第 6 章　参数估计

1．假设总体 X 的概率分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1,$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一组样本值，试求未知参数 p 的矩估计量.

【分析】利用矩估计法的一般步骤求解.

解：总体的一阶矩为

$$\mu_1=E(X)=0\times p^0\times(1-p)+1\times p^1\times(1-p)^0=p$$

用样本的一阶矩 $A_1=\bar{X}$ 替换上式中总体的一阶矩 μ_1 得 p 的矩估计量为

$$\hat{p}=\bar{X}$$

2．假设总体 X 的概率分布律为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{3}{2}\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$1-2\theta-\frac{1}{2}\theta^2$	θ^2

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 为未知参数，现取得样本值 $x_1=1,x_2=1,x_3=2,x_4=0,x_5=0,x_6=1$，求参数 θ 的矩估计值.

【分析】利用矩估计法的一般步骤求解.

解　总体的一阶矩为

$$\mu_1=E(X)=0\times\frac{3}{2}\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times(1-2\theta-\frac{1}{2}\theta^2)+3\theta^2=-2\theta+2$$

用样本的一阶矩 $A_1=\bar{X}$ 替换上式中总体的一阶矩 μ_1 得

$$\bar{X}=-2\theta+2$$

解得：$\theta=1-\dfrac{\bar{X}}{2}$

$\therefore\theta$ 的矩估计值为

$$\hat{\theta}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=\frac{7}{12}$$

3．假设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1},\ 0\le x\le 1,\\ \quad 0, \qquad \text{其他}.\end{cases}$$

其中$\theta(\theta>0)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，求参数θ的矩估计量.

【分析】利用矩估计法的一般步骤求解.

解　总体的一阶矩为

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}x^{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

用样本的一阶矩$A_1=\bar{X}$替换上式中总体的一阶矩μ_1得

$$\bar{X}=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

解得：$\theta=\left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$

$\therefore\theta$的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$$

4．假设总体$X\sim B(5,p)$，参数p未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，求：

(1) 参数p的矩估计量；

(2) 参数p的最大似然估计量.

【分析】利用矩估计法和最大似然估计法的一般步骤求解.

解　$\because X\sim B(5,p)$

$\therefore X$的分布律为

$$P\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}=C_5^k p^k\times(1-p)^{5=k},k=0,1,2,3,4,5$$

(1) 总体的一阶矩为

$$\mu_1=E(X)=\sum_{i=1}^{5}kC_5^k p^k\times(1-p)^{5=k}=5p$$

用样本的一阶矩$A_1=\bar{X}$替换上式中总体的一阶矩μ_1得

$$\bar{X}=5p$$

解得

$$p=\frac{\overline{X}}{5}$$

∴ p 的矩估计量为

$$\hat{p}=\frac{\overline{X}}{5}$$

(2) 似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}C_5^{x_1}p^{x_1}\times(1-p)^{5-x_i}=C_5^{x_1}C_5^{x_2}\cdots C_5^{x_n}p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\times(1-p)^{5n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

则

$$\ln[L(p)]=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\sum_{i=1}^{n}C_5^{x_1}C_5^{x_2}\cdots C_5^{x_n}p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\times(1-p)^{5n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\frac{d\ln[L(p)]}{dp}=\sum_{i=1}^{n}\ln C_5^{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(5n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)=0$$

解得

$$p=\frac{\overline{x}}{5}$$

∴ p 的最大似然估计量为：$\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{5}$

5．假设总体 X 的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

参数 $\theta>-1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

【分析】利用矩估计法和最大似然估计法的一般步骤求解.

解 **(1)** 总体的一阶矩为

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+1}\Big|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

用样本的一阶矩 $A_1=\overline{X}$ 替换上式中总体的一阶矩 μ_1 得

$$\overline{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

解得

$$\theta=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

$\therefore \theta$ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)\times x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}$$

则 $\ln[L(\theta)]=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\frac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 $\quad \theta=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$\therefore$ θ 的最大似然估值为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

6．假设某电子元件的寿命 X (以小时计)服从参数为 θ 的指数分布，θ 未知，现测得样本值如下

168，130，169，143，174，198，108，212，252

求：(1)参数 θ 的矩估计值；(2) 参数 θ 的最大似然估计值.

