1.1

将3.1426作为π的近似值，其有效数字位数可通过以下步骤确定：

1. **计算绝对误差**
   π的准确值约为3.1415926535，近似值为3.1426，绝对误差为：
   $$|3.1426 - 3.1415926535| \approx 0.001007$$
2. **有效数字的判定条件**
   有效数字的位数由绝对误差是否满足以下条件决定：
   $$\text{绝对误差} \leq 0.5 \times 10^{-k}$$
   其中，k为有效数字位数对应的误差阶次（以科学计数法表示时，$k = n - m$，n为有效位数，m为指数部分）。
3. **逐位验证**
   - **三位有效数字**：要求误差$\leq 0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$，但实际误差为0.001007，**不满足**。
   - **两位有效数字**：要求误差$\leq 0.5 \times 10^{-2} = 0.005$，实际误差0.001007 < 0.005，**满足**。
4. **矛盾点分析**
   虽然3.1426的形式包含五位数字，但误差分析表明其精度仅达到两位有效数字（3.1）。然而，进一步观察发现：
   - **三位有效数字**（3.14）对应的误差限为0.005，而实际误差0.001007 < 0.005，**实际满足三位有效数字**。
   - 第三位小数（2）与真实值（1）的差异源于误差累积，但整体绝对误差仍满足三位有效数字的阈值。
5. **结论**
   综合误差范围和数值对齐，**3.1426作为π的近似值具有3位有效数字**（3.14）。
   答案：3位有效数字。

查看第六题

1.2

在数值积分中，插值型求积公式基于给定的节点构造插值多项式，并通过对该多项式积分来近似定积分。给定 $n+1$ 个互异节点，对应的插值多项式次数不超过 n。

- 对于任意 $n+1$ 个互异节点，插值型求积公式的代数精度至少为 n（即能精确积分所有次数不超过 n 的多项式）。
- 然而，代数精度的最大值取决于节点的选择。当节点选择为 Gauss 点（例如，Legendre 多项式的零点）时，可以达到最高代数精度。

理论证明，对于 m 个节点的插值型求积公式，最高代数精度为 $2m-1$。这里 $m=n+1$（节点数），因此最高代数精度为：

$$2(n+1)-1=2n+1$$

例如：

- 当 $n=0$（1 个节点），最高代数精度为 $2\times 0+1=1$（如中点规则）。
- 当 $n=1$（2 个节点），最高代数精度为 $2\times 1+1=3$（如两点 Gauss-Legendre 规则）。
- 当 $n=2$（3 个节点），最高代数精度为 $2\times 2+1=5$（如三点 Gauss-Legendre 规则）。

因此，通过 $n+1$ 个互异节点的插值型求积公式的最高代数精度为 $2n+1$。

1.3

要使用二分法求解方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在区间 $[1,2]$ 内的根，并使误差不超过 $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$，需要确定至少进行多少次二分操作。

在二分法中，初始区间长度为 $b-a=2-1=1$。经过 n 次二分后，区间长度变为 $\frac{1}{2^n}$。根的真实值位于该区间内，近似根通常取区间中点，其误差（即近似根与真实根之间的最大可能距离）不超过区间长度的一半，即：

$$\text{误差}\leq\frac{\text{区间长度}}{2}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

给定误差不超过 $\frac{1}{16}$，因此：

$$\frac{1}{2^{n+1}} \le \frac{1}{16}.$$

由于 $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$，上式等价于：

$$2^{n+1} \ge 2^4,$$

取以 2 为底的对数：

$$n + 1 \ge 4,$$

解得：

$$n \ge 3.$$

因此，至少需要 3 次二分操作才能满足误差不超过 $\frac{1}{16}$。

验证：

- **初始区间**：$[1, 2]$，长度 1，中点 1.5，$f(1) = -5 < 0$，$f(2) = 14 > 0$，$f(1.5) = 2.375 > 0$，根在 $[1, 1.5]$。
- **第一次二分后**：区间 $[1, 1.5]$，长度 0.5，中点 1.25，$f(1.25) \approx -1.796875 < 0$，根在 $[1.25, 1.5]$。
- **第二次二分后**：区间 $[1.25, 1.5]$，长度 0.25，中点 1.375，$f(1.375) \approx 0.162 > 0$（精确计算：$\frac{83}{512} > 0$，根在 $[1.25, 1.375]$。
- **第三次二分后**：区间 $[1.25, 1.375]$，长度 $0.125 = \frac{1}{8}$，中点 1.3125，误差不超过 $\frac{0.125}{2} = 0.0625 = \frac{1}{16}$，满足要求。

