1. 若离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{a}{4^k}$， $k=1,2,\cdots$，试求常数 a 的值并求 $P\{X\geq 2\}$.

【分析】 利用分布律的性质 $p_k\geq 0$， $\sum_{k=1}^{+\infty}p_k=1$ 确定常数 a 的值.

解 $P\left\{X=k\right\}=\frac{a}{4^k}$，由 $p_k\geq 0$， $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$ 得

$a\geq 0$， $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\frac{\frac{a}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$，解得 $a=3$，

$P\left\{X\geq 2\right\}=1-P\left\{X=1\right\}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

2. 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，求 X 的分布律.

【分析】 次品只数 X 服从超几何分布，$P\left\{X=k\right\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$， k=0,1,2 .

解 $P\left\{X=0\right\}=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$， $P\left\{X=1\right\}=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$， $P\left\{X=2\right\}=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$

X	0	1	2
p_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

3. 每次射击命中率为 0.2，必须进行多少次独立射击，才能使至少击中一次的命中率不小于 0.99？

【分析】 在 n 次重复独立射击中击中目标的次数服从二项分布.

解 用 X 表示在 n 次重复独立射击中击中目标的次数，则 $X\sim B(n,0.2)$，

$$P\left\{X\geq 1\right\}=1-0.8^n\geq 0.99，\quad 0.01\geq 0.8^n，\quad n\geq 20.6$$

所以至少进行 21 次独立射击，才能使至少击中一次的命中率不小于 0.99.

4. 设 X 服从泊松分布，且已知 $P\left\{X=1\right\}=P\left\{X=2\right\}$，求 $P\left\{X=4\right\}$.

【分析】 随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X \sim \pi(\lambda)$，

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

解 由 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$ 得 $\lambda e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$，解得 $\lambda=2$

所以 $P\{X=4\}=\dfrac{2^4 e^{-2}}{2}=0.0902$.

5. 对目标进行 5000 次独立射击，设每次击中的概率为 0.001，试用泊松定理近似计算，至少有两次命中的概率.

【分析】在 n 次重复独立射击中击中目标的次数服从二项分布，n=5000，p=0.001，由泊松定理当 $n\geq 10, p\leq 0.1$ 时二项分布的概率值就可以用参数 $\lambda = np$ 的泊松分布的概率值近似计算.

解 用 X 表示在 n 次重复独立射击中击中目标的次数，则

$$X \sim B(n,p),\quad n=5000,\quad p=0.001$$

由泊松定理可以用参数 $\lambda = np$ 的泊松分布近似计算至少有两次命中的概率，$\lambda = np = 5$

由附表 2 得所求概率为

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X\leq 1\}\approx 1-0.0404=0.9596$$

6. 设某批电子管正品率为 $\frac{3}{4}$，次品率为 $\frac{1}{4}$，现对这批电子管进行测试，只要测得一个正品，管子就不再继续测试，试求测试次数的分布律.

【分析】 测试次数服从**几何分布.**

解 用 X 表示测试次数，则 X 服从几何分布，

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,\ 其中\ p=\frac{3}{4}$$

测试次数的分布律为

$$P\{X=k\}=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\frac{3}{4},k=1,2,\cdots,\quad k=1,2,\cdots$$

7. 一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5，在其中同时取三只，以 X 表示取出

的三只球中的最大号码，求随机变量 X 的分布律和分布函数.

【分析】 分布律由古典概型计算，分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$.

解 随机变量 X 的取值为 3、4、5，

$$P\{X=3\}=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$$

X 的分布律为

X	3	4	5
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x}p_k$$

$$=\begin{cases}0, & x<3,\\ \dfrac{1}{10}, & 3\le x<4,\\ \dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{4}{10}, & 4\le x<5,\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

8. 设有函数

$$F(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试说明 $F(x)$ 能否是某随机变量的分布函数.

【分析】 分布函数 $F(x)$ 满足：单调不减性，右连续性，$0\le F(x)\le 1$，且

$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$， $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

解 $F(x)$ 不是单调不减函数，所以不是分布函数.

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.003x^2, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 t 的方程 $t^2+2Xt+5X-4=0$ 有实根的概率；

(2) 求随机变量 X 的分布函数.