【分析】利用矩估计法和最大似然估计法的一般步骤求解.

解 由题可知总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0\ , & x\le 0.\end{cases}$$

(1) 总体的一阶矩为：

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\theta$$

用样本的一阶矩 $A_1=\overline{X}$ 替换上式中总体的一阶矩 μ_1 得

$$\theta=\overline{X}$$

解得

$$\hat{\theta}=\overline{x}$$

∴ θ 的最大似然估值为

$$\hat{\theta}=\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=\frac{518}{3}$$

(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x_i/\theta}=\frac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta}$$

则 $\ln[L(\theta)]=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta}=-\frac{\theta}{n}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 $\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}$

∴ θ 的最大似然估值为 $\hat{\theta}=\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=\frac{518}{3}$

7．假设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

参数 $\sigma>0$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，求 σ 的最大似然估计量.

【分析】利用最大似然估计法的一般步骤求解.

解 似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-x_i^2/2\sigma^2}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(\sigma^2)^n}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2\sigma^2}$$

则

$$\ln[L(\sigma)]=-2n\ln\sigma+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\frac{d\ln[L(\sigma)]}{d\sigma}=-\frac{2n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

解得 $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}}$

$\therefore$ σ 的最大似然估值为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}}$

8．假设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}},-\infty<x<\infty,$$

参数 $\lambda>0$ 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的一组样本值，求 λ 的最大似然估计值.

【分析】利用最大似然估计法的一般步骤求解.

解　似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\lambda}}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(2\lambda)^n}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|/\lambda}$$

则

$$\ln[L(\lambda)]=-n\ln(2\lambda)-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta}=-\frac{n}{2\lambda}\times 2+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

解得

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$\therefore$ θ 的最大似然估值为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

9．假设总体 $X\sim U(0,\theta+1)$，θ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，求 θ 的最大似然估计量.

【分析】利用最大似然估计法的一般步骤求解.

解　由题可知总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta+1}, & 0<x<\theta+1,\\ 0\ , & x\le 0.\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\frac{1}{(\theta+1)^n},$$

由于$0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta+1$，记$x_{(n)}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则$0\le x_{(n)}\le\theta+1$，可见，

当$\theta+1$取到$x_{(n)}$时，$L(\theta)$取到最大值$\frac{1}{(x_{(n)})^n}$.

故θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)-1.$$

θ的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)-1.$$

10．假设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，σ^2未知，求：当k取何值时，统计量

$$\hat{\sigma}^2=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

是方差σ^2的无偏估计量.

【分析】利用无偏性的定义求解.

解　$\because X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\therefore\ X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\therefore\ E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$

$\therefore\ E(X_{i+1}^2)=E(X_i^2)=[E(X_i)]^2+D(X_i)=\mu^2+\sigma^2$

$$\therefore E(\hat{\sigma}^2)=E\left(k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right)=k\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1}-X_i)^2]$$

$$=k\sum_{i=1}^{n-1}[E(X_{i+1}^2)-2E(X_{i+1})E(X_i)-E(X_i^2)]$$

$$=k\sum_{i=1}^{n-1}\mu^2+\sigma^2-2\mu^2+\mu^2+\sigma^2=2(n-1)k\sigma^2$$

$\because$ 当 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$ 时，$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2$

$\therefore$ 当 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$ 时，$\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

11．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，μ,σ^2 均未知，试证明下列统计量：

(1) $\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2)+\dfrac{1}{3}(X_3+X_4)$

(2) $\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$

(3) $\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{3}X_2+\dfrac{1}{6}X_3$

都是 μ 的无偏估计量，并说明那个统计量最有效.

【分析】利用无偏性和有效性的定义求解.

解　由题知：$E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$ 且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$$\therefore D(\hat{\mu}_1)=D[\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)=\frac{1}{36}[\mathrm{D}(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[\mathrm{D}(X_3)+D(X_4)]$$

$$=\frac{1}{36}\times2\sigma^2+\frac{1}{9}\times2\sigma^2=\frac{5}{18}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_2)=D[\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)]$$

$$=\frac{1}{16}\times4\sigma^2=\frac{1}{4}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3)=D[\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3]=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)+\frac{1}{36}D(X_3)$$

$$=\frac{1}{4}\times\sigma^2+\frac{1}{9}\times\sigma^2+\frac{1}{36}\times\sigma^2=\frac{7}{18}\sigma^2$$

$\therefore D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_3)$

$\therefore \hat{\mu}_2$ 最有效

12．假设总体 $X\sim\pi(\lambda)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，参数 λ 未知，试证明：

(1) 样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 都是 λ 的无偏估计量；

(2) 对任意的常数 $c(0\le c\le 1)$，统计量 $c\bar{X}+(1-c)S^2$ 都是 λ 的无偏估计量.

