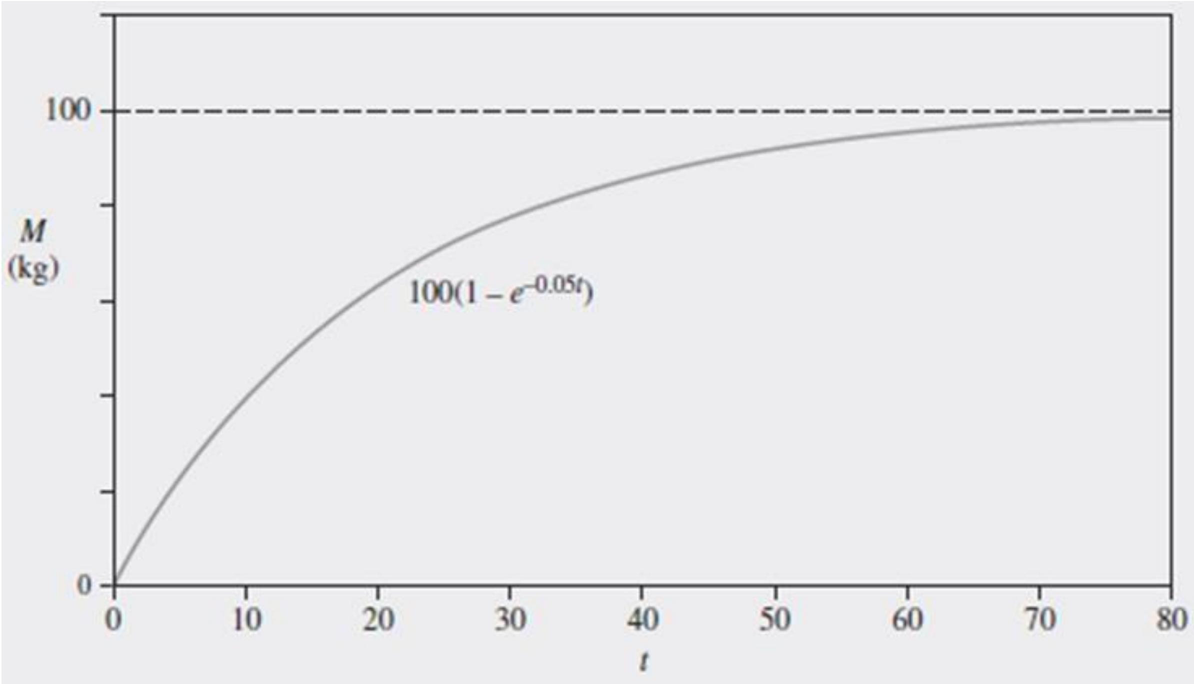


FIGURA 2-19

Aumento en la cantidad de sal en el tanque con respecto al tiempo (ejemplo 2-7).

213. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 54 y 55 Ejemplo 2-8.

El movimiento de cuerpos rígidos en línea recta puede describirse mediante la segunda ley del movimiento de Newton expresada en forma escalar como

$$F = ma \qquad \text{o} \qquad F = m\frac{dV}{dt}$$

donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y m, a y V son la masa, la aceleración y la velocidad del cuerpo, respectivamente.

Las dos fuerzas que actúan sobre los cuerpos en caída libre en la atmósfera son la *fuerza de gravedad* o el *peso* del cuerpo como $W = mg$ y la *resistencia del aire*, que es función de la velocidad. Para cuerpos en caída libre, ambas fuerzas actúan en direcciones opuestas, y la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es la diferencia entre ambas. A bajas velocidades, la resistencia del aire es aproximadamente proporcional a la velocidad, y en tales casos la segunda ley de Newton puede expresarse como (figura 2-20).

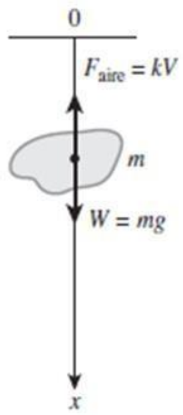


FIGURA 2-20
Fuerza de gravedad y de resistencia del aire actuando sobre un cuerpo en caída libre.

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV \ldots (2-31)$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}V = g \ldots (2-32)$$

donde k es una constante de proporcionalidad que se determina experimentalmente. La aceleración gravitatoria tiene un valor $g = 9.8\, m/s^2$ al nivel del mar y disminuye con la elevación. Pero para pequeñas elevaciones relativas al radio de la Tierra, el valor de g puede suponerse constante como $9.8\, m/s^2$.

Considere un cuerpo de masa m que se deja caer desde el reposo en $t = 0$. El cuerpo cae bajo la influencia de la gravedad, y la resistencia del aire que se opone al movimiento se supone proporcional a la velocidad. Designando x como la distancia vertical y tomando la dirección positiva en el eje x hacia abajo con el origen en la posición inicial del cuerpo, obtenga relaciones para la velocidad y la posición del cuerpo en función del tiempo t.

Solución. –

Con las suposiciones señaladas, el problema de valor inicial que describe este movimiento para tiempos anteriores a aquel en que el cuerpo toca el suelo es la ecuación 2-32 con la condición inicial $V(0) = 0$. Éste es un problema de valor inicial lineal de primer orden con coeficientes constantes, y su solución (por la ecuación 2-17) es

$$V(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \ldots (2-33)$$

que es la relación deseada para la velocidad como función del tiempo. Observe que cuando $t \to \infty$, la velocidad tiende al valor constante de

$$V_\infty = \frac{mg}{k}$$

que se llama velocidad terminal (figura 2-21). Un cuerpo en caída libre alcanza esta velocidad cuando la resistencia del aire es igual al peso del cuerpo. Observe que la velocidad terminal depende solo del peso del cuerpo y del coeficiente de resistencia k. Es independiente de la velocidad inicial $V(0)$.

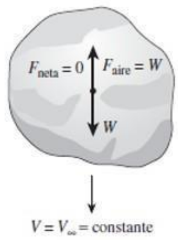


FIGURA 2-21
Un cuerpo en caída libre llega a su velocidad terminal cuando la resistencia del aire iguala el peso del cuerpo.

Reacomodando la ecuación 2-32 como

$$\frac{m}{k}\frac{dV}{dt} + V = \frac{mg}{k}$$

vemos que la constante de tiempo es $\tau = m/k$. Por tanto, tardará aproximadamente $t = 4\tau = 4m/k$ en alcanzar 98% de la velocidad terminal.

La distancia que el cuerpo cae se obtiene por la definición de la velocidad $V = dx/dt$ y la condición $x(0) = 0$. Integrando $dx = V\,dt$ después de sustituir la expresión V de la ecuación 2-33 y aplicando las condiciones iniciales, se obtiene

$$x(t) = \int_0^t \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) dt = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right]$$

que es la relación deseada para la posición del cuerpo como función del tiempo. Como $e^{-2} \approx 0.02$, cuando el cuerpo llegue a 98% de su velocidad terminal, habrá descendido una distancia igual a $x(4\tau) = x(4m/k)$, o

$$x\left(\frac{4m}{k}\right) = 3.02g\,\frac{m^2}{k^2}$$

214. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 56 Ejemplo 2-9.

El circuito que se muestra en la figura 2-22 es un modelo de solenoide, como el que se usa para embragar el engrane de la marcha de un automóvil con el volante del motor. El solenoide se construye devanando alambre alrededor de un núcleo de hierro para hacer un electroimán. La resistencia R es la del alambre, y la inductancia L se debe al efecto electromagnético. Conectando el voltaje de suministro v_s se activa el imán, el cual mueve el engrane de la marcha. Desarrolle un modelo de la corriente i suponiendo que $v_S = V$, constante. Determine el valor de estado estacionario de la corriente. ¿Cuánto tardará la corriente en alcanzar este valor?

Solución. –

Usando la ley de voltaje de Kirchhof, la cual establece que la suma de voltajes alrededor de un circuito cerrado debe ser cero debido a la conservación de la energía, obtenemos el siguiente modelo de la corriente i

$$v_s - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Si $v_s = V$ constante, la ecuación se convierte en

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

Éste es un problema de valor inicial cuya solución (por la ecuación 2-17) es

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

si $i(0) = 0$. La corriente de estado estacionario es V/R. La constante de tiempo para este modelo es $\tau = L/R$. Por tanto, como $1 - e^{-4} \approx 0.98$, la corriente de solenoide llegará a 98% de su valor final V/R en $t = 4\tau = 4Ly/rR$.

Ecuación de Lagrange

215. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 1, pág.111-112)

$$y = (1 + y')x + y'^2$$

Sea $y' = p$, entonces $y = (1 + p)x + p^2$

Diferenciando y sustituyendo dy por pdx:

$$pdx = (1 + p)x + p^2$$

$$-dx = (x + 2p)dp$$

$$\frac{dx}{dp} = -x - 2p$$

de donde $\frac{dx}{dp} + x = -2p$ ya es lineal en x, cuya solución es:

$$x = 2 - 2p + ce^{-p}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de y, tenemos:

$$y = (1 + p)(2 - 2p + ce^{-p}) + p^2$$

$$y = 2 - p^2 + c(1 + p)e^{-p}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x = 2 - 2p + ce^{-p}$$

$$y = 2 - p^2 + c(1 + p)e^{-p}$$

Para hallar una solución singular, se deriva la ecuación dada con respecto a y':

$$0 = x + 2y', \text{ cómo } y' = p$$

Entonces:

$$x + 2p = 0$$

Esta ecuación, junto con $y = (1 + p)x + p^2$, forman un sistema del cual se elimina p.

$$p = -\frac{x}{2}$$

$$y = \left[1 + \left(-\frac{x}{2}\right)\right] x + \frac{x^2}{4}$$

$$y = x - \frac{x^2}{4}$$

Comprobando:

$$y' = 1 - \frac{1}{2}x$$

Sustituyendo:

$$x - \frac{x^2}{4} = \left(1 + 1 - \frac{x}{2}\right) x + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{4}$$

$$= x - \frac{x^2}{4} + 1$$

Como $x - \frac{x^2}{4} \neq x - \frac{x^2}{4} + 1$, la función $y = -\frac{x^2}{4}$ no es una solución singular.

216. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 2, pág.113)

Resolver la ecuación: $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

Solución. $y' = p$, entonces $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$ diferenciado:

$$pdx = xdp + pdx + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = dp$$

Si $dp = 0$, entonces $p = c$

Y la solución general de la ecuación es:

$$y = cx + \sqrt{1 + c^2}$$

Si $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$; entonces $x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

Tomando esta ecuación y $y = xp + \sqrt{1+p^2}$ para eliminar el parámetro p, tenemos:

$$p^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Además:

$$y = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}p + \sqrt{1+p^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \rightarrow p^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

Igualando:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-y^2}{y^2}$$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$ es una solución singular.

217. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto a (pág.104-105)

$$a)\, y = \frac{3}{2}x\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{\frac{dy}{dx}}$$

Se realiza el siguiente cambio:

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow y = \frac{3}{2}xp + e^p$$

Derivando (3.9) y dejando expresado en diferenciales se tiene:

$$dy = \frac{3}{2}(pdx + xdp) + e^p dp$$

$$dy = pdx \rightarrow pdx = \frac{3}{2}(pdx + xdp)e^p dp$$

$$-\frac{1}{2}pdx = \left(\frac{3}{2}x + e^p\right)dp$$

Se resuelve por el método de Lineales:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3x}{p} = -2\frac{e^p}{p} \rightarrow x = e^{-\int \frac{3}{p}dp}\left[\int \left(e^{\int \frac{3}{p}dp}\right)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = e^{-3\ln p}\left[\int \left(e^{3\ln p}\right)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}\left[\int (p^3)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}\left[\int e^p(-2p^2)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}[-2(p^2 - 2p + 2)e^p + C)]$$

$$x = \frac{3}{2}\{[-2(p^{-1} - 2p^{-2} + 2p^{-3})e^p + Cp^{-3}]p + e^p\}$$

Ecuación de Clairaut

218. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 1, pág.114-115)

Resolver la ecuación:

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

Sea $y' = p$, entonces $y = xp - \frac{1}{p}$

Diferenciando y tomando $dy = pdx$

$$pdx = xdp + pdx + \frac{1}{p^2}dp$$

$$0 = \left(x + \frac{1}{p^2}\right) dp$$

Si $dp = 0, p = c$

$\therefore y = cx - \frac{1}{c}$ es la solución general.

Si $x + \frac{1}{p^2} = 0,\ x = -\frac{1}{p^2}$

Sustituyendo en $y = xp - \frac{1}{p}$ tenemos:

$$y = \left(-\frac{1}{p^2}\right)p - \frac{1}{p^2}$$

$$y = -\frac{2}{p}$$

Tomando las ecuaciones: $x = -\frac{1}{p^2}$ y $y = -\frac{2}{x}$

Eliminando p:

$$y^2 = \frac{4}{p^2}, \qquad p^2 = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{4}{y^2} = -\frac{1}{x}$$

$$y^2 = -4x$$

Para saber si es o no solución singular, la comprobamos:

Derivando: $2yy' = -4$

$$yy' = -2, \qquad y' = -\frac{2}{y}$$

Sustituyendo:

$$y = x\left(-\frac{2}{y}\right) - \frac{1}{y'}$$

$$y = \frac{y^2}{-4}\left(-\frac{2}{y}\right) + \frac{y}{2}$$

$$y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \therefore \text{Sí es solución}$$

219. Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás. Ejercicio resuelto a (pág.102-103)

$$a)\, y = -x(y')^2 + (y')^2 + 1$$

Se realiza el siguiente cambio:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$$

$$y = -xp^2 + p^2 + 1$$

Se realiza la sustitución:

$$dy = -dxp^2 - 2xpdp + 2pdp \Rightarrow pdx = -dxp^2 - 2xpdp + 2pdp$$

$$(p + p^2)dx = 2p(1 - x)dp$$

Se resuelve la ecuación diferencial por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3x}{p} = -2\frac{e^p}{p} \rightarrow x = e^{-\int \frac{3}{p}dp}\left[\int \left(e^{\int \frac{3}{p}dp}\right)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = e^{-3\ln p}\left[\int \left(e^{3\ln p}\right)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}\left[\int (p^3)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}\left[\int e^p(-2p^2)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}[-2(p^2 - 2p + 2)e^p + C]$$

$$x = \frac{3}{2}\{[-2(p^{-1} - 2p^{-2} + 2p^{-3})e^p + Cp^{-3}]p + e^p\}$$

$$\frac{dx}{(1 - x)} = \frac{2pdp}{(p + p^2)} \Rightarrow \int \frac{dx}{(1 - x)} = \int \frac{2pdp}{(p + p^2)}$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)} = \int \frac{2pdp}{p(1+p)} => \int \frac{dx}{(1-x)} = \int \frac{2pdp}{(1+p)}$$

$$ln(c) + ln(x+1) = 2\ ln(1+p^2) => ln[c(x-1)] = ln(1+p^2)^2$$

Por lo tanto, se utiliza la sustitución 3.8:

$$p = \sqrt{(cx-x)} - 1y = -xp^2 + p^2 + 1$$

$$y = -x(cx - c - 1) + cx - c - 1$$

Capítulo III

Ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior

Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden

13. Ejemplo. –

220. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 95 y 96. Ejemplo 3-3.

Bajo condiciones estacionarias, la distribución de temperatura en la pared plana de espesor L que se muestra en la figura 3-7 está regida por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden $y'' = 0$, donde y representa la temperatura de la pared en la ubicación x. Determine la solución general (la distribución de temperatura en la pared) y la solución específica para los siguientes casos:

A) Condiciones iniciales $y(0) = 10$ y $y'(0) = -5$

B) Condiciones en la frontera $y(0) = 10$ y $y(L) = 0$

C) Condiciones en la frontera $y'(0) = -5$ y $y'(L) = 10$

D) Condiciones en la frontera $y'(0) = -5$ y $y'(L) = -5$

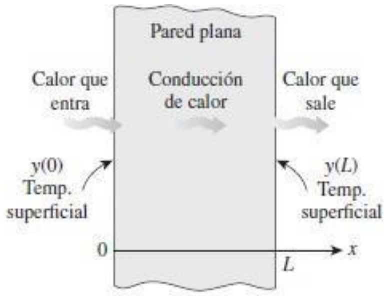


FIGURA 3-7
La pared plana que se discute en el ejemplo 3-3.

Solución. –

Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Las funciones $P(x) = Q(x) = R(x) = 0$ en este caso son continuas en todo el eje x. Por tanto, al menos matemáticamente, la solución no está limitada a algún intervalo finito. Sin embargo, la ecuación diferencial describe la distribución de temperatura en el medio $0 \leq x \leq L$; por tanto, limitaremos la solución solo a este intervalo.

La ecuación diferencial se puede integrar directamente. De esta manera, obtenemos la solución general mediante dos integraciones sucesivas:

$y' = C_1$… (3-6) y $y = C_1 x + C_2$… (3-7)

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Observe que la solución general de esta ecuación diferencial de segundo orden incluye dos constantes arbitrarias como se esperaba

En este caso, la solución general se parece a la fórmula general de una línea recta cuya pendiente es C_1 y cuyo valor en $x = 0$ es C_2. Por tanto, cualquier línea recta es una solución de la ecuación diferencial $y'' = 0$ (figura 3-8). Observe que las líneas de solución pueden intersecarse entre sí. Es decir, diferentes soluciones pueden tener el mismo valor en el mismo punto. Pero nunca pueden tener la misma pendiente en el punto de intersección y seguir siendo soluciones diferentes.

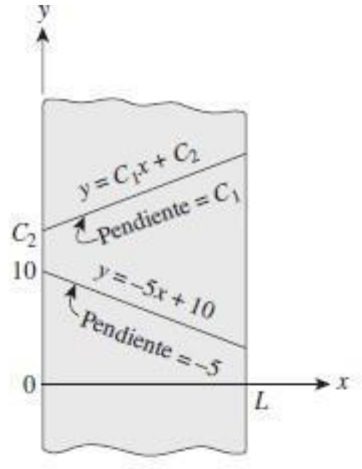


FIGURA 3-8
Cualquier línea recta es una solución de la ecuación diferencial y″ = 0, pero solo una de esas líneas satisfará las condiciones iniciales y(0) = 10 y y′(0) = 5.

A) La solución que satisface las condiciones iniciales especificadas se obtiene aplicando las dos condiciones a la solución general y despejando C_1 y C_2

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$

$$y(0) = 10 \rightarrow 10 = -5.0 + C_2 \rightarrow C_2 = 10$$

Por tanto, $y(x) = -5x + 10$, que es la ecuación de una línea específica. De acuerdo con el teorema 3-1, ninguna otra línea de solución satisfará ambas condiciones iniciales. Por tanto, ésta es la solución única del problema especificado de valor inicial (figura 3-8).

B) La solución que satisface las condiciones en la frontera especificadas se obtiene aplicando las condiciones a la solución general para determinar C_1 y C_2:

$$y(0) = 10 \rightarrow 10 = C_1 * 0 + C_2 \rightarrow = 10$$

$$y(L) = 0 \rightarrow 0 = C_1 * L + 10 \rightarrow C_1 = -\frac{10}{L}$$

Por tanto, $y(x) = \left(-\frac{10}{L}\right)x + 10$, que es nuevamente la ecuación de una línea específica. El problema de valor en la frontera tiene una solución única en este caso. Físicamente, este problema corresponde a la especificación de la temperatura de la pared en ambas superficies.

C) La solución que satisface las condiciones en la frontera especificadas se obtiene aplicándolas a la solución general para determinar C_1 y C_2:

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$

$$y'(L) = 10 \rightarrow C_1 = 10$$

lo cual es imposible, ya que C_1 no puede ser -5 y 10 al mismo tiempo. Por tanto, este problema de valores en la frontera no tiene solución. Físicamente, esto corresponde a suministrar calor a la pared plana desde ambos lados y esperar que la temperatura de la pared permanezca constante (que no cambie con el tiempo), lo cual nunca sucederá.

D) La solución que satisface las condiciones en la frontera especificadas se obtiene aplicándolas a la solución general para determinar C_1 y C_2:

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$

Por tanto, $y(x) = -5x + C_2$, que no es una solución única porque C_2 es arbitraria. La solución representa una familia de líneas rectas cuya pendiente es -5. Físicamente, este problema corresponde al de requerir que el flujo de calor suministrado a la pared en $x = 0$ sea igual al caudal de remoción de calor del otro lado de la pared en $x = L$. Esta información no es suficiente para fijar la distribución de temperatura en la pared. De modo que no sorprende que la solución de este problema de valor en la frontera no sea única.

Sistema resorte/masa: movimiento libre no amortiguado

1. **Ejemplo. –**

221. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 183 y 184. Ejemplo 1.

Una masa que pesa 2 libras alarga 6 pulgadas un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pie/s. Determine la ecuación de movimiento.

SOLUCIÓN Debido a que se está usando el sistema de unidades de ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir en pies: 6 pulg = $\frac{1}{2}$ pie; 8 pulg = $\frac{2}{3}$ pie.

Además, se deben convertir las unidades de peso dadas en libras a unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos que $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, de la ley de Hooke, $2 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que la constante de resorte es $k = 4\text{lb/pie}$. Por lo que, de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento y la velocidad iniciales son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo en la última condición es una consecuencia del hecho de que a la masa se le da una velocidad inicial en la dirección negativa o hacia arriba.

Ahora $\omega^2 = 64$ o $\omega = 8$, por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1\cos 8t + c_2\operatorname{sen} 8t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t.$$

2. **Ejemplo. –**

222. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 184. Ejemplo 2.

En vista de la descripción anterior, se puede escribir lasolución (5) en la forma alternativa $x(t) = A\operatorname{sen}(8t + \phi)$. El cálculo de la amplitud es directo, $A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} \approx$ 0.69 pies, pero se debe tener cuidado al calcular el ángulo de fase ϕ definido por (7). Con $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$ se encuentra $\tan\phi = -4$y, con una calculadora se obtiene $\tan^{-1}(-4) = -1.326\text{rad}$. Este no es el ángulo de fase, puesto que $\tan^{-1}(-4)$ se localiza en el cuarto cuadrante y por tanto contradice el hecho de que $\operatorname{sen}\phi > 0$ y $\cos\phi < 0$ porque $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$. Por tanto, se debe considerar que ϕ es un ángulo del segundo cuadrante $\phi = \pi + (-1.326) = 1.816\text{rad}$. Así la ecuación (5) es igual a

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t + 1.816).$$

El periodo de esta función es $T = 2\pi/8 = \pi/4$ s.

Sistemas resorte/masa: movimiento libre amortiguado

3. Ejemplo. –

223. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 187. Ejemplo 3.

Se comprueba fácilmente que la solución del problema con valores iniciales es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$$

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}.$$

El problema se puede interpretar como representativo del movimiento sobreamortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de una posición una unidad abajo de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 1pie/s. Para graficar $x(t)$, se encuentra el valor de t para el cual la función tiene un extremo, es decir, el valor de tiempo para el cual la primera derivada (velocidad) es cero. Derivando la ecuación (16) se obtiene $x'(t) = -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t}$, así $x'(t) = 0$ implica que $e^{3t} = \frac{8}{5}$ o $t = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} =$ 0.157. Se tiene de la prueba de la primera derivada, así como de la intuición física, que $x(0.157) = 1.069$ pies es en realidad un máximo. En otras palabras, la masa logra un desplazamiento extremo de 1.069 pies abajo de la posición de equilibrio.

Se debe comprobar también si la gráfica cruza el eje t, es decir, si la masa pasa por la posición de equilibrio. En este caso tal cosa no puede suceder, porque la ecuación $x(t) = 0$, o $e^{3t} = \frac{2}{5}$, tiene una solución irrelevante desde el punto de vista físico $t = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} = -0.305$.

En la figura 5.1.9 se presenta la gráfica de $x(t)$, junto con algunos otros datos pertinentes.

4. Ejemplo. –

224. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 187 y 188. Ejemplo 4.

Una masa que pesa 8 libras alarga 2 pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 pies $/s$.

SOLUCIÓN

De la ley de Hooke se ve que $8 = k(2)$ da $k = 4\text{lb/}$ pie y que $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$slug.

La ecuación diferencial de movimiento es entonces

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \text{ o } \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

La ecuación auxiliar para (17) es $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$, así que $m_1 = m_2 = -4$. Por tanto el sistema está críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}.$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$, se encuentra, a su vez, que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Por tanto la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}.$$

Para graficar $x(t)$, se procede como en el ejemplo 3. De $x'(t) = -3e^{-4}(1 - 4t)$ vemos que $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$. El desplazamiento extremo correspondiente es $x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{4}\right)e^{-1} = -0.276$ pies. Como se muestra en la figura 5.1.10, este valor se interpreta para indicar que la masa alcanza una altura máxima de 0.276 pies arriba de la posición de equilibrio.

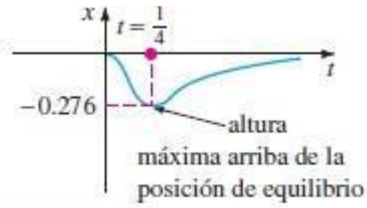


FIGURA 5.1.10 Sistema críticamente amortiguado.

5. **Ejemplo. –**

225. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 188. Ejemplo 5.**

Una masa que pesa 16 libras se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrioel resorte mide 8.2 pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. SOLUCIÓN La elongación del resorte después que se une la masa es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, así que se deduce de la ley de Hooke que $16 = k(3.2)$ o $k = 5\text{lb}/\text{pie}$. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug, por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \text{ o } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \ldots (20)$$

Procediendo, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo que significa que el sistema está subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t). \ldots (21)$$

Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ producen $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, por lo que la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right) \ldots (22)$$

Sistemas resorte/masa: Movimiento forzado

6. Ejemplo. –

226. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 189 y 190. Ejemplo 6.

Interprete y resuelva el problema con valores iniciales

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t,\ x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) = 0. \ldots (26)$$

SOLUCIÓN

Se puede interpretar el problema para representar un sistema vibratorio que consiste en una masa ($m = \frac{1}{5}$ slug o kilogramo) unida a un resorte ($k = 2\text{lb}/$ pie o N/m). La masa se libera inicialmente desde el reposo $\frac{1}{2}$ unidad (pie o metro) abajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está siendo impulsado por una fuerza periódica externa ($T = \pi/2$ s) comenzando en $t = 0$. De manera intuitiva, se podría esperar que incluso con amortiguamiento el sistema permaneciera en movimiento hasta que se "desactive" la función forzada, en cuyo caso disminuirían las amplitudes. Sin embargo, como se plantea en el problema, $f(t) = 5\cos 4t$ permanecerá "activada" por siempre. Primero se multiplica la ecuación diferencial en (26) por 5 y se resuelve

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

por los métodos usuales. Debido a que $m_1 = -3 + i, m_2 = -3 - i$, se deduce que $x_c(t) = e^{-3t}(c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$. Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$. Derivando $x_p(t)$ y sustituyendo en la ED, se obtiene

$$x_p'' + 6x_p' + 10x_p = (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\operatorname{sen} 4t = 25\cos 4t$$

El sistema de ecuaciones resultante

$$-6A + 24B = 25,\ -24A - 6B = 0$$

se cumple en $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. Se tiene que

$$x(t) = e^{-3s}(c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \ldots (27)$$

Cuando se hace $t = 0$ en la ecuación anterior, se obtiene $c_1 = \frac{38}{51}$. Derivando la expresión y haciendo $t = 0$, se encuentra también que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \ldots (28)$$

7. **Ejemplo. –**

227. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 190. Ejemplo 7.

La solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x_1,$$

donde x_1 es constante, está dada por

$$x(t) = \underbrace{(x_1 - 2)e^{-t}\operatorname{sen} t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\operatorname{sen} t}_{\text{estado estable}}$$

Las curvas solución para valores seleccionados de la velocidad inicial x_1 aparecen en la figura 5.1.13. Las gráficas muestran que la influencia del término transitorio es despreciable para un valor aproximado de $t > 3\pi/2$.

8. **Ejemplo. –**

228. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 190 y 191. Ejemplo 8.

Resuelva el problema con valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}\gamma t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0, \ldots (29)$$

donde F_0 es una constante y $\gamma \neq \omega$.

SOLUCIÓN

La función complementaria es $x_c(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t$. Para obtener una solución particular se supone $x_p(t) = A\cos\gamma t + B\operatorname{sen}\gamma t$, por lo que

$$x_p'' + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\operatorname{sen}\gamma t = F_0 \operatorname{sen}\gamma t.$$

Igualando los coeficientes se obtiene de inmediato $A = 0$ y $B = F_0/(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a la solución general

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t$$

se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t + \omega\operatorname{sen}\gamma t),\ \gamma \neq \omega \ldots (30)$$

Circuito en serie análogo

1. **Ejemplo. –**

229. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 192 y 193. Ejemplo 9.

Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito LRC cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$. SOLUCIÓN Puesto que $1/C = 1000$, la ecuación (34) se convierte en

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0 \text{ o } q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Resolviendo esta ecuación homogénea de la manera usual, se encuentra que el circuito es subamortiguado y $q(t) = e^{-2at}(c_1\cos 60t + c_2 \text{ sen } 60t)$. Aplicando las condiciones iniciales, se encuentra $c_1 = q_0$ y $c_2 = \frac{1}{3}q_0$. Por tanto

$$q(t) = q_0e^{-20r}\left(\cos 60t + \frac{1}{3}\text{sen}\, 60t\right)$$

Usando (23), podemos escribir la solución anterior como

$$q(t) = \frac{q_0\sqrt{10}}{3}e^{-20}\text{sen}(60t + 1.249).$$

2. Ejemplo. –

230. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 193. Ejemplo 10.

Encuentre la solución de estado estable $q(t)$ y la corriente de estado estable en un circuito LRC en serie cuando el voltaje aplicado es $E(t) = E_0$ sen γt. sOLUCIÓN La solución de estado estable $q_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0\text{sen}\,\gamma t$$

Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $q_p(t) = A\,\text{sen}\,\gamma t + B\cos\gamma t$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e igualando coeficientes, se obtiene

$$A = \frac{E_0\left(L\gamma - \frac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)},\quad B = \frac{E_0R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}.$$

Es conveniente expresar A y B en términos de algunos nuevos símbolos.

$$\text{Si } X = L\gamma - \frac{1}{C\gamma},\ \text{entonces } Z^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2}.$$

$$\text{Si } Z = \sqrt{X^2 + R^2},\ \text{entonces } Z^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$$

Por tanto $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, así que la carga de estado estable es

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\text{sen}\,\gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

Ahora la corriente de estado estable está dada por $i_p(t) = q_p'(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\text{sen}\,\gamma - \frac{X}{Z}\cos\gamma\right)$$

Fórmula de Abel

14. Ejemplo. -

231. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 106. Ejemplo 3-11.

Determine el wronskiano de las soluciones $y_1 = x^{1/3}$ y $y_2 = 1/x$ de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + \frac{5}{3} x y' - \frac{1}{3} y = 0$$

en el intervalo $0 < x < \infty$ usando a) la fórmula del wronskiano y b) la fórmula de Abel.

Solución. –

Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden y puede escribirse en forma estándar dividiendo cada término entre el coeficiente de y'', que es x^2:

$$y'' + \frac{5}{3x} y' - \frac{1}{3x^2} y = 0$$

Por tanto, $P(x) = 5/3x$ y $Q(x) = -1/3x^2$, son continuas en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 0$. Así, esperamos que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ sea idénticamente cero o que nunca lo sea en el intervalo $0 < x < \infty$.

a) Por la fórmula del wronskiano, tenemos

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = x^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{x} = -\frac{4}{3} x^{-\frac{5}{3}} \neq 0$$

b) Por la fórmula de Abel, tenemos

$$W(y_1, y_2) = K e^{-\int P(x)\,dx} = K e^{-\int \frac{5}{3x} dx} = K e^{-\frac{5}{3}\ln x} = K x^{-\frac{5}{3}}$$

Por tanto, $K = -4/3$. Observe que $W(y_1, y_2)$ nunca es cero en $0 < x < \infty$, indicando que ambas soluciones son linealmente independientes.

Vibraciones mecánicas y eléctricas

15. Ejemplo

232. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 200. Ejemplo 1.

Una masa que pesa 4 libras estira 2 pulgadas un resorte. Suponga que la masa se desplaza 6 pulgadas en la dirección positiva y que después se suelta. La masa está en un medio que ejerce una resistencia viscosa de 6 libras cuando la velocidad de esa masa es de 3 pies por segundo. Con las suposiciones analizadas en esta sección, formule el problema con valor inicial que rige el movimiento de la masa.

El problema con valor inicial requerido consta de la ecuación diferencial (7) y las condiciones iniciales (8), por lo que la tarea es determinar las diversas constantes que aparecen es estas ecuaciones. El primer paso es elegir las unidades de medición. Con base en el planteamiento del problema, es natural utilizar el sistema inglés de unidades, en vez del sistema métrico. La única unidad de tiempo mencionada es el segundo, por lo que t se medirá ea segundos. Por otra parte, en el planteamiento aparecen el pie y la pulgada como unidades de longitud; no tiene importancia cual se use, pero una vez hecha la elección es importante ser coherente. Para concretar, el desplazamiento a se medirá en pies.

Dado que en el planteamiento del problema nada se dice acerca de una fuerza externa, se supone que $F(t) = 0$. Para determinar m nótese que

El coeficiente de amortiguamiento γ queda determinado por la afúmación de que $\gamma P/$ es igual a 6 libras cuando u' es de 3 pies por segundo. Por lo tanto,

$$y = \frac{6\text{lb}}{3\text{ pie/seg}} = 2\ \frac{\text{lb} - \text{seg}}{\text{pie}}.$$

La constante del resorte k se encuentra a partir de la afirmación de que la masa alarga el resorte en 2 pulgadas o $1/6$ pie; por tanto,

$$k = \frac{4\text{lb}}{1/6\text{ pie}} = 24\ \frac{\text{lb}}{\text{pie}}.$$

Como consecuencia, la ecuación (7) se queda

$$ku'' + 2u + 24u = 0$$

o bien,

$$u'' + 16u' + 192u = 0$$

Las condiciones iniciales son

$$w(0) = \frac{1}{2},\ u'(0) = 0.$$

La segunda condición inicial se da implícitamente por la expresión "se suelta" en el planteamiento del problema, la cual se interpreta como que la masa se deja en movimiento sin velocidad inicial.

16. Ejemplo. –

233. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 202 y 203. Ejemplo 2

Suponga que una masa que pesa 10lb alarga 2 pulgadas un resorte. Si la masa se desplaza otras 2 pulgadas y entonces se pone en movimiento con una velocidad inicial hacia arriba de un pie por segundo, determinar la posición de la masa en cualquier instante posterior. Determinar también el periodo, la amplitud y la fase del movimiento.

La constante de resorte es $k = 10\text{lb}/2$ pulg, $= 60\text{lb}/$ pie y la masa es $m = w/g = 10/32\text{lb} - \text{s}^2/$ pic. De donde, la ecuación del movimiento se reduce a

$$u^{\sigma} + 192u = 0 \ldots (19)$$

y la solución general es

$$u = A\cos(8\sqrt{3}t) + B\text{sen}(8\sqrt{3}t)$$

La solucion que satisface las condiciones iniciales $u(0) = 1/6$ pic y $u'(0) = -1$ pie/s es

$$u = \frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}}\text{sen}(8\sqrt{3}t) \ldots . (20)$$

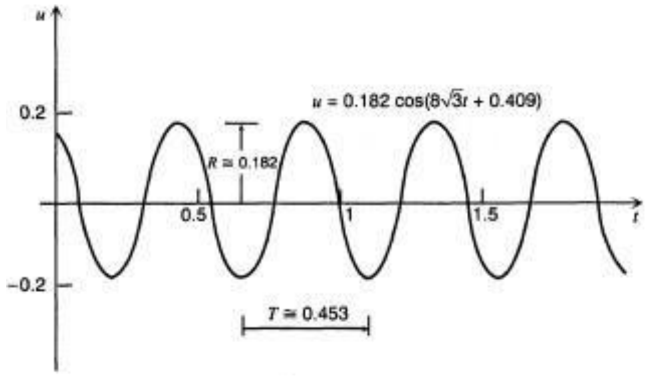


FIGURA 3.8.4 Vibración libre no amortiguada; $u'' + 192u = 0, u(0) = 1/6, u'(0) = -1$. La frecuencia natural es $\omega_0 = \sqrt{192} = 13.856$ rad/s, de modo que el periodo es $T = 2\pi/\omega_0 \cong 0.45345$ s. La amplitud R y la fase δ se encuentran a partir de las ecuaciones (17); se tiene

$$R^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} = \frac{19}{576}, \text{ de modo que } R = 0.18162 \text{ pies}$$

La segunda de las ecuaciones (17) conduce a $\tan\ \delta = -\sqrt{3}/4$. Existen dos soluciones de esta ecuación: una en el segundo cuadrante y otra en el cuarto. En este problema $\cos\delta > 0$ y sen $\delta < 0$, por lo que δ está en el cuarto cuadrante; a saber,

$$\delta = -\arctan(\sqrt{3}/4) \geq -0.40864 \text{rad}.$$

En la figura 3.8.4 se muestra la gráfica de la solución (20).

17. Ejemplo. –

234. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 205 y 206. Ejemplo 3.

El movimiento de cierto sistema resorte-masa está regido por la ecuación diferencial

$$u'' + 0.125u' + u = 0$$

en donde u se mide en pies y t en segundos. Si $u(0) = 2$ y $u'(0) = 0$, determinar la posición de la masa en cualquier instante. Encontrar también la cuasifrecuencia y el cuasiperiodo, así como el instante en el que la masa pasa por vez primera por su posición de equilibrio. La solución de la ecuación (28) es

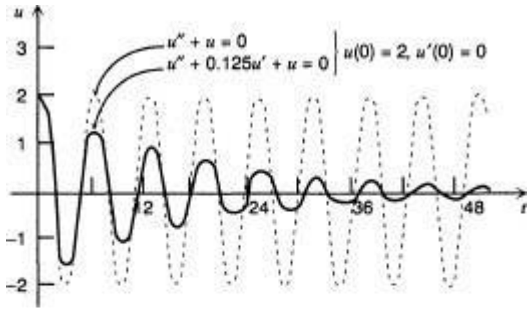
$$u = e^{-t/10}\left[A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{255}}{16}t\right].$$

Para satisfacer las condiciones iniciales es necesario elegir $A = 2$ y $B = 2/\sqrt{255}$; de donde, la solución del problema con valor iniciul es

$$u = e^{-N16}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{255}}{16}t\right)$$
$$= \frac{32}{\sqrt{255}}e^{-s/16}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right),$$

en donde tan $\delta = 1/\sqrt{255}$, de modo que $\delta = 0.06254$. En la figura 3.8 .7 se muestra el desplazamiento de la masa como función del tiempo. Con fines de comparación, también se muestra el movimiento si se desprecia el término de amortiguamiento.

La cuasi frecuencia es $\mu = \sqrt{255}/16 = 0.998$yel cuasi periodo es $T_d = 2\pi/\mu = 6.295$ s. Estos valores difieren sólo ligeramente de los valores correspondientes (1 y 2π, respectivamente) de la oscilación no amortiguada. Esto también es evidente a partir de las gráficas de la figura 3.8.7, que ascienden y descienden casi juntas. El coeficiente de amortiguamiento es pequeño en este ejemplo; de hecho, solo 1/16 del valor crítico. A pesar de ello, la amplitud de la oscilación se reduce más bien con rapidez. Por ejemplo, la amplitud es menor que el 1% de su valor original para $t > 16\ln 100 = 73.4$, 0 alrededor de una docena de ciclos.



235. FIGURA 3.8.7 Vibración con amortiguamiento pequeño (curva de trazo continuo) y sin amortiguamiento (curva a trazos).

Para ballar el instante en el que la masa pasa por primera vez por su posición de equilibrio, se considera la ecuación (29) y se bace $255t/16 - \delta$ igual a $\pi/2$, el cero positivo más pequeño de la función coseno, entonces, al despejar t se obtiene

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + 8\right) \cong 1.637 \text{ s}$$

Ecuación de Cauchy-Euler

236. X)Nagle K., Saff E. & Snider A. (2005) Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. Cuarta Edición. Ejemplo 2 (pág. 156)

Utilizar el método de Euler mejorado con tolerancia para aproximar la solución del problema con valor inicial

(12) $y' = x + 2y, y(0) = 0.25,$

en $x = 2$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.001$, utilizar un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

Solución

Los valores de la partida son $x_0 = 0, y_0 = 0.25$. Como estamos calculando la aproximación para $c = 2$, el valor inicial para h es

$$h = (2 = 0)2^{-0} = 2.$$

Para la ecuación (12), tenemos que $f(x, y) = x + 2y$, de modo que los números F y G en la subrutina son

$$F = x + 2y$$

$$G = (x + h) + 2(x + hF) = x + 2y + h(1 + 2x + 4y),$$

y tenemos que

$$x = x + h$$

$$y = y + \frac{h}{2}(F + G) = y + \frac{h}{2}(2x + 4y) + \frac{h^2}{2}(1 + 2x + 4y).$$

Así, con $x_0 = 0, y_0 = 0.25$ y $h = 2$, obtenemos para la primera aproximación

$$y = 0.25 + (0 + 1) + 2(1 + 1) = 5.25$$

Para describir las demás salidas del algoritmo, usamos la notación $y(2; h)$ para la aproximación con tamaño de paso h. Así, $y(2; 2) = 5.25$, y vemos del algoritmo que

$$y(2; 1) = 11.25000 \qquad y(2; 2^{-5}) = 25.98132$$

$$y(2; 2^{-1}) = 18.28125 \qquad y(2; 2^{-6}) = 26.03172$$

$$y(2; 2^{-2}) = 23.06067 \qquad y(2; 2^{-7}) = 26.04468$$

$$y(2; 2^{-3}) = 25.12012 \qquad y(2; 2^{-8}) = 26.04797$$

$$y(2; 2^{-4}) = 25.79127 \qquad y(2; 2^{-9}) = 26.04880$$

Como $|y(2; 2^{-9}) - y(2; 2^{-8})| = 0.00083$, que es menor que $\varepsilon = 0.001$, nos detenemos.
La solución exacta de (12) es $\phi(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - x - \frac{1}{2})$, de modo que hemos determinado que

$$\phi(2) = \frac{1}{2}(e^{4} - \frac{5}{2}) \approx 26.04880.$$

237. Zill, D. (2002) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (novena edición). Editorial CENGAGE (ejemplo 4 , pág 169)

Resolver $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y = 0$

Solución Las tres primeras derivadas de $y = x^m$ son

$\frac{dx}{dx} = mx^{m-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$,

Así la ecuación diferencial se convierte en

$$= x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3} + 5xm(m-1)x^{m-2} + 7mx^{m-1} + 8x^m$$

$$= x^m(m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8)$$

$$= x^m(m^3 + 2m^2 + 4m + 8) = x^m(m + 2)(m^2 + 4) = 0$$

En este caso veremos que $y = x^m$ es solución de la ecuación diferencial para $m_1 = -2, m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 cos\ (2\ ln\ ln\ x\ ) + c_3 sen\ (2\ ln\ ln\ x\ )$$

238. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 1, pág.171)

Resolver la siguiente ecuación de Cauchy-Euler: $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

En esta ecuación tenemos: $a = -1$ y $b = 2$.

Su ecuación auxiliar es:

$$m^2 + (a - 1)m + b =$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m = 1 \pm i,\ \alpha = 1\ \ \beta = 1$$

$\therefore y = x(ln\ ln\ x + \ BSen\ ln\ ln\ x)$, es la solución general.

239. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 2, pág.172)

Resolver: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

En esta ecuación tenemos: $a = 3$ y $b = 1$. Su

ecuación auxiliar es:

$$m^2 + (a - 1)m + b =$$

$$\rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -1$$

$\therefore y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2\ ln\ ln\ x)$, es la solución general.

240. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 3, pág.172)

Resolver: $x^2y'' + xy' - y = 0$

Usando la transformación $x = e^t$ para obtener su solución.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ por regla de la cadena.

