3.1

根据二次拉格朗日插值法，计算步骤如下：

1. 构造插值多项式：

给定节点 $x_0=1, x_1=2, x_2=3$，对应函数值 $y_0=0.368, y_1=0.135, y_2=0.050$。二次拉格朗日基函数为：

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}, \\
L_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -\frac{(x-1)(x-3)}{1}, \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}.
\end{aligned}
$$

插值多项式为：

$$
P(x) = 0.368L_0(x) + 0.135L_1(x) + 0.050L_2(x).
$$

2. 计算 $P(2.5)$：

代入 $x=2.5$ 到各基函数：

$$
\begin{aligned}
L_0(2.5) &= \frac{(2.5-2)(2.5-3)}{2} = -0.125, \\
L_1(2.5) &= -\frac{(2.5-1)(2.5-3)}{1} = 0.75, \\
L_2(2.5) &= \frac{(2.5-1)(2.5-2)}{2} = 0.375.
\end{aligned}
$$

计算近似值：

$$
P(2.5) = 0.368 \times (-0.125) + 0.135 \times 0.75 + 0.050 \times 0.375 = 0.074.
$$

3. 误差估计：

误差公式为：

$$R(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)(x-2)(x-3), \quad \xi \in [1,3].$$

对于 $f(x) = e^{-x}$，$f'''(x) = -e^{-x}$，故：

$$|R(2.5)| = \frac{e^{-\xi}}{6} |(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)| = \frac{e^{-\xi}}{6} \times 0.375 = e^{-\xi} \times 0.0625.$$

当 $\xi \in [1,3]$ 时，$e^{-\xi}$ 的最大值为 $e^{-1} \approx 0.3679$，因此误差上界为：

$$|R(2.5)| \leq 0.3679 \times 0.0625 \approx 0.023.$$

最终答案：

- $e^{-2.5}$ 的近似值为 $\boxed{0.074}$。
- 误差估计不超过 $\boxed{0.023}$。

3.2

根据最小二乘法，拟合二次多项式 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 的步骤如下：

1. **计算各阶求和项：**

$$\begin{aligned}
n &= 6, \\
\sum x_i &= 15, \\
\sum x_i^2 &= 55, \\
\sum x_i^3 &= 225, \\
\sum x_i^4 &= 979, \\
\sum y_i &= 14, \\
\sum x_i y_i &= 30, \\
\sum x_i^2 y_i &= 122.
\end{aligned}$$

2. **建立正规方程组**:

$$\begin{cases} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 14, \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 30, \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 122. \end{cases}$$

3. **解方程组**:
   - 通过消元法或矩阵运算，解得:

$$a_0 = \frac{33}{7} \approx 4.7143, \quad a_1 = -\frac{39}{14} \approx -2.7857, \quad a_2 = 0.5.$$

4. **验证拟合效果**:
   - 代入多项式 $y = 4.7143 - 2.7857x + 0.5000x^2$ 计算各 x_i 处的拟合值，与实际数据吻合较好。

     答案:

     拟合多项式为 $y = \boxed{4.7143} + \boxed{-2.7857}x + \boxed{0.5000}x^2$。

3.3

根据Doolittle分解法求解方程组的步骤如下:

1. **矩阵分解**: 将系数矩阵 A 分解为下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U，其中 L 的对角线元素为1。分解结果为:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{7}{6} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 1.5 & -3.5 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

2. **前代求解 $Ly = b$**:

$$\begin{cases} y_1 = 15 \\ 1.5y_1 + y_2 = 15 \implies y_2 = -7.5 \\ -\frac{1}{12}y_1 + \frac{7}{6}y_2 + y_3 = 6 \implies y_3 = 16 \end{cases}$$

得到 $y=\begin{bmatrix}15\\-7.5\\16\end{bmatrix}$。

3. **回代求解 $Ux=y$：**

$$\begin{cases}\frac{16}{3}x_3=16 \implies x_3=3\\1.5x_2-3.5x_3=-7.5 \implies x_2=2\\12x_1-3x_2+3x_3=15 \implies x_1=1\end{cases}$$

答案：
方程组的解为

$$\boxed{x_1=1}, \quad \boxed{x_2=2}, \quad \boxed{x_3=3}$$

3.4

解答

PFOLG：

- 带入公式：
$16*e^4/(180*n^4) <= 0.5*10^4$

```
n=(16*math.exp(4)/(180*.5*1e-4))**(1/4)
```