如果仅进行 2 次二分，区间为 $[1.25, 1.5]$，长度 0.25，中点 1.375，误差不超过 $\frac{0.25}{2} = 0.125 > \frac{1}{16}$，不满足要求。

故至少需要 **3 次**二分操作。

1.4

根据提供的矩阵 A，其形式为：

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

这是一个 3 阶线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$（其中 $\mathbf{b}$ 的具体形式不影响雅可比迭代的收敛性判断，故无需指定）。

雅可比迭代收敛性判断

雅可比迭代法收敛的一个**充分条件**是矩阵 A **严格对角占优**。严格对角占优的定义为：对于矩阵的每一行 i，对角元素的绝对值大于该行所有非对角元素绝对值之和，即：

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i.$$

验证矩阵 A 的严格对角占优性：

- **第一行**：$|a_{11}| = |10| = 10$，非对角元素绝对值之和 $|a_{12}| + |a_{13}| = |3| + |1| = 4$。
  比较：$10 > 4$，成立。
- **第二行**：$|a_{22}| = |-10| = 10$，非对角元素绝对值之和 $|a_{21}| + |a_{23}| = |2| + |3| = 5$。
  比较：$10 > 5$，成立。
- **第三行**：$|a_{33}| = |10| = 10$，非对角元素绝对值之和 $|a_{31}| + |a_{32}| = |1| + |3| = 4$。
  比较：$10 > 4$，成立。

矩阵 A 的每一行均满足严格对角占优条件。因此，雅可比迭代法对该线性方程组 **收敛**。

结论

雅可比迭代法收敛。

1.5

给定函数 $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$ 和点序列 $0, 1, 2, 3$，需要计算三阶差商 $f[0, 1, 2, 3]$。差商的计算基于递归定义，具体步骤如下：

1. 计算函数值：

- $f(0) = 4(0)^3 + 2(0) - 3 = -3$
- $f(1) = 4(1)^3 + 2(1) - 3 = 4 + 2 - 3 = 3$
- $f(2) = 4(2)^3 + 2(2) - 3 = 4 \times 8 + 4 - 3 = 32 + 4 - 3 = 33$
- $f(3) = 4(3)^3 + 2(3) - 3 = 4 \times 27 + 6 - 3 = 108 + 6 - 3 = 111$

2. 计算一阶差商：

- $f[0, 1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{3-(-3)}{1} = \frac{6}{1} = 6$
- $f[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{33-3}{1} = \frac{30}{1} = 30$
- $f[2, 3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{111-33}{1} = \frac{78}{1} = 78$

3. 计算二阶差商：

- $f[0, 1, 2] = \frac{f[1,2]-f[0,1]}{2-0} = \frac{30-6}{2} = \frac{24}{2} = 12$
- $f[1, 2, 3] = \frac{f[2,3]-f[1,2]}{3-1} = \frac{78-30}{2} = \frac{48}{2} = 24$

4. 计算三阶差商：

- $f[0, 1, 2, 3] = \frac{f[1,2,3]-f[0,1,2]}{3-0} = \frac{24-12}{3} = \frac{12}{3} = 4$

或者使用差商表表示：

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	-3			

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
		6		
1	3		12	
		30		4
2	33		24	
		78		
3	111			

验证：

由于 $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$ 是一个三次多项式，其三阶差商应等于三次项系数（即 4）。计算结果为 4，符合这一性质。

因此，$f[0, 1, 2, 3] = 4.$

1.6

将22/7作为π的近似值时，其有效数字的位数可以通过比较数值和误差分析来确定。

步骤分析：

1. **计算数值**：
   - π的真实值（取前几位小数）：π ≈ 3.1415926535...
   - 22/7的计算值：22 ÷ 7 ≈ 3.1428571428...
2. **比较数字**：
   - 对齐数值：
     - π：3.141592...
     - 22/7：3.142857...
   - 从左边第一个非零数字开始比较：
     - 第一位（个位）：3 = 3（相同）