Como $x = e^t \rightarrow t = ln\ ln\ x$ y $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, sustituyendo en la primera derivada, queda:

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$$

Volviendo a derivada con respecto a x:

$$y'' = \frac{dy}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituyendo la ecuación diferencial dada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

Cuya ecuación auxiliar es: $\lambda^2 - 1 = 0$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\therefore y = C_1e^{-t} + C_2e^{t}$$

241. Carmona, I y López, E. Ecuaciones diferenciales (quinta edición) (2011).Pearson Education. (ejemplo 4, pág.172)

Encontrar la ecuación diferencial que tiene como solución: $y = C_1x + C_2x^3$. De aquí se sigue así:

$$\rightarrow m_1 = 1 \qquad m_2 = 3$$

$$\rightarrow (m - 1)(m - 3) = 0,\ m^2 - 4m + 3 = 0$$

Como la ecuación auxiliar tiene la forma $m^2 + (a - 1)m + b = 0$

$$\rightarrow a - 1 = -4 \ \text{ y } b = 3 \qquad \rightarrow a = -3y,$$

$\therefore x^2y'' + axy' + by = 0$ se transforma en: $x^2y'' - 3xy + 3y = 0$.

242. García, E. Reich, D. Ecuaciones diferenciales: Una nueva visión (2015). Editorial Patria (problema resuelto , pág.110-111)

Determinar la solución general de la siguiente ecuación:

$$x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$$

Solución

Primero, hacemos $y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m - 1)x^{m-2}$ y sustituimos en la ecuación diferencial:

$$x^2m(m - 1)x^{m-2} + 3xmx^{m-1} + 10x^m = 0$$

$$m(m - 1)x^m + 3mx^m + 10x^m = 0$$

Así, la ecuación característica a resolver es:

$$m(m - 1) + 3m + 10 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 10 = 0$$

Por tanto, las soluciones son:

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(10)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm 3i = \alpha \pm \beta i$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = x^{-1}(A\cos(\ln x^3) + B\,sen(\ln x^3)) = \frac{A}{x}\cos(\ln x^3) + \frac{A}{x}\cos(\ln x^3)$$

243. Espinosa, E. et al. (2010) Ecuaciones Diferenciales. Editorial Canek. (Ejemplo 4.7.6, pág 255-256).

Resolver $x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' = x\ln x$

Solución

Si sustituimos

$$y' = e^{-t}\ dy/dt'\ y'' = e^{-2t}(d^2y/dt^2 - dy/dt) \text{ y}$$
$$y''' = e^{-3t}\ (d^3y/dt^3 - 3d^2y/dt^2 + 2dy/dt)$$
$$e^{3t}[e^{-3t}(d^3y/dt^3 - 3d^2y/dt^2 + 2dy/dt)] + 3e^{2t}[e^{-2t}(d^2y/dt^2 - dy/dt)]$$
$$-3e^t[e^{-t}dy/dt] = e^t\ \ln e^t$$

Que se simplifica en:

$$[d^3y/dt^3 - 3d^2y/dt^2 + 2dy/dt + 3d^2y/dt^2 - 3dy/dt - 3dy/dt$$
$$= t\,e^t\ d^3y/dt^3 - 4dy/dt = t\,e^t$$

Esta es una ED con coeficientes constantes, para resolverla aplicamos el Procedimiento conocido. En este caso, la ecuación característica asociada a la ED homogénea es:

$$(r^3 - 4r) = r(r-2)(r+2) = 0$$

Cuyas raíces son r1 = 0, r2 = 2 & r3 = −2. Deducimos que el conjunto fundamental de soluciones está integrado por funciones:

$$\phi 1 = 1;\ \phi 2 = e2t\ \&\ \phi 3 = e{-}2t$$

El Wronskiano correspondiente para este caso es:

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ 0 & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16$$

Y las funciones W1, W2, W3 son:

$$W_1 = |0\ e^{2t}\ e^{-2t}|\ |0\ 2e^{2t} - 2e^{-2t}|\ |te^t\ 4e^{2t}\ 4e^{-2t}|$$
$$= te^t[-2 - 2] = -4te^t\ W_2$$
$$= |1\ 0\ e^{-2t}|\ |0\ 0 - 2e^{-2t}|\ |0\ te^t\ 4e^{-2t}| = 2te^t\ W_3$$
$$= |1\ e^{2t}\ 0|\ |0\ 2e^{2t}\ 0|\ |0\ 4e^{2t}\ te^t| = 2te^{3t}$$

Por último, integramos las funciones incógnitas u_1, u_2 y u_3 y así obtenemos:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} dt = \int -\frac{4te^t}{16} dt = -\frac{1}{4}\int te^t\, dt = -\frac{1}{4} e^t (t - 1)$$
$$u_2 = \int \frac{W_2}{W} dt = \int \frac{2te^{-t}}{16} dt = \frac{1}{8}\int te^{-t}dt = -\frac{1}{8} e^{-t}(t + 1)$$
$$u_3 = \int \frac{W_3}{W} dt = \int \frac{2te^{3t}}{16} dt = \frac{1}{8}\int te^{3t}dt = \frac{1}{72} e^{3t}(3t - 1)$$

En conclusión, la solución estará dada por:

$$y = [C_1 + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}] + [u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3]$$
$$= [C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}] - \frac{1}{4} e^t(t - 1) - \frac{1}{8} e^{-t}(t + 1)e^{2t} + \frac{1}{72} e^{3t}(3t - 1)e^{-2t}$$
$$= [C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}] + e^t\left[-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}t - \frac{1}{72}\right]$$
$$= [C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}] + \frac{1}{9} e^t(1 - 3t)$$

Sin embargo, en la ecuación lineal, no es t la variable independiente, sino x.

De x = et, hallamos que t = ln x. Sustituyendo en el resultado anterior, encontramos:

$$y = C_1 + C_2x^2 + C_3x^{-2} + \frac{1}{9}x(1 - 3\ln x)$$

244. Zill,D. Cullen, M.(2008) Ecuaciones diferenciales, Matemáticas avanzadas para Ingeniería (3° edición). McGraw-Hill/Interamericana Editores (Ejemplo 1, pág 141).

Resolver $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

Solución

En lugar de sólo memorizar la ecuación (1), algunas veces se prefiere asumir como solución a $y = x^m$ con el fin de entender el origen y la diferencia entre esta nueva forma de ecuación auxiliar y la obtenida en la sección 3.3. Al diferenciar dos veces,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

y sustituir de nuevo en la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 * m(m-1)x^{m-2} - 2x * mx^{m-1} - 4x^m$$

$$= x^m(m(m-1) - 2m - 4) = x^m(m^2 - 3m - 4) = 0$$

si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Ahora $(m+1)(m-4) = 0$ implica $m_1 = -1, m_2 = 4$ de manera que $y = c_1x^{-1} + c_2x^4$.

245. Zill,D. Cullen, M.(2008) Ecuaciones diferenciales, Matemáticas avanzadas para Ingeniería (3° edición). McGraw-Hill/Interamericana Editores (Ejemplo 2, pág 142).

Resolver $4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$

Solución

La sustitución $y = x^m$ nos da

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1)$$

$$= x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

cuando $4m^2 + 4m + 1 = 0$ o $(2m+1)^2 = 0$. Dado que $m_1 = -\frac{1}{2}$, la solución general es $y = c_1x^{-\frac{1}{2}} + c_2x^{-\frac{1}{2}}\ln x$.

Para ecuaciones de orden superior, si m_1 es una raíz de multiplicidad k, entonces puede demostrarse que

$$x^{m_1}, \; x^{m_1}\ln x, \; x^{m_1}(\ln x)^2, \; \ldots, \; x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$$

son k soluciones linealmente independientes. Asimismo, la solución general de la ecuación diferencial debe contener entonces una combinación lineal de estas k soluciones.

246. Zill,D. Cullen, M. (2008) Ecuaciones diferenciales, Matemáticas avanzadas para Ingeniería (3° edición). McGraw-Hill/Interamericana Editores (Ejemplo 3, pág 142-143)

Resolver el problema de valor inicial $4x^2y'' + 17y = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

Solución

En la ecuación de Cauchy-Euler dada, falta el término y'; sin embargo, la sustitución $y = x^m$ produce

$$4x^2y'' + 17y = x^m(4m(m-1)+17) = x^m(4m^2-4m+17) = 0$$

cuando $4m^2 - 4m + 17 = 0$. De la fórmula cuadrática encontramos que las raíces son $m_1 = \frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = \frac{1}{2} - 2i$. Con las identificaciones $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 2$, vemos a partir de (4) que la solución general de la ecuación diferencial es

$y = x^{\frac{1}{2}}[c_1 cos(2\ ln\, x) + c_2 sen(2\ ln\, x)]$.

Si se aplican las condiciones iniciales $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$ a la solución anterior y se usa $ln\ 1 = 0$ entonces encontramos, a su vez, que $c_1 = -1$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es $y = -x^{\frac{1}{2}} cos(2\ ln\, x)$. La gráfica de esta función, obtenida con ayuda de un programa de cómputo, está dada en la figura 3.15. La solución particular es oscilatoria y no acotada cuando $x \to \infty$.

247. Espinosa et al. (2010) Ecuaciones Diferenciales. Editorial Canek. (Ejemplo 4.7.7, pág 256-257)

Resolver la siguiente PIV: $x^2y''' - xy'' + y' = \frac{ln\, x}{x}$, con $y'(1) = 1 \& y''(1) = -1$

Solución

Primero multiplicamos la ecuación por x
a fin de llevarla a una ecuación del tipo Cauchy-Euler:

$$x^3y''' - x^2y'' + xy' = ln\, x$$

Si hacemos en cambio de variable $x = \theta^t$
e incorporamos los otros:

$$e^{3t}\left[e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\right] - e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] + e^{t}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = t$$

Al simplificar, hallamos:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = t \quad \frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = t$$

Esta es una ED con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente a la ED homogénea asociada es:

$$r^3 - 4r^2 + 4r = r(r^2 - 4r - 4) = r(r-2)^2 = 0$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación son $r_1 = 0$ y $r_2 = r_3 = 2$

. En consecuencia, las funciones que se integran al conjunto fundamental de la ED

homogénea asociada son:

$$\phi_1 = 1; \phi_2 = e^{2t} \& \phi_3 = te^{2t}$$

Con ella podemos calcular en Wronskiano $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, éste es:

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = |1\ e^{2t}\ te^{t}|\ |0\ 2e^{2t}\ (2t+1)e^{2t}|\ |0\ 4e^{2t}\ (4t+1)e^{2t}\ | =$$
$$(8t+4)e^{4t} - (8t+4)e^{4t} = 4e^{4t}$$

De manera similar:

$$W_1 = |0\ e^{2t}\ te^t\ 0\ 2e^{2t}\ (2t+1)e^{2t}\ t\ 4e^{2t}\ (4t+1)e^{2t}|$$

$= t[(2t+1)e^{4t} - 2te^{4t}] = te^{4t}$

$$W_2 = |1\ 0\ te^t||\ 0\ 0\ (2t+1)e^{2t}|\ |0\ t\ (4t+1)e^{2t}|$$

$= -t(2t+1)e^{2t} = (-2t^2-1)e^{2t}$

$$W_3 = |1\ e^{2t}\ 0|\ |0\ 2e^{2t}\ 0||0\ 4e^{2t}\ t|$$

$= 2te^{2t}$

Así, por el método de variación de parámetros, las funciones incógnitas u_1, u_2 y u_3 son:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}dt = \int \frac{te^{4t}}{4e^{4t}}dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{8}t^2$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W}dt = \int \frac{(-2t^2-1)e^{2t}}{4e^{4t}}dt = -\frac{1}{4}\int (2t^2+1)e^{-2t}dt$$

Si en la última integral aplicamos integración por partes, obtenemos:

$$u_2 = \frac{1}{16}e^{-2t}(3+6t+4t^2)$$

Otra integración por partes nos da como resultado:

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W}dt = \int \frac{2te^{2t}}{4e^{4t}}dt = \frac{1}{2}\int te^{-2t}dt = -\frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1)$$

De $x = e^t$ obtenemos $t = \ln x$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = [C_1 + C_2e^{2t} + C_3te^{2t}] + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}e^{-2t}(3+6t+4t^2)e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1)te^{2t}$$

$$= [C_1 + C_2e^{2t} + C_3te^{2t}] + \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{16} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t$$

$$= [C_1 + C_2e^{2t} + C_3te^{2t}] + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t$$

De $x = e^t$ obtenemos $t = \ln x$. Por lo tanto, la solución general en la variable original x es:

$$y = C_1 + C_2x^2 + C_3x^2\ln x + \frac{1}{8}\ln^2 x + \frac{1}{4}\ln x$$

Al aplicar las condiciones iniciales:

$$y = \frac{1}{16}[-13 + 13x^2 - 14x^2\ln x + 2\ln^2 x + 4\ln x]$$

Solución de sistemas de ED lineales por eliminación

1. **Ejemplo. –**

248. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 146. Ejemplo 1.

Encontrar el intervalo más largo en el que se tiene la certeza de que existe la solución del problema con valor inicial

$$(x^2 - 3x)y'' + xy' - (x + 3)y = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1$$

Si la ecuación diferencial dada se escribe en la forma de la ecuación (4), entonces $p(x) = 1/(x - 3)$, $q(x) = -(x + 3)/x(x - 3)$ y $g(x) = 0$. Los únicos puntos de discontinuidad de los coeficientes son $x = 0$ y $x = 3$. Por consiguiente, el intervalo abierto más largo que contiene el punto inicial $x = 1$, en el que todos los coeficientes son continuos es $0 < x < 3$. Por tanto, este es el intervalo más largo para el cual el teorema 3.2.1 garantiza la existencia de la solución.

2. **Ejemplo. –**

249. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 146. Ejemplo 2.

Hallar la solución única del problema con valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0$$

en donde p y q son continuas en un intervalo abierto I que contiene a x_0

La función $y =. \phi(x) = 0$ para toda x en I evidentemente satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Por el teorema 3.2.1, es la única solución del problema dado.

3. **Ejemplo. –**

250. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 148. Ejemplo 3.

En el ejemplo 1 de la sección 3.1 se encontró que $y_1(x) = e^{-2x}$ y $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Hallar el wronskiano de y_1 y y_2.

El wronskiano de estas dos funciones es

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}.$$

Dado que W es diferente de cero para todos los valores de x, pueden usarse las funciones y_1 y y_2 para construir soluciones de la ecuación diferencial dada, junto con condiciones iniciales prescritas en cualquier valor de x. En el ejemplo 2 de la sección 3.1 se resolvió un problema con un valor inicial de este tipo.

4. **Ejemplo. –**

251. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 149. Ejemplo 4.

Supóngase que $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones de una ecuación de la forma (1).

Demostrar que forman un conjunto fundamental de soluciones si $r_1 \neq r_2$.

Calcule el wronskiano de y_1 y y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp\left[(r_1 + r_2)x\right].$$

Dado que la función exponencial nunca es cero y como $r_2 - r_1 \neq 0$ por la proposición del problema, se deduce que W es diferente de cero para todo valor de x. Como consecuencia, y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones.

5. **Ejemplo. –**

252. **William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 150. Ejemplo.**

Demostrar que $y_1(x) = x^{1/2}$ y $y_2(x) = x^{-1}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0. \ \ldots (14)$$

En la sección 5.5 se mostrará cómo resolver la ecuación (14); ver también el problema 32 en la sección 3.4. Sin embargo, en esta etapa es posible comprobar por sustitución directa que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Dado que $y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $y_1''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, se tiene

$$2x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) + 3x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - x^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)x^{1/2} = 0.$$

De modo semejante, $y_2'(x) = -x^{-2}$ y $y_2''(x) = 2x^{-3}$, así que

$$2x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0.$$

A continuación, calcule el wronskiano W de y_1 y y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} \ldots (15)$$

Como $W \neq 0$ para $x > 0$, se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones allí.

6. **Ejemplo. –**

253. **William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 151. Ejemplo 6.**

Encuentre el conjunto fundamental de soluciones especificado por el teorema 3.2 .5 , para la ecuación diferencial

$$y'' - y = 0 \ldots (16)$$

si se utiliza el punto inicial $x_0 = 0$.

En la sección 3.1 se señaló que dos soluciones de la ecuación (16) son $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$. El wronskiano de estas soluciones es $W = -2 \neq 0$, de modo que forman un conjunto fundamental de soluciones. Sin embargo, no son las soluciones fundamentales indicadas por el teorema 3.2.5 porque no satisfacen las condiciones iniciales mencionadas en ese teorema en el punto $x = 0$.

A fin de encontrar las soluciones fundamentales especificadas por el teorema es necesario hallar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales adecuadas. Se denota por $y_3(x)$ la solución de la ecuación (16) que satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \ldots (17)$$

La solución general de la ecuación (16) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \ldots (18)$$

y se satisfacen las condiciones iniciales (17) si $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 1/2$. Por tanto

$$y_3(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x.$$

De manera semejante, si $y_4(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \ldots (19)$$

entonces

$$y_4(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \operatorname{senh} x.$$

Como el wronskiano de y_3 y y_4 es

$$W = \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

entonces estas funciones también forman un conjunto fundamental de soluciones, como se afirma en el teorema 3.2.5. Por lo tanto, la solución general de (16) puede escribirse como

$$y = k_1 \cosh x + k_2 \operatorname{senh} x, \ldots (20)$$

así como en la forma (18). Se han usado k_1 y k_2 para denotar las constantes arbitrarias de (20) porque no son las mismas que las constantes c_1 y c_2 de (18). Una de las finalidades de este ejemplo es aclarar que una ecuación diferencial dada tiene más de un conjunto fundamental de soluciones; de hecho, tiene una infinidad. Como regla, debe elegirse el conjunto que resulte más conveniente

Modelados lineales

254. Ejemplo. –
Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 83. Ejemplo 1.

Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. En $t = 1h$ se determina que el número de bacterias es $23P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias P(t) presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

Solución. –

Primero se resuelve la ecuación diferencial (1), sustituyendo el símbolo x por P. Con $t_0 = 0$ la condición inicial es $P(0) = P_0$. Entonces se usa la observación empírica de que $P(1) = 23P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k. Observe que la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ es separable y lineal. Cuando se pone en la forma estándar de una ED lineal de primer orden,

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0,$$

se ve por inspección que el factor integrante ese^{-kt}. Multiplicando ambos lados de la ecuación e integrando se obtiene, respectivamente,

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0 \qquad \text{y} \qquad e^{-kt}P = c.$$

Por tanto $P(t) = ce^{kt}$. En $t = 0$ se tiene que $P_0 = ce^0 = c$, por tanto $P(t) = P_0e^{kt}$. En $t = 1$ se tiene que $23P_0 = P_0e^k$, o $e^k = \frac{3}{2}$. De la última ecuación se obtiene $k = ln\, ln\, \frac{3}{2} = 0.4055$, por tanto $P(t) = P_0e^{0.4055t}$. Para determinar el tiempo en que se ha triplicado el número de bacterias, resolvemos $3P_0 = P_0e^{0.4055t}$ para t. Entonces $0.4055t = ln\, ln\, 3$, o

$$t = \frac{ln\, ln\, 3}{0.4055} \approx 2.71h.$$

Vea la figura 3.1.1.

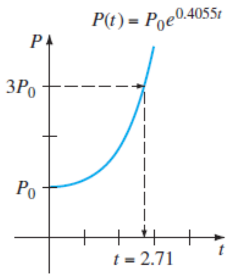


FIGURA 3.1.1 Tiempo en que se triplica la población.

255. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 84. Ejemplo 2.

Un reactor de cría convierte uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años, se ha determinado que 0.043% de la cantidad inicial A0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la vida media de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad que queda.

Solución. –

Sea A(t) la cantidad de plutonio que queda al tiempo t. Como en el ejemplo t, la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{dA}{dt} = kA, A(0) = A_0$$

es $A(t) = A_0e^{kt}$. Si se ha desintegrado 0.043% de los átomos de A_0, queda 99.957%. Para encontrar la constante k, usamos $0.99957A_0 = A(15)$, es decir, $099957A_0 = A_0e^{15k}$. Despejando k se obtiene $k = \frac{1}{15} ln\, ln\, 0.99957 = -0.00002867$. Por tanto $A(t) = A_0e^{-0.00002867t}$. Ahora la vida media es el valor del tiempo que le corresponde a $A(t) = A_0\, e^{-0.00002867t}$. Despejando t se obtiene $\frac{1}{2}A_0 = A_0\, e^{-0002867t}$ o $\frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$. De la última ecuación se obtiene

$$t = \frac{ln\, ln\, 2}{0.00002867} \approx 24.180\ años.$$

256. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 85. Ejemplo 3.

Se encuentra que un hueso fosilizado contiene la centésima parte de la cantidad de C-14 encontrada en la materia viva. Determine la edad del fósil.

Solución. –

El punto de partida es, de nuevo, $A(t) = A_0e^{kt}$. Para determinar el valor de la constante de decaimiento k, usamos el hecho de que $\frac{1}{2}A_0 = A(5600)$ o $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5600k}$. De $5600k = ln\, ln\, \frac{1}{2} = -ln\, ln\, 2$, obtenemos $k = -\frac{(lnln\, 2)}{5600} = -0.00012378$, por tanto $A(t) = A_0e^{-0.00012378t}$. Con $A(t) = \frac{1}{1000}A_0$ tenemos $\frac{1}{1000}A_0 = A_0e^{-0.00012378t}$, por lo que $-0.00012378t = ln\, ln\, \frac{1}{1000} = -ln\, ln\, 1000$. Así la edad del fósil es aproximadamente

$$t = \frac{ln\, ln\, 1000}{0.00012378} \approx 55\,800\ años.$$

257. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 85 y 86. Ejemplo 4.**

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300° F. Tres minutos después su temperatura es de 200° F. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura ambiente de 70º F?

Solución. –

En la ecuación (2) identificamos $T_m = 70$. Debemos resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), T(0) = 300 \quad (3)$$

y determinar el valor de k tal que $T(3) = 200$.

La ecuación (3) es tanto lineal como separable. Si separamos las variables

$$\frac{dT}{T - 70} = k\,dt,$$

Se obtiene $ln\, ln\, |T - 70| = kt + c_1$, y así $T = 70 + c_2 e^{kt}$. Cuando $t = 0, T = 300$, así $300 = 70 + c_2$ da $c_2 = 230$. Por tanto $T = 70 + 230e^{kt}$. Por último, la medición de $T(3) = 200$ conduce a $e^{3k} = \frac{13}{23}$, o $k = \frac{1}{3} ln\, ln\, \frac{13}{23} = -0.19018$. Así

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t} \quad (4)$$

Observamos que la ecuación (4) no tiene una solución fi nita a $T(t) = 70$ porque $_{t\to\infty} T(t) = 70$. No obstante, en forma intuitiva esperamos que el pastel se enfríe al transcurrir un intervalo razonablemente largo. ¿Qué tan largo es "largo"? Por supuesto, no nos debe inquietar el hecho de que el modelo (3) no se apegue mucho a nuestra intuición física. Los incisos a) y b) de la fi gura 3.1.3 muestran claramente que el pastel estará a la temperatura ambiente en aproximadamente una media hora.

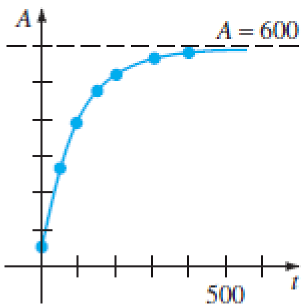
258. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 86 y 87. Ejemplo 5.

Recordemos que el tanque grande de la sección 1.3 contenía inicialmente 300 galones de una solución de salmuera. Al tanque entraba y salía sal porque se bombeaba una solución a un flujo de 3ga/min, se mezclaba con la solución original y salía del tanque con un flujo de 3gal/min. La concentración de la solución entrante era 2lb/gal, por consiguiente, la entrada de sal era $R_{entra} = (2lb/gal) \cdot (3gal/min) = 6lb/min$ y salía del tanque con una razón $R_{sale} = (A/300lb/gal) \cdot (3gal/min) = A/100lb/min$. A partir de esos datos y de la ecuación (5) obtuvimos la ecuación (8) de la sección 1.3. Permítanos preguntar: si había 50 lb de sal disueltas en los 300 galones iniciales, ¿cuánta sal habrá en el tanque pasado un gran tiempo?

SOLUCIÓN Para encontrar la cantidad de sal $A(t)$ en el tanque al tiempo t, resolvemos el problema con valores iniciales

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{100} A = 6,\ A(0) = 50.$$



a)

t (min)	A (lb)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

b)

FIGURA 3.1.4 Libras de sal en el tanque como una función del tiempo t.

Aquí observamos que la condic**ión** adjunta es la cantidad inicial de sal $A(0) = 50$ en el tanque y no la cantidad inicial de líquido. Ahora como el factor integrante de esta ecuación diferencial lineal es $e^{t/100}$, podemos escribir la ecuación como

$$\frac{d}{dt}[e^{f100}A] = 6e^{t/100}.$$

Integrando la última ecuación y despejando A se obtiene la solución general $A(t) = 600 + ce^{-t/100}$. Conforme $t = 0$, $A = 50$, de modo que $c = -550$. Entonces, la cantidad de sal en el tanque al tiempo t está dada por

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}.$$

La solución (6) se usó para construir la tabla de la figura 3.1.4b. En la ecuación (6) y en la figura 3.1.4a también se puede ver, que $A(t) \to 600$ conforme $t \to \infty$. Por supuesto que esto es lo que se esperaría intuitivamente en este caso; cuando ha pasado un gran tiempo la cantidad de libras de sal en la solución debe ser $(300\text{ga1})(2\text{lb/gal}) = 600\text{lb}$.

259. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 88. Ejemplo 6.

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

Solución. –

De la ecuación (7) debemos resolver

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12,$$

Sujetar a $i(0) = 0$. Primero multiplicamos la ecuación diferencial por 2, y vemos que el factor integrante es e^{20t}. Entonces sustituyendo

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}$$

Integrando cada lado de la última ecuación y despejando i se obtiene $i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$. Ahora $i(0) = 0$ implica que $0 = \frac{6}{5} + c$ o $c = -\frac{6}{5}$. Por tanto, la respuesta es $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$.

Modelos lineales: Problemas con valores iniciales

Sistema resorte/masa: movimiento libre no amortiguado

1. **Ejemplo. –**

260. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 183 y 184. Ejemplo 1.

Una masa que pesa 2 libras alarga 6 pulgadas un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pie/s. Determine la ecuación de movimiento.

SOLUCIÓN Debido a que se está usando el sistema de unidades de ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir en pies: 6 pulg = $\frac{1}{2}$ pie; 8 pulg = $\frac{2}{3}$ pie.

Además, se deben convertir las unidades de peso dadas en libras a unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos que $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, de la ley de Hooke, $2 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que la constante de resorte es $k = 4\text{lb/pie}$. Por lo que, de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento y la velocidad iniciales son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo en la última condición es una consecuencia del hecho de que a la masa se le da una velocidad inicial en la dirección negativa o hacia arriba.

Ahora $\omega^2 = 64$ o $\omega = 8$, por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1\cos 8t + c_2\operatorname{sen} 8t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t.$$

2. **Ejemplo. –**

261. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 184. Ejemplo 2.

En vista de la descripción anterior, se puede escribir lasolución (5) en la forma alternativa $x(t) = A\operatorname{sen}(8t + \phi)$. El cálculo de la amplitud es directo, $A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} \approx$

0.69 pies, pero se debe tener cuidado al calcular el ángulo de fase ϕ definido por (7). Con $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$ se encuentra $\tan\phi = -4$y, con una calculadora se obtiene $\tan^{-1}(-4) = -1.326\text{rad}$. Este no es el ángulo de fase, puesto que $\tan^{-1}(-4)$ se localiza en el cuarto cuadrante y por tanto contradice el hecho de que sen $\phi > 0$ y cos $\phi < 0$ porque $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$. Por tanto, se debe considerar que ϕ es un ángulo del segundo cuadrante $\phi = \pi + (-1.326) = 1.816\text{rad}$. Así la ecuación (5) es igual a

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t + 1.816).$$

El periodo de esta función es $T = 2\pi/8 = \pi/4$ s.

Sistemas resorte/masa: movimiento libre amortiguado

3. **Ejemplo. –**

262. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 187. Ejemplo 3.

Se comprueba fácilmente que la solución del problema con valores iniciales es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$$
$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}.$$

El problema se puede interpretar como representativo del movimiento sobreamortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de una posición una unidad abajo de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 1pie/s. Para graficar $x(t)$, se encuentra el valor de t para el cual la función tiene un extremo, es decir, el valor de tiempo para el cual la primera derivada (velocidad) es cero. Derivando la ecuación (16) se obtiene $x'(t) = -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t}$, así $x'(t) = 0$ implica que $e^{3t} = \frac{8}{5}$ o $t = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} = 0.157$. Se tiene de la prueba de la primera derivada, así como de la intuición física, que $x(0.157) = 1.069$ pies es en realidad un máximo. En otras palabras, la masa logra un desplazamiento extremo de 1.069 pies abajo de la posición de equilibrio.

Se debe comprobar también si la gráfica cruza el eje t, es decir, si la masa pasa por la posición de equilibrio. En este caso tal cosa no puede suceder, porque la ecuación $x(t) = 0$, o $e^{3t} = \frac{2}{5}$, tiene una solución irrelevante desde el punto de vista físico $t = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} = -0.305$.

En la figura 5.1.9 se presenta la gráfica de $x(t)$, junto con algunos otros datos pertinentes.

4. **Ejemplo. –**

263. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 187 y 188. Ejemplo 4.

Una masa que pesa 8 libras alarga 2 pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 pies $/s$.

SOLUCIÓN

De la ley de Hooke se ve que $8 = k(2)$ da $k = 4$lb/ pie y que $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug.

La ecuación diferencial de movimiento es entonces

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \text{ o } \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

La ecuación auxiliar para (17) es $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$, así que $m_1 = m_2 = -4$. Por tanto el sistema está críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}.$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$, se encuentra, a su vez, que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Por tanto la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}.$$

Para graficar $x(t)$, se procede como en el ejemplo 3. De $x'(t) = -3e^{-4}(1 - 4t)$ vemos que $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$. El desplazamiento extremo correspondiente es $x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{4}\right)e^{-1} = -0.276$ pies. Como se muestra en la figura 5.1.10, este valor se interpreta para indicar que la masa alcanza una altura máxima de 0.276 pies arriba de la posición de equilibrio.

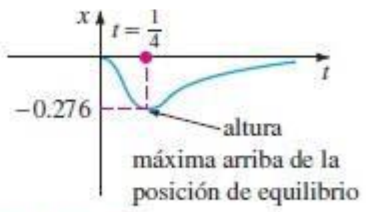


FIGURA 5.1.10 Sistema críticamente amortiguado.

5. Ejemplo. –

264. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 188. Ejemplo 5.

Una masa que pesa 16 libras se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrioel resorte mide 8.2 pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. SOLUCIÓN La elongación del resorte después que se une la masa es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, así que se deduce de la ley de Hooke que $16 = k(3.2)$ o $k = 5$lb/ pie. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug,

por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \text{ o } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \ldots (20)$$

Procediendo, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo que significa que el sistema está subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t). \ldots (21)$$

Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ producen $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, por lo que la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right) \ldots (22)$$

Sistemas resorte/masa: Movimiento forzado

6. Ejemplo. –

265. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 189 y 190. Ejemplo 6.

Interprete y resuelva el problema con valores iniciales

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t,\ x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) = 0. \ldots (26)$$

SOLUCIÓN

Se puede interpretar el problema para representar un sistema vibratorio que consiste en una masa ($m = \frac{1}{5}$ slug o kilogramo) unida a un resorte ($k = 2$lb/ pie o N/m). La masa se libera inicialmente desde el reposo $\frac{1}{2}$ unidad (pie o metro) abajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está siendo impulsado por una fuerza periódica externa ($T = \pi/2$ s) comenzando en $t = 0$. De manera intuitiva, se podría esperar que incluso con amortiguamiento el sistema permaneciera en movimiento hasta que se "desactive" la función forzada, en cuyo caso disminuirían las amplitudes. Sin embargo, como se plantea en el problema, $f(t) = 5\cos 4t$ permanecerá "activada" por siempre. Primero se multiplica la ecuación diferencial en (26) por 5 y se resuelve

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

por los métodos usuales. Debido a que $m_1 = -3 + i, m_2 = -3 - i$, se deduce que $x_c(t) = e^{-3t}(c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$. Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$. Derivando $x_p(t)$ y sustituyendo en la ED, se obtiene

$$x_p'' + 6x_p' + 10x_p = (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\operatorname{sen} 4t = 25\cos 4t$$

El sistema de ecuaciones resultante

$$-6A + 24B = 25,\ -24A - 6B = 0$$

se cumple en $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. Se tiene que

$$x(t) = e^{-3s}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t \dots (27)$$

Cuando se hace $t = 0$ en la ecuación anterior, se obtiene $c_1 = \frac{38}{51}$. Derivando la expresión y haciendo $t = 0$, se encuentra también que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t \dots (28)$$

7. Ejemplo. –

266. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 190. Ejemplo 7.

La solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x_1,$$

donde x_1 es constante, está dada por

$$x(t) = \underbrace{(x_1 - 2)e^{-t}\operatorname{sen} t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\operatorname{sen} t}_{\text{estado estable}}$$

Las curvas solución para valores seleccionados de la velocidad inicial x_1 aparecen en la figura 5.1.13. Las gráficas muestran que la influencia del término transitorio es despreciable para un valor aproximado de $t > 3\pi/2$.

8. Ejemplo. –

267. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 190 y 191. Ejemplo 8.

Resuelva el problema con valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}\gamma t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0, \dots (29)$$

donde F_0 es una constante y $\gamma \neq \omega$.

SOLUCIÓN

La función complementaria es $x_c(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t$. Para obtener una solución particular se supone $x_p(t) = A\cos\gamma t + B\operatorname{sen}\gamma t$, por lo que

$$x_p'' + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\operatorname{sen}\gamma t = F_0 \operatorname{sen}\gamma t.$$

Igualando los coeficientes se obtiene de inmediato $A = 0$ y $B = F_0/(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a la solución general

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t$$

se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t + \omega\operatorname{sen}\gamma t),\ \gamma \neq \omega \dots (30)$$

Circuito en serie análogo

9. Ejemplo. –

268. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 192 y 193. Ejemplo 9.

Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito LRC cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que $1/C = 1000$, la ecuación (34) se convierte en

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0 \text{ o } q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Resolviendo esta ecuación homogénea de la manera usual, se encuentra que el circuito es subamortiguado y $q(t) = e^{-20t}(c_1\cos 60t + c_2 \text{ sen } 60t)$. Aplicando las condiciones iniciales, se encuentra $c_1 = q_0$ y $c_2 = \frac{1}{3}q_0$. Por tanto

$$q(t) = q_0 e^{-20t}\left(\cos 60t + \frac{1}{3}\text{sen } 60t\right)$$

Usando (23), podemos escribir la solución anterior como

$$q(t) = \frac{q_0\sqrt{10}}{3} e^{-20t}\text{sen}(60t + 1.249).$$

10. Ejemplo. –

269. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 193. Ejemplo 10.

Encuentre la solución de estado estable $q(t)$ y la corriente de estado estable en un circuito LRC en serie cuando el voltaje aplicado es $E(t) = E_0$ sen γt.

SOLUCIÓN La solución de estado estable $q_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0\text{sen}\,\gamma t$$

Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $q_p(t) = A\text{ sen }\gamma t + B\cos\gamma t$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e igualando coeficientes, se obtiene

$$A = \frac{E_0\left(L\gamma - \frac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}, \quad B = \frac{E_0R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}.$$

Es conveniente expresar A y B en términos de algunos nuevos símbolos.

$$\text{Si } X = L\gamma - \frac{1}{C\gamma}, \text{ entonces } X^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2}.$$

$$\text{Si } Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \text{ entonces } Z^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$$

Por tanto $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, así que la carga de estado estable es

$$q_p(t) = -\frac{E_0 X}{\gamma Z^2}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{E_0 R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

Ahora la corriente de estado estable está dada por $i_p(t) = q_p'(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\operatorname{sen}\gamma - \frac{X}{Z}\cos\gamma\right)$$

Modelos lineales: problemas con valores en la frontera

11. Ejemplo. –

270. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 200 y 201. Ejemplo 1.

Una viga de longitud L está empotrada en ambos extremos. Encuentre la deflexión de la viga si una carga constante w_0 está uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, es decir, $w(x) = w_0, 0 < x < L$.

SOLUCIÓN

De (4) vemos que la deflexión $y(x)$ satisface

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0$$

Debido a que la viga está empotrada tanto en su extremo izquierdo $(x = 0)$ como en su extremo derecho $(x = L)$, no hay deflexión vertical y la recta de deflexión es horizontal en estos puntos. Asi, las condiciones en la frontera son

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(L) = 0,\ y'(L) = 0.$$

Se puede resolver la ecuación diferencial no homogénea de la manera usual (determinar y_c observando que $m = 0$ es rafz de multiplicidad cuatro de la ecuación auxiliar $m^4 = 0$ y luego encontrar una solución particular y por coeficientes indeterminados) o simplemente se integra la ecuación $d^4y/dx^4 = w_0^p/EI$ sucesivamente cuatro veces. De cualquier modo, se encuentra la solución general de la ecuacion $y = y_c + y_p$ que es

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Ahora las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ dan, a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, mientras que las condiciones restantes $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ aplicadas a $y(x) = c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$ producen las ecuaciones simultáneas

$$c_3L^2 + c_4L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$2c_3L + 3c_4L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$

Resolviendo este sistema se obtiene $c_3 = w_0L^2/24EI$ y $c_4 = -w_0L/12EI$. Así que la deflexión es

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$$

o $y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2$. Eligiendo $w_0 = 24EI$, y $L = 1$, obtenemos la curva de deflexión de la figura 5.2.3.

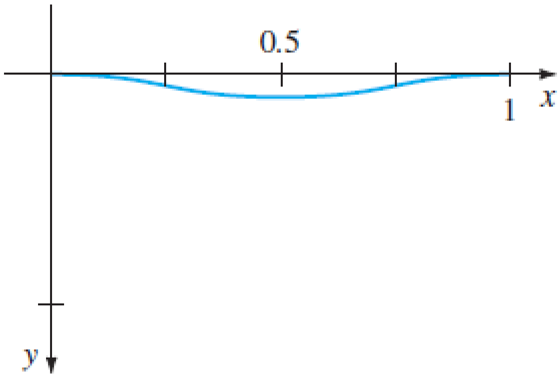


FIGURA 5.2.3 Curva de deflexión para el ejemplo 1.

12. Ejemplo. –

271. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 201 y 202. Ejemplo 2.

Resuelva el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(L) = 0.$$

SOLUCIÓN Consideraremos tres casos: $\lambda = 0, \lambda < 0$ y $\lambda > 0$. CASO I: Para $\lambda = 0$ la solución de $y'' = 0$ es $y = c_1x + c_2$. Las condiciones $y(0) = 0$y $y(L) = 0$ aplicadas a esta solución implican, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$. Por tanto, para $\lambda = 0$ la única solución del problema con valores en la frontera es la solución trivial $y = 0$. CASO II: Para $\lambda < 0$ es conveniente escribir $\lambda = -\alpha^2$, donde α denota un número positivo. Con esta notación las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - \alpha^2 = 0$ son $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. Puesto que el intervalo en el que se está trabajando es finito, se elige escribir la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$ como $y = c_1\cosh\alpha x + c_2$ senh αx. Ahora $y(0)$ es

$$y(0) = c_1\cosh 0 + c_2\operatorname{senh} 0 = c_1 + 1 + c_2 \cdot 0 = c_1,$$

y por tanto, $y(0) = 0$ significa que $c_1 = 0$. Así $y = c_2\operatorname{senh}\alpha\alpha$. La segunda condición $y(L) = 0$ requiere que c_2 senh $\alpha L = 0$. Para $\alpha \neq 0$, senh $\alpha L \neq 0$; en consecuencia, se está forzado a elegir $c_2 = 0$. De nuevo la solución del PVF es la solución trivial $y = 0$. CASO III: Para $\lambda > 0$ se escribe $\lambda = \alpha^2$, donde α es un número positivo. Debido a que la ecuación auxiliar $m^2 + \alpha^2 = 0$ tiene raíces complejas $m_1 = i\alpha$ y $m_2 = -i\alpha$, la solución general de $y'' + \alpha^2 y = 0$ es $y = c_1\cos\alpha x + c_2\operatorname{sen}\alpha x$. Como antes, $y(0) = 0$ produce $c_1 = 0$ y por tanto $y = c_2$ sen αx. Ahora la última condición $y(L) = 0$, o

$$c_2\operatorname{sen}\alpha L = 0,$$

se satisface al elegir $c_2 = 0$. Pero esto significa que $y = 0$. Si se requiere $c_2 \neq 0$, entonces $\operatorname{sen}\alpha L = 0$ se satisface siempre que αL sea un múltiplo entero de π.

$$\alpha L = n\pi \;\text{ o }\; \alpha = \frac{n\pi}{L} \;\text{ o }\; \lambda_n = \alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \; n = 1,2,3,\ldots$$

Por tanto, para cualquier número real c_2 distinto de cero, $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es una solución del problema para cada n. Debido a que la ecuación diferencial es homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución también es una solución, así que si se desea se podría simplemente tomar $c_2 = 1$. En otras palabras, para cada número de la sucesión

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2},\; \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2},\; \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}, \cdots,$$

la función correspondiente en la sucesión

$$y_1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x,\; y_2 = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x,\; y_3 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \cdots,$$

es una solución no trivial del problema original.

13. Ejemplo. –

272. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 202. Ejemplo 3.

Encuentre la deflexión de una columna homogénea vertical y delgada de longitud L sujeta a una carga axial constante P si la columna se fija con bisagras en ambos extremos.
SOLUCIÓN

El problema con valores en la frontera por resolver es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0,\; y(0) = 0,\; y(L) = 0.$$

Primero observe que $y = 0$ es una solución muy buena de este problema. Esta solución tiene una simple interpretación intuitiva: Si la carga P no es suficientemente grande, no hay deflexión. Entonces la pregunta es ésta: ¿para qué valores de P se dobla la columna? En términos matemáticos: ¿para qué valores de P el problema con valores en la frontera tiene soluciones no triviales?

Al escribir $\lambda = P/EI$, vemos que

$$y'' + \lambda y = 0,\; y(0) = 0,\; y(L) = 0$$

es idéntico al problema del ejemplo 2 . Del caso III de esa descripción se ve que las deflexiones son $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ que corresponden a los eigenvalores $\lambda_n = P_n.\ /EI = n^2\pi^2/L^2, n = 1,2,3,\ldots$ Desde el punto de vista físico, esto significa que la columna experimenta flexión sólo cuando la fuerza compresiva es uno de los valores $P_n = n^2\pi^2 EI/L^2$, $n = 1,2,3,\ldots$ Estas fuerzas diferentes se llaman cargas críticas. La deflexión correspondiente a la carga crítica más pequeña $P_1 = \pi^2 EI/L^2$, llamada carga de Euler, es $y_1(x) = c_2 \operatorname{sen}(\pi x/L)$ y se conoce como primer modo de pandeo.

Modelos no lineales

Ejemplo. –

273. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 96. Ejemplo 1.

Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a su aislado campus de 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados, determine la cantidad de estudiantes infectados después de 6 días si además se observa que después de cuatro días $x(4) = 50$.

Solución. –

Suponiendo que nadie deja el campus mientras dura la enfermedad, debemos resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), x(0) = 1.$$

Identificando $a = 1000k\ yb = k$, vemos de inmediato en la ecuación (5) que

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Ahora, usamos la información $x(4) = 50$ y calculamos k con

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}.$$

Encontramos $-1000k = \frac{1}{4} ln = \frac{19}{999} = -0.9906$. Por tanto

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

Finalmente,

$$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276\ estudiantes.$$

En la tabla de la figura 3.2.3b se dan otros valores calculados de x(t).

1. **Ejemplo .-**

274. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 208. Ejemplo 1.

Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - x^3 = 0$$

son casos especiales de la segunda ecuación en (2) y son modelos de un resorte duro y uno suave, respectivamente. En la figura 5.3.2a se muestran dos soluciones de (4) y en la figura 5.3.2b dos soluciones de (5) obtenidas de un programa de solución numérica. Las curvas mostradas en rojo son soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $x(0) = 2, x'(0) = -3$; las dos curvas en rojo son soluciones que satisfacen $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Desde luego estas curvas solución indican que el movimiento de una masa en el resorte duro es oscilatorio, mientras que el movimiento de una masa en el resorte flexible al parecer es no oscilatorio. Pero se debe tener cuidado respecto a sacar conclusiones con base en un par de curvas de solución numérica. Un cuadro más complejo de la naturaleza de las soluciones de ambas ecuaciones, se obtiene del análisis cualitativo descrito en el capítulo 10.

2. Ejemplo. –

275. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 209 y 210. Ejemplo 2.

Las gráficas de la figura 5.3.4a se obtuvieron con ayuda de un programa de solución numérica y representan curvas solución de la ecuación (6) cuando $\omega^2 = 1$. La curva azul ilustra la solución de (6) que satisface las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{1}{2}, \theta'(0) = \frac{1}{2}$, mientras que la curva roja es la solución de (6) que satisface $\theta(0) = \frac{1}{2}, \theta'(0) = 2$. La curva azul representa una solución periódica, el péndulo que oscila en vaivén como se muestra en la figura 5.3.4 b con una amplitud aparente $A \leq 1$. La curva roja muestra que θ crece sin límite cuando aumenta el tiempo, el péndulo comenzando desde el mismo desplazamiento inicial recibe una velocidad inicial de magnitud suficientemente grande para enviarlo hasta arriba; en otras palabras, el péndulo gira respecto a su pivote como se ilustra en la figura 5.3.4c. En ausencia de amortiguamiento, el movimiento en cada caso continúa de forma indefinida.

3. Ejemplo. –

276. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 210 y 211. Ejemplo 3.

De la posición del eje y en la figura 1.3 .7 es evidente que las condiciones iniciales relacionadas con la segunda ecuación diferencial en (11) son $y(0) = a$ y $y'(0) = 0$. Si se sustituye $u = y'$, entonces la ecuación en (11) se convierte en $\frac{du}{dx} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + u^2}$.

Separando las variables se encuentra que

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\rho}{T_1}\int dx \text{ se obtiene } \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{\rho}{T_1}x + c_1.$$

Ahora, $y'(0) = 0$ es equivalente a $u(0) = 0$. Puesto que $\operatorname{senh}^{-1} 0 = 0$, $c_1 = 0$ y por tanto, $u = \operatorname{senh}(\rho x/T_1)$. Por último, integrando ambos lados de

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{\rho}{T_1}x, \text{ obtenemos } y = \frac{T_1}{\rho}\cosh\frac{\rho}{T_1}x + c_2.$$

Con $y(0) = a$, $\cosh 0 = 1$, se deduce de la última ecuación que $c_2 = a - T_1/\rho$. Por tanto vemos que la forma del cable que cuelga está dada por $y = (T_1/\rho)\cosh(\rho x/T_1) + a - T_1/\rho$.

4. Ejemplo. –

277. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 212 y 213. Ejemplo 4.

Una cadena uniforme de 10 pies de largo se enrolla sin tensión sobre el piso. Un extremo de la cadena se jala verticalmente hacia arriba usando una fuerza constante de 5 libras. La cadena pesa 1 libra por pie. Determine la altura del extremo sobre el nivel de suelo al tiempo t. Véase la figura 5.3.6.

SOLUCIÓN Supongamos que $x = x(t)$ denota la altura del extremo de la cadena en el aire al tiempo t, $v = dx/dt$ y que la dirección positiva es hacia arriba. Para la porción de la cadena que está en el aire en el tiempo t se tienen las siguientes cantidades variables:

peso:	$W = (x \text{ pie}) \cdot (1 \text{lb}/\text{pie}) = x,$
masa:	$m = W/g = x/32,$
fuerza neta:	$F = 5 - W = 5 - x.$

Así de la ecuación (14) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{32}v\right) = 5 - x \quad \text{o} \quad x\frac{dv}{dt} + v\frac{dx}{dt} = 160 - 32x$$

Debido a que $v = dx/dt$, la última ecuación se convierte en

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 32x = 160$$

La segunda ecuación diferencial no lineal de segundo orden (16) tiene la forma $F(x, x', x'') = 0$, que es la segunda de las dos formas consideradas en la sección 4.9 que posiblemente se pueden resolver por reducción de orden. Para resolver la ecuación (16), se vuelve a (15) y se usa $v = x'$ junto con la regla de la cadena. De $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ la segunda ecuación en (15) se puede escribir como

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 160 - 32x$$

Al inspeccionar la ecuación (17) podría parecer de difícil solución, puesto que no se puede caracterizar como alguna de las ecuaciones de primer orden resueltas en el capítulo 2. Sin embargo, si se reescribe la ecuación (17) en la forma diferencial $M(x, v)dx + N(x, v)dv = 0$, se observa que, aunque la ecuación

$$(v^2 + 32x - 160)dx + xvdv = 0$$

no es exacta, se puede transformar en una ecuación exacta al multiplicarla por un factor integrante. De $(M_y - N_x)/N = 1/x$ se ve de (13) de la sección 2.4 que un factor integrante es $e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$. Cuando la ecuación (18) se multiplica por $\mu(x) = x$, la ecuación resultante es exacta (compruebe). Identificando $\partial f/\partial x = xv^2 + 32x^2 - 160x$, $\partial f/\partial v = x^2v$ y procediendo después como en la sección 2.4 , se obtiene

$$\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = c_1.$$

Puesto que se supuso que al principio toda la cadena está sobre el piso, se tiene $x(0) = 0$. Esta última condición aplicada a la ecuación (19) produce $c_1 = 0$. Resolviendo la ecuación algebraica $\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = 0$ para $v = dx/dt > 0$, se obtiene otra ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{160 - \frac{64}{3}x}$$

La última ecuación se puede resolver por separación de variables. Se debe comprobar que

$$-\frac{3}{32}\left(160 - \frac{64}{3}x\right)^{1/2} = t + c_2$$

Esta vez la condición inicial $x(0) = 0$ indica que $c_2 = -3\sqrt{10/8}$. Por último, elevando al cuadrado ambos lados de (20) y despejando x, llegamos al resultado deseado,

$$x(t) = \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\left(1 - \frac{4\sqrt{10}}{15}t\right)^2$$

La gráfica de la ecuación 21 que se presenta en la figura 5.3 .7 no se debe, con bases físicas, aceptar tal cual. Véase el problema 15 de los ejercicios 5.3.

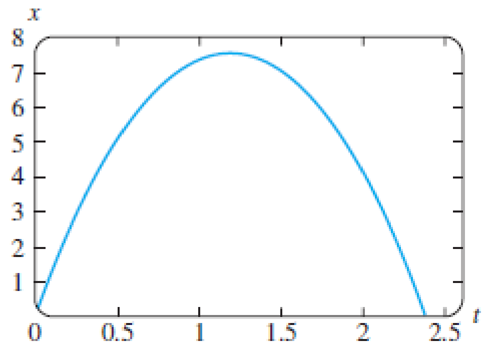


FIGURA 5.3.7 Gráfica de (21) para $x(t) \geq 0$.

278. Ejemplo. –
Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 97 y 98. Ejemplo 2.

Cuando se combinan dos sustancias químicas A y B se forma un compuesto C. La reacción resultante entre las dos sustancias quimicas es tal que por cada gramo de A se usan 4 gramos de B. Se observa que a los 10 minutos se han formado 30 gramos

del producto C. Determine la cantidad de C en el tiempo I si la razón de la reacción es proporcional a las cantidades de A y B que quedan y si inicialmente hay 50 gramos de A y 32 gramos de B. ¿Qué cantidad de compuesto C hay a los 15 minutos? Interprete la solución cuando $t \to \infty$.

SOLUCIÓN Sea $X(t)$ la cantidad de gramos del compuesto C presentes en el tiempo t. Es obvio que $X(0) = 0$ g y $X(10) = 30$ g.

Si, por ejemplo, hay 2 gramos del producto C, hemos debido usar, digamos, a gramos de A y b gramos de B, asf $a + b = 2$ y $b = 4a$. Por tanto, debemos usar $a = \frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)$ de la sustancia quimica A y $b = \frac{8}{5} = 2\left(\frac{4}{3}\right)$g de B. En general, para obtener X gramos de C debe mos usar

$$\frac{1}{5}X \text{ gramos de } A \text{ y } \frac{4}{5}X \text{ gramos de } B.$$

Entonces las cantidades de A y B que quedan al tiempo t son

$$50 - \frac{1}{5}X \quad \text{y} \quad 32 - \frac{4}{5}X$$

respectivamente.

Sabemos que la razón con la que se forma el compuesto C satisface que

$$\frac{dX}{dt} \text{ a } \left(50 - \frac{1}{5}X\right)\left(32 - \frac{4}{5}X\right)$$

Para simplificar las operaciones algebraicas subsecuentes, factorizamos $\frac{1}{3}$ del primer término y $\frac{4}{5}$ del segundo y después introduciremos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X)$$

Separamos variables y por fracciones parciales podemos escribir que

$$-\frac{\frac{1}{20}}{250 - X}dX + \frac{\frac{1}{210}}{40 - X}dX = kdr$$

Integrando se obtiene

$$\text{In } \frac{250 - X}{40 - X} = 210k + c_1 \quad \text{o} \quad \frac{250 - X}{40 - X} = c_2 e^{210k}.$$

Cuando $t = 0, X = 0$, se tiene que en este punto $c_2 = \frac{24}{4}$. Usando $X = 30$g en $t = 10$ encontramos que $210k = \frac{1}{10}\ln\frac{X}{2\text{ g}} = 0.1258$. Con esta información se despeja X de la última ecuación (10):

$$X(t) = 1000\frac{1 - e^{-0.1288}}{25 - 4e^{-0.1288}}$$

En la figura 3.2.4 se presenta el comportamiento de X como una función del tiempo. Es claro de la tabla adjunta y de la ecuación (11) que $X \to 40$ conforme $t \to \infty$. Esto significa que se forman 40 gramos del compuesto C, quedando

$$50 - \frac{1}{5}(40) = 42 \text{g de } A \text{ y } 32 - \frac{4}{5}(40) = 0 \text{g de } B.$$

Aplicaciones

Modelo presa-depredador

279. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 108. Ejemplo 1.

Suponga que

$$\frac{dx}{dt} = -0.16x + 0.08xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 4.5y - 0.9xy$$

representa un modelo presa-depredador. Debido a que se está tratando con poblaciones, se tiene $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$. En la figura 3.3.2, que se obtuvo con la ayuda de un programa de solución numérica, se ilustran las curvas de población características de los depredadores y presa para este modelo superpuestas en los mismos ejes de coordenadas. Las condiciones iniciales que se utilizaron fueron $x(0) = 4$, $y(0) = 4$. La curva en color rojo representa la población $x(t)$ de los depredadores (zorros) y la curva en color azul es la población $y(t)$ de la presa (conejos). Observe que el modelo al parecer predice que ambas poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas en el tiempo. Esto tiene sentido desde el punto de vista intuitivo porque conforme decrece el número de presas, la población de depredadores decrece en algún momento como resultado de un menor suministro de alimento; pero junto con un decrecimiento en el número de depredadores hay un incremento en el número de presas; esto a su vez da lugar a un mayor número de depredadores, que en última instancia origina otro decrecimiento en el número de presas.

Funciones linealmente independientes

18. Ejemplo. –

Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 98. Ejemplo 3-4.

Determine si los siguientes pares de funciones son linealmente dependientes o independientes para $-\infty < x < +\infty$.

a) $y_1 = 6x$ y $y_2 = 2$

b) $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$

c) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$

d) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$

e) $y_1 = sen\, x$ y $y_2 = \cos x$

f) $y_1 = x$ y $y_2 = x + 1$

Solución. –

Todos estos pares de funciones son linealmente independientes, ya que la razón de las dos funciones en cada par depende de x (es decir, no es una constante), como se ilustra aquí:

a) $\frac{y1}{y2} = \frac{6x}{2} = 3x$

b) $\frac{y1}{y2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

c) $\frac{y1}{y2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$

d) $\frac{y1}{y2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$

e) $\frac{y1}{y2} = \frac{sen\, x}{\cos x} = \tan x$

f) $\frac{y1}{y2} = \frac{x}{x+1}$

19. Ejemplo. –

William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 154. Ejemplo 1.

Determinar si las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos(x - \pi/2)$ son linealmente independientes o dependientes sobre un intervalo arbitrario.

Las funciones dadas son linealmente dependientes sobre cualquier intervalo ya que

$$k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

para toda x si se eligen $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$

20. Ejemplo. –

William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 173 y 174. Ejemplo 3.

Dado que $y_1(x) = x^{-1}$ es una solución de

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0$$

hallar una segunda solución linealmente independiente.

Se hace $y = v(x)x^{-1}$; entonces

$$y' = v'x^{-1} - vx^{-2},\ y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}.$$

Si se sustituyen $y, y'yy''$ de la ecuación (31) y se agrupan términos se obtiene

$$\begin{aligned} &2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(v'x^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1} \\ &= 2xv'' + (-4+3)v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1})v \\ &= 2xv'' - v' = 0. \end{aligned}$$

Observe que el coeficiente de v es cero, como debe ser; esto permite tener una útil comprobación de los pasos algebraicos.

Si se separan las variables en la ecuación (32) y se despeja $v'(x)$, se encuentra que

$$v'(x) = cx^{1/2}$$

entonces

$$v(x) = \frac{2}{3}cx^{3/2} + k$$

Se concluye que

$$y = \frac{2}{3}cx^{1/2} + kx^{-1},$$

en donde cyk son constantes arbitrarias. El segundo término del segundo miembro de (33) es un múltiplo de $y_1(x)$ y se puede cancelar, pero el primer término proporciona una nueva solución independiente. Si se desprecia la constante multiplicativa arbitraria, se tiene $y_2(x) = x^{1/2}$.

21. Ejemplo. –

William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 174 y 175. Ejemplo 4.

Comprobar que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ -1 < x < 1,$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

Si $y = x$, entonces $y' = 1$ y $y'' = 0$. Si se sustituyen estas cantidades en la ecuación (34) se ve que $y = x$ es una solución de esa ecuación. Para encontrar una segunda solución, sea $y = xv(x)$; entonces

$$y' = xv' + v,\ y'' = xv'' + 2v'.$$

Entonces, si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (34), se obtiene

$$(1 - x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0,$$

o bien,

$$x(1-x^2)v'' + (2-4x^2)v' = 0.$$

Al separar las variables, es posible escribir la ecuación (35) en la forma

$$\frac{(v')'}{v'} = -\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}$$

de lo cual se deduce que

$$v'(x) = \frac{c}{x^2(1-x^2)}$$

en donde c es una constante arbitraria. Como consecuencia,

$$v(x) = c\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = c\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Por lo tanto, si se suprime el multiplicador constante, se encuentra que una segunda solución de (34) es

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

El Wronskiano e independencia lineal

Funciones linealmente independientes

280. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 98. Ejemplo 3-4.

Determine si los siguientes pares de funciones son linealmente dependientes o independientes para $-\infty < x < +\infty$.

a) $y_1 = 6x$ y $y_2 = 2$

b) $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$

c) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$

d) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$

e) $y_1 = sen\, x$ y $y_2 = \cos x$

f) $y_1 = x$ y $y_2 = x + 1$

Solución. –

Todos estos pares de funciones son linealmente independientes, ya que la razón de las dos funciones en cada par depende de x (es decir, no es una constante), como se ilustra aquí:

a) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{6x}{2} = 3x$

b) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

c) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$

d) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$

e) $\frac{y_1}{y_2} = sen\,\frac{x}{\cos x} = \tan x$

f) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{x+1}$

281. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 154. Ejemplo 1.

Determinar si las funciones sen xy$\cos(x - \pi/2)$ son linealmente independientes o dependientes sobre un intervalo arbitrario.

Las funciones dadas son linealmente dependientes sobre cualquier intervalo ya que

$$k_1 \text{sen } x + k_2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

para toda x si se eligen $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$

282. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 173 y 174. Ejemplo 3.

Dado que $y_1(x) = x^{-1}$ es una solución de

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0$$

hallar una segunda solución linealmente independiente.

Se hace $y = v(x)x^{-1}$; entonces

$$y' = v'x^{-1} - vx^{-2},\ y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}.$$

Si se sustituyen $y, y'yy''$ de la ecuación (31) y se agrupan términos se obtiene

$$\begin{aligned} &2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(v'x^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1} \\ &= 2xv'' + (-4+3)v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1})v \\ &= 2xv'' - v' = 0. \end{aligned}$$

Observe que el coeficiente de v es cero, como debe ser; esto permite tener una útil comprobación de los pasos algebraicos.

Si se separan las variables en la ecuación (32) y se despeja $v'(x)$, se encuentra que

$$v'(x) = cx^{1/2}$$

entonces

$$v(x) = \frac{2}{3}cx^{3/2} + k$$

Se concluye que

$$y = \frac{2}{3}cx^{1/2} + kx^{-1},$$

en donde cyk son constantes arbitrarias. El segundo término del segundo miembro de (33) es un múltiplo de $y_1(x)$ y se puede cancelar, pero el primer término proporciona una nueva solución independiente. Si se desprecia la constante multiplicativa arbitraria, se tiene $y_2(x) = x^{1/2}$.

283. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 174 y 175. Ejemplo 4.

Comprobar que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \; -1 < x < 1,$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

Si $y = x$, entonces $y' = 1$ y $y'' = 0$. Si se sustituyen estas cantidades en la ecuación (34) se ve que $y = x$ es una solución de esa ecuación. Para encontrar una segunda solución, sea $y = xv(x)$; entonces

$$y' = xv' + v, \; y'' = xv'' + 2v'.$$

Entonces, si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (34), se obtiene

$$(1 - x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0,$$

o bien,

$$x(1 - x^2)v'' + (2 - 4x^2)v' = 0.$$

Al separar las variables, es posible escribir la ecuación (35) en la forma

$$\frac{(v')'}{v'} = -\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2}$$

de lo cual se deduce que

$$v'(x) = \frac{c}{x^2(1 - x^2)}$$

en donde c es una constante arbitraria. Como consecuencia,

$$v(x) = c\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = c\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right)dx = c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Por lo tanto, si se suprime el multiplicador constante, se encuentra que una segunda solución de (34) es

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

284. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 7 (pág. 103)

$$y_1(x) = e^{k_1x}, \quad y_2(x) = e^{k_2x}, \quad y_3(x) = e^{k_1x}.$$

Se tiene

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_1x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_1x} & k_3^2e^{k_2x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_2)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2).$$

285. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 99 y 100. Ejemplo 3-5.

Calcule el wronskiano de los siguientes pares de funciones y determine si son linealmente dependientes o independientes en todo el eje x.

a) $y_1 = x + 1$, y $y_2 = x^2$

b) $y_1 = sen\, x$, y $y_2 = \cos x$

c) $y_1 = x^3$, y $y_2 = -2x^3$

Solución. –

El wronskiano de cada par de funciones se determina por la definición de wronskiano, $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$.

a) $W(y_1, y_2) = (x+1)(x^2)' - (x+1)'x^2$

$$= (x+1)(2x) - x^2$$

$$= x(x+2)$$

El wronskiano se vuelve cero en los dos puntos $x = 0$ y $x = -2$. Pero, con todo, ambas funciones son linealmente independientes en cualquier intervalo, aun cuando el intervalo contenga los puntos 0 y -2. Esto se debe a que el wronskiano tiene que ser cero para todas las x en un intervalo para que las funciones sean linealmente dependientes en ese intervalo.

b) $W(y_1, y_2) = sen\,x(\cos x)' - (sen\,x)' \cos x$

$$= sen\,x(-sen\,x) - \cos x \cos x$$

$$= -(sen^2\,x + \cos^2 x) = -1 \neq 0$$

Por tanto, estas dos funciones son linealmente independientes.

c) $W(y_1, y_2) = x^3(-2x^3)' - (x^3)'(-2x^3)$

$$= x^3(-6x^2) - (3x^2)(-2x^3)$$

$$= -6x^5 + 6x^5 = 0$$

El wronskiano de ambas funciones es cero; por tanto, son linealmente dependientes en cualquier intervalo.

286. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 101. Ejemplo 3-6.

Determine si las funciones 1, $2x$ y $sen\,x$ son linealmente dependientes o independientes en todo el eje $-\infty < x < +\infty$

Solución. –

Considerando $y_1 = 1$, $y_2 = 2x$ y $y_3 = sen\,x$, el wronskiano de estas tres funciones se determina por la ecuación 3-13 formando un determinante de 3 3 3 y evaluándolo. Esto da.

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & sen\,x \\ 0 & 2 & \cos x \\ 0 & 0 & -sen\,x \end{vmatrix} = -2sen\,x$$

que no es idénticamente cero (es decir, no es cero para toda x). Es cero solo para $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$). Por tanto, estas tres funciones son linealmente independientes.

287. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 154 y155. Ejemplo 2.

Demostrar que las funciones e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

A fin de establecer este resultado, se supone que

$$k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0$$

para toda x en el intervalo; entonces, es necesario demostrar que $k_1 = k_2 = 0$. Elija dos puntos x_0 y. x_1 en el intervalo, en donde $x_1 \neq x_0$. Si se evalúa (2) en estos puntos, se obtiene

$$k_1 e^{x_0} + k_2 e^{2x_0} = 0,$$
$$k_1 e^{x_1} + k_2 e^{2x_1} = 0.$$

El determinante de los coeficientes es

$$e^{x_0} e^{2x_1} - e^{2x_0} e^{x_1} = e^{x_0} e^{x_1} (e^{x_1} - e^{x_0})$$

Dado que el determinante es diferente de cero, se concluye que la única solución de la ecuación (3) es $k_1 = k_2 = 0$. De donde, e^x y e^{2x} son linealmente independientes.

El siguiente teorema relaciona la independencia y dependencia lineales con el wronskiano.

288. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 157. Ejemplo 3.

En el ejemplo 5 de la sección 3.2 se comprobó que $y_1(x) = x^{1/2}$ y $y_2(x) = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0.$$

Comprobar que el wronskiano de y_1 y y_2 está dado por la ecuación (12).

Con base en el ejemplo que acaba de citarse se sabe que $W(y_1, y_2)(x) = -(3/2)x^{-3/2}$. Para utilizar la ecuación (12) es necesario escribir la ecuación diferencial (13) en la forma estándar con el coeficiente de y'' igual a uno. Por tanto, se obtiene

$$y'' + \frac{3}{2x} - y' - \frac{1}{2x^2} y = 0$$

de modo que $p(x) = 3/2$. De donde,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= c\exp\left[-\int \frac{3}{2x} dx\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln x\right) \\ &= cx^{-3/2} \end{aligned}$$

La ecuación (14) da el wronskiano de cualquier par de soluciones de (13). Para las soluciones particulares dadas en este ejemplo es necesario elegir $c = -3/2$.

289. Kiseliov, A. Krasnov, M. Makarenko, G. (1984) Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias(Cuarta edición). Editorial Grupo Mir. Ejemplo 8 (pág. 103)

$$y_1(x) = \operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right), y_3(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Se tiene

$$W[y_1, y_2, y_3] =$$
$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ -\operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & -\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

Puesto que la primera y la última fila son proporcionales.

290. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 1 (pág 156)

Hallar el wronskiano de las siguientes funciones:

$$y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \operatorname{sen} x, y_3(x) = 1,$$
$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & 1 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

291. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 2 (pág 156)

Hallar el wronskiano de las siguientes funciones:

$$y_1(x) = e^{-5x}, y_2(x) = e^{x}, y_3 = e^{2x}$$
$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^{-5x} & e^{x} & e^{2x} \\ -5e^{-5x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ -25e^{-5x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 42e^{-2x}$$

292. Carmona, I. y Lopez, E. Ecuaciones diferenciales (Quinta Edición), Pearson. Ejemplo 3 (pág 156)

Hallar el wronskiano de las funciones:

$$y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right); y_2 = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right); y_3 = \operatorname{sen} x$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & \cos x \\ -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 0$$

porque el primero y el último renglones son proporcionales.

293. Çengel, Y. Palm III, W. Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Editorial Mc Graw Hill. Figura 3-14 (pág 101)

Funciones:

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = e^{-2x}, \quad y_3 = x + 1$$

Su wronskiano:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} x^2 & e^{-2x} & x+1 \\ 2x & -2e^{-2x} & 1 \\ 2 & 4e^{2x} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2e^{-2x}\left(2x^2 + 6x + 3\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

∴Son linealmente independientes

Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes

Existencia de una solución

294. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 93 y 94. Ejemplo 3-1.

Compruebe que el problema de valor inicial dado tiene una solución única y determine el intervalo de dicha solución:

$$y'' + \frac{3x}{x-1}y' - 5y = \cos x - 2$$

$$y(5) = 3 \qquad \text{y} \qquad y'(5) = -1$$

Solución. –

Éste es un problema de valor inicial, ya que ambas condiciones se especifican al mismo valor de x que es $x_0 = 5$. La ecuación diferencial es de segundo orden porque la derivada de orden superior es y'', *lineal* porque no incluye potencias ni funciones no lineales de y ni de sus derivadas, *no homogénea* porque el lado derecho es diferente de cero y los términos de ese lado no incluyen a la variable dependiente y ni a ninguna de sus derivadas, y está en la forma estándar porque el coeficiente de y'' es 1. Comparando con la ecuación 3-1, vemos que

$$P(x) = \frac{3x}{x-1}, Q(x) = -5, \qquad \text{y} \qquad R(x) = \cos x - 2$$

Las funciones $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas, pero la función $P(x)$ es discontinua en $x = 1$. Por tanto, $P(x)$ es continua en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 1$ (figura 3-4). Específicamente, es continua en dos intervalos: $-\infty < x < 1$ y $1 < x < \infty$.

Considerando que las condiciones iniciales se especifican en $x_0 = 5$, que está en el segundo intervalo, el teorema 3-1 garantiza que este problema de valor inicial tiene una solución única en el intervalo$1 < x < \infty$.

295. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 94. Ejemplo 3-2.

Determine la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 3xy' - 5y = 0$$
$$y(2) = 0 \qquad \text{y} \qquad y'(2) = 0$$

Solución. –

Éste es un problema de valor inicial porque se especifican ambas condiciones para el mismo valor de x. La ecuación diferencial es *de segundo orden* porque la derivada de orden superior es y'', *lineal* porque no incluye potencias, productos, ni alguna otra función no lineal de y ni de

sus derivadas, *homogénea* porque cada término incluye la variable dependiente y o una de sus derivadas, y está en la *forma estándar* porque el coeficiente de y'' es 1. Además, los coeficientes de la ecuación diferencial no incluyen ninguna discontinuidad; por tanto, el intervalo de la solución es $-\infty < x < \infty$.

Observamos que el punto $x_0 = 2$ (o cualquier otro) está en este intervalo. Por tanto, de acuerdo con el teorema 3-1, este problema de valor inicial tiene una y solo una solución, que se determina por inspección como $y = 0$, ya que la función $y = 0$ satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales.

296. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 103. Ejemplo 3-7.

Verifique que e^{-2x} es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$ y compruebe que $5e^{-2x}$ también es una solución de esta ecuación.

Solución. –

Primero observamos que la ecuación diferencial es lineal y homogénea. Por sustitución directa podemos verificar que e^{-2x} es una solución de la ecuación dada,

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (e^{-2x})'' - 2e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} - 4e^{-2x} \\ &= 0\ (coincide) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $5e^{-2x}$ en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (5e^{-2x})'' - 4(5e^{-2x}) \\ &= 20e^{-2x} - 20e^{-2x} \\ &= 0\ (coincide) \end{aligned}$$

Por tanto, $5e^{-2x}$ (que es un múltiplo constante de e^{-2x}) también es una solución de la ecuación diferencial dada. Esto era de esperarse, ya que (de acuerdo con el teorema 3-2) un múltiplo constante de una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución (figura 3-16).

La función e^{-2x} es una solución de la ecuación lineal homogénea

$$y'' - 4y = 0$$

$5e^{-2x}$ también lo es.

FIGURA 3-16
Un múltiplo constante de una solución de una ecuación *lineal homogénea* también es una solución.

297. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 103 y 104. Ejemplo 3-8.

Verifique que e^{-2x} y e^{2x} son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$. Además, compruebe que $e^{-2x} + e^{2x}$ también es una solución de esta ecuación.

Solución. –

Primero observamos que la ecuación diferencial es lineal y homogénea. Por sustitución directa podemos verificar que tanto e^{-2x} como e^{2x} son soluciones de la ecuación dada,

$$y'' - 4y = (e^{-2x})'' - 4e$$
$$= 4e^{-2x} - 4e^{-2x}$$
$$= 0\ (coincide)$$
$$y'' - 4y = (e^{2x})'' - 4e^{2x}$$
$$= 4e^{2x} - 4e^{2x}$$
$$= 0\ (coincide)$$

Ahora sustituimos $e^{-2x} + e^{2x}$ en la ecuación diferencial

$$y''4y = (e^{-2x} + e^{2x})'' - 4(e^{-2x} + e^{2x})$$
$$= 4e^{2x} + 4e^{2x} - 4e^{-2x} - 4e^{2x}$$
$$= 0\ (coincide)$$

Por tanto, $e^{-2x} + e^{2x}$ también es una solución de la ecuación diferencial dada. Esto era de esperarse, ya que (de acuerdo con el teorema 3-2) la suma de dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución (figura 3-17).

Como e^{-2x} y e^{2x} son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y'' - 4y = 0$$

$e^{-2x} + e^{2x}$ también lo es.

FIGURA 3-17
La suma de las dos soluciones de una ecuación *lineal homogénea* también es una solución.

298. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 98. Ejemplo 3-4.

Determine si los siguientes pares de funciones son linealmente dependientes o independientes para $-\infty < x < +\infty$.

a) $y_1 = 6x$ y $y_2 = 2$

b) $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$

c) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$

d) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$

e) $y_1 = sen\, x$ y $y_2 = \cos x$

f) $y_1 = x$ y $y_2 = x + 1$

Solución. –

Todos estos pares de funciones son linealmente independientes, ya que la razón de las dos funciones en cada par depende de x (es decir, no es una constante), como se ilustra aquí:

a) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{6x}{2} = 3x$

b) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

c) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$

d) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$

e) $\frac{y_1}{y_2} = sen\,\frac{x}{\cos x} = \tan x$

f) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{x+1}$

299. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 154. Ejemplo 1.

Determinar si las funciones sen xy$\cos(x - \pi/2)$ son linealmente independientes o dependientes sobre un intervalo arbitrario.

Las funciones dadas son linealmente dependientes sobre cualquier intervalo ya que

$$k_1 \text{sen } x + k_2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

para toda x si se eligen $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$

300. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 173 y 174. Ejemplo 3.

Dado que $y_1(x) = x^{-1}$ es una solución de

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0$$

hallar una segunda solución linealmente independiente.

Se hace $y = v(x)x^{-1}$; entonces

$$y' = v'x^{-1} - vx^{-2},\ y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}.$$

Si se sustituyen $y, y'yy''$ de la ecuación (31) y se agrupan términos se obtiene

$$\begin{aligned} &2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(v'x^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1} \\ &= 2xv'' + (-4+3)v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1})v \\ &= 2xv'' - v' = 0. \end{aligned}$$

Observe que el coeficiente de v es cero, como debe ser; esto permite tener una útil comprobación de los pasos algebraicos.

Si se separan las variables en la ecuación (32) y se despeja $v'(x)$, se encuentra que

$$v'(x) = cx^{1/2}$$

entonces

$$v(x) = \frac{2}{3}cx^{3/2} + k$$

Se concluye que

$$y = \frac{2}{3}cx^{1/2} + kx^{-1},$$

en donde cyk son constantes arbitrarias. El segundo término del segundo miembro de (33) es un múltiplo de $y_1(x)$ y se puede cancelar, pero el primer término proporciona una nueva solución independiente. Si se desprecia la constante multiplicativa arbitraria, se tiene $y_2(x) = x^{1/2}$.

301. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 174 y 175. Ejemplo 4.

Comprobar que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ -1 < x < 1,$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

Si $y = x$, entonces $y' = 1$ y $y'' = 0$. Si se sustituyen estas cantidades en la ecuación (34) se ve que $y = x$ es una solución de esa ecuación. Para encontrar una segunda solución, sea $y = xv(x)$; entonces

$$y' = xv' + v,\ y'' = xv'' + 2v'.$$

Entonces, si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (34), se obtiene

$$(1 - x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0,$$

o bien,

$$x(1 - x^2)v'' + (2 - 4x^2)v' = 0.$$

Al separar las variables, es posible escribir la ecuación (35) en la forma

$$\frac{(v')'}{v'} = -\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2}$$

de lo cual se deduce que

$$v'(x) = \frac{c}{x^2(1-x^2)}$$

en donde c es una constante arbitraria. Como consecuencia,

$$v(x) = c\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = c\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Por lo tanto, si se suprime el multiplicador constante, se encuentra que una segunda solución de (34) es

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden

302. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 104. Ejemplo 3-9.

Verifique que e^{-2x} es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 3y - e^{-2x} = 0$, y vea si $5e^{-2x}$ también es una solución de esta ecuación.

Solución. –

Primero observamos que ésta es una ecuación lineal pero no homogénea, porque el último término no incluye y ni alguna de sus derivadas. Por sustitución directa podemos verificar que e^{-2x} es una solución de la ecuación dada:

$$\begin{aligned} y'' - 3y - e^{-2x} &= (e^{-2x})'' - 3e^{-2x} - e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} - 3e^{-2x} - e^{-2x} \\ &= 0\ (coincide) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $5e^{-2x}$ en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' - 3y - e^{-2x} &= (5e^{-2x})'' - 3(5e^{-2x}) - e^{-2x} \\ &= 20e^{-2x} - 15e^{-2x} - e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} \\ &\neq 0\ (no\ coincide) \end{aligned}$$

Por tanto, $5e^{-2x}$ no es una solución de la ecuación diferencial dada. Esto no es sorprendente, ya que la ecuación diferencial no es homogénea, y el principio de superposición no es aplicable a ecuaciones no homogéneas, aun cuando sean lineales (figura 3-18).

La función e^{-2x} es una solución de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' - 4y = e^{-2x}$$

pero $5e^{-2x}$ no lo es.

FIGURA 3-18
El principio de superposición no es aplicable a ecuaciones *no homogéneas*.

303. Calixto M. (2016). Métodos Matemáticos de la Física II: Ecuaciones Diferenciales y Funciones Especiales. Pag 38. Ejemplo 2.2.10

Resolver $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$.

Solución:

Según el ejemplo la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}.$$

Como el lado derecho de la ecuación dada tiene un polinomio de segundo grado y una exponencial, usando el principio de superposición 2.1.14 y el método de los coeficientes indeterminados 2.2.9, proponemos ensayar como solución particular

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C + De^{3t}$$

(nótese que ni t^2 ni e^{3t} aparecen dentro del sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, es decir, no existe "resonancia" en este caso). Sustituyendo $x_p(t)$ en la ecuación diferencial y reagrupando términos se tiene que

$$(2A - 4B - 5C) + (-8A - 5B)t - 5At^2 - 8De^{3t} = t^2 + 2e^{3t}.$$

304. Calixto M. (2016). Métodos Matemáticos de la Física II: Ecuaciones Diferenciales y Funciones Especiales. Pag 38. Ejemplo 2.2.12.

Resolver $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$.

Según el ejemplo la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t).$$

Como el lado derecho de la ecuación diferencial coincide con una de las soluciones de la ecuación homogénea, en este caso existe resonancia. Además, la multiplicidad es m = 2. Esto implica que la solución particular a ensayar es ahora de la forma $x_p(t) = At^2e^{-2t}$, que introducida en la ecuación diferencial nos da A = 1/2.

Así la solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-2t}\left(C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2\right).$$

305. Nagle R. et al (2005). Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Editorial Pearson Addison Wesley. Pag 327-328. Ejemplo 1.

Determinar una solución general de $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0 \;... (1)$$

Por inspección, vemos que r = 1 es una raíz. Usamos la división de polinomios para obtener

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = (r-1)(r^2 - r - 6).$$

Que se puede factorizar aún más como $(r-1)(r+2)(r-3)$. Por lo tanto, las raíces de la ecuación (1) son $r_1 = 1,\ r_2 = -2,\ r_3 = 3.$ Como estas raíces son reales y distintas, una solución general es

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}.$$

Método de variación de parámetros

306. Nagle R. et al (2005). Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Editorial Pearson Addison Wesley. Pag 340-341. Ejemplo 1.

Determinar una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler:

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 senx, \qquad x > 0 \;... (13)$$

Dado que $\{x, x^{-1}, x^2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

Solución:

Un primer paso importante consiste en dividir (13) entre x^3 para obtener la forma canónica

$$y'''+\frac{1}{x}y''-\frac{2}{x^2}y'+\frac{2}{x^3}y=senx, \qquad x>0 \quad \text{... (14)}$$

De la cual vemos que $g(x)=senx.$ Como $\{x,x^{-1},x^2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones, podemos obtener una solución particular de la forma

$$y_p(x)=v_1(x)x-v_2(x)x^{-1}+v_3(x)x^2. \quad \text{... (15)}$$

Para usar la formula (12), primero debemos evaluar cuadros determinantes:

$$W\left[x,x^1,x^2\right](x)=\begin{vmatrix} x & x^{-1} & x^2 \\ 1 & -x^{-2} & 2x \\ 0 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix}=-6x^{-1}$$

$$W_1(x)=(-1)^{(3-1)}W\left[x^{-1}.x^2\right](x)=(-1)^2\begin{vmatrix} x^{-1} & x^2 \\ -x^{-2} & 2x \end{vmatrix}=3,$$

$$W_2(x)=(-1)^{(3-2)}\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=-x^2,$$

$$W_3(x)=(-1)^{(3-3)}\begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix}=-2x^{-1}.$$

Al sustituir expresiones anteriores en (12), tenemos

$$y_p(x)=x\int\frac{(senx)^3}{-6x^{-1}}dx+x^{-1}\int\frac{(senx)(-x^2)}{-6x^{-1}}dx+x^2\int\frac{(senx)(-2x^{-1})}{-6x^{-1}}dx$$

$$=x\int\left(-\frac{1}{2}xsenx\right)dx+x^{-1}\int\frac{1}{6}x^3senxdx+x^2\int\frac{1}{3}senxdx$$

Que después de algo de trabajo se simplifica como

$$y_p(x)=\cos x-x'senx+C_1x+C_2x^{-1}+C_3x^2 \quad \text{... (16)}$$

Donde $C_1,C_2\ y\ C_3$ denotan las constantes de integración. Como $\{x,x^{-1},x^2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea, debemos

considerar que $C_1,C_2\ y\ C_3$ son constantes arbitrarias. Así, el lado derecho de (16) proporciona la solución general deseada.

307. Ecuaciones Diferenciales Quinta Edición – I. Carmona y E. Filipio – Editorial Pearson – Ejemplo 1 – Pagina 40-41

Resolver $e^{x+y}y' = x$, con las condiciones iniciales $y = ln2$ cuando $x = 0$.

Solución:

Separar las variables usando las propiedades de las funciones involucradas y los artificios algebraicos necesarios:

$$e^x e^y \frac{dy}{dx} = x, \quad e^y dy = xe^{-x} dx$$

Integrar cada miembro de la ecuación:

$$\int e^y dy = \int xe^{-x} dx$$

$$e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + C \qquad \textit{(Solución General Implícita)}$$

$$y = \ln|e^{-x}(-x-1) + C| \qquad \textit{(Solución General Explícita)}$$

Aplicar las condiciones iniciales: $y(0) = ln2$ en la solución general, ya sea en su forma explícita o implícita.

En la forma implícita:

$$e^{ln2} = -0 - e^{-0} + C$$
$$2 = -1 + C$$
$$C = 3$$

$\therefore e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + 3$, solución particular.

En la forma explícita:

$$ln2 = \ln|e^{-0}(-1) + C|$$
$$ln2 = \ln|1(-1) + C|$$
$$C = 3$$

$$\therefore y = \ln|e^{-x}(-x-1) + C|$$

Cuya curva de solución es:

308. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias – A. Kiseliov; M. Krasnov y G. Makarenko – Editorial MIR – Ejemplo 1 – Pagina 49-50

Solución:

Apliquemos el método de variación de la constante. Consideremos la ecuación homogénea.

$$y' + 2xy = 0 \ldots (I)$$

Correspondiente a la ecuación no homogénea dada. Esta es una ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma:

$$y = ce^{-x^2}$$

Buscamos la solución general de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y = c(x)e^{-x^2} \ldots (II)$$

Donde $c(x)$ es una función incógnita de x.

Poniendo I en II, obtenemos $c'(x) = 2x$. De donde $c(x) = x^2 + c$. Resumiendo, la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$\therefore y = (x^2 + c)e^{-x^2}$$

Donde c es la constante de integración.

309. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 189 y 190. Ejemplo 1.

Encontrar una solución particular de

$$y'' + 4y = 3\csc x$$

Observe que este problema no cae dentro de los límites del método de los coeficientes indeterminados porque el término no homogéneo $g(x) = 3\csc\ x$ contiene un cociente (en vez de una suma o un producto) de sen x o de cos x. Por consiguiente, se necesita un enfoque diferente. Observe también que la ecuación homogénea correspondiente a (1) es

$$y'' + 4y = 0$$

y que la solución general de (2) es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

La idea básica en el método de variación de parámetros es sustituir las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (3) por las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, respectivamente, y después determinar estas funciones de modo que la expresión resultante

$$y = u_1(x)\cos 2x + u_2(x)\operatorname{sen} 2x$$

sea una solución de la ecuación no homogénea (1).

Para determinar u_1 y u_2 es necesario sustituir y de la ecuación (1) por su expresión dada en (4). Sin embargo, incluso sin llevar a cabo esta sustitución es posible anticipar que el resultado será una sola ecuación que comprenda alguna combinación de u_1 y u_2 y sus dos primeras derivadas. Dado que se tiene una sola ecuación y dos funciones desconocidas, es de esperar que existan muchas posibilidades para u_1 y u_2 que satisfagan las necesidades. Un punto de vista alternativo es que puede imponerse una segunda condición que se desee, para obtener así dos ecuaciones para las dos funciones desconocidas u_1 y u_2. Pronto se demostrará (siguiendo a Lagrange) que es posible elegir esta segunda condición de una manera que se hagan a los cálculos marcadamente más eficientes.