【分析】利用无偏性的定义求解.

证明：由题可知， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且 $E(X_i)=E(X)=\lambda, D(X_i)=D(X)=\lambda$

(1) $\because E(\bar{X})=E(X)=\lambda, D(S^2)=D(X)=\lambda$

$\therefore \bar{X}$ 和 S^2 都是 λ 的无偏估计量.

(2) 由(1)可知， $E[c\bar{X}+(1-c)S^2]=cE(\bar{X})+(1-c)E(S^2)=c\lambda+(1-c)\lambda=\lambda$，

$\therefore$对任意的常数 c ,统计量 $c\bar{X}+(1-c)S^2$ 都是 λ 的无偏估计量.

15．设某工厂生产的灯泡寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从一批产品中随机地抽查了 17 个，测得样本均值为 $\bar{x}=1033.3$（单位：h），样本方差为 $s^2=16.9^2$，求这批灯泡平均寿命的置信水平为 95%的置信区间.

【分析】利用单个正态总体中，方差 σ^2 未知时，关于 μ 的置信区间求解.

解　在此， $\bar{x}=1033.3$, $s^2=16.9^2$， $n=17$, $1-\alpha=0.95$

所以 $\alpha=0.05$

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(16)=2.1199$,

故这批灯泡平均寿命的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(1033.3\pm\frac{16.9}{\sqrt{17}}\times 2.1199\right)\approx(1024.6108,1041.9892).$$

16．用一个仪器测量某物体的长度，假设测量值 $X \sim N(\mu, 0.16)$，现进行 5 次测量，得数据（单位：mm）如下

53.2　52.4　53.3　52.8　52.5

求 μ 的置信水平为 95%的置信区间．

【分析】利用单个正态总体中，方差 σ^2 已知时，关于 μ 的置信区间求解．

解　在此 $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 52.84$，$\sigma = 0.32$ $\sigma = 0.4$

由 $1-\alpha = 0.95$ 知 $\alpha = 0.05$，

而 $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 = 0.975$，查表得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$，

因此 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}\right) = \left(52.84 \pm \frac{\sqrt{0.16}}{\sqrt{5}} \times 1.96\right) \approx (52.4894, 53.1906).$$

17．用包装机包装葡萄糖，某日开工后，抽取 12 包糖，称得重量(单位：两，1 两=50 克)如下：

10.1　10.3　10.4　10.5　10.2　9.7　9.8　10.1　10.0　9.9　9.8　10.4

假设袋装葡萄糖的重量 X 服从正态分布，根据以上数据，试求该机器所包葡萄糖的平均重量的置信水平为 95%的置信区间．

【分析】利用单个正态总体中，方差 σ^2 未知时，关于 μ 的置信区间求解．

解　在此，$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 10.1$ $s^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{0.78}{11}$，，

因为 $1-\alpha = 0.95$，所以 $\alpha = 0.05$

查表得　$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(11) = 2.201$，

故 μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \left(10.1 \pm \frac{\sqrt{0.78/11}}{\sqrt{12}} \times 2.201\right) \approx (9.9308, 10.2692).$$

18．从一块稻田随机的抽取 100 株稻子，假设稻子的株高 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现测得它们的平均株高为 $\bar{x} = 120$，方差为 $s^2 = 15^2$ (单位：cm)，试求：

(1) 该田中稻子平均株高的置信水平为 95%的置信区间.

(2) 该田中稻子株高方差的置信水平为 95%的置信区间.

解 在此，$\overline{x}=120$ $s^2=15^2$， $n=10$

因为$1-\alpha=0.95$，所以$\alpha=0.05$

(1) **【分析】**利用单个正态总体中，σ^2 未知时，关于 μ 的置信区间求解.