    - 第二位（十分位）：1 = 1（相同）
    - 第三位（百分位）：4 = 4（相同）
    - 第四位（千分位）：π的1 ≠ 22/7的2（不同）
  - 因此，前三位有效数字（3、1、4）相同，第四位开始不同。
3. **误差分析**：
  - 绝对误差 = |π - 22/7| ≈ |3.1415926535 - 3.1428571428| = 0.0012644893
  - 相对误差 = 绝对误差 / π ≈ 0.0012644893 / 3.1415926535 ≈ 0.0004026（或4.026 × 10^{-4}）
  - 有效数字位数的判断标准：
    - 如果绝对误差小于最后一位有效数字单位的0.5倍，则数字可靠。
    - 对于三位有效数字（表示为3.14，最后一位是百分位，单位为0.01）：
      - 允许误差 < 0.5 × 0.01 = 0.005
      - 实际绝对误差0.001264 < 0.005，满足条件。
    - 对于四位有效数字（表示为3.142，最后一位是千分位，单位为0.001）：
      - 允许误差 < 0.5 × 0.001 = 0.0005
      - 实际绝对误差0.001264 > 0.0005，不满足条件。
  - 相对误差标准（相对误差 < 5 × 10^{-n} 对应n位有效数字）：
    - 对于n=3：5 × 10^{-3} = 0.005，实际相对误差0.0004026 < 0.005，满足。
    - 对于n=4：5 × 10^{-4} = 0.0005，实际相对误差0.0004026 < 0.0005，但**绝对误差标准更严格且更直接**，且数字比较已显示第四位不同，因此四位不可靠。

结论：

22/7作为π的近似值，有**三位有效数字**（即3.14）。虽然相对误差较小，但由于第四位数字不匹配且绝对误差超过了四位有效数字的容差，因此只有前三位数字可靠。

1.7

为了判断迭代格式 $x_{k+1} = \frac{\sqrt{\sin x_k + 1}}{3}$ 对于求解方程 $9x^2 - \sin x - 1 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上的根的收敛性，我们需要分析迭代函数的性质，包括其定义域、值域、

导数行为以及不动点定理的条件。以下是逐步分析和结论。

1. 方程和根的分析

- 方程：$f(x) = 9x^2 - \sin x - 1 = 0$。
- 在区间 $[0,1]$ 上：
  - $f(0) = 9 \cdot 0^2 - \sin 0 - 1 = -1 < 0$，
  - $f(1) = 9 \cdot 1^2 - \sin 1 - 1 \approx 9 - 0.8415 - 1 = 7.1585 > 0$。
- 由于 $f(0) < 0$ 且 $f(1) > 0$，且 $f(x)$ 连续，根据中间值定理，方程在 $(0,1)$ 内至少有一个根。
- 导数 $f'(x) = 18x - \cos x$，二阶导数 $f''(x) = 18 + \sin x > 0$（因为 $18 + \sin x \geq 17 > 0$)，故 $f'(x)$ 严格递增。
- $f'(0) = -1 < 0$，$f'(1) \approx 18 - 0.5403 = 17.4597 > 0$，存在 $c \approx 0.056$ 使 $f'(c) = 0$。函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 递减，在 $[c,1]$ 递增。
- 计算 $f(0.3) \approx 9 \cdot 0.09 - \sin 0.3 - 1 \approx 0.81 - 0.2955 - 1 = -0.4855 < 0$，$f(0.4) \approx 9 \cdot 0.16 - \sin 0.4 - 1 \approx 1.44 - 0.3894 - 1 = 0.0506 > 0$，根 $x^* \approx 0.3906$（通过线性插值估计），且唯一（因 $f(x)$ 在 $[c,1]$ 严格递增）。

2. 迭代函数定义

- 迭代格式：$x_{k+1} = g(x_k)$，其中 $g(x) = \frac{\sqrt{\sin x+1}}{3}$。
- 定义域：$x \in [0,1]$，需确保 $\sin x + 1 \geq 0$（在 $[0,1]$ 成立，因为 $\sin x \geq 0$）。

3. 值域和自映射性

- $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值：
  - $g(0) = \frac{\sqrt{\sin 0+1}}{3} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.333$，
  - $g(1) = \frac{\sqrt{\sin 1+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{0.8415+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{1.8415}}{3} \approx \frac{1.357}{3} \approx 0.4523$。
- $g'(x) = \frac{\cos x}{6\sqrt{\sin x+1}}$，在 $[0,1]$ 上 $\cos x > 0$（因 $x < \pi/2 \approx 1.57$)，故 $g'(x) > 0$，$g(x)$ 严格递增。
- 值域：$g([0,1]) = [g(0), g(1)] \approx [0.333, 0.4523] \subset [0,1]$。
- **结论**：g 将 $[0,1]$ 映射到自身子集 $[0.333, 0.4523]$，满足自映射性。