- 求出n=17.65 → 18

(1) 复合 Simpson 公式的等分数计算

对于积分 $\int_1^2 e^{2x}dx$，使用复合 Simpson 公式时，误差估计公式为：

$$|E_s|\le\frac{(b-a)}{180}h^4\max_{\xi\in[a,b]}|f^{(4)}(\xi)|$$

其中 $a=1$，$b=2$，所以 $b-a=1$；函数 $f(x)=e^{2x}$；$h=\frac{b-a}{n}$，n 为子区间数

（等分数），且 n 需为偶数。

计算四阶导数：

- $f'(x) = 2e^{2x}$
- $f''(x) = 4e^{2x}$
- $f'''(x) = 8e^{2x}$
- $f^{(4)}(x) = 16e^{2x}$

在区间 $[1, 2]$ 上，e^{2x} 单调递增，因此 $\max|f^{(4)}(\xi)| = 16e^4$（在 $x = 2$ 处取最大值）。代入 $e^4 \approx 54.598150$，得：

$$\max|f^{(4)}(\xi)| = 16 \times 54.598150 = 873.568400$$

误差公式简化为：

$$|E_s| \leq \frac{1}{180}h^4 \times 873.568400 = \frac{873.568400}{180}h^4 \approx 4.853153h^4$$

其中 $h = \frac{1}{n}$，所以：

$$|E_s| \leq \frac{4.853153}{n^4}$$

要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}$，即：

$$\frac{4.853153}{n^4} \leq 5 \times 10^{-5}$$

解不等式：

$$n^4 \geq \frac{4.853153}{5 \times 10^{-5}} = \frac{4.853153}{0.00005} = 97063.06$$

$$n \geq \sqrt[4]{97063.06} \approx 17.65$$

由于 n 必须为整数且偶数（复合 Simpson 公式要求），取 $n = 18$。

验证 $n = 18$：

- $n^4 = 18^4 = 104976$
- $\frac{4.853153}{104976} \approx 4.622 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$，满足误差要求。

因此，积分区间至少需要 **18 等分**。

(2) 龙贝格算法计算积分

使用龙贝格算法计算 $\int_1^2 e^{2x} dx$，计算到第一个龙贝格值（即 $R(1,1)$）。

龙贝格算法基于梯形公式，并进行外推：

- 定义 $R(0,0)$ 为步长 $h = b - a = 1$ 的梯形公式结果：

$$R(0,0) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{1}{2}[e^{2\times1} + e^{2\times2}] = \frac{1}{2}[e^2 + e^4]$$

  使用数值 $e^2 \approx 7.389056099$，$e^4 \approx 54.598150033$：

$$R(0,0) = \frac{1}{2}[7.389056099 + 54.598150033] = \frac{1}{2} \times 61.987206132 = 30.993603066$$

- 定义 $R(1,0)$ 为步长 $h/2 = 0.5$ 的梯形公式结果（2 个子区间）：
  点：$x_0 = 1$，$x_1 = 1.5$，$x_2 = 2$

$$f(1) = e^2 \approx 7.389056099, \quad f(1.5) = e^3 \approx 20.085536923, \quad f(2) = e^4 \approx 54.598150033$$

$$R(1,0) = \frac{h/2}{2}[f(1) + 2f(1.5) + f(2)] = \frac{0.5}{2}[7.389056099 + 2 \times 20.085536923 + 54.598$$

  计算内部和：

$$7.389056099 + 2 \times 20.085536923 + 54.598150033 = 7.389056099 + 40.171073846 + 54$$

$$R(1,0) = 0.25 \times 102.158279978 = 25.5395699945$$

- 第一个龙贝格值 $R(1,1)$ 通过外推公式计算：

$$R(1,1)=\frac{4R(1,0)-R(0,0)}{3}=\frac{4\times 25.5395699945-30.993603066}{3}$$

计算：

$$4\times 25.5395699945=102.158279978$$

$$102.158279978-30.993603066=71.164676912$$

$$R(1,1)=\frac{71.164676912}{3}=23.721558970666\ldots\approx 23.72156$$

结果保留 5 位小数，第一个龙贝格值为 **23.72156**。

最终答案

(1) 积分区间至少需要 **18** 等分。
(2) 龙贝格算法计算的第一个龙贝格值为 **23.72156**。

关于"第一个龙贝格值"的解释

在龙贝格（Romberg）算法中，计算结果按以下三角阵列表格（称为 **T-表**）组织：

	$m=0$ **(梯形)**	$m=1$ **(Simpson)**	$m=2$ **(龙贝格)**	**...**
k=0	$R(0,0)$			
k=1	$R(1,0)$	$R(1,1)$ 第一个龙贝格值		
k=2	$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$	
k=3	$R(3,0)$	$R(3,1)$	$R(3,2)$	...