Si se regresa ahora a la ecuación (4), se deriva y se reagrupan los términos, se obtiene

$$y' = -2u_1(x)\operatorname{sen} 2x + 2u_2(x)\cos 2x + u_1'(x)\cos 2x + u_2'(x)\operatorname{sen} 2x$$

Si se tiene presente la posibilidad de elegir una segunda condición sobre u_1 y u_2, se requiere que los dos últimos términos del segundo miembro de (5) sean cero; es decir, que

$$u_1'(x)\cos 2x + u_2'(x)\operatorname{sen} 2x = 0.$$

Entonces, de la ecuación (5) se concluye que

$$y' = -2u_1(x)\operatorname{sen} 2x + 2u_2(x)\cos 2x.$$

Aunque el efecto final de la condición (6) aún no es evidente, por lo menos se simplificó la expresión para y'. Además, al derivar la ecuación (7) se obtiene

$$y'' = -4u_1(x)\cos 2x - 4u_2(x)\operatorname{sen} 2x - 2u_1'(x)\operatorname{sen} 2x + 2u_2'(x)\cos 2x$$

Entonces, si se sustituyen y y y'' de la ecuación (1) por sus expresiones dadas en (4) y (8), respectivamente, se encuentra que u_1 y u_2 deben satisfacer

$$-2u_1'(x)\operatorname{sen} 2x + 2u_2'(x)\cos 2x = 3\csc x.$$

Resumiendo, los resultados hasta este momento, se desea elegir u_1 y u_2 de modo que se satisfagan las ecuaciones (6) y (9). Estas ecuaciones pueden considerarse como un par de ecuaciones algebraicas lineales para las dos cantidades desconocidas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$. (6) y (9) pueden resolverse de varias maneras. Por ejemplo, si se despeja $u_2'(x)$ en (6), se tiene

$$u_2'(x) = -u_1'(x)\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

Luego, si se sustituye $u_2'(x)$ de la (9) por esta expresión y se simplifica, se obtiene

$$u_1'(x) = -\frac{3\csc x \operatorname{sen} 2x}{2} = -3\cos x$$

Además, si se sustituye esta expresión para $u_1'(x)$ en la ecuación (10) y se aplican las fórmulas para el doble de un ángulo, se encuentra que

$$u_2'(x) = \frac{3\cos x\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{3(1-2\operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen} x} = \frac{3}{2}\csc x - 3\operatorname{sen} x$$

Una vez que se obtuvieron $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, el paso siguiente es integrar para obtener $u_1'(x)$y $u_2'(x)$. El resultado es

$$u_1(x) = -3\operatorname{sen} x + c_1$$

y

$$u_2(x) = \frac{3}{2}\ln|\csc x - \cot x| + 3\cos x + c_2.$$

Por último, al sustituir estas expresiones en la ecuación (4), se tiene

$$y = -3\operatorname{sen} x\cos 2x + \frac{3}{2}\ln|\csc x - \cot x|\operatorname{sen} 2x + 3\cos x\operatorname{sen} 2x$$
$$+c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x$$

Los términos de la ecuación (15) en los que aparecen las constantes arbitrarias c_1 y c_2 son la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, mientras que los demás términos son una solución particular de la ecuación no homogénea (1). Por lo tanto, (15) es la solución general de la ecuación (1).

22. Ejemplo. –

310. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 193 y 194. Ejemplo 2.

Comprobar que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = 1/x$ son soluciones de

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

y, a continuación determine la solución general de

$$x^2y'' + xy' - y = x\ln x$$

para $x > 0$

Para comprobar que las funciones dadas son soluciones de la ecuación (30), pueden sustituirse simplemente estas funciones en la ecuación y observar si se satisface. Por ejemplo, para $y_2(x) = 1/x$, se tiene $y_2'(x) = -1x^2$ y $y_2''(x) = 2/x^3$. Si se sustituyen estas expresiones en (30) se encuentra que $(2/x) - (1/x) - (1/x) = 0$, lo cual evidentemente es cierto para toda x, excepto $x = 0$. De manera semejante, es fácil comprobar que y_1 también es una solución.

Si se regresa ahora a la ecuación no homogénea (31), primero se observa que no es de la forma (16) porque el coeficiente de y'' no es uno. Por tanto, se divide la ecuación entre x^2y vuelve a escribirse como

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x},\ x > 0$$

Ahora es posible identificar $(\ln x)/x$ con el término no homogéneo $g(x)$ de la ecuación (16).

Para resolver (32) se supone que

$$y = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1}$$

y se procede como en el ejemplo 1 y el análisis general que sigue a la ecuación (16). Las ecuaciones que determinan a $u_1'(x)$ y a $u_2'(x)$ son

$$u_1'(x)x + u_2'(x)x^{-1} = 0$$
$$u_1'(x) + u_2'(x)(-x^{-2}) = \frac{\ln x}{x}$$

La solución del sistema de ecuaciones (34) es

$$u_1'(x) = \frac{\ln x}{2x},\ u_2'(x) = -\frac{x\ln x}{2}$$

Entonces, se concluye que

$$u_1(x) = \frac{(\ln x)^2}{4} + c_1,\ u_2(x) = -\frac{x^2(2\ln x - 1)}{8} + c_2$$

Por último, si se sustituyen estas expresiones en la ecuación (33) se obtiene la solución general de la (32); a saber,

$$y = \frac{1}{4}x(\ln x)^2 - \frac{1}{4}x\ln x + c_1x + c_2x^{-1}$$

Observe que en el producto $u_2(x)x^{-1}$ hay un término $x/8$ que quedó absorbido en el término c_1x.

Método de los coeficientes indeterminados

311. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 179 y 180. Ejemplo 1.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \ldots (9)$$

Se busca una función Y tal que la combinación $Y''(x) - 3Y'(x) - 4Y(x)$ sea igual a $3e^{2x}$. Como la función exponencial se reproduce por medio de la derivación, la forma más razonable de lograr el resultado que se desea es suponer que $Y(x)$ es algún múltiplo de e^{2x}; es decir,

$$Y(x) = Ae^{2x}$$

en donde el coeficiente A aún está por determinarse. Para encontrar A se calculan

$$Y'(x) = 2Ae^{2x},\ Y''(x) = 4Ae^{2x},$$

y se sustituye en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (9). Se obtiene

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

De donde, $-6A = 3$, de modo que $A = -1/2$. Por tanto, una solución particular es

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \ldots (10)$$

312. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 180. Ejemplo 2.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\text{sen}\,x \ldots (11)$$

Por analogía con el ejemplo 1 , suponga primero que $Y(x) = A$ sen x, en donde A es una constante por determinar. Al sustituir en (11) y reordenar los términos se obtiene

$$-5A\text{sen }x - 3A\cos\ x = 2\text{sen }x. \ldots (12)$$

No existe elección de la constante A que satisfaga la ecuación (12) para toda x, por lo que se concluye que la suposición referente a $Y(x)$ es incorrecta. La aparición del término coseno en

(12) sugiere modificar la suposición original para incluir un término cosenoidal en $Y(x)$; es decir,

$$Y(x) = A\text{sen } x + B\cos x$$

en donde deben determinarse A y B. Entonces,

$$Y'(x) = A\cos x - B\text{sen } x, \ Y''(x) = -A\text{sen } x - B\cos x.$$

Al sustituir estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (11) y agrupar términos se obtiene

$$(-A + 3B - 4A)\,\text{sen}\, x + (-B - 3A - 4B)\cos x = 2\,\text{sen}\, x \ldots.(13)$$

Para satisfacer la ecuación (13) es necesario hacer corresponder los coeficientes de sen x y cos x de cada miembro de la ecuación; por tanto, A y B deben satisfacer las ecuaciones

$$-5A + 3B = 2, \ -3A - 5B = 0.$$

De donde, $A = -5/17$ y $B = 3/17$, de manera que una solución particular de la ecuación (11) es

$$Y(x) = -\frac{5}{17}\text{sen } x + \frac{3}{17}\cos x$$

313. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 180 y 181 Ejemplo 3.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2 \ldots (14)$$

Como el segundo miembro de la ecuación (14) es un polinomio, es natural suponer que Y también es un polinomio del mismo grado o superior. En esta sección se demostrará después que (con ciertas excepciones) basta suponer que Y es un polinomio del mismo grado que el término no homogéneo; por lo tanto, se supone que

$$Y(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Se sigue que

$$Y'(x) = 2Ax + B, \ Y''(x) = 2A$$

Si se sustituyen estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (14) y se agrupan términos, se obtiene

$$-4Ax^2 + (-6A - 4B)x + (2A - 3B - 4C) = 4x^2$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, se encuentra que A, B y C deben satisfacer

$$-4A = 4, \ -6A - 4B = 0, \ 2A - 3B - 4C = 0.$$

Por tanto, $A = -1, B = 3/2$ y $C = -13/8$; de donde, una solución particular de (14) es

$$Y(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

314. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 181 Ejemplo 4.

Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x \ldots (15)$$

En este caso se supone que $Y(x)$ es el producto de e^x y una combinación lineal de cos $2x$ y sen $2x$; es decir,

$$Y(x) = Ae^x \cos\ 2x + Be^x \text{sen}\ 2x.$$

En este ejemplo el álgebra es más tediosa, pero se concluye que

$$Y'(x) = (A + 2B)e^x \cos\ 2x + (-2A + B)e^x \text{sen}\ 2x$$
$$Y''(x) = (-3A + 4B)e^x \cos\ 2x + (-4A - 3B)e^x \text{sen}\ 2x.$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (15) se encuentra que A y B deben satisfacer

$$10A + 2B = 8,\ 2A - 10B = 0.$$

De donde, $A = 10/13$ y $B = 2/13$; por consiguiente, una solución particular de (15) es

$$Y(x) = \frac{10}{13}e^x \cos\ 2x + \frac{2}{13}e^x \text{sen}\ 2x.$$

315. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 182. Ejemplo 5.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\,\text{sen}\,x - 8e^x \cos 2x \ldots (19)$$

Al descomponer el segundo miembro de la ecuación (19), se obtienen las tres ecuaciones

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x},$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\text{sen}\ x,$$

y

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos\ 2x$$

En los ejemplos 1,2 y 4, respectivamente, se han encontrado las soluciones de estas tres ecuaciones. Por lo tanto, una solución particular de (19) es su suma; a saber,

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{17}\cos\ x - \frac{5}{17}\text{sen}\ x + \frac{10}{13}e^x \cos\ 2x + \frac{2}{13}e^x \text{sen}\ 2x$$

316. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 182 y 183. Ejemplo 6.

Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \dots (20)$$

Procediendo como en el ejemplo 1 , se supone que $Y(x) = Ae^{-x}$. Al sustituir en la ecuación (20), se obtiene

$$(A + 3A - 4A)e^{-x} = e^{-x}. \dots (21)$$

Dado que el coeficiente de e^{-x} del primer miembro de (21) es cero, es imposible resolver esta ecuación para A. Por consiguiente, se concluye que no existe solución de la ecuación (20) con la forma supuesta. Se aclara la razón de este resultado posiblemente inesperado si se resuelve la ecuación homogénea

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \dots (22)$$

que corresponde a la (20). Las raíces de la ecuación característica asociada son $r_1 = 4$ y $r_2 = -1$, por lo que un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (22) son $y_1(x) = e^{4x}$ y $y_2(x) = e^{-x}$. Ahora se ve que la solución particular supuesta de la ecuación no homogénea (20) es en realidad una solución de la ecuación homogénea (22). Como se vio, la sustitución de esa función en el primer miembro de la ecuación (20) da cero, lo que imposibilita balancear el término diferente de cero del segundo miembro de la (20).

Por lo tanto, para encontrar una solución de (20) se necesita considerar funciones de una forma algo diferente. La función más simple, aparte de la propia e^{-x} que al ser derivada produce un término e^{-x}, es ex^{-x}.Por tanto, podría intentarse con $Y(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Sin embargo, no es necesario el término Be^{-x}, ya que es una solución de la ecuación homogénea correspondiente y no ayuda a resolver la ecuación no homegénea. De donde, se supone que $Y(x) = Axe^{-x}$. Entonces,

$$Y'(x) = (A - Ax)e^{-x},\ Y''(x) = (-2A + Ax)e^{-x}.$$

Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación (20) y se agrupan términos, se encuentra que

$$[(Ax + 3Ax - 4Ax) + (-2A - 3A)]e^{-x} = e^{-x}.$$

Por consiguiente, $A = -1/5$ y una solución particular de (20) es

$$Y(x) = -\frac{1}{5}xe^{-x}$$

317. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 184 y 185. Ejemplo 7.

Escribir la forma de una solución particular de

$$y'' + 4y = x^2e^{-3x}\text{sen } x - x\text{sen } 2x$$

En primer lugar se observa que la solución de la ecuación homogénea correspondiente $y'' + 4y = 0$ es

$$y = c_1\cos\ 2x + c_2\text{sen } 2x.$$

Luego se observa que el segundo miembro de la ecuación (24) cae en lo que cubre el método de los coeficientes indeterminados, como se presentó en el texto. Se forman los dos subproblemas

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x}\text{sen } x$$

y

$$y'' + 4y = -x\text{sen } 2x$$

El segundo miembro de la (26) consta de un producto de un polinomio cuadrático, la misma función exponencial y un seno, por lo que se supone una solución particular $Y_1(x)$ en la forma de un producto de un polinomio cuadrático, la misma función exponencial y una combinación lineal de los correspondientes seno y coseno. Por tanto, se supone que

$$Y_1(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-3x}\cos\ x + (Dx^2 + Ex + F)e^{-3x}\text{sen } x.$$

Ninguno de estos términos duplica la solución (25) de la ecuación homogénea, por lo que no es necesario modificar la suposición inicial. El segundo miembro de la ecuación (27) es un producto de un polinomio de primer grado y un seno, de modo que inicialmente se supone una solución particular $Y_2(x)$ para esta ecuación de la forma

$$Y_2(x) = (Gx + H)\cos\ 2x + (Jx + K)\text{sen } 2x.$$

Sin embargo, algunos de los términos de esta $Y_2(x)$ son los mismos que los de la solución (25) de la ecuación no homogénea, de manera que es necesario multiplicar por x a fin de obtener la forma correcta para la solución particular de la ecuación (27); a saber,

$$Y_2(x) = (Gx^2 + Hx)\cos\ 2x + (Jx^2 + Kx)\text{sen } 2x$$

Los coeficientes $A, \ldots, K$ de $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ se encuentran como de costumbre, al sustituir las expresiones de las ecuaciones (28) y (30) en las (26) y (27), respectivamente. Una vez que se han determinado los coeficientes, la solución general de la ecuación (24) es la suma de las funciones dadas por las ecuaciones (25), (28) y (30). Pueden elegirse las constantes arbitrarias c_1y c_2 de esta solución de modo que satisfagan cualquiera de las condiciones iniciales dadas.

Reducción de orden

318. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Página 111 y 112. Ejemplo 3-13.

Dado que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$$

encuentre una segunda solución linealmente independiente por el método de reducción de orden en el intervalo $x > 0$.

Solución. –

Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, y buscamos su segunda solución linealmente independiente en la forma $y = vy_1 = vx$. Obteniendo sus derivadas primera y segunda,

$$y_2' = v'x + v$$

$$y_2'' = v''x + v' + v' = v''x + 2v'$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$x^2(v''x + 2v') - 4x(v'x + v) + 4vx = 0$$

que se simplifica a $v'' - \frac{2v}{x} = 0$ o $w' - \frac{2w}{x} = 0$ donde $w = v'$. Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden, y su solución es $w = x^2$. Entonces, v se determina por integración como $v = x^3/3$. Observe que suprimimos la constante de integración, ya que no tiene importancia. Entonces, la segunda solución linealmente independiente resulta $y_2 = vy_1 = x^4/3$. Observe que las funciones x y x4 son linealmente independientes, como se esperaba. Finalmente, la solución general de esta ecuación diferencial para $x > 0$ puede expresarse como $y = C_1x + C_2x^4$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Observe que absorbimos el factor constante $1/3$ en la constante arbitraria C_2.

Polinomios de Legendre

319. Raya A. Rubio, R. & Ríder. A. (2008) Problemas resueltos de ecuaciones diferenciales. Colección Didáctica. Universidad de Córdoba. Ejemplo 7 (pág. 260)

Transformar la ecuación diferencial $(x^2 - x)y'' + (2x - 1)y' - 2y = 0$ en la de Legendre de orden 1 , mediante un cambio lineal x= a u + b de variable independiente.Expresar su solución general.

Solución

Con un cambio de este tipo, se tiene

$$y' = \frac{dy}{du}u' = \frac{dy}{du}\frac{1}{a}, y'' = \frac{dy'}{du}u' = \frac{d^2y}{du^2}\frac{1}{a^2}$$

lo que transformaría la ecuación dada en la

$$(a^2u^2 + 2abu + b^2 - au - b)\frac{d^2y}{du^2}\frac{1}{a^2} + (2au + 2b - 1)\frac{dy}{du}\frac{1}{a} - 2y =$$

$$= \left(u^2 + \frac{2b-1}{a}u - \frac{b-b^2}{a^2}\right)\frac{d^2y}{du^2} + \left(2u + \frac{2b-1}{a}\right)\frac{dy}{du} - 2y = 0.$$

Comparando esta ecuación con el modelo de Legendre, puede responder al mismo si

$$\frac{2b-1}{a} = 0 \Leftrightarrow b = 1/2, \quad \frac{b-b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a = 1/2,$$

es decir, mediante el cambio

$$x = \frac{1}{2}(u + 1) \Leftrightarrow u = 2x - 1 \; 2$$

quedando efectivamente en la forma

$$(u^2 - 1)\frac{d^2y}{du^2} + 2u\frac{dy}{du} - 2y = 0 \% (1 - u^2)\frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du} + 2y = 0,$$

que es una ecuación de Legendre de orden 1 en las variables u e y. La solución general será

$$y = C\,(u\,Arg\,th\,u - 1) + Du =$$
$$= C[(2x - 1)\,Arg\,th\,(2x - 1) - 1] + D(2x - 1).$$

320. Raya A. Rubio, R. & Ríder. A. (2008) Problemas resueltos de ecuaciones diferenciales. Colección Didáctica. Universidad de Córdoba. Ejemplo 5 (pág. 259)

Resolver directamente la ecuación de Legendre de orden 0

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0.$$

Solución

Separando variables, se tiene:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2x}{1 - x^2} \Rightarrow \ln y' = \ln D - \ln(1 - x^2) \Rightarrow y' = \frac{D}{1 - x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = C + D\,Arg\,th\,x = C + \frac{D}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} = Cu_0(x) + Dv_0(x),$$

donde

$$u_0(x) = 1$$
$$v_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

321. Raya A. Rubio, R. & Ríder. A. (2008) Problemas resueltos de ecuaciones diferenciales. Colección Didáctica. Universidad de Córdoba. Ejemplo 6 (pág. 259-260)

Resolver directamente la ecuación de Legendre de orden 1

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Solución

Comprobada la solución $v_1(x) = x$, hacemos el cambio

$$y = xzy' = z + xz', y' = 2z' + xz'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2z' + xz'' - 2x^2z' - x^3z' - 2xz - 2x^2z' + 2xz =$$
$$= (x - x^3)z'' + 2(1 - 2x^2)z' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{z''}{z'} = \frac{4x^2 - 2}{x(1 - x^2)} = \frac{M}{x} + \frac{N + Px}{1 - x^2} = \frac{(P - M)x^2 + Nx + M}{x(1 - x^2)} =$$
$$= -\frac{2}{x} + \frac{2x}{1 - x^2} \Rightarrow \ln z' = \ln c - 2\ln x - \ln(1 - x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z' = \frac{C}{x^2(1 - x^2)} = \frac{C}{x^2} + \frac{C}{1 - x^2} \Rightarrow z = \frac{-C}{x} + C\,Arg\,th\,x + D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = C(x\,Arg\,th\,x - 1) + Dx = Cu_1(x) + Dv_1(x),$$

donde

$$u_1(x) = x\,Arg\,th\,x - 1 = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n + 1} - 1,$$

$$v_1(x) = x,$$

soluciones que, salvo el signo de u_1, coinciden las obtenidas por el procedimiento general..

322. Didáctica. Universidad de Córdoba. Ejemplo 8 (pág. 261-262)

Sea p un nûnero natural y q = [p/2] 1a parte entera de p/2. Sea $P_p(x)$ el polinomio solución de la ecuación de legendre de orden Y

$$L_p[x] = \frac{p_p(x)}{p_p(x)}$$

el correspondiente polinomio de legendre. Comprobar que

a) $P_p(x) = (-1)q \frac{(q)_2}{p!} \sum_{=-O}^{q} (-1)^n \frac{(2p-2x)1}{x+(p-m)+(p-2x)1} x^{p-2n}$

b) $P_p(x) = (-1)r \frac{(q1)^2}{(p1)^2} \frac{dP}{dx} [(x^2 - 1)P]$

e) $P_p(1) = (-1)q \frac{(q)^2}{p!} 2p$

Solución

Como consecuencia de lo anterior, deducir la fórmula de Olinde-Rodrigues

$$L_p[x] = \frac{1}{2pp1} \frac{dp}{dxp} [(x^2 - 1)p]$$

a) Supongamos que

I) $p = 2$ q sea par.

Entonces, en la solución

$$u_p(x) = \sum_{=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-2))\cdots(p-2)p(p+1)(p+2)\cdots(p+12n-2))}{(2n)1} x^{2n}$$

de la correspondiente ecuación de Legendre, se anularán todos los sumandos a partir del lugar $n = q + 1$, de manera que

$$u_p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{(p^-(2n-2)) + \cdots (p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+(2a-1)\}}{(2n)t} \cdot x^{2a}$$

es efectivamente un polinomio $p_p\langle x\rangle$ de grado p en su coeficiente genérico, observamos que

$$1)(p+3)\cdots(p+(2n-1)) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)\ldots(p+(2n-1))(p+2n)\ (p+}{(p+2)(p+4)\ldots(p+2n)} =$$

$$= \frac{(p+2n)!}{p!\,2^n\langle q+1)[q+2]\ldots(q+n)} = \frac{(p+2n)!\,q!}{p!\,2^n(q+n)!}$$

de manera que podemos escribir

$$p_p(x) = 1 + \frac{(q)^2}{p!} \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{\langle p+2n\rangle!}{\langle q-n\rangle!\,\langle q+n\rangle + \langle 2n\rangle!} x^{2n} =$$

$$= \frac{(q1)^2}{p!} \sum_{n=0}^{q} \{-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)1(q+n]\mid(2n)!} x^{2a} +$$

Poniendo $m = q - n \Leftrightarrow n = q - m$, aparece la escritura

$$P_D(x) = \frac{(q1)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1)a \frac{(2p-2\pi)!}{m!\,(p-n)!\,(p-2n)!} \times t^2 - 2E.$$

II) $p = 2q + 1$ sea impar.
Entonces, en la solución

$$v_p(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n\}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

de la ecuación diferencial, se anularán todos los sumandos a partir del lugar $n = q + 1$, de manera que

$$v_p(x) = x + \sum_{n=1}^{q} \{-1\}^n \frac{(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)1} x^{2n+1}$$

es un polinomio $P_p|x\rangle$ de grado p. Observando que

$$(p-(2n-1))\cdots(p-3)(p-1) = 2^n\{q-(n-1)] \ldots (q-1)q(q- \quad \frac{2^n}{(q-n)!},$$

$$(p+2)(p+4)\cdots(p+2n\} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)\ldots(p+(2n-1))(p+2n)}{(p+1)(p+3)\ldots(p+(2n-1))}$$

$$= \frac{(p+2n)!}{p!\,2^n(q+1)(q+2)\ldots(q+n)} = \frac{(p+2n)!\,q!}{p!\,2^n(q+n)!}$$

se llega a escribir:

$$p_p(x) = x + \frac{(q)^2}{p!} \sum_{n=1}^{q} (-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)!\,(q+n)!\,(2n)!} x^{2n+1} =$$

$$= \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=0}^{q} (-1)^n \frac{(p+2n)!}{(q-n)!\,(q+n)!\,(2n)!} x^{2n+1}$$

Poniendo $m = q - n\%n = q - m$, se transforma bajo la forma

$$P_p\langle x\rangle = \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{m=0}^{q} (-1) = \frac{(2p-2m)!}{m!\,(p-m)!\,(p-2m)!} \times p^{\,p-2a}.$$

b) Sabiendo ya que, Independientemente de la paridad de p, se tiene

$$p_p(x) = \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=0}^{q} (-1)^a \frac{\{2p-2m\rangle!}{m!\,(p-m)!\,(p-2m)!} \times e^{\,p-2a}$$

siendo $q = \lfloor p/2 \rfloor$, y observando que

$$\frac{dp}{dx^p}(x^2p^{-2m}) = (2p-2m)(2p-2m-1)\ldots(p-2m+1)x^{p-2n}$$

$$= \frac{(2p-2m)+}{-2m)!} x^{p-2m}. \ (p$$

nos queda

$$F_p(x) = (\!-\!1)^q \frac{(q!)^2}{p!} \sum_{n=0}^{q} (-1)^m \frac{1}{m!\,(p-m)!} \frac{dF}{dxp} (x^{2p-2m}) =$$

$$= (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \binom{p}{m} \frac{dp}{dx^2} (x^{2p-2m}) =$$

$$= (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^p}{dx^p} \left[\sum_{m=0}^{q} (-1)^m \binom{p}{m} (x^2)^{p-m}\right]$$

Esta suma puede extenderse desde $m = 0$ hasta p, ya que los sumandos que añadimos son de grado inferior a p, con lo cual sus derivadas de orden p son nulas, Entonces,

$$P_p(x) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^p}{dx^p} \left[\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} (x^2)^{p-m} (-1)^m\right] =$$

$$= (-1)^q \frac{(q!)^2}{(p!)^2} \frac{d^P}{dx^P} [(x^2 - 1)^P].$$

c) Aplicando la fórmula de Leibniz para derivar sucesivamente productos, sale

$$\frac{d^P}{dx^P} [(x^2 - 1)^P] = \frac{d^P}{dx^P} [(x-1)^P (x+1)^P] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \frac{d^m}{dx^m} [(x-1)^P] \frac{d^{p-m}}{dx^{p-m}} [(x+1)^P] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} p(p-1)\ldots(p-m+1)(x-1)^{p-m} \frac{d^{p-m}}{dx^{p-m}} [(x+1)^p],$$

de manera que, si particularizamos en el valor $x = 1$, se anulan todos los sumandos de esta derivada, salvo el ultimo, cuyo valor es p! 2^P.

De esta forma se llega a que

$$P_p(1) = (-1)^q \frac{(q!)^2}{p!} 2^P.$$

Sí, finalmente, dividimos $P_p(x)$ por $P_p(1)$, queda la fórmula

$$L_p(x) = \frac{1}{2^P p!} \frac{d^P}{dx^P} [(x^2 - 1)^P].$$

Derivada de una transformada

323. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 1, pág 170).

Transformada de la función $f(t) = te^{at}$

Evaluar $L\{te^{at}\}$

Identificamos que la función a transformar es un múltiplo de t, de manera que por el teorema anterior

$$L\{te^{at}\} = -\frac{d}{ds}L\{e^{at}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

324. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 2, pág 170-171).

Transformada de la función $f(t) = t\cos bt$

Evaluar $L\{t\cos\cos bt\}$

Identificamos que la función a transformar es un múltiplo de t, de manera que por el teorema anterior

$$L\{t\cos\cos bt\} = -\frac{d}{ds}L\{\cos\cos bt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(s^2+b^2)}\right) = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$$

325. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 3, pág 171).

Transformada de la función $f(t) = t\, senh\, bt$

Evaluar $L\, tsenhbt$

Solución

Identificamos que la función a transformar es un múltiplo de t, de manera que por el teorema anterior

$$L\{t\, sesn\, h\, bt\} = L\{senh\, bt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s^2 - b^2}\right) = \frac{2bs}{(s^2-b^2)^2}$$

326. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (observación 1, pág 171).

Generalización del teorema 1

Si $L\{t\, f(t)\} = -\frac{dF}{ds}$ entonces

Aplicamos el teorema 1 tenemos: $L\{t^2 f(t)\} = L\{t.t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}L\{f(t)\}\right)$

Lo que resulta en: $L\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}L\{t\, f(t)\}$

327. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 4, pág 172).

Transformada de la función $f(t) = t^n e^{at}$
Evaluar L $\{t^n e^{at}\}$
Solución
Identificamos que la función a transformar es un múltiplo de tn, de manera que por el teorema anterior

$$L\{t^n e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{(s-a)}\right)$$

$$L\{t^n e^{at}\} = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

328. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 5, pág 172)

Transformada de la función $f(x) = t^2 cosbt$
Evaluar L $\{t^2 cosbt\}$

Identificamos que la función a transformar es un múltiplo de t2, de manera que por el teorema anterior y para n = 2

$$L\{t^2 cosbt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L\{cos\,cos\ \ cos\,cos\,bt\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right) = \frac{2s(s^2-3b^2)}{(s^2+b^2)}$$

329. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 6, pág 172)

Transformada de la función f (t) = t3senhbt
Evaluar $L\{t^3\ senhbt\}$.
Solución
Identificamos que la función a transformar es un múltiplo de t, de manera que por el teorema anterior.

$$L\{t^3\ senhbt\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} L\{senhbt\} = -\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{b}{s^2-b^2}\right) = \frac{24bs(s^2+b^2)}{(s^2-b^2)^4}$$

330. Ibarra,J.(2003) Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales(1era edición). Editorial McGraw-Hill (ejemplo 7, pág 173).

La transformada inversa de $F(s) = ln\,ln\,ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$
Evaluamos

$$L^{-1}\left\{ln\,ln\ \ ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\right\}$$

Usamos la propiedad $L^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{dF}{ds}\right\}$
Si identificamos que $F(s) = ln\,ln\,ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$ entonces:

$$L^{-1}\left\{ln\,ln\ \ ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\right\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(ln\,ln\ \ ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\right)\right\}$$

$$L^{-1}\left\{ln\,ln\ \ ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\right\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{ln\,ln\ \ ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\right\} = \frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}\right\}$$

$$L^{-1}\{ln\,ln\ \ ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\} = \frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s-b}\} - \frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}$$

$$L^{-1}\{ln\,ln\,ln\,ln\ \frac{s-a}{s-b}\} = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$$

331. Carmona,I. , Filio,E. (2011) Ecuaciones diferenciales(5ta edición). Editorial Person (ejemplo 1, pág 376).

Encontrar £ $\{t\,cos(t)\}$

$$£\ \{t\ cos\ cos\ (cos\omega t)\ \} = \frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$= -\frac{s^2+\omega^2-2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

332. Silva,J. et al, (2002) Apunte de ecuaciones diferenciales. Instituto politécnico nacional (ejemplo 4, pág 198).

Hallar £ $\{t^2 senh\ at\}$

Usamos el teorema de la derivada de la transformada:

$$£\{t^2 senh\ at\} = F''(s)$$

Como $F(s) = \frac{a}{s^2-a^2}$, entonces:

$$F' = \frac{-2as}{(s^2-a^2)^3}\ ,\ F''(s) = \frac{-2as^2+2a^3+8as^2}{(s^2-a^2)^2}$$

$$£\ \{t^2 senh\ at\} = \frac{6as^2-2a^3}{(s^2-a^2)^3}$$

333. Zill, D. (2002) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (sexta edición). International Thomson Editores (ejemplo 12.a , pág 320).

Evalúe $L\{te^{3t}\}$

Se observa que también se puede usar el primer teorema de traslación. Para aplicar el teorema, n=1 y ft=e3t

$$L\{te^{3t}\} = \frac{d}{ds}L\{te^{3t}\}$$

$$= -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-3}) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

334. Zill, D. (2002) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado(sexta edición). International Thomson Editores (ejemplo 12.b , pág 321).

Evalúe L{t sen kt}

$$L\{t\ sen\ kt\} = -\frac{d}{ds}L\{\ sen\ kt\}$$

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)=\frac{2ks}{(s^2+k^2)}$$

335. Zill,D. (2002) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado(sexta edición). International Thomson Editores (ejemplo 12.c , pág 321).

Evalúe $L\{t^2 senkt\}$

Con n=2 en el teorema, esta transformada se puede escribir como sigue:

$$L\{t^2 senkt\}=\frac{d^2}{ds^2}L\{senkt\}$$

Como $t^2\ senkt=t(t\ senkt)$, tenemos que:

$$L\{t^2 senkt\}=-\frac{d}{ds}L\{senkt\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}\right)$$

Al diferenciar y simplificar obtenemos

$$L\{t^2 senkt\}=\frac{6ks^2-2k^3}{(s^2+k^2)^3}$$

336. Zill,D. (2002) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado(sexta edición). International Thomson Editores (ejemplo 12.d , pág 321).

Evalúe $L\{te^{-1}cos(cos\ cos\ t)\}$

$$L\{te^{-1}cos(cos\ cos\ t)\}=-\frac{d}{ds}L\{te^{-1}cos(cos\ cos\ t)\}$$

$$=-\frac{d}{ds}+\{cos(cos\ cos\ t)\}_{s\to s+1}$$

$$=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$=\frac{(s+1)^2-1}{[(s+1)^2+1]^2}$$

337. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 283. Ejemplo 1.

Evalúe $f\{t\text{sen}\,kt\}$.

SOLUCIÓN Con $f(t)=\text{sen}\,kt, F(s)=k/(s^2+k^2)$ y $n=1$, el teorema 7.4.1 da

$$f\{t\text{sen}\,kt\}=-\frac{d}{ds}f\{\text{sen}\,kt\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}.$$

7. **Ejemplo. –**

338. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 283. Ejemplo 2..

Resuelva $x^n + 16x = \cos 4t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

SOLUCIÓN

El problema con valores iniciales podría describirel movimiento forzado, no amortiguado y en resonancia de una masa en un resorte. La masa comienza con una velocidad inicial de 1 pie/s en dirección hacia abajo desde la posición de equilibrio.

Transformando la ecuación diferencial, se obtiene

$$(s^2 + 16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16} \text{ o } X(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2}.$$

A hora bien, en el ejemplo 1 se vio que

$$f^{-1}\{\frac{2ks\ \ (s^2 +}{k^2)^2}\} = t\operatorname{sen} kt$$

y por tanto, identificando k = 4 en (1) y en el inciso d) del teorema 7.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} f^{-1}\{\frac{4}{s^2 + 16}\} + \frac{1}{8} f^{-1}\{\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}\} \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8} t\operatorname{sen} 4t \end{aligned}$$

8. **Ejemplo. –**

339. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54, ejemplo 1

Resolver

$$Si\ L\{1\} = 1/s, calcule\ L\{t\}.$$

Solución.- Eligiendo f(t)=t se obtiene f'(t)=1 y f(0)=0. Aplicando (1) tenemos

$$L\{1\} = sL\{t\} - f(0),$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{L(t) = \frac{1}{s} L\{1\} = \frac{1}{s^2}}$$

9. **Ejemplo. –**

340. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54-55, ejemplo 2

Resolver

$$L\{ktcoskt + senkt\}.$$

Solución.-

$$L\{ktcoskt + senkt\} = L\{\frac{d}{dt}(tsenkt)\}.$$

$$= sL\{tsenkt\}$$

$$= s[-\frac{d}{ds}L(senkt)]$$

$$= s[\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}]$$

10. Ejemplo. –

341. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 4

Calcular

$$L\{\int_0^t e^c sen(t - r)dx\}.$$

Solución.- Con las identificaciones $f(t) = e^c$ $y\ g(t) = sent\ y\ aplicando$ (5), obtenemos

$$L\{\int_0^t e^t sen(t - r)dr\} = L\{e^t\}.L\{sent\}$$

$$= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Funciones especiales

1. Ejemplo. –

342. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 243. Ejemplo 1.

Al identificar $v^2 = \frac{1}{4}$ y $v = \frac{1}{2}$, se puede ver de la ecuación (9) que la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

2. Ejemplo. –

343. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 243. Ejemplo 2.

Identificando $v^2 = 9yv = 3$ vemos de la ecuación (11) que la solución general de la ecuacion $x^2y' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = c_1J_3(x) + c_2Y_3(x)$.

3. **Ejemplo. –**

344. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 244 y 245. Ejemplo 3.

Encuentre la solución general $xy'' + 3y' + 9y = 0$ en $(0,\infty)$.

SOLUCIÓN

Escribiendo la ED como

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{9}{x}y = 0,$$

podemos hacer las siguientes identificaciones con (18):

$$1 - 2a = 3,\ b^2c^2 = 9,\ 2c - 2 = -1 \text{ y } a^2 - p^2c^2 = 0.$$

Las ecuaciones primera y tercera implican que $a = -1$ y $c = \frac{1}{2}$. Con estos valores las ecuaciones segunda y cuarta se satisfacen haciendo $b = 6$ y $p = 2$.

De (19) se encuentra que la solución general de la ED en el intervalo $(0,\infty)$ es $y = x^{-1}[c_1J_2(6x^{1/2}) + c_2Y_2(6x^{1/2})]$

4. **Ejemplo. –**

345. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 245. Ejemplo 4.

Recuerde que en la sección 5.1 vimos que $mx'' + ke^{-\alpha}x = 0$, $\alpha > 0$ es un modelo matemático para el movimiento amortiguado libre de una masa en un resorte envejecido. Ahora se está en posición de encontrar la solución general de la ecuación. Se deja como problema demostrar que el cambio de variables $s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha/2}$ transforma la ecuación diferencial del resorte envejecido en

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0$$

La última ecuación se reconoce como (1) con $v = 0$ y donde los símbolos x y s juegan los papeles de y y x, respectivamente. La solución general de la nueva ecuación es $x = c_1J_0(s) + c_2Y_0(s)$. Si se sustituye nuevamente s, entonces se ve que la solución general de $nx'' + ke^{-\alpha}x = 0$ es

$$x(t) = c_1J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\omega/2}\right) + c_2Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\omega/2}\right).$$

Véanse los problemas 33 y 39 de los ejercicios 6.3 .

5. **Ejemplo. –**

346. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 246. Ejemplo 5.

Deduzca la formula $xJ'_p(x) = \nu J_y(x) - xJ_{v+1}(x)$

SOLUCIÓN De la ecuación (7) se tiene que

$$xJ_v'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+v)}{n!\,\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\gamma}$$

$$= v\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!\,\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}$$

$$= vJ_k(x) + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(1+v+n)\;2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$$

$$k-n-1$$

$$= vJ_v(x) - x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(2+v+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v+1} = vJ_v(x) - xJ_{v+1}(x).$$

Transformadas de Laplace

347. X)Nagle K., Saff E. & Snider A. (2005) Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. Cuarta Edición. Ejemplo 2 (pág. 362)

Usar el teorema 4 y el hecho de que

$$L\{sen\,bt\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$$

para determinar $L\{cos\,bt\}$.

Solución

Sea $f(t) = sen\,bt$. Entonces $f(0) = 0$ y $f'(t) = bcos\,bt$. Al sustituir esto en la ecuación (2), tenemos

$$L\{f'\}(s) = sL\{f\}(s) - f(0),$$

$$L\{bcos\,bt\}(s) = sE\{sen\,bt\}(s) - 0,$$

$$bE\{cos\,bt\}(s) = \frac{sb}{s^2+b^2}.$$

Al dividir entre b tenemos

$$Q\{cos\,bt\}(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$$

348. X)Nagle K., Saff E. & Snider A. (2005) Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. Cuarta Edición. Ejemplo 2 (pág. 363-)

Demostrar la siguiente identidad para funciones continuas $f(t)$ (suponiendo que la transformada existe):

(5)
$$L\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}(s) = \frac{1}{s}L\{f(t)\}(s).$$

Usar esta identidad para verificar la solución del ejemplo 2.

Solución

Definimos la función $g(t)$ mediante la integral

$$g(t) := \int_0^t f(r)dr.$$

Observe que $g(0) = 0$ y $g'(t) = f(t)$. Así, si aplicamos el teorema 4 a $g(t)$ [en vez de $f(t)$],la ecuación (2) de la página 361 se lee

$$L\{f(t)\}(s) = sL\left\{\int_0^s f(r)dr\right\}(s) - 0,$$

que es equivalente a la ecuación (5). Ahora, como

$$sen\, bt = \int_0^t bcos\, brdt$$

la ecuación (5) predice que

$$L\{sen\, bt\}(s) = \frac{1}{s}L\{bcos\, bt\}(s) = \frac{b}{s}L\{cos\, bt\}(s).$$

Esta identidad es válida para las transformadas del ejemplo 2 .Otra cuestión surge en relación con la transformada de Laplace. Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, ¿es $F'(s)$ una transformada de Laplace de alguna función de t

? La respuesta es afirmativa:

$$F'(s) = L\{-tf(t)\}(s).$$

En realidad tenemos el siguiente resultado más general.

Demostración. Considere la identidad

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\int_o^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Debido a la hipótesis sobre $f(t)$, podemos aplicar un teorema de cálculo avanzado (a veces llamado regla de Leibniz) para intercambiar el orden de integración y derivación:

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_o^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st})f(t)dt$$

$$= -\int_o^\infty e^{-st}tf(t)dt = -Y\{tf(t)\}(s).$$

Así,

$$L\{f(t)\}(s) = (-1)\frac{dF}{ds}(s)$$

El resultado general (6) se sigue al aplicar inducción sobre n.

Una consecuencia del teorema anterior es que si f(t) es continua por partes y de orden

exponencial, entonces su transformada F(s) tiene derivadas de todos los órdenes.

349. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO.

Novena edición. Página 257. Ejemplo 1.

Evalúe $f\{1\}$.

SOLUCIÓN De (2),

$$f\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}dt$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}$$

siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-ab} \to 0$ conforme $b \to \infty$. La integral diverge para $s < 0$.

350. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 257. Ejemplo 2.

Evalúe $f\{t\}$.

SOLUCIÓN

De la definición 7.1.1 se tiene $f\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-s}tdt$. Al integrar por partes y usando $\lim_{t\to\infty} te^{-x} = 0, s > 0$, junto con el resultado del ejemplo 1 , se obtiene

$$f\{t\} = \frac{-te^{-N}}{s}\Big|_0^{-} + \frac{1}{s}\int_0^{-} e^{-st}dt = \frac{1}{s}f\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

351. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 257. Ejemplo 3.

Evalúe $f\{e^{-3t}\}$.

SOLUCIÓN

De la definición 7.1.1 se tiene

$$f\{e^{-3t}\} = \int_0^{\infty} e^{-n}e^{-3t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(x+3)t}dt$$
$$= \frac{-e^{-(x+3)}}{s+3}\Big|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{s+3}, \ s > -3.$$

El resultado se deduce del hecho de que $\lim_{t\to -} e^{-(s+3)k} = 0$ para $s + 3 > 00$ $s > -3$.

11. Ejemplo. –

352. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 258. Ejemplo 4.

Evalúe $f\{\text{sen } 2t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 e integrando por partes se tiene que

$$f\{\text{sen}\,2t\} = \int_0^{*} e^{-s}\text{sen}\,2t dt = \frac{-e^{-s}\text{sen}\,2t}{s}\Big|_0^{*} + \frac{2}{s}\int_0^{+} e^{-x}\cos 2t dt$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos 2t dt, \; s > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-x}\cos 2t - 0, x > 0$$

$$\cos 2t - 0, s > 0$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{-e^{\frac{-s}{s}}\cos 2t}{s}\Big|_0^{\infty} - \frac{2}{s}\int_0^{-} e^{-s}\,\text{sen}\,2t dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2} f\{\text{sen}\,2t\}.$$

En este punto se tiene una ecuación con $f\{\text{ sen } 2t\}$ en ambos lados de la igualdad. Si se despeja esa cantidad el resultado es

$$f\{\text{sen}\,2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \; s > 0.$$

12. Ejemplo. –

353. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 260. Ejemplo 5.

Evalúe $P\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3 \end{cases}$

SOLUCióN La función que se muestra en la figura 7.1.5, es continua por tramos y de orden exponencial para $t > 0$. Puesto que f se define en dos tramos, $f\{f(t)\}$ se expresa como la suma de dos integrales:

$$f\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \;\; = \int_0^{3} e^{-nt}(0) dt + \int_3^{\infty} e^{-st}(2) dt$$

$$= 0 + \frac{2e^{-st}}{-s}\Big|_3^{\infty}$$

$$= \frac{2e^{-3s}}{s}, \; s > 0.$$

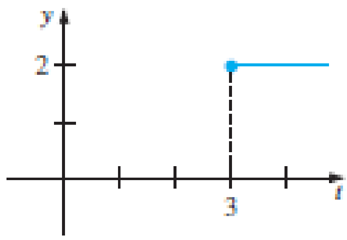


FIGURA 7.1.5 Función continua por tramos.

Transformadas inversas

354. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 263. Ejemplo 1.

Evalúe

a) $f^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$

$b)$ $f^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$.

SOLUCIÓN

a) Para hacer coincidir la forma dada en el inciso b) del teorema 7.2.1, se identifica $n + 1 = 5$ o $n = 4$ y luego se multiplica y divide entre 4 !:

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!} f^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24} t^4.$$

b) Para que coincida con la forma dada en el inciso d) del teorema 7.2.1, identificamos $k^2 = 7$y, por tanto, $k = \sqrt{7}$. Se anegla la expresión multiplicandoy dividiendoentre $\sqrt{7}$:

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} f^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{sen} \sqrt{7}t.$$

13. Ejemplo. –

355. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 264. Ejemplo 2.

Evalúe $f^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$.