4. 导数分析和压缩性

- $g'(x) = \frac{\cos x}{6\sqrt{\sin x+1}}$，在 $[0,1]$ 上：

    - $g'(x) > 0$（因 $\cos x > 0$ 且分母为正），
    - $|g'(x)| = g'(x)$（因导数为正）。
- 求最大值：
    - $g'(x)$ 递减（分子 $\cos x$ 递减，分母 $\sqrt{\sin x + 1}$ 递增，但整体递减）。
    - $g'(0) = \frac{\cos 0}{6\sqrt{\sin 0+1}} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$，
    - $g'(1) \approx \frac{\cos 1}{6\sqrt{\sin 1+1}} \approx \frac{0.5403}{6\cdot 1.357} \approx \frac{0.5403}{8.142} \approx 0.0664$。
- 因此，$|g'(x)| \leq g'(0) = \frac{1}{6} \approx 0.1667 < 1$ 对所有 $x \in [0,1]$ 成立。
- **结论**：g 是压缩映射（Lipschitz 常数 $k = 1/6 < 1$)。

5. 收敛性判断

- 由不动点定理：
    - $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，
    - $g([0,1]) \subset [0,1]$，
    - $|g'(x)| \leq \frac{1}{6} < 1$ 在 $[0,1]$ 上一致成立。
- 因此，迭代格式 $x_{k+1} = g(x_k)$ 在 $[0,1]$ 上**全局收敛**到唯一的不动点（即方程的根 $x^* \approx 0.3906$）。
- 收敛速度：因 $|g'(x^*)| \approx |g'(0.3906)| \approx 0.1311 < 1$，且小于1，收敛为线性收敛（一阶收敛）。

6. 验证示例

- 取初始值 $x_0 = 0.5 \in [0,1]$：
    - $x_1 = g(0.5) = \frac{\sqrt{\sin 0.5+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{0.4794+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{1.4794}}{3} \approx \frac{1.2166}{3} \approx 0.4055$,
    - $x_2 = g(0.4055) \approx \frac{\sqrt{\sin 0.4055+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{0.3956+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{1.3956}}{3} \approx \frac{1.1814}{3} \approx 0.3938$,
    - $x_3 = g(0.3938) \approx \frac{\sqrt{\sin 0.3938+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{0.3835+1}}{3} \approx \frac{\sqrt{1.3835}}{3} \approx \frac{1.1763}{3} \approx 0.3921$,
    - 序列趋近于 $x^* \approx 0.3906$，验证收敛。

结论

此迭代格式 $x_{k+1} = \frac{\sqrt{\sin x_k+1}}{3}$ 在区间 $[0,1]$ 上**收敛**，且为全局收敛（对任意 $x_0 \in [0,1]$ 均收敛到根）。收敛速度为线性收敛。迭代过程中，序列会快速进入子区间 $[0.333, 0.4523]$ 并收敛到根 $x^* \approx 0.3906$。

1.8

通过7个互异的插值节点构造的插值型求积公式的最高代数精度为（7-1）*2+1=13 次。

> 解法：1.2

1.9

基于您提供的文件内容，问题涉及判断高斯-赛德尔迭代法（Gauss-Seidel iteration）对于给定线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的收敛性。文件内容中矩阵部分为：

```
8 3 1
2 -8 3
1 3 6
```

这表示一个 3×3 矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

收敛性判断

高斯-赛德尔迭代法的收敛性取决于矩阵 A 的性质。收敛的充分条件包括：

- 矩阵 A 是严格行对角占优（strictly row diagonally dominant），即对每一行 i，满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$。
- 或矩阵 A 是对称正定（symmetric positive definite）。

现在，检查给定矩阵 A 的严格行对角占优性：

- **第 1 行**：$|8| = 8$，其他元素绝对值之和为 $|3| + |1| = 4$，且 $8 > 4$。
- **第 2 行**：$|-8| = 8$，其他元素绝对值之和为 $|2| + |3| = 5$，且 $8 > 5$。
- **第 3 行**：$|6| = 6$，其他元素绝对值之和为 $|1| + |3| = 4$，且 $6 > 4$。

矩阵 A 满足严格行对角占优条件。因此，高斯-赛德尔迭代法对任意初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ 都收敛。

附加说明

- **收敛速度**：由于 A 严格对角占优，收敛速度通常为线性（一阶收敛），但实际速度取决于迭代矩阵的谱半径。
- **其他性质**：矩阵 A 不对称（例如 $a_{12} = 3 \neq a_{21} = 2$，因此无需检查对称正定性。
- **关于方程组的其他部分**：文件提到 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 “1 BCE” *（DeepSeek识别问题）*，但 $\mathbf{b}$ 的具体值（如 “1”）不影响收敛性判断，因为收敛性只依赖于矩阵 A。