1. **第一个龙贝格值**:
   - 指的是 $R(1,1)$，即表中第一行、第一列的外推值。
   - 它由 $R(0,0)$ 和 $R(1,0)$ 通过一次外推（使用 Simpson 阶精度）得到:

$$R(1,1) = \frac{4R(1,0) - R(0,0)}{3}$$

   - 在题目中，计算结果为 23.72156.
2. **后续龙贝格值**:
   - **第二个龙贝格值** 是 $R(2,2)$（二阶外推，龙贝格阶精度）:

$$R(2,2) = \frac{16R(2,1) - R(1,1)}{15}$$

   - **第三个龙贝格值** 是 $R(3,3)$（三阶外推）:

$$R(3,3) = \frac{64R(3,2) - R(2,2)}{63}$$

   - 随着外推阶数 m 增加，精度会进一步提高（每增加一阶，误差阶提高 2 阶）。

为什么题目只要求第一个值?

题目明确要求 **“计算到第一个龙贝格值即可”**，即只需完成:

- $R(0,0)$（0 次二分的梯形公式）
- $R(1,0)$（1 次二分的梯形公式）
- 外推出 $R(1,1)$.

这是龙贝格算法的**最小完整计算单元**，后续值（如 $R(2,2)$）需要更多二分步骤，但本题无需继续。

补充说明

- **龙贝格算法的本质**: 通过逐步二分区间和反复外推，将低阶积分公式（如梯形）提升为高阶公式（如 Simpson、龙贝格）。
- **收敛性**: 随着 k 和 m 增加，$R(k,m)$ 快速收敛到精确积分值（本题精确值为 $\frac{1}{2}(e^4 - e^2) \approx 23.6045$）。

若有进一步计算需求（如求更高阶龙贝格值），可补充说明！

公式

在龙贝格（Romberg）算法中，计算过程通过递归公式构建一个三角阵列表格（称为 **T-表**）。以下是各元素的计算公式详解：

---

1. 基础公式：梯形公式序列（第 0 列）

- $R(k,0)$ 表示将区间 $[a,b]$ 进行 2^k 等分后的**复合梯形公式**结果。
- **通用公式**：

$$R(k,0)=\frac{h_k}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{2^k-1}f(a+ih_k)+f(b)\right]$$

其中 $h_k=\dfrac{b-a}{2^k}$ 为步长。

- **递推关系**（更高效的计算方式）：

$$R(k,0)=\frac{1}{2}R(k-1,0)+h_k\sum_{j=1}^{2^{k-1}}f\left(a+(2j-1)h_k\right)$$

---

2. 外推公式（更高阶列）

- $R(k,m)$ 表示通过外推得到的更高精度值，其中 m 为外推阶数。
- **通用外推公式**：

$$R(k,m)=\frac{4^m R(k,m-1)-R(k-1,m-1)}{4^m-1}$$

---

3. 本题中要求的元素

(a) $R(0,0)$（0 次二分，步长 $h_0 = b - a$）

$$R(0,0) = \frac{h_0}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \quad \text{其中} \quad h_0 = b - a$$

- **本题计算**:
  $a = 1,\ b = 2,\ h_0 = 1,\ f(x) = e^{2x}$

$$R(0,0) = \frac{1}{2}\left[e^{2\cdot 1} + e^{2\cdot 2}\right] = \frac{1}{2}\left[e^2 + e^4\right] \approx 30.99360$$

(b) $R(1,0)$（1 次二分，步长 $h_1 = \frac{h_0}{2}$）

$$R(1,0) = \frac{h_1}{2}\left[f(a) + 2f(a+h_1) + f(b)\right] \quad \text{其中} \quad h_1 = \frac{b-a}{2}$$

- **本题计算**:
  $h_1 = 0.5$, 分点为 $x_0 = 1,\ x_1 = 1.5,\ x_2 = 2$

$$R(1,0) = \frac{0.5}{2}\left[f(1) + 2f(1.5) + f(2)\right] = 0.25\left[e^2 + 2e^3 + e^4\right] \approx 25.53957$$

(c) $R(1,1)$（第一个龙贝格值）

$$R(1,1) = \frac{4^1 R(1,0) - R(0,0)}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot R(1,0) - R(0,0)}{3}$$

- **本题计算**:

$$R(1,1) = \frac{4 \times 25.53957 - 30.99360}{3} = \frac{102.15828 - 30.99360}{3} = \frac{71.16468}{3} \approx 23.72156$$