SOLUCIÓN

Primero se reescribe la función dada de s como dos expresiones dividiendo cada uno de los términos del numerador entre el denominador y después se usa la ecuación (1):

división de cada uno de los términos entre el denominador ↓ — linealidad y arreglo de las constantes ↓

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \quad (2)$$

$$= -2\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t. \quad \leftarrow \text{incisos c) y d) del teorema 7.2.1 con } k = 2$$

■

356. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 264 y 265. Ejemplo 3.

Evalúe $f^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

SOLUCIÓN

Existen constantes reales A, B y C, por lo que

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4} = \frac{A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$s^2+6s+9 = A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2).$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas A, B y C. Sin embargo, hay un atajo para determinar estas incógnitas. Si se hace $s = 1$, $s = 2$ y $s = -4$ en (3) se obtiene, respectivamente,

$$16 = A(-1)(5),\ 25 = B(1)(6) \text{ y } 1 = C(-5)(-6),$$

y así, $A = -\frac{16}{5}$, $B = \frac{25}{6}$ y $C = \frac{1}{30}$. Por lo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{\frac{16}{5}}{s-1}+\frac{\frac{25}{6}}{s-2}+\frac{\frac{1}{30}}{s+4},$$

y, por tanto, de la linealidad de f^{-1}y del inciso c) del teorema 7.2.1,

$$f^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}f^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{25}{6}f^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{30}f^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$
$$= -\frac{16}{5}e^{s}+\frac{25}{6}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-4t}$$

Transformadas de derivadas

14. Ejemplo. –

357. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 266 y 267. Ejemplo 4.

Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt}+3y = 13\operatorname{sen}2t,\ y(0) = 6.$$

SOLUCIÓN Primero se toma la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial.

$$f\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+3f\{y\} = 13f\{\operatorname{sen}2t\}$$

De (6), $f\{dy/dt\} = sY(s)-y(0) = sY(s)-6$, y del inciso d) del teorema 7.1.1, $f\{\operatorname{sen}2t\} = 2/(s^2+4)$, por lo que la ecuación (12) es igual que

$$sY(s)-6+3Y(s) = \frac{26}{s^2+4} \circ (s+3)Y(s) = 6+\frac{26}{s^2+4}.$$

Resolviendo la última ecuación para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{6}{s+3}+\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}.$$

Puesto que el polinomio cuadrático s^2+4 no se factoriza usando números reales, se supone que el numerador en la descomposición de fracciones parciales es un polinomio lineal en s :

$$\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

Poniendo el lado derecho de la igualdad sobre un común denominador e igualando los numeradores, se obtiene $6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 3)$. Haciendo $s = -3$ se obtiene inmediatamente que $A = 8$. Puesto que el denominador no tiene más raíces reales, se igualan los coeficientes de s^2 y s: $6 = A + B$ y $0 = 3B + C$. Si en la primera ecuación se usa
el valor de A se encuentra que $B = -2$, y con este valor aplicado a la segunda ecuación, se obtiene $C = 6$. Por lo que,

$$Y(s) = \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}.$$

Aún no se termina porque la última expresión racional se tiene que escribir como dos fracciones. Esto se hizo con la división término a término entre el denominador del ejemplo 2. De (2) de ese ejemplo,

$$y(t) = 8f^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 2f^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 3f^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}.$$

Se deduce de los incisos c), d) y e) del teorema 7.2.1, que la solución del problema con valores iniciales es $y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t$.

15. Ejemplo. –

358. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 267. Ejemplo 5.

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

SOLUCIÓN Procediendo como en el ejemplo 4, se transforma la ED. Se toma la suma de las transformadas de cada término, se usan las ecuaciones (6) y (7), las condiciones iniciales dadas, el inciso c) del teorema 7.2.1 y entonces se resuelve para $Y(s)$:

$$\begin{aligned}
f\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3f\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2f\{y\} &= f\{e^{-4r}\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\
(s^2 - 3s + 2)Y(s) &= s + 2 + \frac{1}{s+4} \\
Y(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s^2-3s+2)(s+4)} &= \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}
\end{aligned}$$

Los detalles de la descomposición en fracciones parciales de $Y(s)$ ya se presentaron en el ejemplo 3. En vista de los resultados en (3) y (4), se tiene la solución del problema con valores iniciales

$$y(t) = f^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Traslación en el eje s

16. Ejemplo. –

359. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 271. Ejemplo 1.

Evalúe

a) $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$

$b)\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

SOLUCIÓN

Los siguientes resultados se deducen de los teoremas 7.1.1 y 7.3.1.

a) $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}\big|_{s\to s-5} = \frac{3!}{s^4}\Big|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$

b) b) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathcal{L}\{\cos 4t\}\big|_{s\to s-(-2)} = \frac{s}{s^2+16}\Big|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$

17. Ejemplo. –

360. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 272. Ejemplo 2.

Evalúe a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$ $b)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$.

SOLUCIÓN

a) Un factor lineal repetido es un término $(s-a)^n$, donde a es un número real y n es unentero positivo ≥ 2. Recuerde que si $(s-a)^r$ aparece en el denominador de una expresión racional, entonces se supone que la descomposición contiene n fracciones parciales con numeradores y denominadores constantes $s-a, (s-a)^2, \ldots, (s-a)^n$. Por tanto, con $a = 3$ y $n = 2$ se escribe

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2}$$

Colocando los dos términos del lado derecho con un denominador común, se obtiene el numerador $2s + 5 = A(s-3) + B$ y esta identidad produce $A = 2$ y $B = 11$. Por tanto,

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2}$$

$$\text{y } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}.$$

Ahora $1/(s-3)^2$ es $F(s) = 1/s^2$ desplazada tres unidades a la derecha. Ya que $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$, se tiene de (1) que

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = f^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s-3}\right\} = e^{3}t.$$

$$f^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3} + 11e^{3}t.$$

Por último, (3) es

$$f^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3t} + 11e^{3x}t$$

b) Paraempezar, observe que el polinomio cuadrático $s^2 + 4s + 6$ no tiene raíces reales y por tanto no tiene factores lineales reaks. En esta situación completamos el cuadrado:

$$\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6} = \frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}.$$

El objetivo aquí es reconocer la expresión del lado derecho como alguna transformada de Laplace $F(s)$ en la cual se ha reemplazado s por $s + 2$. Lo que se trata de haceres similar a trabajar hacia atrás del inciso b) del ejemplo 1 . El denominador en (5) ya está en la forma correcta, es decir, $s^2 + 2$ con $s + 2$ en lugar de s. Sin embargo, se debe arreglarel numerador manipulando las constantes: $\frac{1}{2}s + \frac{5}{3} = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{5}{3} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{2}{3}$.

A hora mediante la división entre el denominador de cada término, la linealidad de f^{-1}, los incisose) y d) del teorema 7.2.1 y por último (1),

$$\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2} = \frac{\frac{1}{2}(s+2)+\frac{2}{3}}{(s+2)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2+2}$$

$$f^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\} = \frac{1}{2}f^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} + \frac{2}{3}f^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}f^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\} + \frac{2}{3\sqrt{2}}f^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t.$$

18. Ejemplo. –

361. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 273. Ejemplo 3.

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = t^2e^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 17$. SOLUCIÓN Antes de transformar la ED, observe que su lado derecho es similar a la función del inciso a) del ejemplo 1. Después de usar la linealidad, el teorema 7.3.1 y las condiciones iniciales, se simplifica y luego se resuelve para $Y(s) = f\{f(t)\}$:

$$
\begin{aligned}
f\{y''\} - 6f\{y'\} + 9f\{y\} &= f\{t^2e^3\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) &= \frac{2}{(s-3)^3} \\
(s^2 - 6s + 9)Y(s) &= 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3} \\
(s-3)^2Y(s) &= 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3} \\
Y(s) &= \frac{2s+5}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}
\end{aligned}
$$

El primer término del lado derecho ya se ha descompuesto en fracciones parciales en (2) del inciso a) del ejemplo (2).

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

Por lo que $y(t) = 2f^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11f^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} + \frac{2}{4!}f^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}$.

De la forma inversa (1) del teorema 7.3.1, los dos últimos términos de (8) son

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\Big|_{I\to I-3}\right\} = te^3 \ \text{ y } \ f^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\Big|_{x\to -3}\right\} = t^4e^3.$$

Por lo que (8) es $y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^3$.

19. Ejemplo. –

362. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 273. Ejemplo 4.

Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución. –

$$
\begin{aligned}
f\{y''\} + 4f\{y'\} + 6f\{y\} &= f\{1\} + f\{e^{-t}\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\
(s^2 + 4s + 6)Y(s) &= \frac{2s+1}{s(s+1)} \\
Y(s) &= \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}
\end{aligned}
$$

Puesto que el término cuadrático en el denominador no se factoriza en factores linealereales, se encuentra que la descomposición en fracciones parciales para $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{s/2 + 5/3}{s^2 + 4s + 6}.$$

Además, en la preparación para tomar la transformada inversa, ya se manejó el último término en la forma necesaria del inciso b) del ejemplo 2. Por lo que en vista de los resultados en (6) y (7), se tiene la solución

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{6}f^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}f^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}f^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} - \frac{2}{3\sqrt{2}}f^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t
\end{aligned}
$$

Translación en el eje t

Funciones escalón

20. Ejemplo. –

363. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 275. Ejemplo 5.

Exprese $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ en términos de funciones escalon unitario. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN En la figura 7.3 .5 se muestra la gráfica de f. A hora, de (9) y (10) con $a = 5, g(t) = 20t$ y $h(t) = 0$, se obtiene $f(t) = 20t - 20tv(t - 5)$.

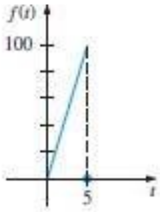


FIGURA 7.3.5 La función es $f(t) = 20t - 20t\,\mathcal{U}(t - 5)$.

21. Ejemplo. –

364. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 276. Ejemplo 6.

Evalúe

a) $f^{-1}\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\}$

b) $f^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}e^{-ex/2}\}$.

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con las identidades $a = 2, F(s) = 1/(s - 4)$ y $f^{-1}\{F(s)\} = e^4$, se tiene de (15)

$$f^{-1}\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\} = e^{4\varphi-2)}\mathrm{P}(t - 2).$$

b) Con $a = \pi/2, F(s) = s/(s^2 + 9)$ y $f^{-1}\{F(s)\} = \cos 3t$, de la ecuación (15) se obtiene

$$f^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\} = \cos 3\left(t - \frac{\pi}{2}\right) q\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

La última expresión se puede simplificar un poco con la fórmula adicional para el coseno. Compruebe que el resultado es igual a $\rightarrow$ sen $3t\, qt\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

22. Ejemplo. –

365. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 275. Ejemplo 7.

Evalúe $P\{\cos tt(t - \pi)\}$.

SOLUCIÓN Con $g(t) = \cos tya = \pi$, entonces $g(t + \pi) = \cos(t + \pi) = -\cos t$ por la fórmula de adicción para la función coseno. Por tanto, por la ecuación (16),

$$f\{\cos t\,t(t-\pi)\} = -e^{-\pi s} f\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

23. Ejemplo. –

366. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 277. Ejemplo 8.

Resuelva $y' + y = f(t), y(0) = 5,$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 3\cos t, & t \ge \pi \end{cases}$

SOLUCIÓN La función f se puede escribir como $f(t) = 3\cos t\,t(t-\pi)$, y entonces por linealidad, por los resultados del ejemplo 7y por las fracciones parciales usuales, se tiene

$$f\{y'\} + f\{y\} = 3f\{\cos t\,t(t-\pi)\}$$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = -3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$(s+1)Y(s) = 5 - \frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s} \quad \ldots(17)$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} + \frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right].$$

Ahora procediendo como se hizo en el ejemplo 6 , se tiene de (15) con $a = \pi$ que los inversos de los términos dentro del paréntesis son

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}\right\} = e^{-(t-\pi)}t(t-\pi),\; f^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} = \mathrm{sen}(t-\pi)t(t-\pi),$$

$$y\; f^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} = \cos(t-\pi)q(t-\pi).$$

Por lo que el inverso de (17) es

$$\begin{aligned} y(t) &= 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}\mathrm{P}(t-\pi) - \frac{3}{2}\mathrm{sen}(t-\pi)\mathrm{P}(t-\pi) - \frac{3}{2}\cos(t-\pi)q(t-\pi) \\ &= 5e^{-t} + \frac{3}{2}[e^{-(t-\pi)} + \mathrm{sen}\,t + \cos t]\mathrm{P}(t-\pi) \quad 0 \le t < \pi \;\leftarrow \mathit{Identidades\ trigonometricas} \\ &= \begin{cases} 5e^{-t}, \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-\pi-\pi)} + \frac{3}{2}\mathrm{sen}\,t + \frac{3}{2}\cos t, & t \ge \pi \end{cases} \end{aligned} \quad \ldots(18)$$

Usando un programa de graficación hemos obtenido la gráfica de (18) que se muestra en la figura 7.3 .7.

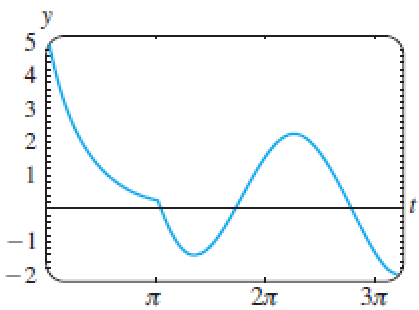


FIGURA 7.3.7 Gráfica de la función en (18).

Ejemplo. –

367. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 277 y 278. Ejemplo 9.

Una viga de longitud L se empotra en ambos extremos, como se muestra en la figura 7.3.8. Determine la deflexión de la viga cuando la carga está dada por

$$w(x)=\begin{cases} w_0\left(1-\dfrac{2}{L}x\right), & 0<x<L/2\\ 0, & L/2<x<L. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Recuerde que debido a que la viga esta empotrada en ambos extremos, las condiciones de frontera son $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y(L)=0$, $y'(L)=0$. Ahora usando (10) se puede expresar $w(x)$ en términos de la función escalón unitario:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0\left(1-\frac{2}{L}x\right)-w_0\left(1-\frac{2}{L}x\right)\mathcal{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\\ &= \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2}-x+\left(x-\frac{L}{2}\right)\mathcal{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Transformando la ecuación (19) respecto a la variable x, se obtiene

$$EI\left(s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y''(0)\right)=\frac{2w_0}{L}\left[\frac{L/2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}e^{-Ls/2}\right]$$

$$s^4Y(s)-sy''(0)-y'''(0)=\frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}e^{-Ls/2}\right].$$

Si hacemos $c_1=y''(0)$ y $c_2=y'''(0)$, entonces

$$Y(s)=\frac{c_1}{s^3}+\frac{c_2}{s^4}+\frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s^5}-\frac{1}{s^6}+\frac{1}{s^6}e^{-Ls/2}\right],$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{c_1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}+\frac{c_2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}+\frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}-\frac{1}{5!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}+\frac{1}{5!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}e^{-Ls/2}\right\}\right]\\ &= \frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{6}x^3+\frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4-x^5+\left(x-\frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones $y(L)=0$ y $y'(L)=0$ al último resultado, se obtiene un sistema de ecuaciones para c_1 y c_z

$$\begin{aligned} c_1\frac{L^2}{2}+c_2\frac{L^3}{6}+\frac{49w_0L^4}{1920EI}&=0\\ c_1L+c_2\frac{L^2}{2}+\frac{85w_0L^3}{960EI}&=0. \end{aligned}$$

Resolviendo se encuentra que $c_1=23w_0L^2/(960EI)$ y $c_2=-9w_0L/(40EI)$. Por lo que la deflexión está dada por

$$y(x)=\frac{23w_0L^2}{1920EI}x^2-\frac{3w_0L}{80EI}x^3+\frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4-x^5+\left(x-\frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x-\frac{L}{2}\right)\right].$$

24. Ejemplo. –

368. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 328. Ejemplo 1.

Trazar la gráfica de $y = h(t)$, en donde

$$h(t) = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t),\ t \geq 0.$$

Por la definición de $u_c(t)$ dada en la ecuación (1) se tiene

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi, \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación $y = h(t)$ tiene la gráfica que se muestra en la figura 6.3.3.

25. Ejemplo. –

369. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 330 y 331. Ejemplo 2.

Si se define la función f por

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi/4 \\ \operatorname{sen} t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$. La gráfica de $y = f(t)$ se muestra en la figura 6.3.5. Nótese que $f(t) = \operatorname{sen} t + g(t)$, en donde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4, \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Por tanto,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\} \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos t\} \end{aligned}$$

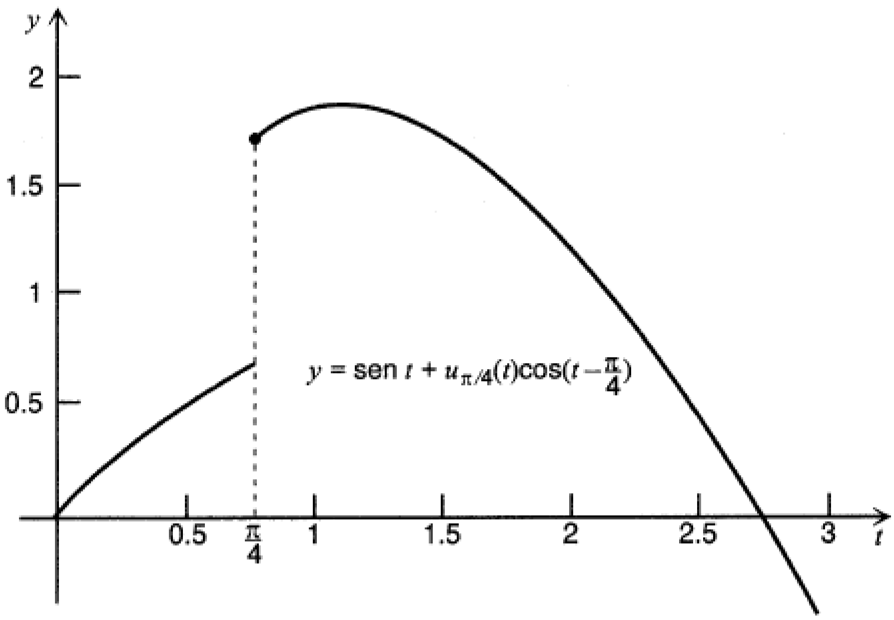


FIGURA 6.3.5 Gráfica de la función del ejemplo 2.

Si se introducen las transformadas de sen t y $\cos t$, se obtiene

$$\mathcal{f}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1}$$
$$= \frac{1 + se^{-xs/4}}{s^2+1}$$

El lector debe comparar este método con el cálculo de $\mathcal{f}\{f(t)\}$, directamente a partir de definición.

26. Ejemplo. –

370. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 331. Ejemplo 3.

Encontrar la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Por la linealidad de la transformada inversa se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{f}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{f}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{f}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t-2). \end{aligned}$$

La función f también puede escribirse como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 2, & t \ge 2. \end{cases}$$

27. Ejemplo. –

371. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 332. Ejemplo 4.

Encontrar la transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

Al completar el cuadrado del denominador es posible escribir

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2),$$

en donde $F(s) = (s^2+1)^{-1}$. Como $\mathcal{f}^{-1}\{F(s)\} = \operatorname{sen} t$, por el teorema 6.3 .2 se concluye que

$$g(t) = \mathcal{f}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t}\operatorname{sen} t$$

Transformadas de integrales

1. Ejemplo. –

372. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 5

Calcule

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}.$$

Solución.- Sería posible usar factores parciales, pero si

$$F(s)\frac{1}{s-1} \quad y \quad G(s)=\frac{1}{s+4},$$

entonces

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\}=\int_0^t f(r)g(t-r)dr$$

$$=\int_0^t e^c e^{-4(t-c)}dr$$

$$=e^{-4t}\int_0^t e^{5t}dr$$

$$=e^{-4t}\frac{1}{5}e^{5t}|_0^t$$

$$=\frac{e^{-4t}}{5}[e^{5t}-1]$$

$$=\frac{1}{5}e-\frac{1}{5}e^{-4t}$$

2. **Ejemplo**

373. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 56, ejemplo 6

Calcule

$Si\, f(t)=\{\ t, 0\leq t<1$

$0,1\leq t<2$

Solución.-

$$L\{t(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2x}}[\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}0dt]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}[-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1-e^{-s}}{s^2}]$$

$$=\frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-2x})}$$

3. **Ejemplo**

374. Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 377, ejemplo 1

Calcule

$$Dada\ F(s) = \frac{2}{(s-a)^3}\ encontrar\ f(t) usando\ integración\ de\ la\ transformada$$

Solución.-

$$\int_s^{\infty} \frac{2}{(\sigma-a)^3} d\sigma = -\frac{1}{(\sigma-a)^2}\Big|_s^{\infty} = \frac{1}{(\sigma-a)^2}$$

y como $f(t) = tL^{-1}\{\int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma\}$, entonces,

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-a)^2}\} \rightarrow y(t) = e^{at}(B_2 t + B_1)$$

$Q(s) = 1 \rightarrow Q(a) = 1\ \ B_2 = 1\ \}$

$$Q'(s) = 0 \rightarrow Q'(a) = 0\ B_1 = 0\ \}\quad y(t) = te^{at}$$

$$f(t) = t(te^{at})$$

$$f(t) = t^2e^{at}.$$

4. **Ejemplo**

375. Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 377, ejemplo 2

Hallar

$$L\{\frac{sen3t}{t}\}.$$

Solución.- Como $L\{sen3t\} = \frac{3}{s^2+9}$

$$L\{\frac{sen3t}{t}\} = \int_s^{\infty} \frac{3}{\sigma^2+9} d\sigma = tan^{-1}\frac{\sigma}{3}\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{s}{3}$$

5. **Ejemplo**

376. Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 377, ejemplo 3

Hallar

$$Hallar\ f(t)\ dada\ F(s) = ln\frac{s+a}{s+b},usando\ los\ teoremas\ convenientes$$

Solución.-

$$ln\frac{s+a}{s+b} = ln(s+a) - ln(s+b);\ -\frac{d}{ds}[ln(s+a) - ln(s+b)]$$

$$= \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}.Y\ L^{-1}\{ln\frac{s+a}{s+b}\} = \frac{1}{t}(e^{-bt} - a^{-at}).$$

6. **Ejemplo**

377. Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 212, ejemplo 5.28

Resolver

$$Consideremos\ la\ función\ f\ (t) = sin^2\ (at)$$

Solución.- Como ya vimos $F(s) = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$, $la\ función\ satisface\ las\ condiciones\ del\ teorema\ anterior;\ por\ tanto,$

$$L(f'(t)) = L(f(t)) - f(0)$$

$$L(2asin(at)cos(at)) = sL(sin^2(at) - sin^2(0)$$

$$L(2sin(at)cos(at)) = \frac{s}{a} L(sin^2(at))$$

$$L(sin(2at)) = \frac{s}{a} \cdot \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$$

$$L(sin(2at)) = \frac{2a}{(s^2 + 4a^2)}$$

$$En\ particular,$$

$$L(sin(at)) = \frac{a}{(s^2 + 4a^2)}$$

7. **Ejemplo**

378. Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 213, ejemplo 5.29

Calcular

$$Calcular\ la\ transformada\ de\ la\ función\ definida\ por\ g\ (t) = t^2\ [t].$$

$$donde\ [t]\ denota\ la\ parte\ entera\ de\ t$$

Solución.- Aplicaremos el teorema anterior (con n = 2). Como sabemos, la función parte entera tiene transformada $L([t]) = F(s) = \frac{1}{s(e^s - 1)}$. Por tanto,

$$L(t^2[t]) = (-1)^2 F''(s)$$

$$= \frac{e^{2s}(s^2 + 2s + 2) + s(s^2 - 2s - 4) + 2}{s^3(e^s - 1)^3}$$

8. **Ejemplo**

379. Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 213, ejemplo 5.30

Verificar

$$Verificar\ que\ si\ L(t^n) = (-1)\ \frac{nd^nF}{ds^n}\ (s), su\ transformada\ inversa\ es\ dada\ por$$

$$L^{-1}(\frac{nd^nF}{ds^n}(s)) = (-1)^n t^n f(t), \qquad (5.10)$$

$$donde\ f\ (t) = L^{-1}(F). Usar\ esta\ ecuación\ para\ calcular\ la\ transformada\ inversa\ de$$

$$F(s) = ln\,|\frac{s+2}{s-5}|$$

Solución.- Utilizando la ecuación (5.10), primero tenemos que derivar la función $F(s) = ln\,|\frac{s+2}{s-5}|$, por lo tanto tenemos:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{-7}{(s+2)(s-5)}. \qquad (5.11)$$

Cómo derivamos una vez, n = 1 en la ecuación (5.10), así, sustituyendo en la ecuación (5.10) obtenemos

$$L^{-1}(\frac{dF}{ds}) = (-t)f(t)$$

$$L^{-1}\,(\frac{-7}{(s+2)(s-5)}) = (-t)f(t).$$

Ahora hallamos la transformada inversa de (5.11), para lo cual descomponemos en fracciones parciales. Su desarrollo en fracciones parciales queda como

$$\frac{-7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s-5)}. \qquad (5.12)$$

Al multiplicar ambos lados por el común denominador, obtenemos:

$$-7 = A(s-5) + B(s+2). \qquad (5.13)$$

En la ecuación (5.13) hacemos s = 5 y nos queda −7 = 7B, es decir, B = −1. Ahora hacemos s =

−2, de manera que concluimos que, A = 1. Sustituyendo en (5.12) nos queda la descomposición

$$\frac{-7}{(s+2)(s-5)} = \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s-5)}$$

Podemos hallar la transformada inversa:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s-5)}\right) = (-t)f(t)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)}\right) = (-t)f(t) = (-t)f(t)$$

$$e^{-2t} - e^{5t} = (-t)f(t).$$

$$Despejando\ f\ tenemos\ \frac{e^{5t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t} = f(t)\ y\ como\ f(t) = L^{-1}(F)\ entonces$$

$$L^{-1}\left(ln\left|\frac{s+2}{s-5}\right|\right) = \frac{e^{5t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t}.$$

9. **Ejemplo. –**

380. **Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 215, ejemplo 5.32**

Hallar

Hallar la solución de la ecuación integral de Volterra

$$\boldsymbol{y(t) + \int_0^t y(s)ds = U(t-1)}.$$

Solución.- Notemos que $\int_0^t \boldsymbol{y(s)ds}$ es la convolución (y ∗1) (t). Así, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación integral y el teorema de Convolución obtenemos

$$L(y(t) + (y*1)(t)) = L(U(t-1))$$

$$L(y) + L(y)L(1) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$L(y)\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$L(y) = \frac{se^{-s}}{s(s+1)}.$$

Ahora tomamos la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right) = L^{-1}(e^{-s}L(e^{-t})) = U(t-1)e^{1-t}.$$

Aquí usamos la fórmula (5.6).

10. **Ejemplo. –**

381. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 284. Ejemplo 3.**

Evalúe $f\{\int_0^t e^r \operatorname{sen}(t-r)dr\}$

SOLUCIÓN Con $f(t) = e^t$ y $g(t) = \operatorname{sen} t$, el teorema de convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de f y g es el producto de sus transformadas de Laplace:

$$f\{\int_0^t e^t \operatorname{sen}(t-r)dr\} = f\{e^t\} \cdot f\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

11. **Ejemplo. –**

382. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 285. Ejemplo 4.**

Evalúe $f^{-1}\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\}$

SOLUCIÓN Sea $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+k^2}$ por lo que

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{k} f^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\} = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kt.$$

En este caso la ecuación (4) da

$$f^{-1}\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\} = \frac{1}{k^2}\int_0^t \operatorname{sen} kr \operatorname{sen} k(t-r)dr.$$

Con la ayuda de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

y las sustituciones $A = kr$ y $B = k(t-r)$ se puede realizar la integración en (6):

$$\begin{aligned} f^{-1}\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\} &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t [\cos k(2r-t) - \cos kt]dr \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\operatorname{sen} k(2r-t) - r\cos kt\right]_0^t \\ &= \frac{\operatorname{sen} kt - kt\cos kt}{2k^3}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $2k^3$, se obtiene la forma inversa de (5).

12. **Ejemplo. –**

383. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 286. Ejemplo 5.**

Resuelva $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(r)e^{t-r}dr$ para $f(t)$.

SOLUCIÓN En la integral se identifica $h(t-r) = e^{t-c}$ por lo que $h(t) = t$. Se toma la transformada de Laplace de cada término; en particular, por el teorema 7.4.2 la transformada de Laplace es el producto de $f\{f(t)\} = F(s)$ y $f\{e^t\} = 1/(s-1)$.

$$F(s) = 3\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s)\cdot\frac{1}{s-1}.$$

Después de resolver la última ecuación para $F(s)$ y realizar la descomposición en fracciones parciales, se encuentra

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}.$$

La transformada inversa entonces da

$$\begin{aligned} f(t) &= 3f^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - f^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + f^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2f^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}. \end{aligned}$$

13. Ejemplo. –

384. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 287. Ejemplo 6.

Determine la corriente $i(t)$ en un circuito RCL de un sola malla cuando $L = 0.1$ h, $R = 2\Omega$, $C = 0.1$f, $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado es

$$E(t) = 120t - 120t\mathrm{P}(t-1).$$

SOLUCIÓN Con los datos dados, la ecuación (10) se convierte en

$$0.1\frac{di}{dt} + 2i + 10\int_0^t i(r)dr = 120t - 120tt(t-1).$$

Ahora usando (7), $f\{\int_0^t i(r)dr\} = I(s)/s$, donde $I(s) = f\{i(t)\}$. Por lo que la transformada de Laplace de la ecuación integrodiferencial es

$$0.1sI(s) + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s} = 120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-x} - \frac{1}{s}e^{-s}\right]. \leftarrow \text{ por (16) da la secction 7.3}$$

Multiplicando esta ecuación por $10s$, usando $s^2 + 20s + 100 = (s+10)^2$y después al despejar $I(s)$, se obtiene

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{s(s+10)^2} - \frac{1}{s(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right].$$

Usando fracciones parciales,

$$\begin{aligned} I(s) = \ & 1200\left[\frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s+10} - \frac{1/10}{(s+10)^2} - \frac{1/100}{s}e^{-s}\right. \\ & \left. + \frac{1/100}{s+10}e^{-s} + \frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right]. \end{aligned}$$

De la forma inversa del segundo teorema de traslación (15) de la sección 7.3, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} i(t) = \ & 12[1 - \mathrm{P}P(t-1)] - 12[e^{-1\alpha} - e^{-10/-1)}qu(t-1)] \\ & -120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(-1)}q(t-1). \end{aligned}$$

Escrita como una función definida por tramos, la corriente es

$$i(t) = \begin{cases} 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-1\alpha}, & 0 \le t < 1 \\ -12e^{-1\alpha} + 12e^{-10(t-1)} - 120te^{-1\alpha} - 1080(t-1)e^{-10t-1)}, & t \ge 1. \end{cases}$$

Con esta últimaexpresióny un SAC, se traza la gráfica $i(t)$ en cada uno de los dos intervalos y después se combinan las gráficas. Observe en la figura 7.4 .3 que aun cuando la función de entrada $E(t)$ es discontinua, la salida o respuesta $i(t)$ es una función continua

14. Ejemplo. –

385. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 288. Ejemplo 7.

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura 7.4.4.

SOLUCIÓN La función $E(t)$ se llama de onda cuadrada y tiene periodo $T = 2$. En el intervalo $0 \le t < 2$, $E(t)$ se puede definir por

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

y fuera del intervalo por $f(t+2) = f(t)$. Ahora del teorema 7.4 .3

$$\begin{aligned} f\{E(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2x}} \int_0^2 e^{-s} E(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2x}} \left[\int_0^1 e^{-s} \cdot 1dt + \int_1^2 e^{-x} \cdot 0dt\right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-2x}} \frac{1-e^{-s}}{s} \leftarrow 1-e^{-2x} = (1+e^{-x})(1-e^{-x}) \\ &= \frac{1}{s(1+e^{-v})}. \end{aligned}$$

Función delta de Dirac

15. Ejemplo. –

386. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 294 y 295. Ejemplo 1.

Resuelva $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi)$ sujeta a

a) $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

b) $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Dos problemas con valores iniciales podrian servir como modelos para describir el movimiento de una masa en un resorte que se mueve en un medio en el cual el amortiguamientoes despreciable. En $t = 2\pi$ la masa recibe un golpe preciso. En a) la masa se libera a partir del reposo una unidad abajo de la posición de equilibrio. En b) la masa está en reposo en la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

a) De (3) la transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2wI}\ 0\ Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2ss}}{s^2+1}.$$

Con la forma inversa del segundo teorema de traslación, se encuentra

$$y(t) = \cos t + 4\operatorname{sen}(t - 2\pi)qu(t - 2\pi).$$

Puesto que $\operatorname{sen}(t - 2\pi) = \operatorname{sen} t$, la solución anterior se puede escribir como

$$y(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t<2\pi\\ \cos t+4\operatorname{sen} t, & t\ge 2\pi\end{cases}$$

En la figura 7.5 .3 se ve de la gráfica de (5) que la masa presenta movimiento armónico simple hasta que es golpeada en $t = 2\pi$. La influencia del impulso unitario es incrementar la amplitud de vibración a $\sqrt{17}$ para $t > 2\pi$.

b) En este caso la transformada de la ecuación es simplemente

$$Y(s)=\frac{4e^{-2rs}}{s^2+1}$$

y así

$$\begin{aligned} y(t) &= 4\operatorname{sen}(t-2\pi)t(t-2\pi)\\ &= \begin{cases}0, & 0\le t<2\\ 4\operatorname{sen} t, & t\ge 2\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

La gráfica de (6) de la figura 7.5.4 muestra, como se esperaria de las condiciones iniciales, que la masa no exhibe movimiento hasta que es golpeada en $t = 2\pi$.

Integral de convolución

1. **Ejemplo. –**

387. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 672 y 673. Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema de conducción del calor

$$u_t = u_{xx} + xe^{-t},$$
$$u(0,t)=0,\ u_x(1,t)+u(1,t)=0,$$
$$u(x,0)=0.$$

Una vez más, se aplican las eigenfunciones normalizadas ϕ_n del problema (19) y se supone que u se da por la ecuación (30),

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$$

Los coeficientes b_n se determinan a partir de la ecuación diferencial

$$b_n' + \lambda_n b_n = \gamma_n(t)$$

en donde λ_n es el n-ésimo eigenvalor del problema (19) y los $\gamma_n(t)$ son los coeficientes del desarrollo del término no homogéneo xe^{-t}, en términos de las eigenfunciones ϕ_n. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_n(t) &= \int_0^1 xe^{-t}\phi_n(x)dx = e^{-t}\int_0^1 x\phi_n(x)dx\\ &= c_n e^{-t},\end{aligned}$$

en donde $c_n = \int_0^1 x\phi_n(x)dx$ se da por la ecuación (23). La condición inicial para la (46) es

$$b_n(0)=0$$

ya que la distribución inicial de temperaturas (45) es cero en todas partes. La solución del problema con valor inicial (46), (48) es

$$b_n(t) = e^{-\lambda_n t}\int_0^t e^{\lambda_n s} c_n e^{-s}\,ds = c_n e^{-\lambda_n t}\frac{e^{(\lambda_n-1)t}-1}{\lambda_n-1}$$
$$= \frac{c_n}{\lambda_n-1}\left(e^{-t}-e^{-\lambda_n t}\right).$$

Por tanto, la solución del problema de conducción del calor (43) a (45) se expresa por

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,(e^{-t}-e^{-\lambda_n t})\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n-1)(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})}.$$

La solución dada por la ecuación (50) es exacta, pero complicada. Para juzgar si es posible obtener una aproximación satisfactoria a la solución mediante el uso de sólo pocos términos de esta serie, es necesario estimar su rapidez de convergencia. Primero divídase el segundo miembro en dos partes:

$$u(x,t) = 4e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n-1)(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n t}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n-1)(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})}$$

Recuérdese por el ejemplo 4 de la sección 11.2, que los eigenvalores λ_n son muy aproximadamente proporcionales a n^2. En la primera serie del segundo miembro de la ecuación (51) todos los factores trigonométricos están acotados cuando $n \to \infty$; por consiguiente, esta serie converge de manera semejante a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2} o \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$. De donde, para obtener una excelente aproximación para esta parte de la solución cuando mucho se requieren dos o tres términos. La segunda serie contiene al factor adicional $e^{-\lambda_n t}$, de modo que su convergencia es incluso más rápida para $t > 0$; casi con seguridad, todos los términos después del primero son despreciables.

2. Ejemplo. –

388. Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 228, ejemplo 5.7b

Resolver

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}$$

Solución.- Expresando F(s) de la misma forma que en el apartado anterior, se tiene

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)+1}\cdot\frac{1}{(s^2+1)+1} = G(s).H(s)$$

Para hallar las transformadas inversas de G(s) y H(s) se aplicará la propiedad de traslación, y queda

$$g(x) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s^2+1)+1}\right] = e^{-x}cosx$$

$$h(x) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{se^2nx\,(s+1)+1}\right] = e^{x}$$

Aplicando el teorema de convolución, se obtiene

$$L^{-1}[G(s).H(s)] = g(x) * h(x) = \int_0^x g(x-v)h(v)dv = \int_0^x e^{-x}cos(x-v)senv\ dv$$

Y teniendo en cuenta que

$$senAcosB = \frac{sen(A+B) + sen(A-B)}{2}$$

Entonces

$$\int_0^x e^{-x}cos(x-v)senv\ dv = \int_0^x e^{-x}\left[\frac{senx + sen(2v-x)}{2}\right]dv$$

$$e^{-x}\left(\left[\frac{1}{2}v.senx\right]_0^x - \left[\frac{1}{2}.\frac{cos(2v-x)}{2}\right]_0^x\right) = \frac{1}{2}e^{-x}xsenx$$

Por tanto

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}e^{-x}xsenx$$

3. **Ejemplo. –**

389. (Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 229, ejemplo 5.7b).

Resolver

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+a)^2}$$

Solución.-

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}.\frac{1}{s^2+a^2} = G(s).H(s)$$

Las transformadas inversas de G(s) y H(s) son

$$g(x) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = cos(ax)$$

$$h(x) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{sen(ax)}{a}$$

Por el teorema de convolución

$$L^{-1}[G(s).H(s)] = g(x) * h(x) = \int_0^x g(x-v)h(v)dv$$

$$= \int_0^x cos(a(x-v)) \frac{sen(ax)}{a} dv$$

Utilizando la fórmula trigonométrica (5.5) se tiene

$$\int_0^x e^{-x}cos(a(x-v)) \frac{sen(ax)}{a} dv = \int_0^x \frac{sen(ax) + sen(2av - ax)}{2a}]dv$$

$$= \frac{1}{2a}\left([v.sen(ax)]_0^x - [\frac{cos(2av - ax)}{2a}]_0^x\right) = \frac{1}{2a} xsen(ax)$$

Por tanto

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2a} xsen(ax)$$

4. Ejemplo. –

390. (Dennis G. Zill. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelados; Novena edición. Pág 286, ejemplo 5)

Resolver

$$f(t) = 3t^2 - e^{-1} - \int_0^t f(r)e^{t-c}dr \; para \; f(t)$$

Solución.- En la integral se identifica $h(t-r) = e^{t-c}$por lo que $h(t) = e^t$. Se toma la transformada de Laplace de cada término. La transformada de Laplace es el producto de

$L\{f(t)\} = F(s)$ y $L\{e^t\} = 1/(s-1)$.

$$F(s) = 3.\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s).\frac{1}{s-1}$$

Después de resolver la última ecuación para F(s) y realizar la descomposición en fracciones parciales, se encuentra

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

La transformada inversa entonces da

$$f(t) = 3L^{-1}\{\frac{2!}{s^3}\} - L^{-1}\{\frac{3!}{s^4}\} + L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$

5. Ejemplo. –

391. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54, ejemplo 1

Resolver

$$Si\ L\{1\} = 1/s, calcule\ L\{t\}.$$

Solución.- Eligiendo f(t)=t se obtiene f'(t)=1 y f(0)=0. Aplicando (1) tenemos

$$L\{1\} = sL\{t\} - f(0),$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{L(t) = \frac{1}{s}L\{1\} = \frac{1}{s^2}}$$

6. **Ejemplo. –**

392. (Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54-55, ejemplo 2)

Resolver

$$Si\ L\{cost\} = s/(s^2 + 1), calcule\ L\{sent\}.$$

Solución.- $Sean\ f(t) = cost, f'(t) = sent, f(0) = 1. Por\ (1).$

$$L\{sent\} = \{sL\{cost\} - cos0\}$$

$$= \frac{-s^2}{s^2+1} + 1$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

7. **Ejemplo. –**

393. (Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 3)

Resolver

$$L\{ktcoskt + senkt\}.$$

Solución.-

$$L\{ktcoskt + senkt\} = L\{\frac{d}{dt}(tsenkt)\}.$$

$$= sL\{tsenkt\}$$

$$= s[-\frac{d}{ds}L(senkt)]$$

$$= s[\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}]$$

8. Ejemplo. –

394. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 4

Calcular

$$L\{\int_0^t e^c sen(t-r)dx\}.$$

Solución. - Con las identificaciones $f(t) = e^c\ y\ g(t) = sent\ y\ aplicando\ (5)$, obtenemos

$$L\{\int_0^t e^t sen(t-r)dr\} = L\{e^t\}.L\{sent\}$$

$$= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

9. Ejemplo. –

395. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 5

Calcule

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\}.$$

Solución.- Sería posible usar factores parciales, pero si

$$F(s)\frac{1}{s-1} \quad y \quad G(s) = \frac{1}{s+4},$$

entonces

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\} = \int_0^t f(r)g(t-r)dr$$

$$= \int_0^t e^c e^{-4(t-c)}dr$$

$$= e^{-4t}\int_0^t e^{5t}dr$$

$$= e^{-4t}\frac{1}{5}e^{5t}|_0^t$$

$$= \frac{e^{-4t}}{5}[e^{5t}-1]$$

$$= \frac{1}{5} e - \frac{1}{5} e^{-4t}$$

Transformada de una convolución

16. Ejemplo. –

396. Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 227, ejemplo 5.7a.
Resolver

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2(s^2+1)}$$

Solución.- F(s) puede expresarse de la siguiente forma

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{2s-1}{s^2+1} = G(s).H(s)$$

donde se ha llamado a $G(s) = \frac{1}{s^2}$, $y\ a\ H(s) = \frac{2s-1}{s^2+1}$

Las transformadas inversas de G(s) y de H(s) son, respectivamente

$$g(x) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$$

$$h(x) = L^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2+1}\right] = \left[\frac{2}{s^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = 2\,cosx - senx$$

La convolución g(x)* h(x) es

$$g(x) * h(x) = \int_0^x g(x-v)h(v)dv = \int_0^x (x-v)(2cosv - senv)dv$$

$$= x\int_0^x (2cosv - senv)dv - \int_0^x (2cosv - senv)dv$$

$$= x.[2senv + cosv]_0^x - [v(2senv + cosv)]_0^x + [-2cosv + senv]_0^x$$

$$= -x - 2cosx + senx + 2$$

Por tanto, y aplicando el teorema de convolución

$$L^{-1}[G(s).H(s)] = g(x) * h(x)$$

resulta

$$L^{-1}[F(s)] = -x - 2cosx + senx + 2$$

17. Ejemplo. –

397. Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 228, ejemplo 5.7b
Resolver

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}$$

Solución.- Expresando F(s) de la misma forma que en el apartado anterior, se tiene

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)+1} \cdot \frac{1}{(s^2+1)+1} = G(s).H(s)$$

Para hallar las transformadas inversas de G(s) y H(s) se aplicará la propiedad de traslación, y queda

$$g(x) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-x} cosx$$

$$h(x) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-x} senx$$

Aplicando el teorema de convolución, se obtiene

$$L^{-1}[G(s).H(s)] = g(x) * h(x) = \int_0^x g(x-v)h(v)dv = \int_0^x e^{-x}cos(x-v)senv\, dv$$

Y teniendo en cuenta que

$$senAcosB = \frac{sen(A+B) + sen(A-B)}{2}$$

Entonces

$$\int_0^x e^{-x}cos(x-v)senv\, dv = \int_0^x e^{-x}\left[\frac{senx + sen(2v-x)}{2}\right]dv$$

$$e^{-x}\left([\frac{1}{2}v.senx]_0^x - [\frac{1}{2}.\frac{cos(2v-x)}{2}]_0^x\right) = \frac{1}{2}e^{-x}xsenx$$

Por tanto

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}e^{-x}xsenx$$

18. Ejemplo. –

398. Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 229, ejemplo 5.7b

Resolver

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+a)^2}$$

Solución.-

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2} = G(s).H(s)$$

Las transformadas inversas de G(s) y H(s) son

$$g(x) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = cos(ax)$$

$$h(x) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{sen(ax)}{a}$$

Por el teorema de convolución

$$L^{-1}[G(s).H(s)] = g(x) * h(x) = \int_0^x g(x-v)h(v)dv$$

$$= \int_0^x cos(a(x-v))\frac{sen(ax)}{a}dv$$

Utilizando la fórmula trigonométrica (5.5) se tiene

$$\int_0^x e^{-x}\cos(a(x-v))\frac{sen(ax)}{a}dv = \int_0^x \left[\frac{sen(ax)+sen(2av-ax)}{2a}\right]dv$$
$$= \frac{1}{2a}\left([v.sen(ax)]_0^x - \left[\frac{cos(2av-ax)}{2a}\right]_0^x\right) = \frac{1}{2a}xsen(ax)$$

Por tanto

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2a}xsen(ax)$$

19. **Ejemplo. –**

399. **Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 229-230, ejemplo 5.8**

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + (e^{-2x} * y(x)) = 1; \quad y(0) = 0$$
$$* = Convolución\ de\ funciones$$

Solución.- Considerando transformadas de Laplace en la ecuación, llamando $Y(s) = L[y(x)]$, y recordando la transformada de la derivada y el teorema de convolución, se obtiene

$$\boldsymbol{L\left[\frac{dy}{dx}\right] + L[e^{-2x} * y(x)] = L[1]\ ;\ L\left[\frac{dy}{dx}\right] + L[e^{-2x}].L[y(x)] = L[1]}$$
$$\boldsymbol{sY(s) - y(0) + \frac{1}{s+2}Y(s) = \frac{1}{s}}$$

De donde se deduce

$$Y(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{y(x) = L^{-1}\left[\frac{s+2}{s(s+1)^2}\right]}$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$\boldsymbol{\frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} \quad \Rightarrow \quad A = 2;\ B = -1;\ C = -2}$$

Queda

$$\boldsymbol{y(x) = L^{-1}\left[\frac{s+2}{s(s+1)^2}\right] = y(x) = L^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}\right]}$$
$$\boldsymbol{= L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]}$$

Y hallando las transformadas inversas se obtiene la solución pedida

$$\boldsymbol{y(s) = 2 - xe^{-x} - 2e^{-x}}$$

20. **Ejemplo. –**

400. **Marina L. & Rojas E. Ecuaciones diferenciales ordinarias técnicas de resolución. Pág 215, ejemplo 5.31**

Resolver

Usando la convolución hallar la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)}.$$

Solución.- Notemos que

$$\frac{1}{s-2} = L(e^{2t}) \quad y \quad \frac{1}{s-3} = L(e^{3t}).$$

Luego,

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right) = L^{-1}\left(L(e^{2t})L(e^{3t})\right) = e^{2t} * e^{3t}.$$

Calculemos ahora la integral de convolución

$$e^{2t} * e^{3t} = \int_0^t e^{2t}e^{3(t-v)}dv = e^{3t}\int_0^t e^{-v}dv = e^{3t}(-e^{-t}+1) = -e^{2t} + e^{3t}.$$

Tenemos así que la transformada inversa de F (s) es $-e^{2t} + e^{3t}$.

