第 1 章 随机事件及其概率

1．一个工人生产了 3 个零件，以事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示其生产的第 i 个零件是合格品，试用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示下列事件：

(1)只有第 1 个零件是合格品 B_1；

(2)3 个零件中只有 1 个合格品 B_2；

(3)3 个零件中至少有一个合格品 B_3；

(4)第 1 个是合格品，但后两个零件中至少有一个次品 B_4；

(5)3 个零件中最多只有两个合格品 B_5；

(6)3 个零件都是次品 B_6．

【分析】 利用随机事件的关系和运算求解.

解 (1) $B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$；

(2) $B_2=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$；

(3) $B_3=A_1\cup A_2\cup A_3$；

(4) $B_4=A_1(\bar{A}_2\cup\bar{A}_3)=A_1(\overline{A_2A_3})=A_1-A_1A_2A_3$；

(5) 法一：三个至少有一个不合格品，$B_5=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3$；

法二：三个都是合格品的对立事件，$B_5=\overline{A_1A_2A_3}$；

(6) 法一：$B_6=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$；

法二：三个中至少有一个合格品的对立事件，$B_6=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$．

2． 某人外出旅游两天．据预报，第一天下雨的概率为 0.6，第二天下雨的概率为 0.3，两天都下雨的概率为 0.1，试求：

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率；

(2) 至少有一天下雨的概率；

(3) 两天都不下雨的概率；

(4) 至少有一天不下雨的概率．

【分析】 利用概率的性质求解.

解 设 A_i 表示为第 i 天下雨的事件($i=1,2$)，则由题意

$P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_1A_2)=0.1$.

(1) 设 B 为第一天下雨而第二天不下雨的事件，则

$B=A_1\bar{A}_2=A_1-A_1A_2$，且 $A_1A_2\subset A_1$，

于是$P(B)=P(A_1-A_1A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.6-0.1=0.5$；

(2) 设C为至少有一天下雨的事件，则由$C=A_1\cup A_2$得

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=0.6+0.3-0.1=0.8\text{；}$$

(3) 设D为两天都不下雨的事件，则由$D=\bar{A}_1\bar{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}$得

$$P(D)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2\text{；}$$

(4) 设E为至少有一天不下雨的事件，则由$E=\overline{A_1A_2}$得

$$P(E)=P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-0.1=0.9.$$

3． 10个产品中有4个次品，其中任取3个，求至少有一个次品的概率.

【分析】 利用概率的性质求解.

解 设A_i表示“取出的3个产品中次品的个数”，$i=0,1,2,3$，B表示“至少有一个次品”.

方法一：

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}.$$

方法二：$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(A_0)=1-\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=1-\dfrac{6\times5\times4}{10\times9\times8}=\dfrac{5}{6}$.

4． 从0，1，⋯，9等十个数字中任意选出三个不同的数字．求下列事件的概率：

(1) $A_1=\{$三个数字中不含0和5$\}$；

(2) $A_2=\{$三个数字中不含0或5$\}$；

(3) $A_3=\{$三个数字中含0但不含5$\}$.

【分析】 利用古典概率模型求解.

解 (1) 十个数字中任取三个不同的数字一共有C_{10}^3种可能，不含0和5，只需要从剩下的8个中取出3个，$P(A_1)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$；

(2) 不含0共有C_9^3种取法，同理不含5也有C_9^3种取法，不含0和5有C_8^3种取法，故

$$P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}\text{；}$$

(3) $P(A_3)=\dfrac{C_9^2-C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{30}$(注：含0的减去含0和5的)；

或$P(A_3)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{30}$(含0不含5只需取0且从0和5之外的8个种任意取2个).

5． 设盒子中有十只球，其中四只红球，三只白球和三只黑球，现从中不放回地取三次，每次取一个球，求三次所取的球颜色不同的概率．

【分析】 利用古典概率模型求解.