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(99)\approx z_{0.025}=1.96$，

故平均株高 μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\overline{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(120\pm\frac{15}{\sqrt{100}}\times t_{0.025}(99)\right)$$

$$\approx\left(120\pm\frac{15}{\sqrt{100}}\times z_{0.025}\right)\approx(117.06,122.94)$$

(2) **【分析】**利用单个正态总体中，μ 未知时，关于 σ^2 的置信区间求解.

查表得

$$\chi^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2{}_{0.975}(99)\approx\frac{1}{2}(z_{0.975}+\sqrt{197})^2=\frac{1}{2}(-1.96+\sqrt{197})^2\approx72.9109\ ,$$

$$\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2{}_{0.025}(99)\approx\frac{1}{2}(z_{0.025}+\sqrt{197})^2=\frac{1}{2}(1.96+\sqrt{197})^2\approx127.9307$$

故株高方差σ^2 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)\approx(174.1177,305.5099)\ .$$

19．用一个仪器测量钢轴的直径，现测得一组数据(单位：mm)

53.5　54.1　53.2　53.3　54.4　53.6　53.7　53.8

假设测得钢轴的直径值$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$．求方差σ^2 的置信水平为 0.90 的置信区间.

【分析】利用单个正态总体中，μ 未知时，关于σ^2 的置信区间求解.

解 这是均值μ 未知，求σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

在此， $\overline{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=53.7$，$s^2=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2=0.16$

由$1-\alpha=0.9$ 知$\alpha=0.1$，查表得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.05}(7) = 14.067，\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.95}(7) = 2.167$$

故σ^2的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{7\times 0.16}{\chi^2_{0.05}(7)}, \frac{7\times 0.16}{\chi^2_{0.95}(7)}\right) \approx (0.0796, 0.5168)$$

20．假设某种固体燃料火箭推进器的燃烧率$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现测得样本容量$n = 20$，样本均值$\overline{x} = 18cm/s$，样本标准差$s = 0.05cm/s$，求σ的置信水平为 0.95 的置信区间.

【分析】利用单个正态总体中，均值μ未知时，关于σ^2的置信区间求解.

解 这是均值μ未知，求σ^2的置信水平为 0.90 的置信区间.

在此， $n = 20$， $s = 0.05$

由$1-\alpha = 0.95$知$\alpha = 0.05$，查表得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(19) = 32.852，\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(19) = 8.907$$

故σ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right) = \left(\sqrt{\frac{19\times 0.05^2}{\chi^2_{0.025}(19)}}, \sqrt{\frac{19\times 0.05^2}{\chi^2_{0.975}(19)}}\right) \approx (0.038, 0.073).$$

21．假设某厂生产的钢珠直径$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ （ 单位：mm ），现从刚生产的一批钢珠中随机的取 9 个，测得$\sum_{i=1}^{9} x_i = 27.954$，$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 90.521$，求：(1) μ的置信水平为 95%的置信区间．(2)σ的置信水平为 95%的置信区间.

解 在此，$\overline{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{1}{9}\times 27.954 = 3.106$

$$s^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9\overline{x}^2\right) = \frac{1}{8}\left(90.521 - 9\times 3.106^2\right) \approx 0.462$$

因为$1-\alpha = 0.95$，所以$\alpha = 0.05$

(1) **【分析】**利用单个正态总体中，σ^2未知时，关于μ的置信区间求解.

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$，

故μ的置信水平为95%的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(3.106\pm\sqrt{\frac{0.462}{9}}\times t_{0.025}(8)\right)=(2.5835,3.6285)$$

(2) **【分析】**利用单个正态总体中，均值μ未知时，关于标准差σ的置信区间求解.

查表得

$$\chi^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2{}_{0.975}(8)=17.535,$$

$$\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2{}_{0.975}(8)=2.18$$

故σ的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{8\times s^2}{\chi^2_{0.025}(8)}},\sqrt{\frac{8\times s^2}{\chi^2_{0.975}(8)}}\right)=(0.4591,1.3021).$$

22．为比较甲、乙两种型号同一产品的寿命（单位：h），随机抽取甲型产品5个，测得平均寿命$\bar{x}_1=1000$，标准差$s_1=28$，随机抽取乙型产品7个，测得平均寿命$\bar{x}_2=980$，标准差$s_2=32$，根据经验可认为两种型号产品的寿命均服从正态分布，且它们的方差相等，求两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.99的置信区间.