【分析】 对于连续型随机变量 X ，有

$$P\{a<X<b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

解（1）方程$t^2+2Xt+5X-4=0$有实根，$\Delta\ge 0$

$$\Delta=4X^2-4(5X-4)\ge 0\text{，得 }X\le 1\text{或}X\ge 4$$

所求概率为

$$P\{X\le 1\}+P\{X\ge 4\}=\int_0^1 0.003x^2dx+\int_4^{10}0.003x^2dx=0.937$$

$$\text{（2）}F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\begin{cases}0,x<0\\0.001x^3,0\le x<10\\1,x\ge 10\end{cases}$$

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$.

(1) 求常数 A 的值;

(2) 求随机变量 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{-1\le X\le 1\}$.

【分析】对于连续型随机变量 X，有$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，

$P\{a<X<b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

解（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2\int_0^{+\infty} Ae^{-x}dx=2A=1$，得 $A=\dfrac{1}{2}$

（2）当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-(-t)}\,dt=\dfrac{1}{2}e^x$

当$x\ge 0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^t\,dt+\int_0^x\dfrac{1}{2}e^{-t}\,dt=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

所以分布函数为：$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^x,x<0\\1-\dfrac{1}{2}e^{-x},x\ge 0\end{cases}$

（3）$P\{-1\le X\le 1\}=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\dfrac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1-e^{-1}$

或 $P\{-1\le X\le 1\}=F(1)-F(-1)=1-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}=1-e^{-1}$.

11. 某种型号的电子管寿命 X (单位：小时)，具有如下概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求随机变量 X 的分布函数；

（2）现有一大批此种电子管(设各电子管损坏与否相互独立)，任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

【分析】 对于连续型随机变量 X，有 $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，5 只电子管中寿命大于 1500 小时的电子管的只数服从二项分布.

解（1）由 $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 得 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1000,\\ 1-\frac{1000}{x}, & x>1000.\end{cases}$

（2）$P\{X>1500\}=1-P\{X\le 1500\}=\frac{2}{3}$

5 只电子管中寿命大于 1500 小时的只数记为 Y，则 $Y\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$

$$P\{Y\ge 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^5-C_5^1\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{232}{243}$$

12. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$，其中参数 $\lambda>0$，求：（1）常数 A，B；（2）$P\{X\le 2\}$，$P\{X>3\}$；（3）X 的概率密度 $f(x)$.

【分析】 对于连续型随机变量 X，分布函数处处连续，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，$P\{X\le b\}=F(b)$，$P\{X>a\}=1-F(a)$，$F'(x)=f(x)$.

解 (1) 因为连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 处处连续，所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，当 $x=0$ 时，

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=A+B，\ F(0)=0，得 A+B=0；$$

又 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，得

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=A=1$$

解得 $B=-1$，所以 $A=1,B=-1$

（2） $P\{X\le 2\}=F(2)=1-e^{-2\lambda}$

$P\{X>3\}=1-1+e^{-3\lambda}=e^{-3\lambda}$

（3） $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

13. 设 $X\sim N(1,4)$，求：

（1） $F(5)$；

（2） $P\{0<X\le 1.6\}$；

（3） $P\{|X-1|\le 2\}$；

（4）确定常数 c，使得 $P\{X>c\}=P\{X\le c\}$.

【分析】 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，

$$P\{a<X\le b\}=P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma}<Y\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right\}=\varPhi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\varPhi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\{X\le\mu\}=P\{X>\mu\}=0.5.$$

解 （1） $F(5)=P\{X\le 5\}=P\left\{\dfrac{X-1}{2}\le 5\right\}=\varPhi(2)=0.9772$

（2） $P\{0<X\le 1.6\}=\varPhi(0.3)+\varPhi(0.5)-1=0.3094$

（3） $P\{|X-1|\le 2\}=P\left\{\left|\dfrac{X-1}{2}\right|\le 1\right\}=2\varPhi(1)-1=0.6826$

（4）由对称性知于 $P\{X\le\mu\}=P\{X>\mu\}=0.5$，所以 $c=1$.