解 设 A 表示所取球颜色不同，则由古典概型，不放回取一共有$10\times9\times8$种可能，球颜色不同是指每种颜色球各取一个，共有 $4\times3\times3$ 种取法，再考虑顺序共有 $3!$ 种排法，

$$P(A)=\frac{4\times3\times3\times3!}{10\times9\times8}=\frac{3}{10}.$$

6． 设十件产品中有两件次品，现依次从中不放回地任取两次，每次取一件，求两件产品中恰好有一件次品的概率．

【分析】 利用古典概率模型求解.

解 设 A 表示两件产品中恰好有一件次品：$P(A)=\dfrac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$.

7． 将 n 只球随机地装入 N ($N\ge n$))个盒子中去，问每个盒子至多装一只球(这一事件记为 A)的概率(设盒子容量不限).

【分析】 利用古典概率模型求解.

解 将 n 只球装入 N 个盒子中去，每一种装法是一基本事件．易知本题是古典概率模型．因每一只球都可以装入 N 个盒子中的任一个盒子，每个球有 N 种装法，n 只球共有 $N\times N\times\cdots\times N=N^n$ 种装法，即 $N(S)=N^n$．而每个盒子至多装一只球，则第一只球共有 N 种装法，第二只球有 $N-1$ 种装法(因第一只球已占去一个盒子)，$\cdots$，第 n 只球有 $N-(n-1)$ 种装法(因前 $n-1$ 只球已占去 $n-1$ 个盒子)，故

$$N(A)=N(N-1)\cdots(N-(n-1)),$$

于是

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\mathrm{S})}=\frac{N(N-1)\cdots(N-(n-1))}{N^n}.$$

特别地，若盒子数 N 与球数 n 相等，即将 n 只球随机地装入 n 个盒子中去，则每个盒子恰有一只球的概率为

$$p=\frac{n!}{n^n}.$$

8． 将编号为 1,2,3 的三本书随意排列在书架上，求至少有一本书从左到右排列的序号与它的编号相同的概率.

【分析】 主要使用加法公式求解.

解 设 $A_i=\{$第 i 本书刚好在第 i 个位置$\}$，

$B=\{$至少有一本书从左到右排列的序号与它的编号相同$\}$，

则 $B=A_1+A_2+A_3$，且 $P(A_i)=\dfrac{2!}{3!}=\dfrac{1}{3}(i=1,2,3)$，

$P(A_iA_j)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}(i,j=1,2,3,i\neq j)$，$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$，

故 $P(B)=P(A_1)+(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)=\frac{2}{3}$.

9． 设袋中有十只球，其中六只红球和四只白球，现从中不放回地任取两只球，求已知在第一次取得红球的条件下，第二次取得白球的概率．

【分析】 求解条件概率的两种方法.

解 法一(公式法) 设事件 A 表示第一次取得红球，B 表示第二次取得白球，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{6\times 4}{10\times 9}}{\frac{6}{10}}=\frac{4}{9}.$$

法二(缩减样本空间法) 当第一次取得红球时，袋中还剩下九只球，其中五只红球和四只白球(注意：样本空间已经发生变化)．此时再从袋中任取一只球，则该球为白球的概率为 $\frac{4}{9}$．故已知在第一次取得红球的条件下，第二次取得白球的概率为 $\frac{4}{9}$．

10． 某种动物活 15 年的概率为 0.8，活 25 年的概率为 0.3，求现年 15 岁的这种动物活到 25 岁的概率．

【分析】 条件概率的求解.

解 设 $A=\{$这种动物活到 25 岁以上$\}$，$B=\{$这种动物活到 15 岁以上$\}$.

由题设 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.8$．

由于 $A\subset B$，故 $AB=A$，从而 $P(AB)=P(A)=0.3$．

于是 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.8}=0.375$．

11． 一批零件共 100 个，其中有 10 个次品，依次从中不放回地任取三个零件，

(1) 已知第一次、第二次取到次品，求第三次取到正品的概率 p_1；

(2) 求第三次才首次取到正品的概率 p_2．

【分析】 使用条件概率的公式及其概率的性质.