Seguna transformada inversa

21. Ejemplo. –

401. Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 241, ejemplo 5.16

Resolver

Utilícese la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = senx + \delta(x-\pi), \; y(0) = y'(0) = 0$$

donde $\delta(t)$ es la función $Delta\, de$

$Dirac$. Solución.-

Llamando $Y(s) = L[y(t)]$, y recordando la transformadas de Laplace de la función delta de Dirac es ((5.4) de la introducción teórica)

$$L[\delta(x-\pi)] = e^{-s\pi}$$

Al hallar transformadas de Laplace, se obtiene

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-s\pi}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1} e^{-s\pi}$$

Y al calcular sus transformadas inversas

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right] = \int_0^x sen(x-v)senv\,dv$$

Teniendo en cuenta que

$$senAsenB = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$$

se tiene

$$\int_0^x sen(x-v)senv\,dv = \int_0^x \frac{1}{2}[cos(x-2v) - cosx]dv$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left[\frac{sen(x-2v)}{2} - vcosx\right]\right]_0^x = \frac{senx - xcosx}{2}$$

Por tanto

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{\boldsymbol{senx - xcosx}}{\boldsymbol{2}}$$

La segunda transformada inversa de (5.8) está resuelta en el ejercicio 5.13.b

$$L^{-1}\left[e^{-s\pi}\frac{1}{s^2+1}\right] = -H_\pi(x)senx$$

Por lo tanto

$$y(x) = \frac{\boldsymbol{senx - xcosx}}{\boldsymbol{2}} - H_\pi(x)senx$$

Capítulo IV

Modelos matemáticos y métodos numéricos que implican ecuaciones de primer orden

Teoría preliminar: sistemas lineales

1. **Ejemplo. –**

402. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 305. Ejemplo 1.

a) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces la forma matricial del sistema homogéneo

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y \qquad \frac{dy}{dt} = 5x - 7y \quad \text{es} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

b) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces la forma matricial del sistema homogéneo

$$\frac{dx}{dt} = 6x + y + z + t \qquad \frac{dy}{dt} = 8x + 7y - z + 10t \qquad \frac{dz}{dt} = 2x + 9y - z + 6t \quad \text{es} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

2. **Ejemplo. –**

403. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 306. Ejemplo 2.

Compruebe que en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

son soluciones de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

SOLUCIÓN De $\mathbf{X}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$ vemos que

3. **Ejemplo. –**

404. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 307. Ejemplo 3.

Debería practicar comprobando que los dos vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Por el principio de superposición la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es otra solución del sistema.

4. **Ejemplo. –**

405. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 308. Ejemplo 4.

En el ejemplo 2 vimos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones del sistema (6). Es evidente que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$ puesto que ningún vector es un múltiplo constante del otro. Además, se tiene

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t.

5. **Ejemplo. –**

406. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 309. Ejemplo 5.

Del ejemplo 2 sabemos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones linealmente independientes de (6) en $(-\infty, \infty)$. Por tanto $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo. La solución general del sistema enel intervalo entonces es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

6. **Ejemplo. –**

407. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 309. Ejemplo 6.

Los vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (vea el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora,

$$W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3)=\begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t+\cos t \end{vmatrix}=e^t\neq 0$$

para todos los valores reales de t. Se concluye que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty,\ \infty)$. Por lo que la solución general del sistemaenel intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+c_3\mathbf{X}_3$; es decir,

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t+\cos t \end{pmatrix}$$

7. **Ejemplo. –**

408. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 309. Ejemplo 6.

Los vectores

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t \end{pmatrix},\ \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t,\ \mathbf{X}_3=\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t+\cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (vea el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora,

$$W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3)=\begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t+\cos t \end{vmatrix}=e^t\neq 0$$

para todos los valores reales de t. Se concluye que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty,\ \infty)$. Por lo que la solución general del sistemaen el intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+c_3\mathbf{X}_3$; es decir,

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}et+c_3\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t+\cos t \end{pmatrix}.$$

8. **Ejemplo. –**

409. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 310. Ejemplo 7.

El vector $\mathbf{X}_p=\begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

en el intervalo $(-\infty,\infty)$. (Compruebe esto.) La función complementaria de (11) en el mismo intervalo o la solución general de $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, como vimos en (10) del ejemplo 5 que

$\mathbf{X}_c=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-u}+c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{u}_{\omega}$. Por tanto, por el teorema 8.1.6

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ut} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{\theta} + \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$$

es la solución general de (11) en $(-\infty, \infty)$.

Sistemas lineales homogéneos

Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

9. Ejemplo. –

410. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 394. Ejemplo 3.

Encontrar la solución general de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \ldots (25)$$

De nuevo, se observa que la matriz de coeficientes es real y simétrica. Los eigenvalores y los eigenvectores de esta matriz se encontraron en el ejemplo 5 de la sección 7.3; a saber

$$r_1 = 2,\ \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots (26)$$

$$r_2 = -1, r_3 = -1;\ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \ldots (27)$$

De donde, un conjunto fundamental de soluciones de (25) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},\ \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},\ \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \ldots (28)$$

y la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \ldots (29)$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que aun cuando un eigenvalor $(r = -1)$ tiene multiplicidad dos, sigue siendo posible encontrar dos eigenvectores linealmente independientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$u$\boldsymbol{\xi}^{(2)}$y, como consecuencia, construir la solución general (29).

Eigenvalores reales distintos

10. Ejemplo. -

411. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 313. Ejemplo 1.

Resuelva

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

solución Primero determine los eigenvalores y digenvectores de la matriz de coeficientes. De la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

vemos que los eigenvalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Ahora para $\lambda_1 = -1$, (3) es equivalente a

$$\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 2k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que $k_1 = -k_2$. Cuando $k_2 = -1$, el eigenvector correspondiente es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 3k_2 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $k_1 = \frac{3}{2}k_2$; por tanto con $k_2 = 2$ el eigenvector correspondiente es

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Puesto que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es una matriz 2×2y como hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes de (4),

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t},$$

Se concluye que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

11. Ejemplo. -

412. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 314 y 315. Ejemplo 2.

Resuelva

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= y - 3z \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Usando los cofactores del tercer renglón, se encuentra

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0$$

y así los eigenvalores son $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -3$, con la eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene

$$(\mathbf{A}+3\mathbf{I}\mathbf{O}) = \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & \mathbf{O} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{operaciones} \\ \text{entre renglops}}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{O} & 1 & 0 & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto $k_1 = k_3 y k_2 = 0$. La elección $k_3 = 1$ da un eigenvector y el vector solución correspondiente

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} e^{-3t}.$$

De igual manera, para $\lambda_2 = -4$ implica que $k_1 = 10k_3 y k_2 = -k_3$. Al elegir $k_3 = 1$, se obtiene un segundo eigenvector y el vector solucion

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix} e^{-t}$$

Por último, cuando $\lambda_3 = 5$, las matrices aumentadas producen

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix} e^{5\cdot}.$$

La solución general de (6) es una combinación lineal de los vectores solución en (7), (8) y (9):

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} e^{-u} + c_2 \begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix} e^{-4} + c_3 \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix} e^{t}.$$

Eigenvalores repetidos

12. Ejemplo. -

413. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 316 y 317. Ejemplo 3.

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix} \mathbf{X}$

SOLUCIÓN Desarrollando el determinante en la ecuación característica

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

se obtiene $-(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$. Se ve que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 5$. Para $\lambda_1 = -1$, con la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene de inmediato

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}0) = \begin{pmatrix}2 & -2 & 2 & 0\\ -2 & 2 & -2 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operackones}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

El primer renglón de la última matriz indica que $k_1 - k_2 + k_3 = 0 \circ k_1 = k_2 - k_3$. Las elecciones $k_2 = 1$, $k_3 = 0 y k_2 = 1$, $k_3 = 1$ producen, a su vez, $k_1 = 1 y k_1 = 0$. Por lo que dos eigenvectores correspondientes a $\lambda_1 = -1$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Puesto que ningún eigenvector es un múltiplo constante del otro, se han encontrado dos soluciones linealmente independientes,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} e^{-i} \ y\ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} e^{-t},$$

que corresponden al mismo eigenvalor. Por último, para $\lambda_3 = 5$ la reducción

$$(\mathbf{A} + 5\mathbf{I}[\mathbf{0}) = \begin{pmatrix}-4 & -2 & 2 & 0\\ -2 & -4 & -2 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operaclones}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

implica que $k_1 = k_3 y k_2 = -k_3$. Al seleccionar $k_3 = 1$, se obtiene $k_1 = 1, k_2 = -1$; por lo que el tercer eigenvector es

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Concluimos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} e^{5t}.$$

13. Ejemplo. -

414. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 318. Ejemplo 4.

Encuentre la solución general del sistema dado en (10).

SOLUCIÓN De (11) se sabe que $\lambda_1 = -3$ y que una solución es $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} e^{-3}$. solver

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}\ 0\ 6p_1 - 18p_2 = 3$$
$$2p_1 - 6p_2 = 1.$$

Puesto que resulta obvio que este sistema es equivalente a una ecuación, se tiene un número infinito de elecciones de $p_1 y p_2$. Por ejemplo, al elegir $p_1 = 1$ se encuentra que $p_2 = \frac{1}{6}$. Sin embargo, por simplicidad elegimos $p_1 = \frac{1}{2}$ por lo que $p_2 = 0$. Entonces $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. Así de (12) se encuentra que $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} te^{-3} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} e^{-3t}$. La solución general de (10) es $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_1\mathbf{X}_2$, 0

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} e^{-3} + c_2 \left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} te^{-3} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} e^{-3t}\right]$$

14. Ejemplo. -

415. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 319. Ejemplo 5.

Resuelva
$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

SOLUCIÓN Laecuación caracteristica $(\lambda - 2)^3 = 0$ demuestra que $\lambda_1 = 2$ es uneigenvalor de multiplicidad tres. Al resolver $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$, se encuentra el único eigenvector
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
A continuación se resuelven primero el sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$ y después el sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ y se encuentra que
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; y \; \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$
Usando (12) y (15), vemos que la solución general del sistema es
$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}\right] + c_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} e^{2t}\right]$$

15. Ejemplo. –

416. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 406. Ejemplo 1.

Encontrar un conjunto fundamental de soluciones del sistema
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \ldots (3)$$
Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ y se sustituye $\mathbf{x}$ en la ecuación (3), se obtiene
$$\begin{pmatrix} 1 - r & -1 \\ 1 & 3 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots (4)$$
de lo cual se deduce que los eigenvalores de A son $r_1 = r_2 = 2$. Para este valor de r, las ecuaciones (4) expresan que $\xi_1 + \xi_2 = 0$. Por tanto, sólo existe un eigenvector $\boldsymbol{\xi}$, dado por $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$, correspondiente al eigenvalor doble. Por tanto, una solución del sistema (3) es
$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \ldots (5)$$
pero no existe una segunda solución de la forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Es natural tratar de hallar una segunda solución del sistema (3) de la forma
$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} te^{2t}, \ldots (6)$$
en donde $\boldsymbol{\xi}$ es un vector constante por determinar. Si se sustituye $\mathbf{x}$ en la ecuación (3) da
$$2\xi te^{2t} + \boldsymbol{\xi} e^{2t} - \mathbf{A}\xi te^{2t} = \mathbf{0}. \ldots (7)$$
A fin de que se satisfaga la ecuación (7) para toda t, es necesario que cada uno de los coeficientes de te^{2t} y e^{2t} sean cero. A partir del término en e^{2t} se encuentra que

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad \ldots (8)$$

De donde, no existe solución diferente de cero del sistema (3) que sea de la forma (6). Dado que la ecuación (7) contiene términos tanto en te^{2t} como en e^{2t}, parece que además de ξe^{2t}, la segunda solución debe contener un término de la forma ηe^{2t}; en otras palabras, es necesario suponer que

$$\mathbf{x} = \xi te^{2t} + \eta e^{2t}, \ldots (9)$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son vectores constantes. Una vez que se sustituye $\mathbf{x}$ por esta expresión en la ecuación (3) se obtiene

$$2\xi te^{2t} + (\xi + 2\eta)e^{2t} = \mathbf{A}(\xi te^{2t} + \eta e^{2t}). \ldots (10)$$

Si se igualan los coeficientes de te^{2t} y e^{2t} en cada miembro de (10) da las condiciones

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \ldots (\mathbf{11})$$

y

$$(\mathbf{A} - \mathbf{2I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \ldots (\mathbf{12})$$

para la determinación de $\boldsymbol{\xi}$ y η. La ecuación (11) se satisface si $\boldsymbol{\xi}$ es el eigenvector de $\mathbf{A}$ que corresponde al eigenvalor $r = 2$; es decir $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$. Dado que $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ es cero, podría esperarse que no fuera posible resolver la ecuación (12); sin embargo, esto no es necesariamente cierto, ya que para algunos vectores $\boldsymbol{\xi}$ es posible resolverla. De hecho, la matriz aumentada de la ecuación (12) es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El segundo renglón de esta matriz es proporcional al primero, de modo que el sistema es resoluble. Se tiene

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1$$

por lo que si $\eta_1 = k$, en donde k es arbitraria, entonces $\eta_2 = -k - 1$. Si se escribe.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots (13)$$

entonces, al sustituir $\boldsymbol{\xi}$ y η en la ecuación (9), se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \ldots (14)$$

El último término de la ecuación (14) es simplemente un múltiplo de la primera solución $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y es posible ignorarlo, pero los dos primeros términos constituyen una nueva solución

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \ldots (15)$$

Un cálculo elemental muestra que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$y, por consiguiente, $\mathbf{x}^{(1)}$y$\mathbf{x}^{(2)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (3). La solución general es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}\right]. \end{aligned} \ldots (16)$$

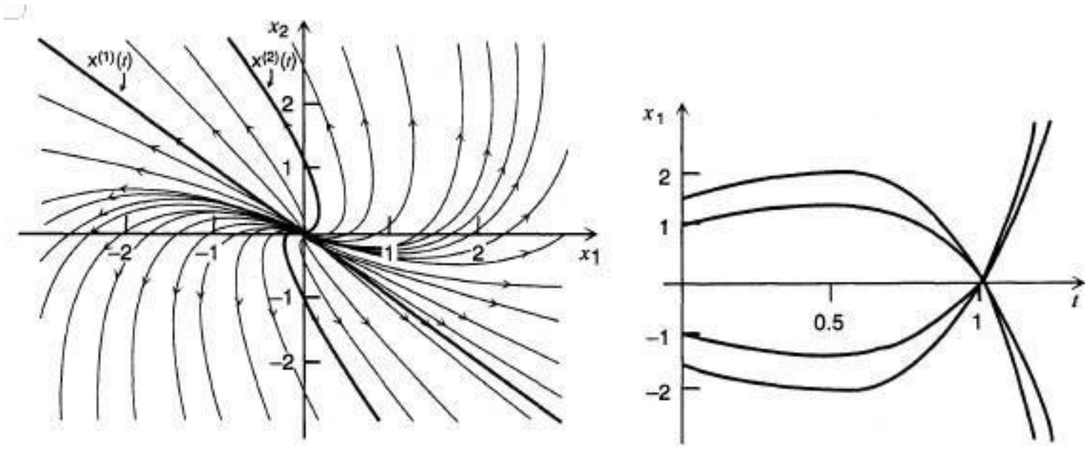


FIGURA 7.7.1 a) Trayectorias del sistema (3); el origen es un nodo. b) Gráficas de x_1 contra t para el sistema (3).

La gráfica de la solución (16) es un poco más difícil de analizar que en algunos de los ejemplos anteriores. Es evidente que $\mathbf{x}$ se vuelve no acotado cuando $t \to \infty$ y que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ cuando $t \to -\infty$. Es imposible demostrar que cuando $t \to -\infty$, todas las soluciones tienden al origen tangentes a la recta $x_2 = -x_1$, determinada por el eigenvector. De manera semejante, cuando $t \to \infty$, cada trayectoria es asintótica a una recta de pendiente -1 . En la figura 7.7.1a se muestran las trayectorias del sistema (3), y en la 7.7.1b, algunas gráficas típicas de x_1 contra t. El patrón de trayectorias de esta figura es típico de los sistemas de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con eigenvalores iguales y un solo eigenvector independiente. En este caso, el origen también se denomina nodo. Si los eigenvalores son negativos, las trayectorias son semejantes, aunque se recorren en dirección hacia adentro.

16. Ejemplo. –

417. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 409. Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, se obtiene el sistema algebraico

$$\begin{pmatrix} 1-r & 9 \\ -1 & -5-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los eigenvalores son las raíces de

$$(1-r)(-5-r) + 9 = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0,$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Por la ecuación (29), se encuentra que el eigenvector correspondiente es $\xi^T = (3, -1)$. Por tanto, una solución del sistema (28) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Una segunda solución independiente es de la forma $\mathbf{x} = \xi t e^{-2t} + \eta e^{-2t}$, en donde ξ es el mismo que antes y η satisface $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\eta = \boldsymbol{\xi}$, o bien,

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, $\eta_1 + 3\eta_2 = 1$, de modo que si $\eta_2 = k$, entonces $\eta_1 = 1 - 3k$, en donde k, es arbitraria. Por tanto,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 - 3k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El término en que aparece k simplemente produce un múltiplo de la primera solución $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, por 10 que puede eliminarse y se obtiene la segunda solución

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Finalmente, la solución general del sistema (28) es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}\right]$$

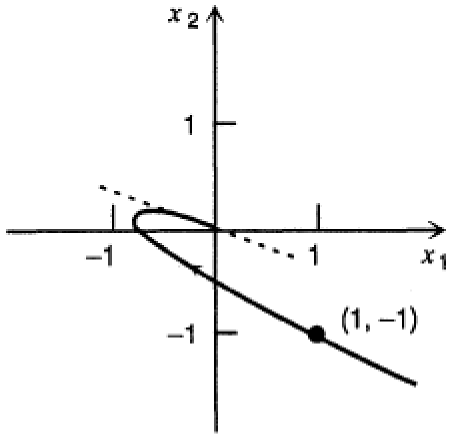


FIGURA 7.7.2 Solución del problema con valor inicial del ejemplo 2.

Para satisfacer las condiciones iniciales, se hace $t = 0$ en la ecuación (32); esto da

$$c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia, $c_1 = 1, c_2 = -2$y la solución del problema dado con valor inicial es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} - 2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t}$$

En la figura 7.7.2 se muestra la gráfica de la solución. Obsérvese que tiende al origen cuando $t \to \infty$ debido a los factores exponenciales negativos en la solución. A medida que tiende al origen, la gráfica es tangente a la recta de pendiente $-1/3$ determinada por el eigenvector de la matriz de coeficientes; ésta es la línea discontinua de la figura 7.7.2.

Eigenvalores complejos

17. Ejemplo. -

418. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 327. Ejemplo 1.

Resuelva el problema con valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \ \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN Primero se obtienen los eigenvalores a partir de

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

los eigenvalores son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -2i$. Para λ_1 el sistema

$$\begin{aligned} (2-2i)k_1 + 8k_2 &= 0 \\ -k_1 + (-2-2i)k_2 &= 0 \end{aligned}$$

da $k_1 = -(2+2i)k_2$. Eligiendo $k_2 = -1$, se obtiene

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A hora de (24) formamos

$$\mathbf{B}_1 = \mathrm{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \mathbf{B}_2 = \mathrm{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\alpha = 0$, se tiene a partir de (23) que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right] \\ &= c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Algunas gráficas de las curvas o trayectorias definidas por la solución (26) del sistema se ilustran en el diagrama de fase de la figura 8.2.5. Ahora la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, de forma equivalente $x(0) = 2$ y $y(0) = -1$ produce el sistema algebraico $2c_1 + 2c_2 = 2, -c_1 = -1$, cuya solución es $c_1 = 1, c_2 = 0$. Así la solución para el problema es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2 \end{pmatrix}$. La trayectoria especifica definida paramétricamente por la solución particular $x = 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t, y = -\cos 2t$ es la curva en rojo de la figura 8.2.5. Observe que esta curva pasa por $(2, -1)$.

18. Ejemplo. -

419. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 327 y 328. Ejemplo 2.

Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10x + 4 \end{pmatrix}$ en $(-\infty, \infty)$

SOLUCIÓN Se determina que los eigenvalores y los eigenvectores del sistema homogéneo asociado $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, y\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto la función complementaria es

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{2x} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x}.$$

Sistemas lineales no homogéneos

19. **Ejemplo. -**

420. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 327. Ejemplo 1.**

Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes **A**.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

produce los eigenvalores complejos $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$. Con los procedimientos de la sección 8.2 , se encuentra que

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Ahora, puesto que $\mathbf{F}(t)$ es un vector constante, se supone un vector solución particular constante $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. Sustituyendo esta última suposición en el sistema original e igualando las entradas se tiene que

$$0 = -a_1 + 2b_1 - 8$$
$$0 = -a_1 + b_1 + 3.$$

Al resolver este sistema algebraico se obtiene $a_1 = 14$ y $b_1 = 11$ y asi, una solución particular $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$. La solución general del sistema original de ED en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es entonces $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ o

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

20. **Ejemplo. –**

421. **William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 421 y 422. Ejemplo 1.**

Encontrar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t).$$

Si se procede como en la sección 7.5, se encuentra que los eigenvalores de la matriz de coeficientes son $r_1 = -3$ y $r_2 = -1$ y que los eigenvectores correspondientes son

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Antes de escribir la matriz $\mathbf{T}$ de eigenvectores, recuérdese que al final debe hallarse $\mathbf{T}^{-1}$. La matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es real y simétrica, de modo que es posible aplicar el resultado enunciado al final de la sección 7.3: $\mathbf{T}^{-1}$ es simplemente la adjunta o (dado que $\mathbf{T}$ es real) la transpuesta de $\mathbf{T}$, siempre que los eigenvectores de $\mathbf{A}$ se normalicen de modo que $(\xi, \xi) = 1$. De donde, una vez que se normalizan $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, se tiene

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al hacer $\mathbf{x} = \mathrm{T}\mathrm{y}$ y sustituir $\mathbf{x}$ en la ecuación (8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para la nueva variable dependiente $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$y_1' + 3y_1 = \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t,$$
$$y_2' + y_2 = \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t.$$

Cada una de las ecuaciones (13) es lineal y de primer orden, por lo que es posible resolverlas por los métodos de la sección 2.1. De esta manera, se obtiene

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{9}\right] + c_1 e^{-3t},$$
$$y_2 = \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2e^{-t}.$$

Por último, la solución se escribe en términos de las variables originales;

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\right]e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\right]e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix}$$
$$= k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

a. en donde $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ y $k_2 = c_2\sqrt{2}$. Los dos primeros términos del segundo miembro de la (15) forman la solución general del sistema homogéneo correspondiente a la ecuación (8). Los términos restantes son una solución particular del sistema no homogéneo.

21. Ejemplo. –

422. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 423 y 424. Ejemplo 2.

Aplicar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathrm{g}(t).$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones que el del ejemplo 1. Para aplicar el método de los coeficientes indeterminados, $\mathrm{g}(t)$ se escribe la forma

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

Entonces se supone que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = ate^{-t} + be^{-t} + ct + d$$

en donde a, b, c y d son vectores por determinar. Obsérvese que $r = -1$ es un eigenvalor de la matriz de coeficientes y, por lo tanto, es necesario incluir tanto ate como b e^{-t} en la solución supuesta. Al sustituir la ecuación (18) en la (16) y agrupar términos, se obtienen las siguientes ecuaciones algebraicas para **a**, **b**, **c** y **d** :

$$\mathbf{Aa} = -\mathbf{a},$$
$$\mathbf{Ab} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{Ac} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{Ad} = \mathbf{c}.$$

Por la primera de las ecuaciones (19) se observa que a es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $r = -1$. Por tanto, $\mathbf{a}^T = (1,1)$. Entonces, por la segunda se encuentra que

$$\mathbf{b} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para cualquier constante k. La elección más sencilla es $k = 0$, con lo cual $\mathbf{b}^T = (0,-1)$. En seguida, la tercera y cuarta dan $\mathbf{c}^T = (1,2)$ y $\mathbf{d}^T = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}\right)$, respectivamente.

Finalmente, por la ecuación (18) se obtiene la solución particular

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{}{3}\begin{pmatrix} \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución particular (21) no es idéntica a la contenida en la ecuación (15) del ejemplo 1 porque el término en e^{-t} es diferente. Sin embargo, si en la (20) se elige $k = \frac{1}{2}$, entonces $\mathbf{b}^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y entonces concuerdan las dos soluciones particulares.

22. **Ejemplo. –**

423. **William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 425. Ejemplo 3.**

Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones que el de los ejemplos 1 y 2. En la ecuación (10) se dio la solución general del sistema homogéneo correspondiente. Por tanto,

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental. Entonces, la solución $\mathbf{x}$ de la ecuación (35) queda dada por $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$, en donde $\mathbf{u}(t)$ satisface $\boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$, o sea,

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Si se resuelve la ecuación (37) por reducción respecto a los renglones, se obtiene

$$u_1' = e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t},$$

$$u_2' = 1 + \frac{3}{2}te^{t}.$$

De donde,

$$u_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + c_1,$$

$$u_2(t) = t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t} + c_2,$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

que es la misma solución obtenida antes.

Matrix exponencial

Aplicaciones

Ejemplo. –

424. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 355. Ejemplo 1.

El movimiento de cierto sistema resorte-masa (ver el ejemplo 3 de la sección 3.8) se describe por la ecuación diferencial de segundo orden

$$u'' + 0.125u' + u = 0. \ldots (4)$$

Escribir de nuevo esta ecuación como un sistema de ecuaciones de primer orden. Sean $x_1 = u$ y $x_2 = u'$; entonces se deduce que $x_1' = x_2$. Además, $u'' = x_2'$. Al sustituir u, u' y u'' de la ecuación (4) se obtiene

$$x_2' + 0.125x_2 = x_1 = 0.$$

Por tanto, x_1 y x_2 satisfacen el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 - 0.125x_2 \end{aligned} \quad \ldots (5)$$

Métodos de Euler y análisis de errores

23. Ejemplo. –

425. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 272. Ejemplo 1.

Resolver

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0.$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$ da

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

De donde, $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$, de modo que

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1},\ x > 0.$$

24. Ejemplo. –

426. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 273. Ejemplo 2.

Resolver

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0. \dots (12)$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$ da

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

De donde, $r_1 = r_2 = -2$y

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x),\ x > 0 \dots (13).$$

25. Ejemplo. –

427. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 274. Ejemplo 3.

Resolver

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$, da

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0.$$

De donde, $r = \pm i$ y la solución general es

$$y = c_1\cos(\ln x) + c_2\operatorname{sen}(\ln x),\ x > 0.$$

26. Ejemplo. –

428. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 445 y 446. Ejemplo 1.

Aplicar la fórmula mejorada de Euler (5) para calcular valores aproximados de la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y,\ y(0) = 1$$

Para este problema, $f(t, y) = 1 - t + 4y$; de donde,

$$y'_n = 1 - t_n + 4y_n$$
$$f(t_n + h, y_n + hy'_n) = 1 - (t_n + h) + 4(y_n + hy'_n)$$

Además, $t_0 = 0, y_0 = 1$ y $y'_0 = 1 - t_0 + 4y_0 = 5$. Si $h = 0.1$,

$$f(t_0 + h, y_0 + hy'_0) = 1 - 0.1 + 4[1 + (0.1)(5)] = 6.9.$$

Entonces, por la ecuación (5),

$$y_1 = 1 + (0.5)(5 + 6.9)(0.1) = 1.595.$$

En el segundo paso es necesario calcular

$$y'_1 = 1 - 0.1 + 4(1.595) = 7.28,$$
$$y_1 + hy'_1 = 1.595 + (0.1)(7.28) = 2.323,$$

y

$$f(t_2, y_1 + hy'_1) = 1 - 0.2 + 4(2.323) = 10.092.$$

Entonces, por la ecuación (5),

$$y_2 = 1.595 + (0.5)(7.28 + 10.092)(0.1) = 2.4636.$$

En la tabla 8.3.1 se dan más resultados para $0 \le t \le 1$, obtenidos al aplicar el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Para comparar los resultados del método mejorado de Euler con los del método de Euler, nótese que aquél requiere dos evaluaciones de f en cada paso, mientras que éste requiere solamente una. Esto es importante porque típicamente la mayor parte del tiempo de cálculo en cada paso se dedica a la evaluación de f, por lo cual el conteo de estas evaluaciones constituye una manera razonable de estimar el esfuerzo total de cálculo. Por tanto, para un tamaño dado de paso h, el método mejorado de Euler requiere el doble de evaluaciones de f que el de Euler. De manera alternativa, el método mejorado de Euler para el tamaño de paso h requiere el mismo número de evaluaciones de f que el de Euler con tamaño de paso $h/2$. Al consultar las tablas 8.1.1 y 8.3.1 puede verse que el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ da mejores resultados que el de Euler con $h = 0.05$; nótese que, en cada caso, intervienen veinte evaluaciones de f. Sin embargo, el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ también es más exacto que el de Euler con $h = 0.025$ (cuarenta evaluaciones de f) y es casi tan exacto como el de Euler con $h = 0.01$ (cien evaluaciones de f). Por tanto, en comparación con el método de Euler, el mejorado de Euler es evidentemente más eficiente, produciendo resultados sustancialmente mejores con menor esfuerzo total de cálculo. Con $h = 0.05$ el método mejorado de Euler proporciona resultados que concuerdan bastante con la solución exacta; los errores porcentuales en $t = 0.5$ y $t = 1.0$ son 1.15% y 2.3%, respectivamente.

TABLA 8.3.1 Comparación de resultados al aplicar los métodos de Euler y mejorado de Euler para el problema con valor inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$.

	Euler		Mejorado de Euler		
t	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Exacta
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5475000	1.5761188	1.5950000	1.6049750	1.6090418
0.2	2.3249000	2.4080117	2.4636000	2.4932098	2.5053299
0.3	3.4333560	3.6143837	3.7371280	3.8030484	3.8301388
0.4	5.0185326	5.3690304	5.6099494	5.7404023	5.7942260
0.5	7.2901870	7.9264062	8.3697252	8.6117498	8.7120041
0.6	10.550369	11.659058	12.442193	12.873253	13.052522
0.7	15.234032	17.112430	18.457446	19.203865	19.515518
0.8	21.967506	25.085110	27.348020	28.614138	29.144880
0.9	31.652708	36.746308	40.494070	42.608178	43.497903
1.0	45.588400	53.807866	59.938223	63.424698	64.897803

Métodos de Runge-Kulta

27. Ejemplo. –

429. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 451 y 452. Ejemplo 1.

Aplicar el método de Runge-Kutta para calcular valores aproximados de la solución $y = \phi(t)$ del problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y,\ y(0) = 1.$$

Si se toma $h = 0.2$, se tiene

$$k_{01} = f(0,1) = 5;\ hk_{01} = 1.0$$
$$k_{02} = f(0 + 0.1, 1 + 0.5) = 6.9;\ hk_{02} = 1.38$$
$$k_{03} = f(0 + 0.1, 1 + 0.69) = 7.66;\ hk_{03} = 1.532$$
$$k_{04} = f(0 + 0.2, 1 + 1.532) = 10.928$$

Por tanto,

$$y_1 = 1 + \frac{0.2}{6}[5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928]$$
$$= 1 + 1.5016 = 2.5016.$$

En la tabla 8.4.1 se dan más resultados, si se aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$y $h = 0.1$. Para comparación, también se dan los valores obtenidos al aplicar los métodos de Euler y mejorado de Euler. Nótese que el método de Runge-Kutta da un valor en $t = 1$ que difiere de la solución exacta en sólo 0.7% si el tamaño de paso es $h = 0.2$, y en sólo $0.06\% si h = 0.1$. La exactitud del método de Runge-Kutta para este problema se demuestra aùn más en la tabla 8.4.2, que contiene valores aproximados de $\phi(1)$ obtenidos al aplicar diferentes métodos y tamaños de paso. Obsérvese que el resultado para el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ es mejor que el de cualquiera de los otros métodos con $h = 0.01$. Es decir, el método de Runge-Kutta con 10 pasos es mejor que el método mejorado de Euler con 100 pasos; en realidad, la comparación adecuada es de 40 evaluaciones de $f(t,\ y)$ por el método de Runge-Kutta contra 200 por el método mejorado de Euler. Además, en la tabla 8.4.2 también se ve que, para $h\ =\ 0.01$, el método de Runge-Kutta da en esencia el valor exacto de $\phi(1)$.

Métodos multipasos

28. Ejemplo. –

430. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 462 y 463. Ejemplo 1.

Aplicar el método predictor-corrector de Adams-Moulton, con $h\ =\ 0.1$ para determinar un valor aproximado de la solución exacta de $y\ =\ \phi(t)$ en $t\ =\ 0.4$ para el problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y,\ y(0) = 1.$$

Como datos de arranque se usa y_1, y_2 y y_3 determinados con el método de Runge-Kutta y que se dan en la tabla 8.4.1. Entonces si se aplica la ecuación (6), se obtiene

$$\begin{array}{ll} y_0 = 1 & y_0' = 5 \\ y_1 = 1.6089333 & y_1' = 7.3357332 \\ y_2 = 2.5050062 & y_2' = 10.820025 \\ y_3 = 3.8294145 & y_3' = 16.017658. \end{array}$$

Por la ecuación (3) se encuentra que el valor predicho de y_4 es

$$y_4 = 3.8294145 + \frac{0.1(469.011853)}{24} = 5.783631.$$

A continuación, se aplica la fórmula correctora (5) para corregir y_4. Con correspondencia al valor predicho de y_4, a partir de la ecuación (6), se encuentra que $y_4' = 23.734524$. Entonces, por la ecuación (5), el valor corregido de y_4 es

$$y_4 = 3.8294145 + \frac{0.1(471.181828)}{24} = 5.792673.$$

El valor exacto, correcto hasta ocho dígitos, es 5.7942260. Nótese que el aplicar una vez la fórmula de corrección, el error en y_4 se reduce aproximadamente a la séptima parte del error anterior a su aplicación.

Soluciones respecto a puntos ordinarios

Repaso de series de potencias

1. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 223. Ejemplo 1.

Escriba $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ como una sola serie de potencias cuyo término general implica a x^k.

SOLUCIÓN

Para sumar las dos series es necesario que ambos índices de las sumas comiencen con el mismo número y las potencias de x en cada caso estén "en fase"; es decir, si una serie comienza con un múltiplo de, por ejemplo, x a la primera potencia, entonces se quiere que la otra serie comience con la misma potencia. Observe que en el problema la primera serie empieza con x^0, mientras que la segunda comienza con x^1. Si se escribe el primer término de la primera serie fuera de la notación de suma,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2\cdot 1 c_2 x^0 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{\substack{\text{serie comienza}\\ \text{con } x\\ \text{para } n=3}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{\substack{\text{serie comienza}\\ \text{con } x\\ \text{para } n=0}},$$

vemos que ambas series del lado derecho empiezan con la misma potencia de x, en particular x^1. Ahora, para obtener el mismo índice de la suma, se toman como guía los exponentes de x; se establece $k = n - 2$ en la primera serie y al mismo tiempo $k = n + 1$ en la segunda serie. El lado derecho se convierte en

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k.$$

igual

igual

Recuerde que el índice de la suma es una variable "muda"; el hecho de que $k = n - 1$ en un caso y $k = n + 1$ en el otro no debe causar confusión si se considera que lo importante es el valor del índice de suma. En ambos casos k toma los mismos valores sucesivos $k = 1,2,3,$ ... cuando n toma los valores $n = 2,3,4,$ ... para $k = n - 1$ y $n = 0,1,2,$ ... para $k = n + 1$. Ahora es posible sumar las series de (3) término a término:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k.$$

Soluciones en torno a puntos singulares

174. Ejemplo. –

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 233. Ejemplo 1.

Se debe aclarar que $x = 2$ y $x = -2$ son puntos singulares de

$$(x^2-4)^2y'' + 3(x-2)y' + 5y = 0.$$

Después de dividir la ecuación entre $(x^2-4)^2 = (x-2)^2(x+2)^2$ y de reducir los coeficientes a los términos mínimos, se encuentra que

$$P(x) = \frac{3}{(x-2)(x+2)^2} \text{ y } Q(x) = \frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Ahora se prueba $P(x)$ y $Q(x)$ en cada punto singular. Para que $x = 2$ sea un punto singular regular, el factor $x - 2$ puede aparecer elevado a la primera potencia enel denominador de $P(x)$ y a lo más a la segunda potencia en el denominador de $Q(x)$. Una comprobación de los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$ muestra que ambas condiciones se satisfacen, por lo que $x = 2$ es un punto singular regular. En forma alternativa, llegamos a la misma conclusión al notar que ambas funciones racionales

$$p(x) = (x-2)P(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \text{ y } q(x) = (x-2)^2Q(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$

son analiticas en $x = 2$. Ahora, puesto que el factor $x-(-2) = x + 2$ aparece a la segunda potencia en el denominador de $P(x)$, se concluye de inmediato que $x = -2$ es un punto singular irregular de la ecuación. Esto también se deduce del hecho de que

$$p(x) = (x+2)P(x) = \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

es no analitica en $x = -2$.

2. **Ejemplo. –**

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 234 y 235. Ejemplo 2.

Debido a que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0,$$

tratamos de encontrar una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Ahora

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \text{ y } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2},$$

por lo que

$$3xy'' + y' - y = 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= x^r\Big[r(3r-2)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{k=n}\Big]$$

$$= x^r\left[r(3r-2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k]x^k\right] = 0,$$

lo que implica que

$$r(3r-2)c_0 = 0$$

$$\text{y} \quad (k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k = 0, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Ya que no se ha ganado nada al hacer $c_0 = 0$, entonces debemos tener

$$r(3r-2) = 0$$

$$\text{y} \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Cuando se sustituye en (7), los dos valores de r que satisfacen la ecuación cuadrática (6), $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$, se obtienen dos relaciones de recurrencia diferentes:

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$r_2 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

De (8) encontramos

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{5\cdot 1} \\
c_2 &= \frac{c_1}{8\cdot 2} = \frac{c_0}{2!\,5\cdot 8} \\
c_3 &= \frac{c_2}{11\cdot 3} = \frac{c_0}{3!\,5\cdot 8\cdot 11} \\
c_4 &= \frac{c_3}{14\cdot 4} = \frac{c_0}{4!\,5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}
\end{aligned}$$

De (9) encontramos

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{1\cdot 1} \\
c_2 &= \frac{c_1}{2\cdot 4} = \frac{c_0}{2!\,1\cdot 4} \\
c_3 &= \frac{c_2}{3\cdot 7} = \frac{c_0}{3!\,1\cdot 4\cdot 7} \\
c_4 &= \frac{c_3}{4\cdot 10} = \frac{c_0}{4!\,1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{n!\,1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}.
\end{aligned}$$

Aquí se encuentra algo que no ocurrió cuando se obtuvieron soluciones respecto a un punto ordinario; se tiene lo que parecen ser dos conjuntos de coeficientes diferentes, pero cada conjunto contiene el mismo múltiplo c_0. Si se omite este término, las soluciones en serie son

$$y_1(x) = x^{2/3}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^n\right]$$

$$y_2(x) = x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n\right].$$

Con el criterio de la razón se puede demostrar que (10) y (11) convergen para todos los valores de x; es decir, $|x| < \infty$. También debe ser evidente de la forma de estas soluciones que ninguna serie es un múltiplo constante de la otra y, por tanto $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes en todo el eje x. Así, por el principio de superposición, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es otra solución de (5). En cualquier intervalo que no contenga al origen, tal como $(0, \infty)$, esta combinación lineal representa la solución general de la ecuación diferencial.

3. Ejemplo. -

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 235 y 236. Ejemplo 3.

Resuelva $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0.$

SOLUCIÓN Sustituyendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ se obtiene

ITULO 6 SOLUCIONES EN SERIES DE ECUACIONES LINEALES

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_nx^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1)c_nx^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)c_nx^{n+r}$$

$$= x^r\Big[r(2r-1)c_0x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1)c_nx^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)c_nx^n}_{k=n}\Big],$$

$$= x^r\left[r(2r-1)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k]x^k\right],$$

lo que implica que

$$r(2r-1) = 0$$

y

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k = 0,$$

$k = 0,1,2, \ldots$ De (15) vemos que las raices indiciales son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$.