结论

对于给定的矩阵 A，高斯-赛德尔迭代法 **收敛**。

AI变更：DeepSeek→MiniMax

1.10

解析步骤：

1. **第一分量** $\frac{1}{k^2+1}$：
   - 当 $k \to \infty$ 时，分母 $k^2 + 1 \approx k^2$，分数趋近于 $\frac{1}{k^2} \to 0$。
2. **第二分量** $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$：
   - 经典极限公式 $\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$。
3. **第三分量** $\frac{2k}{k+3}$：
   - 分子分母同除以 k 得 $\frac{2}{1+\frac{3}{k}}$，当 $k \to \infty$ 时，$\frac{3}{k} \to 0$，极限为 2。

最终结果为各分量极限组成的向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 2 \end{pmatrix}$。

1.11

> 方法:1.6

1.12

无外乎求个lg

以10为底的线性转换模型为：

$$\boxed{\log_{10}(Z) = b \cdot \log_{10}(R) + \log_{10}(a)}$$

或

$$\boxed{lgZ = b \cdot lgR + lga}$$

推导过程：

1. **原始模型：**
   $Z = aR^b$
2. **取常用对数（以10为底）：**
   $\log_{10}(Z) = \log_{10}(aR^b)$
3. **利用对数性质展开：**
   $\log_{10}(Z) = \log_{10}(a) + \log_{10}(R^b)$
4. **化简幂次项：**
   $\log_{10}(Z) = \log_{10}(a) + b \cdot \log_{10}(R)$
5. **线性形式表达：**
   令 $y = \log_{10}(Z)$，$x = \log_{10}(R)$，则模型转化为：
   $y = b \cdot x + \log_{10}(a)$

此时，b 为斜率，$\log_{10}(a)$ 为截距，可通过最小二乘法估计参数 b 和 $\log_{10}(a)$，进而求得 $a = 10^{\log_{10}(a)}$。.

1.13

向量 $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 2)^T$ 的 2 范数为：

$$\boxed{\sqrt{6}}$$

计算步骤：

1. **分量平方求和：**
   $1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 = 1 + 0 + 1 + 4 = 6$
2. **开平方：**
   $\sqrt{6}$

2 范数（欧几里得范数）定义为向量各分量平方和的平方根。

补充：有没有所谓的3范数

向量的 **3 范数**（又称 L_3 范数）是存在的，属于更广义的 ***p*-范数** 的一种。以下是具体说明：

---

3 范数的定义

对于向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，其 3 范数定义为：

$$\|\mathbf{x}\|_3 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3 \right)^{1/3}$$

示例计算

以向量 $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 2)^T$ 为例：

1. **计算各分量的绝对值立方和：**

$$|1|^3 + |0|^3 + |-1|^3 + |2|^3 = 1 + 0 + 1 + 8 = 10$$

2. **开三次方：**

$$\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt[3]{10} \approx 2.154$$

关键点

1. **p-范数的通用性**
   范数可以推广到任意 $p \geq 1$，最常见的是：
   - $p = 1$：1 范数（曼哈顿距离）
   - $p = 2$：2 范数（欧几里得范数）
   - $p \to \infty$：无穷范数（最大分量绝对值）
2. **3 范数的应用场景**
   3 范数在某些特定领域（如信号处理、优化问题）中偶尔出现，但不如 1 范数或 2 范数常用。
3. **数学性质**
   所有 p-范数均满足范数的公理（非负性、齐次性、三角不等式）。

结论：
3 范数是存在的，其定义为向量各分量绝对值立方的和开三次方。

1.14

迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^k + g$ 收敛的充要条件是**矩阵 B 的谱半径小于 1**，即：

$$\boxed{\rho(B) < 1}$$

关键分析：

1. **迭代法的通用形式**：对于线性方程组 $x = Bx + g$，迭代公式为 $x^{(k+1)} = Bx^k + g$，其中 B 为迭代矩阵。
2. **收敛的充要条件**：

- **谱半径条件**：迭代法对任意初始向量 x^0 收敛的充要条件是 B 的谱半径 $\rho(B) < 1$。谱半径定义为 $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ 是 } B \text{ 的特征值}\}$。
- **其他范数条件**（如 $\|B\| < 1$）仅为**充分条件**，而非必要条件。例如，可能存在 $\|B\| \geq 1$ 但 $\rho(B) < 1$ 的情况，此时迭代仍收敛。

3. **与特定迭代法的区别**：
   - 雅可比或高斯-赛德尔迭代法的收敛条件可能涉及对角占优或不可约弱对角占优，但这些属于具体算法的附加条件，而题目问的是通用迭代公式的充要条件。

结论：当且仅当 $\rho(B) < 1$ 时，迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^k + g$ 对任意初始值 x^0 收敛到唯一解。

1.15

> 代数精度，也称为精确度次数，是指该求积公式能够精确积分的最高次数的多项式。也就是说，如果一个求积公式对于所有次数不超过m的多项式都能精确积分，但无法精确积分m+1次的多项式，那么它的代数精度就是m。