解 设 A_i 表示“第 i 次取到正品”，$i=1,2,3$，

(1) $p_1=P(A_3\mid \bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{90}{98}=\frac{45}{49}$；

(2) 第三次取到正品

$$A_3=A_3\Omega=A_3(A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2\cup A_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2)=A_1A_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$

其中只有 $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 是指第三次才首次取到正品，故

$$p_2=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}.$$

12．盒中装有 6 只乒乓球，其中有 2 只旧球．每次任取 1 只，连取两次(不放回)，求至少有一次取到旧球的概率．

【分析】 主要利用加法公式求解．

解 设事件 $A_i=\{$第 i 次取到旧球$\}(i=1,2)$．则

$P(A_1)=\dfrac{2}{6}$，$A_2=\bar{A}_1A_2\cup A_1A_2$，且 $(\bar{A}_1A_2)(A_1A_2)=\varnothing$，由有限可加性

$$P(A_2)=P(\bar{A}_1A_2)+P(A_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)+P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{6},$$

于是所求概率为

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{2}{30}=\frac{3}{5}.$$

13．某单项选择题有四个答案可供选择．已知 60%的考生对相关知识完全掌握，他们可选出正确答案；20%的考生对相关知识部分掌握，他们可剔除两个不正确答案，然后随机选一个答案；20%的考生对相关知识完全不掌握，他们任意选一个答案．现任选一位考生，求

(1) 其选对答案的概率．

(2) 若已知该考生选对答案，问其确实完全掌握相关知识的概率是多少?

【分析】 利用全概率公式和贝叶斯公式求解．

解 设 A_1 表示该考生完全掌握相关知识；A_2 表示该考生掌握部分相关知识；A_3 表示该考生完全不掌握相关知识；B 表示该考生选对答案；由题意，$P(A_1)=\dfrac{3}{5}$，$P(B\mid A_1)=1$，

$P(A_2)=\dfrac{1}{5}$，$P(B\mid A_2)=\dfrac{1}{2}$，$P(A_3)=\dfrac{1}{5}$，$P(B\mid A_3)=\dfrac{1}{4}$；

(1) 由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{3}{5}\times1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

(2) 由贝叶斯公式得 $P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{3}{5}\times1}{\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

14．电报信号由滴“•”与嗒“—”组成．设发报台传送“•”与“—”之比为 3：2．由于通信系统存在干扰，因此电报信号可能会失真．传递“•”时，失真的概率为 0.2(即发出“•”而收到“—”)；传送“—”时，失真的概率为 0.1(即发出“—”而收到“•”)．若收报台收到信号“•”，求发报台确实发出“•”的概率．

【分析】 利用全概率公式和贝叶斯公式求解．

解 设事件 $A=\{$收到“•”$\}$，$B_1=\{$发出“•”$\}$，$B_2=\{$发出“—”$\}$，则 B_1,B_2 构成一个划分，且 $P(B_1)=0.6$，$P(B_2)=0.4$，$P(A|B_1)=0.8$，$P(A|B_2)=0.1$．

由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.52,$$

由贝叶斯公式得所求条件概率

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}\approx0.923.$$

15．某厂卡车运送医药用品下乡，顶层装 10 个纸箱，其中 5 箱民用口罩、2 箱医用口罩、3 箱消毒棉花．到目的地时发现丢失一箱，不知丢失哪一箱．现从剩下 9 箱中任意打开 2 箱，结果都是民用口罩，求丢失的一箱也是民用口罩的概率．

【分析】 利用全概率公式和贝叶斯公式求解．

解 设事件 A= {任取 2 箱都是民用口罩}，$B=\{$丢失的一箱为$k\}$，$k=1,2,3$ 分别表示民用口罩、医用口罩、消毒棉花．则 B_1,B_2,B_3 构成完备事件组，且

$$P(B_1)=\frac{1}{2},P(B_2)=\frac{1}{5},P(B_3)=\frac{3}{10},$$

$$P(A|B_1)=\frac{C_4^2}{C_9^2},P(A|B_2)+P(A|B_3)=\frac{C_5^2}{C_9^2},$$

由全概率公式

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A|B_k)=\frac{8}{36},$$

由贝叶斯公式得所求条件概率

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{3}{36}\times\frac{36}{8}=\frac{3}{8}.$$