14. 某种型号电池的寿命 X 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，已知其寿命在 250 小时以上的概率和寿命不超过 350 小时的概率均为 97.72%，为使其寿命在 $\mu-x$ 和 $\mu+x$ 之间的概率不小于 0.95，x 至少为多少？

【分析】 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，

$$P\{a<X\le b\}=P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma}<Y\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

解 由已知

$$P\{X>250\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{250-\mu}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\frac{250-\mu}{\sigma}\right)=0.9772$$

$$P\{X\le 350\}=\Phi\left(\frac{350-\mu}{\sigma}\right)=0.9772$$

得

$$\mu=300，\quad \sigma=25$$

$$P\{\mu-x<X<\mu+x\}=P\left\{\frac{-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{x}{\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1\ge 0.95$$

$\Phi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$=0.975，$\dfrac{x}{\sigma}\ge 1.96$，$x\ge 49$.

15. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求 $Y=2(X-2)^2$ 的分布律.

【分析】 设 X 为离散型随机变量，则随机变量函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量，且

$$P\{Y=y_k\}=\sum_{g(x_i)=y_k}P\{X=x_i\}$$

解

X	0	1	2	3	4	5
Y	8	2	0	2	8	18
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y	0	2	8	18
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

16. 设 $X \sim N(0,1)$，求 (1) $Y = e^X$ 的概率密度；(2) $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度；

(3) 求 $Y = |X|$ 的概率密度.

【分析】 X 为连续型随机变量，求随机变量函数 $Y = g(X)$ 的概率密度，用分布函数法：

首先求随机变量函数 $Y = g(X)$ 的分布函数，

$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = P\{X \in C_y\}$. 其中 $C_y = \{x \mid g(x) \le y\}$.

将 $P\{X \in C_y\}$ 由 X 的分布函数 $F_X(x)$ 来表达或用其概率密度函数 $f_X(x)$ 的积分来表达：

$$P\{X \in C_y\} = \int_{C_y} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

再将 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 关于 y 求导，得到 Y 的密度函数.

解 （1）$\because Y = \mathrm{e}^x > 0$，故当 $y \le 0$ 时 $F_Y(y) = 0$.

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\mathrm{e}^x \le y\} = P\{X \le \ln y\} = F_X(\ln y)$，

所以

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(2) $Y = 2x^2 + 1$，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X^2 + 1 \le y\}$

$$= \begin{cases} P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}, & y > 1, \\ 0, & y \le 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right), & y > 1, \\ 0, & y \le 1. \end{cases}$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2(y-1)}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)\right], & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, y>1, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

(3) $Y=|X|$，故当 $y\le 0$ 时 $F_Y(y)=0$.

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$

$$=\begin{cases}P\{-y\le X\le y\}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}F_X(y)-F_X(-y), & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F(y)=\begin{cases}f_X(y)-f_X(-y), & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

17. 设圆轴截面的直径 X 服从区间 $(0,\ 2)$ 上的均匀分布，求截面面积的概率密度.

【分析】 设截面面积为 ***Y***，则 $Y=\frac{\pi}{4}X^2$

已知圆轴截面的直径 X 服从区间 $(0,\ 2)$ 上的均匀分布，求 $Y=\frac{\pi}{4}X^2$ 的概率密度，

用分布函数法.

(1) 首先求随机变量函数 $Y=\frac{\pi}{4}X^2$ 的分布函数，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\frac{\pi}{4}X^2\le y\right\}.$$

求解不等式时注意讨论 y 的取值情况.

(2) 再将 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 关于 y 求导，得到 Y 的密度函数.

解 截面面积$Y=\dfrac{\pi}{4}X^2$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$，

当$y\ge 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\dfrac{\pi X^2}{4}\le y\right\}=P\left\{X^2\le\dfrac{4y}{\pi}\right\}$

$$=P\left\{-2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\le X\le 2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right\}=F_X\left(2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)-F_X\left(-2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)$$

因为$X\sim U(0,2)$，所以$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}\left[f_x\left(2\sqrt{\dfrac{y}{\pi}}\right)-f_x\left(-2\sqrt{\dfrac{y}{\pi}}\right)\right], & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$