该数值求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[f(-1) + 2f(0) + f(1)\right]$$

代数精度是指该公式能精确计算积分的多项式的最高次数。即，对于所有次数不超过 m 的多项式精确成立，但对于某个 $m+1$ 次多项式不精确。

步骤验证：

1. **常数多项式（0 次）**：令 $f(x) = 1$。
   - 精确积分：$\int_{-1}^{1} 1dx = [x]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2$
   - 近似值：$\frac{1}{2}\left[f(-1) + 2f(0) + f(1)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + 2 \cdot 1 + 1\right] = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
   - 结果相等，精确。
2. **线性多项式（1 次）**：令 $f(x) = x$。
   - 精确积分：$\int_{-1}^{1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
   - 近似值：$\frac{1}{2}\left[f(-1) + 2f(0) + f(1)\right] = \frac{1}{2}\left[(-1) + 2 \cdot 0 + 1\right] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

    - 结果相等，精确。
3. **二次多项式（2 次）**：令 $f(x) = x^2$。
    - 精确积分：$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$
    - 近似值：$\frac{1}{2}[f(-1) + 2f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}\left[(-1)^2 + 2 \cdot 0^2 + 1^2\right] = \frac{1}{2}[1 + 0 + 1] = \frac{1}{2} \times 2 = 1$
    - 结果：$\frac{2}{3} \neq 1$，不精确。

由于公式对常数和线性多项式精确，但对二次多项式不精确，因此代数精度为 1。

结论：

该求积公式的代数精度是 1。

1.16

已知测量长度为 0.01850cm，该值具有五位有效数字（即 1、8、5、0，末尾的零表示精度）。在测量中，绝对误差限通常基于最后一位有效数字的单位确定。

- 该数值的最后一位（0）位于十万分位，即 10^{-5}cm（或 0.00001cm）。
- 绝对误差限一般取最后一位单位的一半，即：

$$\text{绝对误差限} = \frac{1}{2} \times 10^{-5}\text{cm} = 0.000005\text{cm}$$

因此，绝对误差限为 0.000005cm。

1.17

为了使数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_1) + f(x_2)$$

具有最高的代数精度，需确定节点 x_1 和 x_2，**使得该公式对尽可能高次的多项式精确成立。**

代数精度是指该公式能精确积分所有次数不超过某整数 m 的多项式，但对某个 $m+1$ 次多项式不精确。由于公式有两个节点，且权重均为 1，理论上最高可达三次代数精度。

步骤推导：

1. **常数函数（0 次）**：设 $f(x)=1$。
    - 精确积分：$\int_{-1}^{1} 1dx = 2$。
    - 近似值：$f(x_1)+f(x_2)=1+1=2$。
    - 结果相等，对任意 x_1, x_2 均精确。
2. **线性函数（1 次）**：设 $f(x)=x$。
    - 精确积分：$\int_{-1}^{1} xdx = 0$（奇函数在对称区间）。
    - 近似值：$f(x_1)+f(x_2)=x_1+x_2$。
    - 设等于精确值：$x_1+x_2=0$，即 $x_2=-x_1$。
3. **二次函数（2 次）**：设 $f(x)=x^2$。
    - 精确积分：$\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$。
    - 代入 $x_2=-x_1$，近似值：$f(x_1)+f(x_2)=x_1^2+(-x_1)^2=2x_1^2$。
    - 设等于精确值：$2x_1^2=\frac{2}{3}$，解得 $x_1^2=\frac{1}{3}$，即 $x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。
    - 相应地，$x_2=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$。
4. **验证三次函数（3 次）**：设 $f(x)=x^3$。
    - 精确积分：$\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$。
    - 代入 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，近似值：

$$f(x_1)+f(x_2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{27}-\frac{3\sqrt{3}}{27}=0。$$

    - 结果相等，精确。
5. **验证四次函数（4 次）**：设 $f(x)=x^4$。
    - 精确积分：$\int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5}$。
    - 近似值：

$$f(x_1)+f(x_2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4=2\left(\frac{3^2}{81}\right)=2\cdot\frac{9}{81}=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}。$$

- 比较：$\frac{2}{9} \approx 0.222 \neq 0.4 = \frac{2}{5}$，不精确。

结论：

- 该公式对常数、线性、二次和三次多项式精确，但对四次多项式不精确，故代数精度为 3。
- 节点为 $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$（对称）。

因此，求积节点为 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\boxed{x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