16．袋中有 6 张相同的卡片，上面分别标有数 0，1，2，3，4，5．现从袋中任意摸出两张卡片，已知两个数字之和大于 6，试判断先摸出的一张卡片上的数字最可能是几．

【分析】 利用全概率公式和贝叶斯公式求解．

解 事件 A= {两数之和大于 6}，$B=\{$先摸出的数字为$i\}$($i=0,1,2,3,4,5$)，

依题意

$$P(B_i)=\frac{1}{6}(i=0,1,2,3,4,5),P(A|B_0)=P(A|B_1)=0,P(A|B_2)=\frac{1}{5},$$

$$P(A|B_3)=P(A|B_4)=\frac{2}{5},P(A|B_5)=\frac{3}{5},$$

由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=0}^{5}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1+2+2+3}{5}=\frac{4}{15},$$

由贝叶斯公式

$$P(B_5|A)=\frac{P(B_5)P(A|B_5)}{P(A)}=\frac{3}{8},P(B_4|A)=P(B_3|A)=\frac{2}{8},$$

$$P(B_2|A)=\frac{1}{8},P(B_1|A)=P(B_0|A)=0,$$

因为 $P(B_5|A)>P(B_k|A),k=0,1,2,3,4$ 所以先摸出的卡片上的数字最可能是 5.

答：最有可能的数字是 5.

17．研究生录取过程中，有 5%的考生初试成绩优异直接被录取；50%的考生初试合格但需复试；其余 45%初试被淘汰．复试中 80%的考生通过并被录取；未通过复试者可通过调剂，有 50%的机会被录取．

(1) 求考生被录取的概率；

(2) 已知某考生已被录取，求其是通过调剂被录取的概率．

【分析】 利用全概率公式和贝叶斯公式求解．

解 设 $A=\{$初试成绩优异$\}$；$B=\{$需复试$\}$；$C=\{$初试被淘汰$\}$；$E=\{$复试通过$\}$；$H=\{$被录取$\}$

由已知 $P(A)=0.05$， $P(B)=0.5$， $P(C)=0.45$.

$$P(H|A)=1,P(H|BE)=1,P(E|B)=0.8,P(H|B\bar{E})=0.5,$$

(1) $A,BE,B\bar{E},C$ 构成一个划分，

$$P(BE)=P(B)P(E|B)=0.5\times0.8=0.4,$$

$$P(B\bar{E})=P(B)P(\bar{E}|B)=0.5\times0.2=0.1;$$

由全概率公式

$$P(H)=P(A)P(H|A)+P(BE)P(H|BE)+P(B\bar{E})P(H|B\bar{E})+P(C)P(H|C)$$

$$=0.05\times1+0.4\times1+0.1\times0.5+0.45\times0=0.5.$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B\bar{E}|H)=\frac{P(B\bar{E})P(H|B\bar{E})}{P(H)}=\frac{0.05}{0.5}=0.1.$$

18．据统计，对于某一种疾病的两种症状：症状 A、症状 B，有 20%的人只有症状 A，有 30%的人只有症状 B．有 10%的人两种症状都有，其他的人两种症状都没有．在患这种疾病的人群中随机地选一人，求：

(1) 该人两种症状都没有的概率；

(2) 该人至少有一种症状的概率；

(3) 已知该人有症状 B，求该人有两种症状的概率．

【分析】 此题主要考察概率的性质、随机事件间关系及运算等知识的应用.

解 用 A 表示事件"该种疾病具有症状 A"，用 B 表示事件"该种疾病具有症状 B".

由已知 $P(A\bar{B})=0.2$，$P(\bar{A}B)=0.3$，$P(AB)=0.1$.

因为 $S=A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup AB\cup\bar{A}\bar{B}$，且 $A\bar{B},\bar{A}B,AB,\bar{A}\bar{B}$ 互斥，

所以 $P(A\cup B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB)=0.2+0.3+0.1=0.6$.