Para $r_1 = \frac{1}{2}$ se puede dividir entre $k + \frac{3}{2}$ en (16) para obtener

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2(k+1)}, \quad k = 0,1,2, \ldots,$$

mientras que para $r_2 = 0$, (16) se convierte en

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

De (17) encontramos	De (18) encontramos
$c_1 = \frac{-c_0}{2\cdot 1}$ $c_2 = \frac{-c_1}{2\cdot 2} = \frac{c_0}{2^2\cdot 2!}$ $c_3 = \frac{-c_2}{2\cdot 3} = \frac{-c_0}{2^3\cdot 3!}$ $c_4 = \frac{-c_3}{2\cdot 4} = \frac{c_0}{2^4\cdot 4!}$ $\vdots$ $c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}.$	$c_1 = \frac{-c_0}{1}$ $c_2 = \frac{-c_1}{3} = \frac{c_0}{1\cdot 3}$ $c_3 = \frac{-c_2}{5} = \frac{-c_0}{1\cdot 3\cdot 5}$ $c_4 = \frac{-c_3}{7} = \frac{c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$ $\vdots$ $c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}.$

Por lo que para la raíz indicial $r_1 = \frac{1}{2}$ se obtiene la solución

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n+1/2},$$

donde de nuevo se omitió c_0. Esta serie converge para $x \geq 0$; como se ha dado, la serie no está definida para valores negativos de x debido a la presencia de $x^{1/2}$. Para $r_2 = 0$, una segunda solución es

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n-1)} x^n, \quad |x| < \infty.$$

En el intervalo $(0,\infty)$ la solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

4. **Ejemplo. –**

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 237. Ejemplo 4.

Resuelva $xy'' + y = 0$.

SOLUCIÓN De $xP(x) = 0$, $x^2Q(x) = x$ y el hecho de que 0 y x son sus propias series de potencias centradas en 0 , se concluye que $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$, por tanto, de la ecuación (14) la ecuación indicial es $r(r - 1) = 0$. Se debe comprobar que las dos relaciones de recurrencia correspondientes a las raices indiciales $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$ producen exactamente el mismo conjunto de coeficientes. En otras palabras, en este caso el método de Frobenius produce sólo una solución en serie

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots$$

5. **Ejemplo. –**

Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 238. Ejemplo 5.

Encuentre la solución general de $xy'' + y = 0$.
SOLUCIÓN De la conocida solución dada del ejemplo 4 ,

$$y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots,$$

se puede construir una segunda solución $y_2(x)$ usando la fórmula (23). Quienes tengan tiempo, energia y paciencia pueden realizar el aburrido trabajo de elevar al cuadrado una serie, la división larga y la integración del cociente a mano. Pero todas estas operaciones se realizan con relativa facilidad con la ayuda un SAC. Se obtienen los resultados.

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int 0dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx = y_1(x)\int \frac{dx}{\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots\right]^2}$$

$$= y_1(x)\int \frac{dx}{\left[x^2 - x^3 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{7}{72}x^5 + \cdots\right]} \leftarrow \text{-después de elevar al cuadrado}$$

$$= y_1(x)\int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{7}{12} + \frac{19}{72}x + \cdots\right] dx \leftarrow \text{ despues de la division larga}$$

$$= y_1(x)\left[-\frac{1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right]$$

$$= y_1(x)\ln x + y_1(x)\left[-\frac{1}{x} + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right]$$

0 $$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \left[-1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right]. \leftarrow \text{ despues de multiplicar}$$

En el intervalo $(0, \infty)$ la solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

Temas extras

Planteamiento sistemático para resolver una ecuación diferencial

1. **Ejemplo. –**

431. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Páginas 79. Ejemplo 2-21.

Determine la solución de la ecuación diferencial $y' = e^{x + \ln x - y}$.

Solución. -

Lo primero que hacemos es verificar el orden de la ecuación dada. Es una ecuación de primer orden porque no incluye ninguna derivada de segundo orden o superior. El siguiente paso es ver si puede resolverse por integración directa. Esta posibilidad se descarta rápidamente, ya que su lado derecho incluye una función no lineal (exponencial en este caso) de y. Laecuación no parece ser^8 separable en su forma actual, pero esto puede cambiarsi la simplificamos. Dado que $e^{a+b} = e^a + e^b$ y $e^{\ln x} = x$, la ecuación dada puede expresarse como

$$y' = e^{x+\ln x-y} = e^x e^{\ln x} e^{-y}$$

O

$$y' = xe^x e^{-y}.$$

Ahora la ecuación está en una forma separable y puede reacomodarse como $e^y y' = xe^x$ Integrando con respecto a x obtenemos$e^y = xe^x - e^x + C$. Dado que ln ey y y tomando el logaritmo de ambos lados llegamos a y ln(xex ex C), que es la solución deseada.

Si la ecuación no fuese separable, comprobaríamos si es homogénea mediante un cambio de variable. Si tampoco fuera homogénea ni exacta, intentaríamos hacerla exacta encontrando un factor de integración que dependa solo de x o de y. Si esto también fallara y no reconociéramos la ecuación dada como una de las ecuaciones diferenciales especiales, solo nos quedaría la opción de considerar un método gráfico o numérico y conformarnos con una solución aproximada.

Existencia y unicidad de las soluciones

2. **Ejemplo. –**

432. Yunus A. Cengel &William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. Páginas 45 y 46. Ejemplo 2-2.

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$(x + 1)y' + y = 5x^2(x + 1)$$

$$y(2) = 3$$

Solución. -

En su forma actual, el coeficiente de y' no es 1. Por tanto, primero necesitamos dividir ambos lados de la ecuación entre $x + 1$, que es el coeficiente de y'. Esto da …

$$y' + \frac{1}{x+1} y = 5x^2$$

Por supuesto, esta división es válida para $x + 1 \neq 0$ o $x \neq -1$.

Ahora tenemos $P(x) = \frac{1}{(x+1)}$, que es continua en todas partes, salvo en $x = -1$, y $R(x) = (5x^2)$, que es continua en todo el eje real. De modo que necesitamos tener mucho cuidado al tratar con $P(x)$ en $x = -1$. Podemos evitar el punto de discontinuidad eligiendo que el intervalo sea $-\infty < x < -1$ o $-1 < x < \infty$. Por el teorema 2-1, un problema de valor inicial que comprenda la ecuación diferencial dada tiene una solución única en cualquiera de ambos intervalos (figura 2-8).

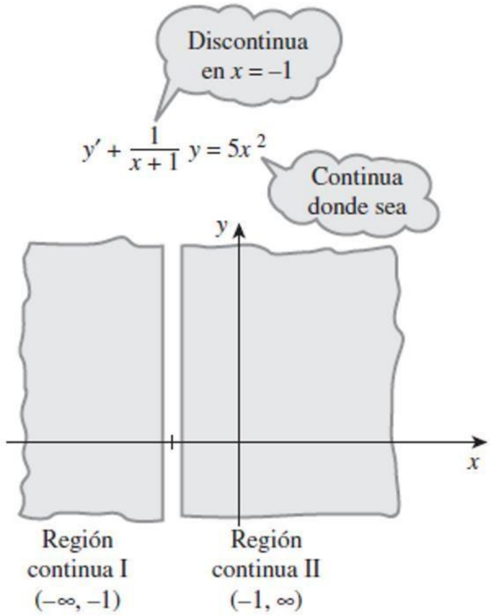


FIGURA 2-8
Los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ de una ecuación diferencial pueden considerarse como continuos en cualquier región que no incluya ningún punto de discontinuidad.

Considerando que $x_0 = 2$ está en el intervalo $-1 < x < \infty$, nuestro problema de valor inicial tendrá una solución única en dicho intervalo.

La solución de este problema de valor inicial lineal de primer orden está determinada por el siguiente procedimiento de rutina,

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x+1}} = e^{ln|x+1|} = |x+1|$$

$$[|x-1|y]' = |x+1|5x^2\, dx$$

Para $x > -1$, tenemos $|x+1| = x+1$. Entonces la solución en el intervalo $-1 < x < \infty$ se vuelve…

$$(x+1)y = 5\int (x^3 + x^2)\, dx + c = 5\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right) + c$$

$$y = \frac{5x^3(3x+4)}{12(2+1)} + \frac{c}{x+1}$$

$$y(2) = 3 \rightarrow 3 = \frac{51 \times 8(6+4)}{12(2+2)} + \frac{c}{3} \rightarrow c = -\frac{73}{3}$$

Sustituyendo,

$$y = \frac{5x^3(3x+4)}{12(x+1)} - \frac{73}{3(x+1)}$$

que es la solución deseada.

3. Ejemplo. –

433. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 347. Ejemplo 1.

Encontrar la transformada inversa de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} \ldots (14)$$

Es conveniente concebir $H(s)$ como el producto de s^{-2} y $a/(s^2 + a^2)$ que, según los renglones 3 y 5 de la tabla 6.2.1, son las transformadas de t y sen at, respectivamente. De donde, por el teorema 6.6.1, la transformada inversa de $H(s)$ es

$$h(t) = \int_0^t (t - r)\operatorname{sen} ar dr = \frac{at - \operatorname{sen} at}{a^2} \ldots (15)$$

El lector puede demostrar que se obtiene el mismo resultado si se escribe $h(t)$ en la forma alternativa

$$h(t) = \int_0^t r \operatorname{sen} a(t - r) dr$$

con lo que, en este caso, se comprueba la ecuación (2). Por supuesto, también puede hallarse $h(t)$ si se desarrolla $H(s)$ en fracciones parciales.

4. Ejemplo. –

434. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 347 y 348. Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \ldots (16)$$
$$y(0) = 3,\ y'(0) = -1 \ldots (17)$$

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial y aplicar las condiciones iniciales, se obtiene

$$s^2 Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

o bien,

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4} + \frac{G(s)}{s^2 + 4} \ldots (18)$$

Obsérvese que los términos primero y segundo del segundo miembro de la ecuación (18) contienen la dependencia de $Y(s)$ con respecto a las condiciones iniciales y la función de fuerza, respectivamente. Es conveniente escribir $Y(s)$ en la forma

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2 + 4}G(s) \ldots (19)$$

Entonces, si se aplican los renglones 5 y 6 de la tabla 6.2 .1 y el teorema 6.6 .1, se obtiene

$$y = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2(t - r)\, g(r) dr \ldots (20)$$

Si se da una función de fuerza g específica, entonces puede evaluarse la integral de la ecuación (20) (mediante métodos numéricos, de ser necesario).

Solución de problemas con valor inicial

23. Ejemplo. –

435. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 321 y 321. Ejemplo 1.
Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y = \operatorname{sen} 2t$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$$

Se supone que este problema con valor inicial tiene una solución $y = \phi(t)$, que con sus dos primeras derivadas satisface las condiciones del corolario del teorema 6.2.1. Entonces, si se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, se tiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4),$$

en donde se obtuvo la transformada de sen $2t$ del renglón 5 de la tabla 6.2 .1 . Al sustituir $y(0)$ y $y'(0)$ por sus valores dados en las condiciones iniciales y despejar $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Si se aplican fracciones parciales, es posible escribir $Y(s)$ en la forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Al desarrollar el numerador del segundo miembro de la ecuación (22) e igualarlo al numerador de la (21) se encuentra que

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

para toda s. Entonces, si se comparan los coeficientes de potencias iguales de s, se tiene

$$\begin{aligned} a + c &= 2, & b + d &= 1, \\ 4a + c &= 8, & 4b + d &= 6. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $a = 2, c = 0, b = \frac{5}{3}$ y $d = -\frac{2}{3}$, de lo cual se deduce que

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}.$$

Con base en los renglones 5 y 6 de la tabla 6.2 .1 , la solución del problema con valor inicial dado es

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t.$$

24. Ejemplo. –

436. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 322 y 323. Ejemplo 2.
Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y^{\text{iv}} - y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y''(0) = 0.$$

En este problema es necesario suponer que la solución $y = \phi(t)$ satisface las condiciones del corolario del teorema 6.2.1, para $n = 4$. La transformada de Laplace de la ecuación diferencial (25) es

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

En consecuencia, si se aplican las condiciones iniciales (26) y se despeja $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1},$$

El desarrollo en fracciones parciales de $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1}$$

y se concluye que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2$$

para toda s. Al hacer $s = 1$ y $s = -1$, respectivamente, en la ecuación (28), se obtienen el par de ecuaciones

$$2(a + b) = 1,\ 2(-a + b) = 1,$$

y, por lo tanto, $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$. Si en la ecuación (28) se hace $s = 0$, entonces $b - d = 0$, de modo que $d = \frac{1}{2}$. por último, al igualar los coeficientes de los términos cuadráticos de cada miembro de la ecuación (28), se encuentra que $a + c = 0$, de modo que $c = 0$. Por tanto,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1},$$

y de los renglones 4 y 5 de la tabla 6.2.1, la solución del problema con valor inicial (25), (26) es

$$y = \phi(t) = \frac{\operatorname{senh} t + \operatorname{sen} t}{2}$$

Ecuaciones diferenciales con funciones de fuerza discontinuas

25. Ejemplo. –

437. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 335 y 336. Ejemplo 1.

Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t)$$

en donde

$$g(t) = 1 - u_\pi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$

Supóngase que las condiciones iniciales son

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Este problema rige la carga en el condensador de un circuito eléctrico simple con un voltaje aplicado en la forma de un pulso rectangular. Alternativamente, y puede representar la respuesta de un oscilador amortiguado sujeto a la fuerza aplicada $g(t)$. La transformada de Laplace de la ecuación (1) es

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) + \frac{5}{4}Y(s) = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u_\pi(t)\} = (1 - e^{-\pi s})/s.$$

Si se introducen los valores iniciales (3) y se despeja $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$$

Para encontrar $y = \phi(t)$ es conveniente escribir $Y(s)$ como

$$Y(s) = (1 - e^{-\pi s})H(s)$$

en donde

$$H(s) = 1/s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right).$$

Entonces, si $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, se tiene

$$y = h(t) - u_\pi(t)h(t - \pi).$$

Obsérvese que se ha aplicado el teorema 6.3.1 para escribir la transformada inversa de $e^{-\pi s}H(s)$ Por último, para determinar $h(t)$ se aplica el desarrollo en fracciones parciales de $H(s)$:

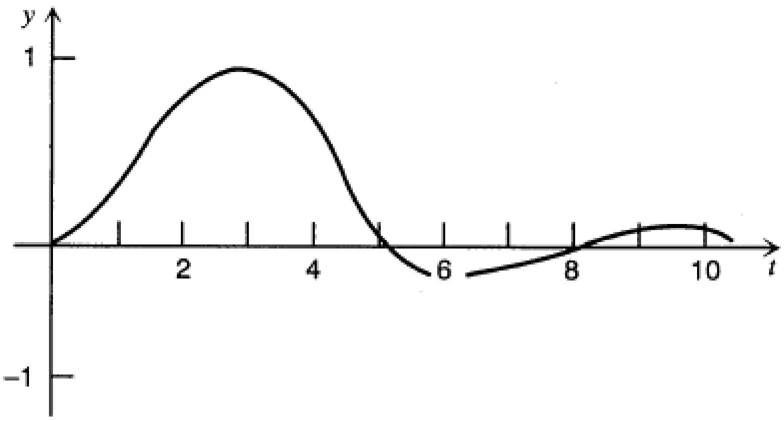


FIGURA 6.4.1 Solución del problema con valor inicial (1), (2), (3).

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + s + \frac{5}{4}}.$$

Una vez que se determinan los coeficientes, se encuentra que $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$ y $c = -\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$H(s) = \frac{4/5}{s} - \frac{4}{5}\frac{s+1}{s^2+s+\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{4/5}{s} - \frac{4}{5}\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1},$$

de modo que, con referencia a los renglones 9 y 10 de la tabla 6.2.1, se obtiene

$$h(t) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\left(e^{-t/2}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t\right)$$

En la figura 6.4.1 se muestra la gráfica de $y = \phi(t)$ de las ecuaciones (7) y (10).

26. Ejemplo. –

438. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 337 y 338. Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 4y = g(t) \ldots (14)$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots (15)$$

en donde

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases} \ldots (16)$$

En este ejemplo, la función de fuerza tiene la forma que se muestra en la figura 6.4 .2 y se conoce como carga de rampa. Es conveniente introducir la función escalón unitario y escribir

$$g(t) = t - u_{\frac{\pi}{2}}(t)(t - \pi/2), \ldots (17)$$

como el lector puede comprobar. Para resolver el problema se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial y se aplican las condiciones iniciales, con lo que se obtiene

$$(s^2+4)Y(s) = (1 - e^{-\pi s/2})/s^2,$$

o bien,

$$Y(s) = (1 - e^{-\frac{xs}{2}})H(s), \ldots (18)$$

en donde

$$H(s) = 1/s^2(s^2+4) \ldots (19)$$

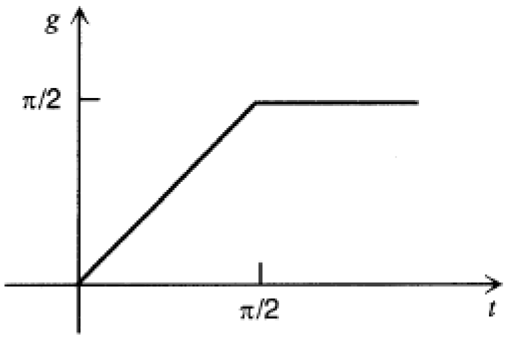


FIGURA 6.4.2 Carga de rampa.

Por tanto, la solución del problema con valor inicial (14), (15), (16) es

$$y = \phi(t) = h(t) - u_{\frac{\pi}{2}}(t)h(t - \pi/2) \ldots (20)$$

en donde $h(t)$ es la transformada inversa de $H(s)$. El desarrollo en fracciones parciales de $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2 + 4}, \ldots (21)$$

y entonces se concluye, con base en los renglones 3 y 5 de la tabla 6.2 .1, que

$$h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t \ldots (22)$$

En la figura 6.4 .3 se muestra la gráfica de $y = \phi(t)$. Nótese que en este ejemplo la función de fuerza g es continua, pero g' es discontinua en $t = \pi/2$. Se deduce que la solución ϕ y sus dos primeras derivadas son continuas, pero ϕ''' tiene una discontinuidad en $t = \pi/2$ que se corresponde con la discontinuidad en g' en ese punto

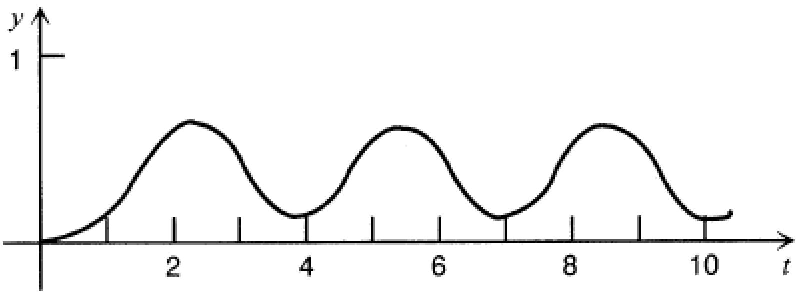


FIGURA 6.4.3 Solución del problema con valor inicial (14), (15), (16).

Funciones impulso

27. Ejemplo. –

439. **William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 343. Ejemplo 1.**

Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \ldots (17)$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \ldots (18)$$

Este problema con valor inicial podría surgir en el estudio de algún circuito eléctrico al que se le aplica un impulso unitario de voltaje en el instante $t = \pi$.

Para resolver el problema dado se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, con lo que se obtiene

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = e^{-xs},$$

en donde se han aplicado las condiciones iniciales (18). Por tanto,

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} = e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \; ... (19)$$

Por el teorema 6.3 .2 o por el renglón 9 de la tabla 6.2 .1 ,

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} = e^{-t}\operatorname{sen} t \; ... (20)$$

De donde, por el teorema 6.3.1, se tiene

$$y = f^{-1}\{Y(s)\} = u_n(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi), \; ... (21)$$

que es la solución formal del problema dado. También es posible escribir y en la forma

$$y = \begin{cases} 0, & t < \pi, \\ e^{-(t-x)}\operatorname{sen}(t-\pi), & t \geq \pi. \end{cases}$$

En la figura 6.5.3 se muestra la gráfica de la ecuación (22). En virtud de que las condiciones iniciales en $t = 0$ son homogéneas y no hay excitación externa hasta $t = \pi$, no hay respuesta en el intervalo $0 < t < \pi$. El impulso en $t = \pi$ produce una

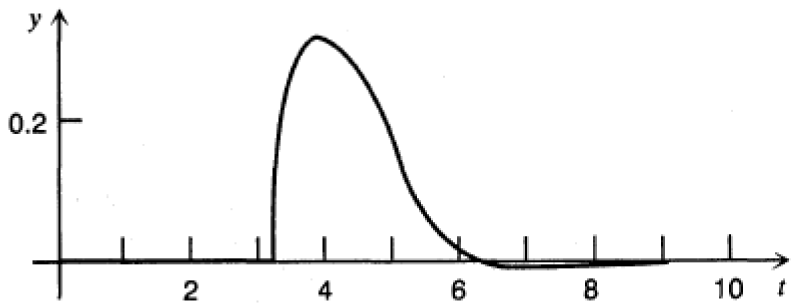


FIGURA 6.5.3 Solución del problema con valor inicial (17), (18).

Integral de convolución

28. Ejemplo. –

440. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 672 y 673. Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema de conducción del calor

$$u_t = u_{xx} + xe^{-t},$$
$$u(0,t) = 0, \; u_x(1,t) + u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0.$$

Una vez más, se aplican las eigenfunciones normalizadas ϕ_n del problema (19) y se supone que u se da por la ecuación (30),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$$

Los coeficientes b_n se determinan a partir de la ecuación diferencial

$$b_n' + \lambda_n b_n = \gamma_n(t)$$

en donde λ_n es el n-ésimo eigenvalor del problema (19) y los $\gamma_n(t)$ son los coeficientes del desarrollo del término no homogéneo xe^{-t}, en términos de las eigenfunciones ϕ_n. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_n(t) &= \int_0^1 xe^{-t}\phi_n(x)dx = e^{-t}\int_0^1 x\phi_n(x)dx \\ &= c_n e^{-t},\end{aligned}$$

en donde $c_n = \int_0^1 x\phi_n(x)dx$ se da por la ecuación (23). La condición inicial para la (46) es

$$b_n(0) = 0$$

ya que la distribución inicial de temperaturas (45) es cero en todas partes. La solución del problema con valor inicial (46), (48) es

$$\begin{aligned}b_n(t) &= e^{-\lambda_n t}\int_0^t e^{\lambda_n s} c_n e^{-s} ds = c_n e^{-\lambda_n t}\frac{e^{(\lambda_n - 1)t} - 1}{\lambda_n - 1} \\ &= \frac{c_n}{\lambda_n - 1}\left(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}\right).\end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema de conducción del calor (43) a (45) se expresa por

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\left(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}\right)\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}.$$

La solución dada por la ecuación (50) es exacta, pero complicada. Para juzgar si es posible obtener una aproximación satisfactoria a la solución mediante el uso de sólo pocos términos de esta serie, es necesario estimar su rapidez de convergencia. Primero divídase el segundo miembro en dos partes:

$$u(x,t) = 4e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n t}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}$$

Recuérdese por el ejemplo 4 de la sección 11.2, que los eigenvalores λ_n son muy aproximadamente proporcionales a n^2. En la primera serie del segundo miembro de la ecuación (51) todos los factores trigonométricos están acotados cuando $n \to \infty$; por consiguiente, esta serie converge de manera semejante a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ o $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$. De donde, para obtener una excelente aproximación para esta parte de la solución cuando mucho se requieren dos o tres términos. La segunda serie contiene al factor adicional $e^{-\lambda_n t}$, de modo que su convergencia es incluso más rápida para $t > 0$; casi con seguridad, todos los términos después del primero son despreciables.

29. Ejemplo. –

441. Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 228, ejemplo 5.7b

Resolver

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}$$

Solución.- Expresando F(s) de la misma forma que en el apartado anterior, se tiene

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)+1}\cdot\frac{1}{(s^2+1)+1} = G(s).H(s)$$

Para hallar las transformadas inversas de G(s) y H(s) se aplicará la propiedad de traslación, y queda

$$g(x) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}] = e^{-} \quad cosx$$

$$h(x) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}[\frac{1}{se^2nx\,(s+1)+1}] = e^{-}$$

Aplicando el teorema de convolución, se obtiene

$$L^{-1}[G(s).H(s)] = g(x)*h(x) = \int_0^x g(x-v)h(v)dv = \int_0^x e^{-x}cos(x-v)senv\,dv$$

Y teniendo en cuenta que

$$senAcosB = \frac{sen(A+B)+sen(A-B)\;2}{}$$

Entonces

$$\int_0^x e^{-x}cos(x-v)senv\,dv = \int_0^x e^{-x}[\frac{senx+sen(2v-x)}{2}]dv$$

$$e^{-x}\frac{1}{2}[v.senx]_0^x - [\frac{1}{2}.\frac{cos(2v-x)}{2}]_0^x) = \frac{1}{2}e^{-x}xsenx$$

Por tanto

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}e^{-x}xsenx$$

30. Ejemplo. –

442. (Bargueño V. & Alonso M..Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas; Primera edición. Pág 229, ejemplo 5.7b).

Resolver

$$F(s)=\frac{s+1}{(s^2+a)^2}$$

Solución.-

$$F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}=G(s).H(s)$$

Las transformadas inversas de G(s) y H(s) son

$$g(x)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=cos(ax)$$

$$h(x)=L^{-1}[H(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\frac{sen(ax)}{a}$$

Por el teorema de convolución

$$L^{-1}[G(s).H(s)]=g(x)*h(x)=\int_0^x g(x-v)h(v)dv$$

$$=\int_0^x cos(a(x-v))\frac{sen(ax)}{a}dv$$

Utilizando la fórmula trigonométrica (5.5) se tiene

$$\int_0^x e^{-x}cos(a(x-v))\frac{sen(ax)}{a}dv=\int_0^x \left[\frac{sen(ax)+sen(2av-ax)}{2a}\right]dv$$

$$=\frac{1}{2a}\left([v.sen(ax)]_0^x-\left[\frac{cos(2av-ax)}{2a}\right]_0^x\right)=\frac{1}{2a}xsen(ax)$$

Por tanto

$$L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2a}xsen(ax)$$

31. **Ejemplo. –**

443. **(Dennis G. Zill. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelados; Novena edición. Pág 286, ejemplo 5)**

Resolver

$$f(t)=3t^2-e^{-1}-\int_0^t f(r)e^{t-c}dr\ para\ f(t)$$

Solución.- En la integral se identifica $h(t-r)=e^{t-c}$por lo que $h(t)=e^t$. Se toma la transformada de Laplace de cada término. La transformada de Laplace es el producto de

$L\{f(t)\}=F(s)$ y $L\{e^t\}=1/(s-1)$.

$$F(s) = 3 \cdot \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s) \cdot \frac{1}{s-1}$$

Después de resolver la última ecuación para F(s) y realizar la descomposición en fracciones parciales, se encuentra

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

La transformada inversa entonces da

$$f(t) = 3L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$

32. Ejemplo. –

444. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54, ejemplo 1

Resolver

$$Si\ L\{1\} = 1/s, calcule\ L\{t\}.$$

Solución.- Eligiendo f(t)=t se obtiene f’(t)=1 y f(0)=0. Aplicando (1) tenemos

$$L\{1\} = sL\{t\} - f(0),$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{L(t) = \frac{1}{s} L\{1\} = \frac{1}{s^2}}$$

33. Ejemplo. –

445. (Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54-55, ejemplo 2)

Resolver

$$Si\ L\{cost\} = s/(s^2+1), calcule\ L\{sent\}.$$

Solución.- $Sean\ f(t) = cost, f'(t) = sent, f(0) = 1. Por\ (1).$

$$L\{sent\} = \{sL\{cost\} - cos0\}$$

$$= \frac{-s^2}{s^2+1} + 1$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

34. Ejemplo. –

446. (Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 3)

Resolver

$$L\{ktcoskt + senkt\}.$$

Solución.-

$$L\{ktcoskt + senkt\} = L\{\frac{d}{dt}(tsenkt)\}.$$

$$= sL\{tsenkt\}$$

$$= s[-\frac{d}{ds}L(senkt)]$$

$$= s[\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}]$$

35. Ejemplo. –

447. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 4

Calcular

$$L\{\int_0^t e^c sen(t - r)dx\}.$$

Solución. - Con las identificaciones $f(t) = e^c\ y\ g(t) = sent\ y\ aplicando\ (5)$, obtenemos

$$L\{\int_0^t e^t sen(t - r)dr\} = L\{e^t\}.L\{sent\}$$

$$= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

36. Ejemplo. –

448. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 5

Calcule

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\}.$$

Solución.- Sería posible usar factores parciales, pero si

$$F(s)\frac{1}{s-1} \quad y \quad G(s) = \frac{1}{s+4},$$

entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\} = \int_0^t f(r)g(t-r)dr$$

$$= \int_0^t e^{c}e^{-4(t-c)}dr$$

$$= e^{-4t}\int_0^t e^{5t}dr$$

$$= e^{-4t}\frac{1}{5}e^{5t}|_0^t$$

$$= \frac{e^{-4t}}{5}[e^{5t}-1]$$

$$= \frac{1}{5}e^{t} - \frac{1}{5}e^{-4t}$$

Ejercicios extras

37. Ejemplo. –

449. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 310. Ejemplo 3.

Sea $f(t) = e^{ct}, t \geq 0$, en donde c es una constante real diferente de cero; entonces,

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{ct}}{c}\Big|_0^A$$
$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{c}(e^{cA}-1).$$

Se concluye que la integral impropia converge si $c < 0$ y diverge si $c > 0$. Si $c = 0$, entonces el integrando es la unidad y una vez más la integral diverge.

38. Ejemplo. –

450. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 310. Ejemplo 2.

Sea $f(t) = 1/t, t \geq 1$; entonces

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\ln A.$$

Como $\lim_{A\to\infty}\ln A = \infty$, la integral impropia diverge.

39. Ejemplo. –

451. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 311. Ejemplo 3.

Sea $f(t) = t^{-p}, t \geq 1$, en donde p es una constante real y $p \neq 1$, el caso $p = 1$ se consideró en el ejemplo 2 ; entonces

$$\int_1^\infty t^{-p}dt = \lim_{A\to\infty}\int_1^A t^{-p}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1).$$

Cuando $A \to \infty, A^{1-p} \to 0$ si $p > 1$, pero $A^{1-p} \to \infty$ si $p < 1$. De donde, $\int_1^\infty t^p\, dt$ converge para $p > 1$, pero (al incorporar el resultado del ejemplo 2) diverge para $p < 1$. Estos resultados son análogos a los de la serie infinita $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$.

40. Ejemplo. –

452. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 313. Ejemplo 4.

Sea $f(t) = 1, t \geq 0$; entonces

$$f\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s},\ s > 0.$$

41. Ejemplo. –

453. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 313. Ejemplo 5.

Sea $f(t) = e^{at}, t \geq 0$; entonces,

$$\begin{aligned} f\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\ &= \frac{1}{s-a},\ s > a. \end{aligned}$$

42. Ejemplo. –

454. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 307. Ejemplo 3.

Debería practicar comprobando que los dos vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Por el principio de superposición la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

es otra solución del sistema.

43. Ejemplo. –

455. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 308. Ejemplo 4.

En el ejemplo 2 vimos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6}$ son soluciones del sistema (6). Es evidente que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$ puesto que ningún vector es un múltiplo constante del otro. Además, se tiene

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6} \\ -e^{-2t} & 5e^{64} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t.

44. **Ejemplo. –**

456. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 309. Ejemplo 5.**

Del ejemplo 2 sabemos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6}$ son soluciones linealmente independientes de (6) en $(-\infty, \infty)$. Por tanto $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo. La solución general del sistema enel intervalo entonces es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Ejemplo. –

457. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 309. Ejemplo 6.**

Los vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (vea el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

para todos los valores reales de t. Se concluye que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Por lo que la solución general del sistemaenel intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$; es decir,

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

45. **Ejemplo. –**

458. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 309. Ejemplo 6.**

Los vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (vea el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora,

$$W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3)=\begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^{t} & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t+\cos t \end{vmatrix}=e^{t}\neq 0$$

para todos los valores reales de t. Se concluye que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty,\ \infty)$. Por lo que la solución general del sistemaen el intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+c_3\mathbf{X}_3$; es decir,

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t-\operatorname{sen} t \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t}+c_3\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t+\cos t \end{pmatrix}.$$

46. Ejemplo. –

459. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 313. Ejemplo 6.

Sea $f(t)=\operatorname{sen} at, t\geq 0$; entonces

$$f\{\operatorname{sen} at\}=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt,\ s>0.$$

Dado que

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{-st}\operatorname{sen}\ at\,dt,$$

después de integrar por partes se obtiene

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\Big|_0^{A}-\frac{s}{a}\int_0^{A} e^{-st}\cos at\,dt\right] \\ &= \frac{1}{a}-\frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\ at\,dt. \end{aligned}$$

Entonces una segunda integración por partes de

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt \\ &= \frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}F(s). \end{aligned}$$

De donde, al despejar $F(s)$ se tiene

$$F(s)=\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0.$$

47. Ejemplo. –

460. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.08.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x=0,\ x=C_1\cos wt+C_2\operatorname{sen} wt\ \ldots$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1): $\frac{dx}{dt} = -C_1 \operatorname{sen} wt * w + C_2 \cos wt * w$

Hallando la 2 da derivada de (1): $\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1 w^2 \cos wt - C_2 w^2 \operatorname{sen} wt$

Luego: $w^2(1) + (2)$

$$w^2 C_1 \cos wt + w^2 C_2 \operatorname{sen} wt - C_1 w^2 \cos wt - C_2 w^2 \operatorname{sen} wt = 0$$

Por lo tanto, se cumple: $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0$

48. Ejemplo. –

461. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.09.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a) $y = xe^x$,

b) $y = x^2e^x$

Solución:

Para $y = xe^x \ldots (1)$

$$y' = e^x + xe^x \ldots (2)$$
$$y'' = e^x + e^x + xe^x \ldots .$$

Luego: (3) $-2(2) + (1)$:

$$2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + e^x x = 0$$

Por lo tanto, se verifica: $y'' - 2y' + y = 0$

Para $y = x^2e^x \ldots (1)$

$$y' = 2xe^x + x^2e^x \ldots (2)$$
$$y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \ldots$$

Luego: (3) $-2(2) + (1)$:

$$2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 4xe^x - 2x^2e^x + x^2e^x \neq 0$$

Por lo tanto, NO se cumple: $y'' - 2y' + y = 0$

49. Ejemplo. –

462. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 118 y119. Ejemplo 1.

El problema con valores iniciales

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0, y''(1) = 0$$

tiene la solución trivial $y = 0$. Debido a que la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se cumplen las condiciones del teorema 4.1.1. Por tanto $y = 0$ es la única solución en cualquier intervalo que contiene a $x = 1$.

50. Ejemplo. –

463. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 119. Ejemplo 2.

Se debe comprobar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$y'' - 4y = 12x, y(0) = 4, y'(0) = 1.$$

Ahora la ecuación diferencial es lineal; los coeficientes, así como $g(x) = 12x$, son continuos y $a_2(x) = 1 \neq 0$ en algún intervalo I que contenga a $x = 0$. Concluimos del teorema 4.1.1 que la función dada es la única solución en I.

51. Ejemplo. –

464. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.10

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' = (\gamma_1 + \gamma_2)y' + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$y = C_1e^{\gamma_1 x} + C_2e^{\gamma_2 x} \ldots (1)$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1):

$$y' = \gamma_1C_1e^{\gamma_1 x} + \gamma_2C_2e^{\gamma_2 x}$$

Hallando la 2 da derivada de (1):

$$y'' = \gamma_1^2C_1e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2C_2e^{\gamma_2 x}$$

Luego: (3) $-(\gamma_1 + \gamma_2)(2) + \gamma_1\gamma_2(1)$

$$\gamma_1^2C_1e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2C_2e^{\gamma_2 x} - (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1C_1e^{\gamma_1 x} + \gamma_2C_2e^{\gamma_2 x}) + \gamma_1\gamma_2(C_1e^{\gamma_1 x} + C_2e^{\gamma_2 x})$$

$$\gamma_1^2C_1e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2C_2e^{\gamma_2 x} - \gamma_1^2C_1e^{\gamma_1 x} - \gamma_1\gamma_2C_2e^{\gamma_2 x} - \gamma_1\gamma_2C_1e^{\gamma_1 x}$$
$$+\gamma_2{}^2C_2e^{\gamma_2 x}\gamma_1\gamma_2C_2e^{\gamma_2 x} + \gamma_1\gamma_2C_1e^{\gamma_1 x} = 0$$

Por lo tanto, se cumple: $y'' = (\gamma_1 + \gamma_2)y' + \gamma_1\gamma_2 = 0$

52. Ejemplo. –

465. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 180. Ejemplo 2.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\text{sen}\,x \ldots (11)$$

Por analogía con el ejemplo 1 , suponga primero que $Y(x) = A$ sen x, en donde A es una constante por determinar. Al sustituir en (11) y reordenar los términos se obtiene

$$-5A\text{sen}\,x - 3A\cos x = 2\text{sen}\,x. \ldots(12)$$

No existe elección de la constante A que satisfaga la ecuación (12) para toda x, por lo que se concluye que la suposición referente a $Y(x)$ es incorrecta. La aparición del término coseno en (12) sugiere modificar la suposición original para incluir un término cosenoidal en $Y(x)$; es decir,

$$Y(x) = A\operatorname{sen} x + B\cos x$$

en donde deben determinarse A y B. Entonces,

$$Y'(x) = A\cos x - B\operatorname{sen} x, Y''(x) = -A\operatorname{sen} x - B\cos x.$$

Al sustituir estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (11) y agrupar términos se obtiene

$$(-A + 3B - 4A)\operatorname{sen} x + (-B - 3A - 4B)\cos x = 2\operatorname{sen} x \ldots.(13)$$

Para satisfacer la ecuación (13) es necesario hacer corresponder los coeficientes de sen x y cos x de cada miembro de la ecuación; por tanto, A y B deben satisfacer las ecuaciones

$$-5A + 3B = 2, \ -3A - 5B = 0.$$

De donde, $A = -5/17$ y $B = 3/17$, de manera que una solución particular de la ecuación (11) es

$$Y(x) = -\frac{5}{17}\operatorname{sen} x + \frac{3}{17}\cos x$$

53. Ejemplo. –

466. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 180 y 181 Ejemplo 3.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2 \ldots (14)$$

Como el segundo miembro de la ecuación (14) es un polinomio, es natural suponer que Y también es un polinomio del mismo grado o superior. En esta sección se demostrará después que (con ciertas excepciones) basta suponer que Y es un polinomio del mismo grado que el término no homogéneo; por lo tanto, se supone que

$$Y(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Se sigue que

$$Y'(x) = 2Ax + B, \ Y''(x) = 2A$$

Si se sustituyen estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (14) y se agrupan términos, se obtiene

$$-4Ax^2 + (-6A - 4B)x + (2A - 3B - 4C) = 4x^2$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, se encuentra que A, B y C deben satisfacer

$$-4A = 4, \ -6A - 4B = 0, \ 2A - 3B - 4C = 0.$$

Por tanto, $A = -1, B = 3/2$ y $C = -13/8$; de donde, una solución particular de (14) es

$$Y(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

54. Ejemplo. –

467. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 181 Ejemplo 4.

Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x \dots (15)$$

En este caso se supone que $Y(x)$ es el producto de e^x y una combinación lineal de $\cos 2x$ y sen $2x$; es decir,

$$Y(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \operatorname{sen} 2x.$$

En este ejemplo el álgebra es más tediosa, pero se concluye que

$$Y'(x) = (A + 2B)e^x \cos 2x + (-2A + B)e^x \operatorname{sen} 2x$$
$$Y''(x) = (-3A + 4B)e^x \cos 2x + (-4A - 3B)e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (15) se encuentra que A y B deben satisfacer

$$10A + 2B = 8,\ 2A - 10B = 0.$$

De donde, $A = 10/13$ y $B = 2/13$; por consiguiente, una solución particular de (15) es

$$Y(x) = \frac{10}{13} e^x \cos 2x + \frac{2}{13} e^x \operatorname{sen} 2x.$$

55. Ejemplo. –

468. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 182. Ejemplo 5.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2 \operatorname{sen} x - 8e^x \cos 2x \dots (19)$$

Al descomponer el segundo miembro de la ecuación (19), se obtienen las tres ecuaciones

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x},$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} x,$$

y

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x$$

En los ejemplos 1,2 y 4, respectivamente, se han encontrado las soluciones de estas tres ecuaciones. Por lo tanto, una solución particular de (19) es su suma; a saber,

$$Y(x) = -\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{3}{17} \cos x - \frac{5}{17} \operatorname{sen} x + \frac{10}{13} e^x \cos 2x + \frac{2}{13} e^x \operatorname{sen} 2x$$

56. Ejemplo. –

469. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 182 y 183. Ejemplo 6.

Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \dots (20)$$

Procediendo como en el ejemplo 1 , se supone que $Y(x) = Ae^{-x}$. Al sustituir en la ecuación (20), se obtiene

$$(A + 3A - 4A)e^{-x} = e^{-x}. \dots (21)$$

Dado que el coeficiente de e^{-x} del primer miembro de (21) es cero, es imposible resolver esta ecuación para A. Por consiguiente, se concluye que no existe solución de la ecuación (20) con la forma supuesta. Se aclara la razón de este resultado posiblemente inesperado si se resuelve la ecuación homogénea

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \ldots (22)$$

que corresponde a la (20). Las raíces de la ecuación característica asociada son $r_1 = 4$ y $r_2 = -1$, por lo que un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (22) son $y_1(x) = e^{4x}$ y $y_2(x) = e^{-x}$. Ahora se ve que la solución particular supuesta de la ecuación no homogénea (20) es en realidad una solución de la ecuación homogénea (22). Como se vio, la sustitución de esa función en el primer miembro de la ecuación (20) da cero, lo que imposibilita balancear el término diferente de cero del segundo miembro de la (20).

Por lo tanto, para encontrar una solución de (20) se necesita considerar funciones de una forma algo diferente. La función más simple, aparte de la propia e^{-x} que al ser derivada produce un término e^{-x}, es ex^{-x}.Por tanto, podría intentarse con $Y(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Sin embargo, no es necesario el término Be^{-x}, ya que es una solución de la ecuación homogénea correspondiente y no ayuda a resolver la ecuación no homegénea. De donde, se supone que $Y(x) = Axe^{-x}$. Entonces,

$$Y'(x) = (A - Ax)e^{-x},\ Y''(x) = (-2A + Ax)e^{-x}.$$

Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación (20) y se agrupan términos, se encuentra que

$$[(Ax + 3Ax - 4Ax) + (-2A - 3A)]e^{-x} = e^{-x}.$$

Por consiguiente, $A = -1/5$ y una solución particular de (20) es

$$Y(x) = -\frac{1}{5}xe^{-x}$$

57. Ejemplo. –

470. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 142. Ejemplo 2.

Encuentre una solución particular de $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen} 3x$.

SOLUCIÓN

Una primera suposición natural para una solución particular sería A sen $3x$. Pero debido a que las derivadas sucesivas de sen $3x$ producen sen $3xy$cos $3x$, se puede suponer una solución particular que incluye ambos términos:

$$y_p = A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x.$$

Derivando y_p y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial, se obtiene, después de reagrupar,

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\operatorname{sen} 3x = 2\operatorname{sen} 3x$$

O

igual

$$\boxed{-8A-3B}\cos 3x + \boxed{3A-8B}\,\text{sen}\,3x = 0\cos 3x + 2\,\text{sen}\,3x.$$

Del sistema de ecuaciones resultante,

$$-8A-3B=0,\ 3A-8B=2,$$

se obtiene $A=\frac{6}{73}$ y $B=-\frac{16}{73}$ Una solución particular de la ecuación es

$$y_p=\frac{6}{73}\cos 3x-\frac{16}{73}\text{sen}\,3x.$$

58. Ejemplo. –

471. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 33; Ejemplo. 5.2

Determine si la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$ es exacta.

Solución: Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x,y)=y$ y $N(x,y)=-x$. Aquí

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

Que no son iguales, de modo que la ecuación diferencial dada no es exacta.