1.18

> 类似：14

对于线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其迭代格式为 $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$，其中 B 是迭代矩阵。迭代法收敛的充要条件是迭代矩阵 B 的谱半径小于 1，即：

$$\rho(B) < 1$$

其中，谱半径 $\rho(B)$ 定义为 B 的所有特征值的模的最大值：

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ 是 } B \text{ 的特征值}\}$$

解释：

- **必要性**：如果迭代法收敛，则必有 $\rho(B) < 1$。
- **充分性**：如果 $\rho(B) < 1$，则对任意初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$，迭代序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 收敛到方程组的解。

该条件是迭代法收敛的一般性结论，适用于 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代等方法，只要其迭代矩阵 B 满足上述条件。

$$\boxed{\rho(B) < 1}$$

1.19

为了求解向量序列

$$\mathbf{X}^{(k)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k} \\ \dfrac{k+1}{2k+10} \\ \dfrac{k^n}{e^k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty$$

的极限向量，需对每个分量分别求极限当 $k \to \infty$ 时。假设 n 为固定常数（因问题中未指定 n 与 k 的关系，且 n 不依赖于 k)。

第一分量：$\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} = \sqrt{\frac{1+k^2}{k^2}} = \sqrt{\frac{1}{k^2}+1}.$$

当 $k \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{k^2} \to 0$，因此

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k^2}+1} = \sqrt{0+1} = 1.$$

第二分量：$\dfrac{k+1}{2k+10}$

将分子和分母同除以 k:

$$\frac{k+1}{2k+10} = \frac{1+\dfrac{1}{k}}{2+\dfrac{10}{k}}.$$

当 $k \to \infty$ 时，$\frac{1}{k} \to 0$ 和 $\frac{10}{k} \to 0$，因此

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{2+\frac{10}{k}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

第三分量：$\frac{k^n}{e^k}$

对于固定常数 n，指数函数 e^k 的增长速度高于多项式函数 k^n，因此

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{e^k} = 0.$$

（此极限可通过洛必达法则或比较增长阶数验证。）

极限向量

综上，各分量的极限分别为 1、$\frac{1}{2}$ 和 0，因此极限向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.20

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ -10 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，要求求 A_1。根据问题，答案为 15，需确定 A_1 的含义。

首先，考虑 A_1 可能表示矩阵的行列式。计算行列式：

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}$$

计算各子行列式：

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (5)(2) = -1 - 10 = -11$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(-10) = 3 + 50 = 53$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (-1)(-10) = 6 - 10 = -4$$

代入：

$$\det(A) = 2 \cdot (-11) - 3 \cdot 53 + (-1) \cdot (-4) = -22 - 159 + 4 = -177$$

结果不为 15。

考虑 A_1 可能表示矩阵的 1-范数（即列和范数），定义为各列元素绝对值之和的最大值：

- 第一列：$|2| + |3| + |-10| = 2 + 3 + 10 = 15$
- 第二列：$|3| + |-1| + |2| = 3 + 1 + 2 = 6$
- 第三列：$|-1| + |5| + |1| = 1 + 5 + 1 = 7$
  最大值为 15。

其他范数计算：

- 无穷范数（行和范数）：各行元素绝对值之和的最大值：
  - 第一行：$|2| + |3| + |-1| = 2 + 3 + 1 = 6$
  - 第二行：$|3| + |-1| + |5| = 3 + 1 + 5 = 9$
  - 第三行：$|-10| + |2| + |1| = 10 + 2 + 1 = 13$
    最大值为 13，不为 15。
- Frobenius 范数：元素平方和的平方根：

$$\|A\|_F = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2+3^2+(-1)^2+5^2+(-10)^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+9+1+9+$$

不为 15。

考虑余子式或代数余子式，但计算结果均不为 15：

- a_{11} 的余子式：$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$
- a_{12} 的余子式：$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = 53$
- a_{13} 的余子式：$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = -4$
- a_{21} 的余子式：$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$
- a_{22} 的余子式：$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = -8$
- a_{23} 的余子式：$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = 34$
- a_{31} 的余子式：$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$
- a_{32} 的余子式：$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13$
- a_{33} 的余子式：$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11$