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.6=0.4$.

(1) $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\bar{B})-P(\bar{A}B)-P(AB)=0.4$；

(2) $P(A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup AB)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB)=0.2+0.3+0.1=0.6$；

(3) $B=AB\cup\bar{A}B$，$AB,\bar{A}B$ 互斥，

$P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=0.1+0.3=0.4$，

$$P(AB|B)=\frac{P\left[(AB)B\right]}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}.$$

19．一个工人看管三台车床，在一小时内车床不需要工人照管的概率：第一台等于 0.9，第二台等于 0.8，第三台等于 0.7．求在一小时内三台车床中最多有一台需要工人照管的概率．

【分析】 主要利用事件的独立性求解.

解 设 A、B、C 分别表第一、二、三台车床不需要工人照管这事件；D 表示最多有一台需要工人照管这事件．显然 A、B、C 是独立的.

则 $D=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$，

$$P(D)=P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})+P(ABC)$$

$$=P(\bar{A})P(B)P(C)+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(B)P(C)$$

$$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3+0.9\times0.8\times0.7$$
$$=0.056+0.126+0.216+0.504=0.902.$$

20．加工某一零件共需经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别是 2%，3%，5%，3%，假定各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率．

【分析】 主要使用事件的独立性求解.

解 设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别为四道工序发生次品事件，D 为加工出来的零件为次品的事件，则 $\bar{D}$ 为产品合格的事件，故有 $\bar{D}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$，

$$P(\bar{D})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)=(1-2\%)(1-3\%)(1-5\%)(1-3\%)$$

$$=87.597\ 79\%\approx 87.60\%$$

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-87.60\%=12.40\%.$$

21．设 A，B，C 三个运动员自离球门 25 码处踢进球的概率依次为 $0.5, 0.7, 0.6$．设 A，B，C 各在离球门 25 码处踢一球．设各人进球与否相互独立．求：

(1) 恰有一人进球的概率；

(2) 恰有两人进球的概率；

(3) 至少有一人进球的概率.

【分析】 主要使用事件的独立性及互斥求解.

解 用 A 表示事件“运动员 A 进球”，B 表示事件“运动员 B 进球”，C 表示事件“运动员 C 进球”，由已知得 $P(A)=0.5$， $P(B)=0.7$， $P(C)=0.6$，则 $P(\bar{A})=0.5$， $P(\bar{B})=0.3$， $P(\bar{C})=0.4$．

(1) $P\{\text{恰有一人进球}\}=P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$ （$A\bar{B}\bar{C}$，$\bar{A}B\bar{C}$，$\bar{A}\bar{B}C$ 互斥）

$=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$ （A,B,C 相互独立）

$=0.5\times0.3\times0.4+0.5\times0.7\times0.4+0.5\times0.3\times0.6=0.29$；

(2) $P\{\text{恰有两人进球}\}=P(AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C)$

$=P(AB\bar{C})+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)$（$AB\bar{C}$，$\bar{A}BC$，$A\bar{B}C$ 互斥）

$=P(A)P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(C)+P(A)P(\bar{B})P(C)$ （A,B,C 相互独立）

$=0.5\times0.7\times0.4+0.5\times0.7\times0.6+0.5\times0.3\times0.6=0.44$；

(3) $P\{\text{至少有一人进球}\}=P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})$

$=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$（$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 相互独立）

$=1-0.5\times0.3\times0.4$

$=0.94$．

22． 设一系统由 3 个独立工作的电子元件并联而成，且每个电子元件正常工作的概率为 0.3，求该系统正常工作的概率．

【分析】 主要使用事件的独立性求解，同时使用德摩根律让求解更简单.

解 设 A_i 表示第 i 个电子元件正常工作，$i=1,2,3$，B 表示该系统正常工作；则

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-0.7^3=0.657\ .$$

23． 设甲乙两人进行乒乓球比赛，采用五局三胜制，各局比赛相互独立，每局比赛中甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$，求甲最终获胜的概率．

【分析】 伯努利公式的应用.