59. Ejemplo. –

472. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial Mcfraw Hill; Tercera edición; pág. 34; P.R. 5.3

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x+\text{sen}\,y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$$

Solución. Buscamos una función $g(x,y)$ que satisfaga (5.4) y (5.5). Sustituyendo $M(x,y)$ en

(5.4), obtenemos $\frac{\partial y}{\partial x}=x+\text{sen}\,y$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, encontramos que

$$\int \frac{\partial y}{\partial x}dx=\int (x+\text{sen}\,y)dx$$

Obien

$$g(x,y)=\frac{1}{2}x^2+x\,\text{sen}\,y+h(y)\ ....$$

Para hallar $h(y)$, derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial y}{\partial x}=x\cos y+h'(y)$, y luego sustituimos este resultado junto con $N(x,y)=x\cos y-2y$ en (5.5). Asi, hallamos

$$x\cos y+h'(y)=x\cos y-2y \text{ obien } h'(y)=-2y$$

De lo cual se sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo esta $h(y)$ en (1), obtenemos

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x\operatorname{sen} y - y^2 + c_1$$

La solución de la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) como

$$\frac{1}{2}x^2 + x sen\, y - y^2 = c_2 \quad (c_2 = c - c_1)$$

60. Ejemplo. –

473. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 34; P.R. 5.5

Resuelva

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

Solución. Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, obtenemos

$$(2 + xe^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$$

Aqui, $M(x, y) = 2 + ye^{xy}$ y $N(x, y) = xe^{xy} - 2y$ y, pues $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{ky}$, la ecuación diferencial es exacta. Sustituyendo $M(x, y)$ en (5.4), encontramos que $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 + ye^{xy}$; integrando luego con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{\partial y}{\partial x} dx = \int [2 + ye^{xy}]dx$$

O bien

$$g(x, y) = 2x + e^{xy} + h(y)$$

Para hallar $h(y)$, primero derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial y}{\partial x} = xe^{xy} + h'(y)$; luego sustituimos este resultado junto con $N(x, y)$ en (5.5) para obtener

$$xe^{xy} + h'(y) = xe^{xy} - 2y \text{ obien } h'(y) = -2y$$

Luego sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo está $h(y)$ en (2), obtenemos

$$g(x, y) = 2x + e^{xy} - y^2 + c_1$$

La solución a la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) asi

$$2x + e^{xy} - y^2 = c_2 \ (c_2 = c - c_1)$$

61. Ejemplo. –

474. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 125. Ejemplo 7.

Las funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y^n - 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección las soluciones son linealmente independientes en el eje x. Este hecho se corrobora al observar que el Wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = [e^{3x} \ e^{-3x} \ 3e^{3x} \ - 3e^{-3x}] = -6 \neq 0$$

para toda x. Se concluye que yl y y2 forman un conjunto fundamental de soluciones y por tanto, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo.

62. Ejemplo. –

475. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 125. Ejemplo 8.

La función $y = 4\operatorname{senh} 3x - 5e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo 7. (Compruebe esto.) Aplicando el teorema 4.1.5, debe ser posible obtener esta solución a partir de la solución general $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$. Observe que si se elige $c_1 = 2$y $c_2 = -7$, entonces $y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$ puede rescribirse como

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

Esta última expresión se reconoce como $y = 4\operatorname{senh} 3x - 5e^{-3x}$.

63. Ejemplo. –

476. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 125. Ejemplo 9.

Las funciones $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ satisfacen la ecuación de tercer orden $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Puesto que

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de x, las funciones y_1, y_2 y y_3 forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Se concluye que $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo.

64. Ejemplo. –

477. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 37; P.R. 5.14

Determine si $\vdash 1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$.

Solución. En el problema 5.3 se demostró que la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicándola por $-1/x^2$, obtenemos

$$-\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) = 0 \text{ obien } -\frac{y}{x}dx + \frac{1}{x}dy = 0 \ldots\ldots$$

La ecuación (1) tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x, y) = -y/x^2y$ $N(x, y) = 1/x$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Asi que (1) es exacta, lo que implica que $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial original.

65. Ejemplo. –

478. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 37; P.R. 5.15

Resuelva

$$ydx - xdy = 0$$

Solución. Usando los resultados del problema 5.14 podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

La cual es exacta. La ecuación (1) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones (5.4) a la (5.6). De manera alternativa, de la tabla 5-1 vemos que (1) se puede reescribir como $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$. Por lo tanto, por integración directa, tenemos $\frac{y}{x} = c$, o $y = cx$, como la solución.

66. Ejemplo. –

479. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 37; P.R. 5.16

Determine si $-1/(xy)$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial definida en el problema 5.14

Solución. Multiplicando la ecuación diferencial $ydx - xdy = 0$ por $-1(xy)$, obtenemos

$$-\frac{1}{xy}(ydx - xdy) = 0 \text{ obien } -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \dots (1)$$

La ecuación (1) tiene la forma de la ecuación (5.1) con $M(x, y) = -\frac{1}{x}yN(x, y) = 1/y$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

De modo que (1) es exacta, lo cual implica que $-1/xy$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial original.

67. Ejemplo. –

480. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 38; P.R. 5.17

Resuelva el problema 5.15 usando el factor de integración dado en el problema 5.16

Solución. Usando los resultados del problema 5.16, podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{xy} = 0 \dots \dots (1)$$

La cual es exacta. La ecuación (1) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6). De manera altemativa, vemos que la tabla 1 5 que (1) se puede reescribir como $d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0$. Luego, por integración directa, $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = c_1$. Tomando la exponencial de ambos lados, encontramos que $\frac{y}{x} = e^{c_1}$, o finalmente $y = cx$ $(c = e^{c_1})$.

68. Ejemplo. –

481. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 38; P.R. 5.18

Resuelva $(y^2 - y)dx + dy = 0.$

Solución. Esta ecuación diferencial no es exacta y ningín factor de integración es inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que, si los términos se agrupan estratégicamente, la ecuación diferencial se puede volver a escribir como

$$-(ydx - xdy) + y^2dx = 0$$

El grupo de términos entre paréntesis tiene muchos factores de integración (véase tabla 5-1). Tratando cada factor de integración en forma separada, encontramos que el único que hace que toda la ecuación sea exacta es $I(x,\ y) = 1/y^2$. Utilizando este factor de integración, podemos reescribir (1) como

$$-\frac{ydx - xdy}{y^2} + 1dx = 0$$

Dado que (2) es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6). Alternativamente, vemos la tabla 8-1 que (2) se puede volver a escribir como $-d\left(\frac{x}{y}\right) + 1dx = 0$, o como $d\left(\frac{x}{y}\right) = 1dx$. Integrando, obtenemos la solución

$$\frac{x}{y} = x + c \text{ obien } y = \frac{x}{x + c}$$

69. Ejemplo. -

482. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.1. Una ED homogénea tiene lo forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Teorema 1: Una ED homogénea se soluciona, si $u = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow_{j1})2yy' = 3y - 4x + 3xy'$$

$$y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}, x\mu = v \rightarrow (\mu x)' = y' \rightarrow y' = \mu + \mu' x$$

Solución

Sustituyendo en y^r :

$$y' = \mu + \mu' x = \frac{3xv - 4}{2xu - 3} + \mu' x = \frac{-2\mu^2 + 6\mu - 4}{2\mu - 3}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2u-3}{-2u^2+6u-4} du \, \omega \ln|x| + \ln c = -\frac{1}{2} \ln \left| u^2 \cdot 3v - 2 \right|$$

Devolviendo:

$$\frac{1}{c^2x^2} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{3y}{x} + 2$$

$$\therefore y^2 - 3xy + 2x^2 = c$$

70. Ejemplo. –

483. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.2. $y' - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

Solución:

Como $f(x,y) = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}, y = xu \rightarrow y' = u + u'x$

$$y' = u + u'x = \frac{\chi u + \sqrt{(x)^2 - x^2}}{x} \quad \rightarrow u + u'x = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\mu^2 - 1}} = \int \frac{dx}{|x} \rightarrow \text{Ln}\,|\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}| = \text{Lm}\,|x| + \text{Ln}\,C$$

$$e^{\text{Ln}|\mu+\sqrt{\mu^2-1}|} = e^{\text{Lm}\,|x|} \rightarrow |\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}| = xc$$

Devolviendo las bases, se tiene:

$$\left|\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}\right| = xc \rightarrow y = \frac{1 + x^2c}{2c}$$

71. Ejemplo. –

484. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap2.3. $x^2(y' + 4) - y(x + 5y - xy')y' = 0$

Solución:

$$\text{Despejamos } y' = f(x,y) = \frac{4x^2 - xy + y^2}{xy - x^2 - 4y^2}, y = ux \rightarrow y' = u + u'x$$

$$y' = u + u'x = \frac{4x^2 - x^2u + \mu^2x^2}{x^2\mu - x^2 - 4x^2\mu^2} \rightarrow \mu + \mu'x = \frac{4 - u - u^2}{-1 + u - 4x^2}$$

$$xu' = \frac{-4(1 - u^3)}{1 - \mu + 4^2} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-4(1 - u^3)}{1 - u + 4x^2}$$

$$\frac{-1}{4}\int \frac{1 - u - u^2}{(1 + \mu)(1 - \mu + \mu^2)}\,du - \frac{1}{4}\int \frac{3u^2}{1 + u^3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-\ln|u + 1|}{4} - \frac{dn|\mu^3 + 1|}{4} = \text{In}\,|x| + \text{In}\,|C|$$

$$1 + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x} + \frac{y^4}{x^4} = \frac{1}{x^4C^4}(x + y)(x^3 + y^3) = C$$

72. Ejemplo. –

485. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2

Cap.2.4. $y' = \frac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2}$

Solución:

$f(x,y) = y' = \frac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2}$, es homogenea

$$y = xu \rightarrow y' = u + u'x$$

Sustituyendo: $f(x,y) = y' = v + v'x = \dfrac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2} = \dfrac{x^2(-3v^2-v+4)}{x^2(v^2-2v+5)}$

Despejando:

$$u'x = \frac{u^2+4v-u^3-4}{u^2+2v-5} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{u^2+2v-5}{u^3-u^2-4v+4}\,du$$

$$\ln|x| + \ln|c| = \frac{2}{3}\ln(u-1) + \frac{3}{4}\ln(u-2) - \frac{5}{12}\ln(u+2)$$

Simplificando y devolviendo base:

$$\frac{c}{x} = \sqrt{\frac{\frac{(y-x)^8(y-2x)^9}{x^8}}{\frac{(y+2x)^5}{x^5}}} \rightarrow (y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5$$

73. Ejemplo. –

486. BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica. CAP. 2.

Cap 2.5. $y' = \frac{2}{3}y + \dfrac{2y^3}{3(3x^2-y^2)}$

Solución:

$f(x,y) = y' = \frac{2}{3}y + \dfrac{2y^3}{3(3x^2-y^2)}$ es homogénea

$$y = ux \rightarrow y' = u + u'x$$

Sustituyendo:

$$y' = u + u'x = \frac{2}{3}y + \frac{2y^3}{3(3x^2-y^2)} = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$$

$$u'x = \frac{2u+u^3-3u}{3-u^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3-u^2}{u^3-u}\,du \rightarrow |x| + \ln|c| = -\int \frac{3}{v}du + \int \frac{1}{u-1}du + \int \frac{1}{v+1}dv$$

$$\text{In}\,|xc| = -3 \text{ in } |u| + \text{In}\,|v-1| + \text{In}\,|v+1|$$

Devolviendo a su base y simplificando:

$$cx = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{y^3}{x^3}}$$

Entonces: $cy^3 = y^2 - x^2$

74. Ejemplo. –

487. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 143. Ejemplo 3.

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.

SOLUCIÓN

Paso 1. Primero, se encuentra que la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$ es $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Paso 2. A continuación, la presencia de $4x - 5$ en $g(x)$ indica que la solución particular incluye un polinomio lineal. Además, debido a que la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, se supone también que la solución particular incluye tanto a xe^{2x} como a e^{2x}. En otras palabras, g es la suma de dos clases básicas de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \text{polinomio} + \text{exponenciales.}$$

Por lo que, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.1.7) indica que se busca una solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituyendo

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación (3) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}.$$

De esta identidad obtenemos las cuatro expresiones

$$-3A = 4,\ -2A - 3B = -5,\ -3C = 6,\ 2C - 3E = 0.$$

La última ecuación en este sistema es resultado de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el miembro derecho de (4) es cero. Resolviendo, se encuentra que $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$, $C = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$

75. Ejemplo. –

488. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 143 y 144. Ejemplo 4.

Encuentre una solución particular de $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

SOLUCIÓN

Derivando e^x no se obtienen nuevas funciones. Así, si se procede como se hizo en los ejemplos anteriores, se puede suponer razonablemente que una solución particular de la forma $y_p = Ae^x$. Pero sustituir esta expresión en la ecuación diferencial da como resultado la expresión contradictoria $0 = 8e^x$, por lo que claramente se hizo la conjetura equivocada para y_{p^*}.

La dificultad aquí es evidente al examinar la función complementaria $y_c = c_1e^x +$ solución de la ecuación diferencial homogénea asociada y un múltiplo constante Ae^x cuando se sustituye en la ecuación diferencial necesariamente da cero.

¿Entonces cuál debe ser la forma de y_p ? Inspirados en el caso II de la sección 4.3, vemos que sí se puede encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x.$$

Sustituyendo $y_p' = Axe^x + Ae^x$ y $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial y simplificando, se obtiene

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

De la última igualdad se ve que el valor de A ahora se determina como $A = -\frac{8}{3}$. Por tanto, una solución particular de la ecuación dada es $y_p = -\frac{8}{3}xe^x$.

76. Ejemplo. –

489. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 146. Ejemplo 8.

Resuelva $y'' + y = 4x + 10\operatorname{sen} x, y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2$.

SOLUCIÓN

La solución de la ecuación homogénea asociada $y'' + y = 0$ es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Debido a que $g(x) = 4x + 10\operatorname{sen} x$ es la suma de un polinomio lineal y una función seno, la suposición normal para y_p, de las entradas 2 y 5 de la tabla 4.1, sería la suma de $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = C\cos x + E\operatorname{sen} x$:

$$y_p = Ax + B + C\cos x + E\operatorname{sen} x. \quad \ldots(5)$$

Pero hay una duplicación obvia de los términos cos x y sen x en esta forma supuesta y dos términos de la función complementaria. Esta duplicación se elimina simplemente multiplicando y_{p_2} por x. En lugar de (5) ahora se usa

$$y_p = Ax + B + Cx\cos x + Ex\operatorname{sen} x \ldots(6)$$

Derivando esta expresión y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y_p'' + y_p = Ax + B - 2C\operatorname{sen} x + 2E\cos x = 4x + 10\operatorname{sen} x,$$

y por tanto $A = 4, B = 0, -2C = 10$, y $2E = 0$. Las soluciones del sistema son inmediatas: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$, y $E = 0$. Por tanto de la ecuación (6) se obtiene $y_p = 4x - 5x\cos x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + 4x - 5x\cos x.$$

Ahora se aplican las condiciones iniciales prescritas a la solución general de la ecuación. Primero, $y(\pi) = c_1\cos\pi + c_2\operatorname{sen}\pi + 4\pi - 5\pi\cos\pi = 0$ produce $c_1 = 9\pi$ puesto que cos $\pi = -1$ y sen $\pi = 0$. Ahora, de la derivada

$$y' = -9\pi\operatorname{sen} x + c_2\cos x + 4 + 5x\operatorname{sen} x - 5\cos x$$

Y $\qquad y'(\pi) = -9\pi\operatorname{sen}\pi + c_2\cos\pi + 4 + 5\pi\operatorname{sen}\pi - 5\cos\pi = 2$

encontramos $c_2 = 7$. La solución del problema con valores iniciales es entonces

$$y = 9\pi\cos x + 7\operatorname{sen} x + 4x - 5x\cos x$$

77. Ejemplo. –

490. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 146 y 147. Ejemplo 9.**

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

SOLUCIÓN

La función complementaria es $y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$. Y así, con base en los elementos 3 y 7 de la tabla 4.1, la suposición usual para una solución particular sería

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p2}}$$

La inspección de estas funciones muestra que un término en y_{p2} se duplica en y_e. Si multiplicamos y_{p_2} por x, se nota que el término xe^{3x} aún es parte de y_c. Pero multiplicando y_{P_1} por x^2 se eliminan las duplicaciones. Así la forma operativa de una solución particular es

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2e^{3x}.$$

Derivando esta última forma y sustituyendo en la ecuación diferencial, agrupando términos semejantes se obtiene

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$$

De esta identidad se tiene que $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$ y $E = -6$. Por tanto, la solución general $y = y_c + y_p$ es $y = c_1e^{3\pi} + c_2xe^{3\pi} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3\pi}$.

78. Ejemplo. –

491. **Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 147. Ejemplo 10.**

Resuelva $y''' + y'' = e^x\cos x$.

SOLUCIÓN

De la ecuación característica $m^3 + m^2 = 0$ encontramos que $m_1 = m_2 = 0$ y $m_3 = -1$. Así la función complementaria de la ecuación es $y_c = c_1 + c_zx + c_3e^{-x}$. Con $g(x) = e^x\cos x$, se ve de la entrada 10 de la tabla 4.1 que se debe suponer

$$y_p = Ae^x\cos x + Be^x\operatorname{sen} x$$

Debido a que no hay funciones en y_p que dupliquen las funciones de la solución complementaria, procedemos de la manera usual. De

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x\cos x + (-4A - 2B)e^x\operatorname{sen} x = e^x\cos x$$

se obtiene $-2A + 4B = 1$y $-4A - 2B = 0$. De este sistema se obtiene $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$, así que una solución particular es $y_p = -\frac{1}{10}e^x\cos x + \frac{1}{5}e^x\operatorname{sen} x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10} e^{x} \cos x + \frac{1}{5} e^{x} \operatorname{sen} x.$$

79. Ejemplo. –

492. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.11

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

$$(x - 2y)y' = 2x - y$$

$$x^2 - xy + y^2 = C^2$$

Solución:

Acomodando (1):

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Derivando (2):

$$\frac{d(x^2 - xy + y^2)}{dx} = \frac{dc^2}{dx}$$

$$2x\frac{dx}{dx} - \frac{d(xy)}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

La relación queda demostrada ya que se cumple (3) = (4)

80. Ejemplo. –

493. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.12.

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

$$(x - y + 1)y' = 1$$

$$y = x + Ce^y$$

Solución:

Acomodando (1):

$$y' = \frac{1}{x - y + 1}$$

Reemplazando y:

$$y' = \frac{1}{x - x - Ce^y + 1}$$

$$y' = \frac{1}{1 - Ce^y} \ldots (3)$$

Derivando (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x + Ce^y)}{dx}$$
$$y' = 1 + Ce^y * y'$$
$$y' - y'Ce^y = 1$$
$$y'(1 - Ce^y) = 1$$
$$y' = \frac{1}{1 - Ce^y} \text{ ... } (4)$$

La relación queda demostrada ya que se cumple que (3) = (4)

81. Ejemplo. –

494. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 257. Ejemplo 1.

Evalúe $f\{1\}$.

SOLUCIÓN De (2),

$$f\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}dt$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s}$$

siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-ab} \to 0$ conforme $b \to \infty$. La integral diverge para $s < 0$.

82. Ejemplo. –

495. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 257. Ejemplo 2.

Evalúe $f\{t\}$.

SOLUCIÓN

De la definición 7.1.1 se tiene $f\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-s}tdt$. Al integrar por partes y usando $\lim_{t\to\infty} te^{-x} = 0, s > 0$, junto con el resultado del ejemplo 1 , se obtiene

$$f\{t\} = \frac{-te^{-N}}{s}\Big|_0^{-} + \frac{1}{s}\int_0^{-} e^{-st}dt = \frac{1}{s}f\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

83. Ejemplo. –

496. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 257. Ejemplo 3.

Evalúe $f\{e^{-3t}\}$.

SOLUCIÓN

De la definición 7.1.1 se tiene

$$f\{e^{-3t}\} = \int_0^{\infty} e^{-n}e^{-3t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(x+3)t}dt$$
$$= \frac{-e^{-(x+3)}}{s+3}\Big|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{s+3}, \; s > -3.$$

El resultado se deduce del hecho de que $\lim_{t\to-} e^{-(s+3)k} = 0$ para $s + 3 > 00\ s > -3$.

84. Ejemplo. –

497. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 4. Prob. 1.4.

¿Es $y(x) = 1$ una solución de $y'' + 2y' + y = x$?

Solución:

A partir de $y(x) = 1$, tenemos que $y'(x) = 0$ y $y''(x) = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \neq x$$

De este modo, $y(x) = 1$ no es solución.

85. Ejemplo. –

498. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; píg. 4. Prob. 1.5

Demuestre que $y = \ln x$ es una solución de $xy'' + y' = 0$ en $l = (0, \infty)$ pero no es una solución en $l = (-\infty, \infty)$.

Solución: En $(0, \infty)$ tenemos $y' = 1/x$ y $y'' = -\frac{1}{x^2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$xy'' + y' = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = 0$$

De este modo, $y = \ln x$ es una solución en $(0, \infty)$. Observe que $y = \ln x$ no podria ser una solución en $(-\infty, \infty)$, pues el logaritmo no está definido para los números negativos y para el cero.

86. Ejemplo. –

499. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 4. Prob. 1.6.

Demuestre que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución de $y' + 2xy^2 = 0$ en $l = (-1,1)$ pero no en cualquier intervalo más grande que contenga a l.

Solución:

En $(-1,1)$, $y = 1/(x^2 - 1)$ y su derivada $y' = -2x/(x^2 - 1)^2$ son funciones bien definidas. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, tenemos

$$y' + 2xy^2 = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} + 2x\left[\frac{1}{x^2 - 1}\right]^2 = 0$$

De este modo, $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución en $l = (-1,1)$. Note, sin embargo, que $1/(x^2 - 1)$ no está definido en $x = \pm 1$, y por lo tanto no podria ser una solución en ningin intervalo que contenga cualquiera de estos dos puntos.

87. Ejemplo. –

500. C. Henry Edwards, David E. Penney; Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera; Editorial Pearson; Cuarta edición; pág. 5. Ejemplo 7

Si C es una constante y $y(x) = 1/(C - x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(C - x)^2} = y^2$$

Si $x \neq C$. Entonces:

$$y(x) = \frac{1}{C - x} \quad \ldots.(8)$$

Define una solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ldots.$$

En cualquier intervalo de números reales que no contenga el punto $x = C$. En realidad, la ecuación (8) define una familia de soluciones de un parámetro $\frac{dy}{dx} = y^2$, una para cada valor de la constante arbitraria o "parámetro" C. Con $C = 1$ obtenemos la solución particular

88. Ejemplo. –

501. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 337. Ejemplo 3

Hallar la curva de la familia

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Que tiene $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

Solución

Tenemos:

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}.$$

Poniendo $x = 0$, en las formulas (6) y (7), tenemos:

$$1 = C_1 + C_2, -2 = C_1 + C_2$$

De donde:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 1$$

Y, por consiguiente:

$$y = e^{-2x}$$

89. Ejemplo. –

502. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 2707.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' + y = 0,\ y = 3\operatorname{sen} x - 4\cos x \ldots$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1): $y' = 3\cos x + 4\operatorname{sen} x$

Hallando la 2 da derivada de (1): $y'' = -3\operatorname{sen} x + 4\cos x \ldots (2)$

Luego: (1) +(2)

$$3\operatorname{sen} x - 4\cos x - 3\operatorname{sen} x + 4\cos x = 0$$

Se cumple:

$$y'' + y = 0$$

90. Ejemplo. –

503. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.08.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0,\ x = C_1\cos wt + C_2\operatorname{sen} wt \ldots$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1): $\frac{dx}{dt} = -C_1 \operatorname{sen} wt * w + C_2 \cos wt * w$

Hallando la 2 da derivada de (1): $\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1 w^2\cos wt - C_2 w^2\operatorname{sen} wt$

Luego: $w^2(1) + (2)$

$$w^2C_1\cos wt + w^2C_2\operatorname{sen} wt - C_1w^2\cos wt - C_2w^2\operatorname{sen} wt = 0$$

Por lo tanto, se cumple: $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$

91. Ejemplo. –

504. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.09.

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

c) $y = xe^x$,

d) $y = x^2e^x$

Solución:

Para $y = xe^x \ldots (1)$

$$y' = e^x + xe^x \ldots (2)$$
$$y'' = e^x + e^x + xe^x \ldots.$$

Luego: $(3) - 2(2) + (1)$:

$$2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + e^xx = 0$$

Por lo tanto, se verifica: $y'' - 2y' + y = 0$

Para $y = x^2e^x \ldots (1)$

$$y' = 2xe^x + x^2e^x \ldots (2)$$
$$y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \ldots$$

Luego: $(3) - 2(2) + (1)$:

$$2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 4xe^x - 2x^2e^x + x^2e^x \neq 0$$

Por lo tanto, NO se cumple: $y'' - 2y' + y = 0$

92. Ejemplo. –

505. **A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 49 - 50; Ejemplo 1**

Resolver la ecuación $y'=2xy=2xe-x2\ldots.(5)$

Solución.

Apliquemos el método de variación de la constante. Consideremos la ecuación homogénea

$y'+2xy=0$

Correspondiente a la ecuación no homogénea dada. Esta es una ecuación

con variables separables. Su solución general tiene la forma

$y=c(x)e-x2\ldots.(6)$

Donde $c(x)$ es una función incógnita de x.

Poniendo (6) en (5), obtenemos $c'(x)=2x$. De donde $c(x)=x2+x$. Resumiendo,

la solución general de la ecuación no homogénea es $y=(x2+c)e-x2$,

Donde c es la constante de integración.

93. Ejemplo. –

506. **(Dennis G. Zill. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelados; Novena edición. Pág 286, ejemplo 5)**

Resolver

$$f(t) = 3t^2 - e^{-1} - \int_0^t f(r)e^{t-c}dr \; para \; f(t)$$

Solución.- En la integral se identifica $h(t-r) = e^{t-c}$por lo que $h(t) = e^t$. Se toma la transformada de Laplace de cada término. La transformada de Laplace es el producto de

$L\{f(t)\} = F(s)$ y $L\{e^t\} = 1/(s-1)$.

$$F(s) = 3.\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s).\frac{1}{s-1}$$

Después de resolver la última ecuación para F(s) y realizar la

descomposición en fracciones parciales, se encuentra

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

La transformada inversa entonces da

$$f(t) = 3L^{-1}\{\frac{2!}{s^3}\} - L^{-1}\{\frac{3!}{s^4}\} + L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$

94. Ejemplo. –

507. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54, ejemplo 1

Resolver

$$Si\ L\{1\} = 1/s, calcule\ L\{t\}.$$

Solución.- Eligiendo f(t)=t se obtiene f'(t)=1 y f(0)=0. Aplicando (1) tenemos

$$L\{1\} = sL\{t\} - f(0),$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{L(t) = \frac{1}{s}L\{1\} = \frac{1}{s^2}}$$

95. Ejemplo. –

508. (Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 54-55, ejemplo 2)

Resolver

$$Si\ L\{cost\} = s/(s^2 + 1), calcule\ L\{sent\}.$$

Solución.- $Sean\ f(t) = cost, f'(t) = sent, f(0) = 1. Por\ (1).$

$$L\{sent\} = \{sL\{cost\} - cos0\}$$

$$= \frac{-s^2}{s^2+1} + 1$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

96. Ejemplo. –

509. (Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 3)

Resolver

$$L\{ktcoskt + senkt\}.$$

Solución.-

$$L\{ktcoskt + senkt\} = L\{\frac{d}{dt}(tsenkt)\}.$$

$$= sL\{tsenkt\}$$

$$= s[-\frac{d}{ds}L(senkt)]$$

$$= s[\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}]$$

97. Ejemplo. –

510. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 4

Calcular

$$L\{\int_0^t e^c sen(t - r)dx\}.$$

Solución. - Con las identificaciones $f(t) = e^c$ y $g(t) = sent$ y $aplicando$ (5), obtenemos

$$L\{\int_0^t e^t sen(t - r)dr\} = L\{e^t\}.L\{sent\}$$

$$= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

98. Ejemplo. –

511. Toppo P. & Zavala R. Problemario de ecuaciones diferenciales; Primera edición. Pág 55, ejemplo 5

Calcule

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\}.$$

Solución.- Sería posible usar factores parciales, pero si

$$F(s)\frac{1}{s-1} \quad y \quad G(s) = \frac{1}{s+4},$$

entonces

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\} = \int_0^t f(r)g(t-r)dr$$

$$= \int_0^t e^c e^{-4(t-c)}dr$$

$$= e^{-4t}\int_0^t e^{5t}dr$$

$$= e^{-4t}\,\frac{1}{5}e^{5t}\Big|_0^t$$

$$= \frac{e^{-4t}}{5}\left[e^{5t} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{5}\,e - \frac{1}{5}\,e^{-4t}$$

99. Ejemplo. –

512. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 50-51; Ejemplo 2

Resolver la ecuación $dydx=1xcos\ y+sen\ 2y$.

Solución. La ecuación dada es lineal, considerando x como función de y: $dxdy-x\cos y=sen$

$2y$….(7)

Buscamos la solución general de la ecuación en la forma $x=u(y).v(y)$. Se tiene

$dxdy=vdudv+udvdy$.

Sustituyendo x y $dxdy$ en ecuación (7), obtenemos $vdudy+u(dvdu-v\ cosy)=sen$

$2y$. Hallamos $v(y)$ de la condición $dvdy-v\cos y=0$.

Tomamos cualquier solución particular (no trivial) de esta ecuación, por ejemplo

$v(y)=eseny$. Entonces, $esenydudy=sen2y$.

De donde $u=\int e-senvsen2ydy=-2e-seny(1+seny)+c$.

Por consiguiente, la solución general es $x=ceseny-2seny-2$.

100. Ejemplo. –

513. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko; Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Editorial MIR; Pág. 52; Ejemplo 3

Resolver la ecuación de Bernoulli: $xy'+y=y2\ln x$.

Solución. Hagamos $y=u(x)v(x)$. Tendremos $xvy'+u(xv'+v)=u2v2\ln x$.

Hallamos la función $v(x)$ como solución particular de la ecuación $xv'+v=0$.

Resuelta, $v(x)=1x$. Entonces, $u'=u2x2\ln x$. Separando las variables e

integrando, obtenemos

$-1u=\int \ln xx2dx=-\ln xx-1x-$

c, O sea, $u=x1+cx+\ln x$.

La solución general de la ecuación es: $y=11+cx+lnx$.

101. Ejemplo. –

514. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.1

Encuentre un factor de integración para $y'-3y=6$.

Solución: La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con

$p(x)=-3$ y $q(x)=6$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx=\int -3dx=-3x$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e\int p(x)dx=e-3x$…..(1)

102. Ejemplo. –

515. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.2

Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución.

Multiplicando la ecuación por el factor de integración definido por (1) del problema 6.1, obtenemos

$e{-}3xy'{-}3e{-}3xy{=}6e{-}3x$ $o\ bien$ $ddx(ye{-}3x){=}6e{-}3x$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos $\int ddx(ye{-}3x)dx{=}\int 6e{-}3xdx$ $ye{-}3x{=}{-}2e{-}3x{+}c$ $y{=}ce{-}3x{-}2$

103. Ejemplo. –

516. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 272. Ejemplo 1.

Resolver

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0.$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$ da

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

De donde, $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$, de modo que

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1},\ x > 0.$$

104. Ejemplo. –

517. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 273. Ejemplo 2.

Resolver

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0. \dots (12)$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$ da

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

De donde, $r_1 = r_2 = -2$y

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2\ln x),\ x > 0 \dots (13).$$

105. Ejemplo. –

518. William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición. Página 274. Ejemplo 3.

Resolver

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$, da

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0.$$

De donde, $r = \pm i$ y la solución general es

$$y = c_1\cos(\ln x) + c_2\mathrm{sen}(\ln x),\ x > 0.$$

106. Ejemplo. –

519. Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con APLICACIONES DE MODELADO. Novena edición. Página 294 y 295. Ejemplo 1.

Resuelva $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi)$ sujeta a

a) $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

b) $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

Dos problemas con valores iniciales podrian servir como modelos para describir el movimiento de una masa en un resorte que se mueve en un medio en el cual el amortiguamientoes despreciable. En $t = 2\pi$ la masa recibe un golpe preciso. En a) la masa se libera a partir del reposo una unidad abajo de la posición de equilibrio. En b) la masa está en reposo en la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

a) De (3) la transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2wI}\ 0\ Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2ss}}{s^2+1}.$$

Con la forma inversa del segundo teorema de traslación, se encuentra

$$y(t) = \cos t + 4\operatorname{sen}(t - 2\pi)qu(t - 2\pi).$$

Puesto que $\operatorname{sen}(t - 2\pi) = \operatorname{sen} t$, la solución anterior se puede escribir como

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos t + 4\operatorname{sen} t, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

En la figura 7.5 .3 se ve de la gráfica de (5) que la masa presenta movimiento armónico simple hasta que es golpeada en $t = 2\pi$. La influencia del impulso unitario es incrementar la amplitud de vibración a $\sqrt{17}$ para $t > 2\pi$.

b) En este caso la transformada de la ecuación es simplemente

$$Y(s) = \frac{4e^{-2rs}}{s^2+1}$$

y así

$$\begin{aligned} y(t) &= 4\operatorname{sen}(t - 2\pi)t(t - 2\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 4\operatorname{sen} t, & t \ge 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

La gráfica de (6) de la figura 7.5.4 muestra, como se esperaria de las condiciones iniciales, que la masa no exhibe movimiento hasta que es golpeada en $t = 2\pi$.

107. Ejemplo. –

520. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 43; P.R. 6.3

Encuentre un factor de integración para $y' - 2xy = x$.

Solución. La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (6.1), con $p(x) = -2x$ y $q(x) = x$, y es lineal. Aquí $\int p(x)dx = \int(-2x)dx = -x2$

De modo que (6.2) se convierte en $I(x)=e∫p(x)dx=e−x2$……(1)

108. Ejemplo. –

521. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.10

Averiguar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

$$y'' = (\gamma_1 + \gamma_2)y' + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$y = C_1e^{\gamma_1 x} + C_2e^{\gamma_2 x} \ldots (1)$$

Solución:

Hallando la 1ra derivada de (1):

$$y' = \gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x}$$

Hallando la 2 da derivada de (1):

$$y'' = \gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x}$$

Luego: (3) $-(\gamma_1 + \gamma_2)(2) + \gamma_1\gamma_2(1)$

$$\gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x} - (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x}) + \gamma_1\gamma_2(C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x})$$
$$\gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 C_2 e^{\gamma_2 x} - \gamma_1^2 C_1 e^{\gamma_1 x} - \gamma_1\gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x} - \gamma_1\gamma_2 C_1 e^{\gamma_1 x}$$
$$+\gamma_2{}^2 C_2 e^{\gamma_2 x}\gamma_1\gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 x} + \gamma_1\gamma_2 C_1 e^{\gamma_1 x} = 0$$

Por lo tanto, se cumple: $y'' = (\gamma_1 + \gamma_2)y' + \gamma_1\gamma_2 = 0$

109. Ejemplo. –

522. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.11

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

$$(x - 2y)y' = 2x - y$$
$$x^2 - xy + y^2 = C^2$$

Solución:

Acomodando (1):

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Derivando (2):

$$\frac{d(x^2 - xy + y^2)}{dx} = \frac{dc^2}{dx}$$
$$2x\frac{dx}{dx} - \frac{d(xy)}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$
$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

La relación queda demostrada ya que se cumple (3) = (4)

110. Ejemplo. –

523. Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición pág. 338. Prob. 27.12.

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

$$(x - y + 1)y' = 1$$

$$y = x + Ce^{y}$$

Solución:

Acomodando (1):

$$y' = \frac{1}{x - y + 1}$$

Reemplazando y:

$$y' = \frac{1}{x - x - Ce^{y} + 1}$$

$$y' = \frac{1}{1 - Ce^{y}} \; \dots (3)$$

Derivando (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x + Ce^{y})}{dx}$$

$$y' = 1 + Ce^{y} * y'$$

$$y' - y'Ce^{y} = 1$$

$$y'(1 - Ce^{y}) = 1$$

$$y' = \frac{1}{1 - Ce^{y}} \; \dots (4)$$

La relación queda demostrada ya que se cumple que (3) = (4)

111. Ejemplo. –

524. Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición; pág. 4. Prob. 1.4.

¿Es $y(x) = 1$ una solución de $y'' + 2y' + y = x$?

Solución:

A partir de $y(x) = 1$, tenemos que $y'(x) = 0$ y $y''(x) = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \neq x$$

De este modo, $y(x) = 1$ no es solución.

Modelación matemática y Análisis por compartimentos

525. X)Nagle K., Saff E. & Snider A. (2005) Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. Cuarta Edición. Ejemplo 1 (pág. 90-92)

En un gran tanque con 1000 litros de agua pura se comienza a verter una solución salina a una razón constante de 6 litros/minuto. La solución dentro del tanque se mantiene revuelta y sale del tanque a razón de 6 litros/minuto. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.1 kg/litro, determinar el momento en que la concentración de sal en el tanque llegará a 0.05 kg/litro (véase la figura 3.2).

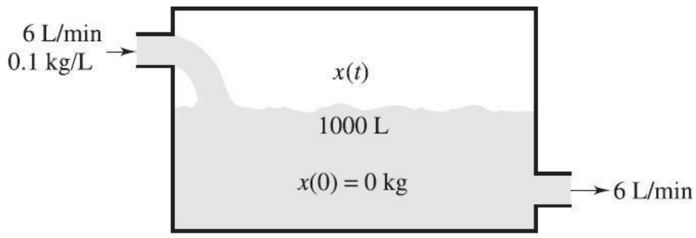


Figura 3.2 Problema de mezclas con razones de flujo iguales

Solución

Podemos ver al tanque como un compartimento que contiene sal. Si x(t) es la masa de sal en el tanque en el instante t, podemos determinar la concentración de sal en el tanque dividiendo x(t) entre el volumen de fluido en el tanque en el instante t. Usaremos el modelo matemático descrito por la ecuación (1) para hallar x(t).

Primero debemos determinar la razón con que la sal sale del tanque. Sabemos que la solución fluye hacia el tanque a razón de 6 litros/minuto. Como la concentración es 0.1 kg/litro, concluimos que la razón de entrada de sal al tanque es

(2) (6 L/min)(0.1 kg/L) 0.6 kg/min.

Ahora debemos determinar la razón con que la sal entra al tanque. La solución salina en el tanque se mantiene bien revuelta, de modo que podemos suponer que la concentración de sal en el tanque es uniforme. Es decir, la concentración de sal en cualquier parte del tanque en el instante t es justamente x(t) entre el volumen de fluido en el tanque. Como el tanque tenía en un principio 1000 litros y la razón de flujo hacia el tanque es igual a la razón de salida, el volumen es constante e igual a 1000 litros. Por lo tanto, la razón de salida de la sal es

$$(3)\quad (6\ L/min)\left[\frac{x(t)}{1000}\ kg/L\right] = \frac{3x(t)}{500}\ kg/min.$$

En un principio, el tanque contenía agua pura, de modo que $x(0) = 0$. Al sustituir las razones (2) y (3) en la ecuación (1) tenemos el problema con valor inicial

$$(4)\quad \frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{500},\ x(0) = 0$$

como modelo matemático para el problema de mezclas.

La ecuación (4) es separable (y lineal) y fácil de resolver. Al usar la condición inicial $x(0) = 0$ para evaluar la constante arbitraria, obtenemos

(5) $x(t) = 100(1 - e^{-3r/500})$

Así, la concentración de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{x(t)}{1000} = 0.1(1 - e^{-3t/500})kg/L.$$

Para determinar el momento en que la concentración de sal es $0.05\ kg/$ litro, igualamos el lado derecho a 0.05 y despejamos t, con lo que tenemos

$$0.1(1 - e^{-3t/500}) = 0.05 \ o\ e^{-3t/500} = 0.5.$$

y por tanto

$$t = \frac{500 ln 2}{3} = 115.52\ min.$$

En consecuencia, la concentración de sal en el tanque será igual a 0.05 kg/litro después de 115.52 minutos.

De la ecuación (5) observamos que la masa de sal en el tanque crece poco a poco y tiene el valor límite

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 1000(1 - e^{-3t/500}) = 100\ kg.$$

Así, la concentración límite de sal en el tanque es 0.1 kg/ litro, que es igual a la concentración de sal en la solución que entra al tanque. ¡Es claro que esto coincide con nuestras expectativas!

Sería interesante saber qué pasaría con la concentración si la razón de flujo de entrada es mayor que la razón de flujo de salida.

526. X)Nagle K., Saff E. & Snider A. (2005) Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. Cuarta Edición. Ejemplo 2 (pág. 90-92)

Para el problema de mezclas descrito en el ejemplo 1 , suponga ahora que la solución salina sale del tanque a razón de 5 litros/minuto en vez de 6 litros/minuto, manteniéndose el resto igual (véase la figura 3.3). Determine la concentración de sal en el tanque como función del tiempo.

Solución

La diferencia entre la razón de flujo de entrada y la razón de flujo de salida es 6-5=1 litro/ minuto, de modo que el volumen de fluido en el tanque después de t minutos es (1000+t) litros. Por lo tanto, la razón con la que la sal deja el tanque es

$$(5\ L/min)\left[\frac{x(t)}{1000+t}\ kg/L\right] = \frac{5x(t)}{1000+t}\ kg/min.$$

Usamos esto en vez de (3) para la razón de salida, con lo que tenemos el problema con valor inicial

(6) $\frac{dx}{dt} = 0.6 - \frac{5x}{1000+t}, x(0) = 0,$

como modelo matemático para el problema de mezclas.

La ecuación diferencial (6) es lineal, de modo que podemos usar el procedimiento bosquejado en la página 51 para hallar . El factor integrante es . Así,

$$\frac{d}{dt}[(1000 + t)^5 x] = 0.6(1000 + t)^5,$$

$$(1000 + t)^5 x = 0.1(1000 + t)^6 + c.$$

$$x(t) = 0.1(1000 + t) + c(1000 + t)^{-5}$$

Al usar la condición inicial $x(0) = 0$, tenemos que $c = -0.1(1000)^6$, y con ello la solución de (6) es

$$x(t) = 0.1(1000 + t) - (1000)^6(1000 + t)^{-5}.$$

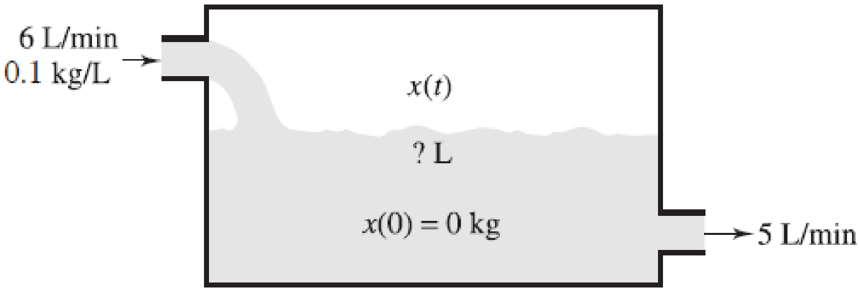


Figura 3.3 Problema de mezclas con razones de flujo distintas

Por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en el instante t es

$$(7)\ \frac{x(t)}{1000+t} = 0.1[1 - (1000)^6(1000 + t)^{-6}]kg/L$$

Libros utilizados

- Yunus A. Cengel & William J. Palm III. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias.
- Rinville, Bedient, Bedient (2006). Ecuaciones diferenciales. Octava Edición.
- Dennis G. Zill. (2018). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Novena edición.
- William E. Boyce y Richard C. DiPrima (1967). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ta Edición.
- Richard Bronson, Gabriel B. Costa; Ecuaciones Diferenciales; Editorial McGraw Hill; Tercera edición;
- Boris Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, Editorial MIR (1977), Quinta edición
- C. Henry Edwards, David E. Penney; Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera; Editorial Pearson; Cuarta edición
- BELLO, A. (2006). ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN. Caracas. Venezuela. Universidad Católica