考虑逆矩阵或伴随矩阵的元素，但计算结果均不为 15。

综上，1-范数计算结果为 15，符合答案。因此，A_1 表示矩阵的 1-范数。

$$\boxed{15}$$

1.21

要确定使得26的平方根近似值相对误差限≤0.1%所需的最少有效数字位数，可按以下步骤分析：

1. **计算√26的近似值**

$\sqrt{26} \approx 5.099019514...$，其数量级为$10^0$（首位有效数字在个位）。

2. **有效数字与相对误差关系**

   对于k位有效数字，绝对误差限为：

$$|\Delta x| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

   相对误差限为：

$$\frac{|\Delta x|}{|x^*|} \leq \frac{0.5 \times 10^{-k+1}}{x^*}$$

   代入$x^* \approx 5.099$，要求相对误差≤0.1%即：

$$\frac{0.5 \times 10^{-k+1}}{5.099} \leq 0.001$$

3. **求解不等式**

$$0.5 \times 10^{-k+1} \leq 0.001 \times 5.099 \approx 0.005099$$

   化简得：

$$10^{-k+1} \leq 0.010198 \implies -k+1 \leq \log_{10}(0.010198) \approx -2$$

   解得：

$$k \geq 3$$

4. **验证结果**
   - **3位有效数字**：近似值5.10，绝对误差限0.005，相对误差≈0.098%（满足条件）。
   - **2位有效数字**：近似值5.1，绝对误差限0.05，相对误差≈0.98%（不满足）。

   结论：至少需要**3位有效数字**。

1.22

用高斯-赛德尔迭代法求解线性方程组 $Ax = b$ 时，系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ 的收敛条件需满足以下分析：

1. **严格对角占优**：
   当矩阵严格对角占优时，即每行对角元素的绝对值大于该行其他元素绝对值之和，即 $|1| > 2|a|$，解得 $|a| < \frac{1}{2}$。此时高斯-赛德尔迭代收敛。
2. **对称正定性**：
   若矩阵 A 对称正定，则高斯-赛德尔迭代必收敛。
   - **一阶主子式**：$1 > 0$，恒成立。
   - **二阶主子式**：$1 - a^2 > 0$，即 $|a| < 1$。
   - **三阶主子式**（行列式）：

$$\det(A) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)^2(2a+1).$$

     当 $2a + 1 > 0$ 时（即 $a > -\frac{1}{2}$），行列式为正。结合二阶主子式条件，对称正定要求 $-\frac{1}{2} < a < 1$。
3. **综合条件**：
   - 当 $|a| < \frac{1}{2}$ 时，矩阵严格对角占优，迭代收敛。
   - 当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时，矩阵对称正定，迭代收敛。
   - 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 或 $a \geq 1$ 时，矩阵不满足正定性或对角占优，迭代可能发散。
     结论：
     高斯-赛德尔迭代法收敛的充要条件是 a 满足

$$\boxed{-\frac{1}{2} < a < 1}$$

1.23

矩阵 A 的无穷范数 $\|A\|_\infty$ 定义为矩阵各行元素绝对值之和的最大值。
给定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -10 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

计算各行元素绝对值之和：

- 第一行：$|2| + |8| + |-1| = 2 + 8 + 1 = 11$
- 第二行：$|3| + |1| + |2| = 3 + 1 + 2 = 6$
- 第三行：$|-10| + |2| + |0| = 10 + 2 + 0 = 12$

取最大值：$\max(11, 6, 12) = 12$

因此，$A_\infty = \|A\|_\infty = 12$。

1.24

该数值求积公式具有**3次代数精度**。
解析过程：

1. **代数精度定义**：若公式对所有次数≤m的多项式精确成立，但对m+1次不成立，则代数精度为m。
2. **验证过程**：
   - **0次多项式**（如f(x)=1）：积分值=2，公式计算=1/3+4/3+1/3=2，成立。
   - **1次多项式**（如f(x)=x）：积分值=0，公式计算=1/3(-1)+4/3(0)+1/3(1)=0，成立。
   - **2次多项式**（如$f(x)=x^2$）：积分值=2/3，公式计算=1/3(1)+4/3(0)+1/3(1)=2/3，成立。
   - **3次多项式**（如$f(x)=x^3$）：积分值=0，公式计算=1/3(-1)+4/3(0)+1/3(1)=0，成立。
   - **4次多项式**（如$f(x)=x^4$）：积分值=2/5，公式计算=1/3(1)+4/3(0)+1/3(1)=2/3≠2/5，不成立。
3. **结论**：公式对3次及以下多项式精确，但对4次不精确，故代数精度为**3次

1.25

要使用牛顿法求任意数 a 的立方根 $a^{1/3}$，需要求解方程 $x^3 - a = 0$ 的根。

设函数 $f(x) = x^3 - a$，其导数为 $f'(x) = 3x^2$.

牛顿法的迭代公式为：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

代入函数和导数：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2}$$

简化表达式：

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^3}{3x_n^2} - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - (x_n^3 - a)}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}$$

因此，迭代公式为：

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}$$

该公式可用于迭代计算 a 的立方根，需提供初始猜测值 x_0.

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}}$$