解 设 A_i 表示"一共打了 i 局甲最后胜利"，$i=1,2,3,4,5$，B 表示"甲最终获胜"，则

$$P(A_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\,,\ P(A_4)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}\,,\ P(A_5)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81}\,,$$

$$P(B)=P(A_3\cup A_4\cup A_5)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)=\frac{64}{81}\,.$$

24． 从次品率为 $p=0.2$ 的一批产品中，有放回抽取 5 次，每次取一件，分别求抽到的 5 件中恰好有 3 件次品以及至多有 3 件次品这两个事件的概率．

【分析】 伯努利公式的应用.

解 记 $A_k=\{$恰好有 k 件次品$\}$($k=0,1,\cdots,5$)，$A=\{$恰有 3 件次品$\}$，$B=\{$至多有 3 件次品$\}$，则

$$A=A_3,B=\bigcup_{k=0}^{3}A_k\ ,$$

$$P(A)=P(A_3)=\binom{5}{3}(0.2)^3(0.8)^2=0.051\,2\,;$$

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(A_4)-P(A_5)$$

$$=1-\binom{5}{4}(0.2)^4 0.8-(0.2)^5=0.9933\ .$$

25． 一个医生知道某种疾病患者自然痊愈率为 0.25，为试验一种新药是否有效，把它给 10 个患者服用，且规定若 10 个患者中至少有 4 个治好则认为这种药有效，反之则认为无效．求：

(1) 虽然新药有效，且把痊愈率提高到 0.35，但通过试验却被否定的概率；

(2) 新药完全无效，但通过试验却被认为有效的概率．

【分析】 将 10 个病人服此药视为 10 次重复试验，在每次试验中，只有两种可能结果：

此人痊愈或不痊愈，而且 10 人的痊愈与否彼此独立(如是传染病也是隔离治疗的)．这样，本问题便可利用伯努利概型解决．

解：(1)设 $A=$“通过试验新药被否定”，则由题意，当且仅当事件“10 人至多只有 3 人痊愈”发生时 A 发生．注意：依题意，新药有效，痊愈率为 0.35，从而

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}C_{10}^{k}(0.35)^{k}(1-0.35)^{10-k}$$

$$=0.65^{10}+10\times0.35\times0.65^{9}+45\times0.35^{2}\times0.65^{8}+120\times0.35^{3}\times0.65^{7}=0.5138\quad.$$

(2)设 $B=$“通过试验判断新药有效”，则当且仅当事件“10 个人至少有 4 个痊愈”发生时 B 发生．注意：依题意，新药无效，这时痊愈率等于自然痊愈率 0.25，从而

$$P(B)=\sum_{k=4}^{10}C_{10}^{k}(0.25)^{k}(1-0.25)^{10-k}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{3}C_{10}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}\approx0.224\,.$$

26． 设甲、乙两人各抛三次硬币，求

(1) 甲乙所抛正面数相等的概率；

(2) 甲所抛正面数多于乙所抛正面数的概率．

【分析】 伯努利公式的应用．

解 设 A_i 表示“甲抛了 i 次正面”，$i=0,1,2,3$，B 表示“乙抛了 j 次正面”，$j=0,1,2,3$

$$P(A_i)=C_3^i\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-i}=\frac{1}{8}C_3^i,i=0,1,2,3\,,$$

$$P(B_j)=C_3^j\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-j}=\frac{1}{8}C_3^j,\ j=0,1,2,3$$

(1) 设 C 表示“甲、乙所抛正面数相等”，则

$$C=A_0B_0\cup A_1B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_3\,,$$

且 A_i,B_j 相互独立，故

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(A_iB_i)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B_i)=\frac{5}{16}\,;$$

(2) 设 D 表示“甲所抛正面数多于乙所抛正面数",则 $D=\bigcup_{i>j}A_iB_j$，且，A_i,B_j 相互独立，

$$P(D)=\sum_{i>j}P(A_iB_j)=\sum_{i>j}P(A_i)P(B_j)=\frac{11}{32}\,.$$