【分析】利用两个正态总体中，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知时，关于均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间求解.

解　在此，$\bar{x}_1=1000$，$\bar{x}_2=980$ $s_1=28$，$s_2=32$，$n_1=5$，$n_2=7$，则

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1{}^2+(n_2-1)s_2{}^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{4\times28^2+6\times32^2}{10}}=\sqrt{928},$$

由$1-\alpha=0.95$知$\alpha=0.05$，查表得

$$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.005}(10)=3.1693,$$

故$\mu_1-\mu_2$的置信水平为99%的置信区间为

$$\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right),$$

$$=\left((1000-980)\pm\sqrt{928}\times\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}\times 3.1693\right),$$

$$=(-36.5319, 76.5319).$$

.

24．A、B 两台机床加工同一种零件，假设两台机床加工的零件长度都服从正态分布，现分别从两台机床加工的零件中抽取容量 $n_1=9$ 和 $n_2=13$ 的样本，测量其长度得：$s_1^2=0.25$，$s_2^2=0.36$，试求两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 置信区间.

【分析】利用两个正态总体中，μ_1，μ_2 未知时，关于方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间求解.

解　在此 $n_1=9$，$n_2=13$，$s_1^2=0.25$，$s_2^2=0.36$，

由 $1-\alpha=0.9$ 知 $\alpha=0.1$，故查表得

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(8,12)=2.85,\quad F_{1\text{-}\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.95}(8,12)=\frac{1}{3.28},$$

故 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

$$=\left(\frac{0.25/0.36}{F_{0.05}(8,12)},\frac{0.25/0.36}{F_{0.95}(8,12)}\right)=(0.2437, 2.2778)$$

27．从某鱼塘捕获的鱼，其含汞量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma=0.32$，μ 未知，现随机的取了 10 条鱼，测得含汞量（单位：mg/kg）如下：

0.8　1.6　0.9　0.8　1.2　0.4　0.7　1.0　1.2　1.1

求均值 μ 的单侧置信上限和单侧置信下限(置信水平为 0.95).

【分析】利用单个正态总体中，σ^2 已知时，关于方差比 μ 的单侧置信区间求解.

解　在此，$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=0.97$

因为 $1-\alpha=0.95$，所以 $\alpha=0.05$

查表得 $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

故 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限为

$$\overline{\mu} = \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha = 0.97 + \frac{0.32}{\sqrt{10}} \times 1.645 = 1.1365 .$$

μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限为

$$\underline{\mu} = \overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha = 0.97 - \frac{0.32}{\sqrt{10}} \times 1.645 = 0.8035$$

28. 设某电子元件的寿命服从正态分布，现从一批电子元件中随机地抽取 6 只，测得寿命（单位：h）数据如下：

1022 1013 1035 1037 1045 1031

求：(1) 该电子元件寿命均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限；

(2) 该电子元件寿命方差的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 在此，$\overline{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 1030.5$

$$s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 = 130.3$$

因为$1-\alpha = 0.95$，所以$\alpha = 0.05$

(1) 【分析】利用单个正态总体中，σ^2 未知时，关于方差比 μ 的单侧置信区间求解.

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(5) = 2.015$，$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(5) = 2.015$

寿命均值 μ 的置信水平为 95%的单侧置信下限为

$$\underline{\mu} = \overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha/2}(n-1) = 1030.5 - \sqrt{\frac{130.3}{6}} \times t_{0.05}(5) = 1021.1099$$

$$\underline{\mu} = \overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha}(n-1) = 1030.5 - \sqrt{\frac{130.3}{6}} \times t_{0.05}(5) = 1021.1099$$

(2) 【分析】利用单个正态总体中，μ 已知时，关于方差 σ^2 的单侧置信区间求解.

查表得

$$\chi^2{}_\alpha(n-1) = \chi^2{}_{0.05}(5) = 11.071$$

寿命均值 σ^2 的置信水平为 95%的单侧置信下限为

$$\underline{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)} = \frac{5\times 130.3}{\chi_{0.05}^2(5)} = 58.8474$$