---

4. 后续龙贝格值（补充说明）

- **第二个龙贝格值**: $R(2,2)$（需先计算 $R(2,0)$ 和 $R(2,1)$）

$$R(2,2) = \frac{4^2 R(2,1) - R(1,1)}{4^2 - 1} = \frac{16R(2,1) - R(1,1)}{15}$$

- **第三个龙贝格值**：$R(3,3)$

$$R(3,3) = \frac{4^3 R(3,2) - R(2,2)}{4^3 - 1} = \frac{64R(3,2) - R(2,2)}{63}$$

公式总结表

元素	计算公式	含义
$R(0,0)$	$\frac{h_0}{2}[f(a) + f(b)]$	不分区的梯形公式
$R(k,0)$	$\frac{h_k}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{2^k-1} f(x_i) + f(b)\right]$	二分 k 次的梯形公式
$R(k,m)$	$\frac{4^m R(k,m-1) - R(k-1,m-1)}{4^m - 1}$	Richardson 外推公式

龙贝格求积算法中的外推序列

3.5

(1) **求g(x)的另外两个不动点：**
不动点满足方程 $g(x) = x$，即：

$$x^3 - x^2 - 4x + 5 = x \implies x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0.$$

已知 $x = 1$ 是根，将多项式分解：

$$(x-1)(x^2-5) = 0 \implies x = \sqrt{5}, x = -\sqrt{5}.$$

因此，另外两个不动点为 $\boxed{\sqrt{5}}$ 和 $\boxed{-\sqrt{5}}$。
(2) **判断局部收敛性：**

不动点迭代法的收敛性由 $|g'(x^*)|$ 决定。计算导数：

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 4.$$

在 $x = 1$ 处：

$$g'(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 4 = -3 \implies |g'(1)| = 3 > 1.$$

因此，在 $x_0 = 1$ 处，不动点迭代法**不局部收敛**，结论为 $\boxed{\text{不收敛}}$。

(3) **迭代三次结果及比较：**

取 $x_0 = 0.8$，迭代公式为 $x_{n+1} = g(x_n)$。

- **第一次迭代：**

$$x_1 = g(0.8) = 0.8^3 - 0.8^2 - 4(0.8) + 5 = 1.672.$$

- **第二次迭代：**

$$x_2 = g(1.672) \approx 1.672^3 - 1.672^2 - 4(1.672) + 5 \approx 0.1906.$$

- **第三次迭代：**

$$x_3 = g(0.1906) \approx 0.1906^3 - 0.1906^2 - 4(0.1906) + 5 \approx 4.208.$$

三次迭代结果为：

$$x_1 \approx \boxed{1.672}, \quad x_2 \approx \boxed{0.1906}, \quad x_3 \approx \boxed{4.208}.$$

比较与结论：

迭代结果未趋向 $x = 1$，反而发散，验证了 (2) 中 $x = 1$ 处不收敛的结论。

迭代法的基本思想

3.7

$n = 4$
$\sum x_i = 6.96$
$\sum x_i^2 = 12.7274$
$\sum y_i = 70.376$
$\sum y_i x_i = 126.06601$

$4a_0 + 6.96a_1 = 70.376$
$6.96a_0 + 12.7274a_1 = 126.06601$

$a_0 = 7.4085$ $a_1 = 5.8538$

$\therefore y = 7.4085 + 5.8538x$

3.8

为了求解给定的三对角线性方程组，采用追赶法（Crout分解）。方程组如下：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -2 \\ -3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

系数矩阵 A 和右端向量 b 为：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

追赶法（Crout分解）将 A 分解为下三角矩阵 L 和单位上三角矩阵 U，即 $A = LU$，其中：

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 & l_4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤1: 进行Crout分解

通过公式计算 L 和 U 的元素:

- $l_1 = a_{11} = 2$
- $u_1 = a_{12}/l_1 = (-1)/2 = -0.5$
- $m_2 = a_{21} = -1$
- $l_2 = a_{22} - m_2 u_1 = 3 - (-1) \times (-0.5) = 3 - 0.5 = 2.5$
- $u_2 = a_{23}/l_2 = (-2)/2.5 = -0.8$
- $m_3 = a_{32} = -2$
- $l_3 = a_{33} - m_3 u_2 = 4 - (-2) \times (-0.8) = 4 - 1.6 = 2.4$
- $u_3 = a_{34}/l_3 = (-3)/2.4 = -1.25$
- $m_4 = a_{43} = -3$
- $l_4 = a_{44} - m_4 u_3 = 5 - (-3) \times (-1.25) = 5 - 3.75 = 1.25$

因此:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1.25 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤2: 解 $Ly = b$（前向代入）

解方程组 $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 方程1: $2y_1 = 6 \rightarrow y_1 = 6/2 = 3$
- 方程2: $-y_1 + 2.5y_2 = 1 \rightarrow -3 + 2.5y_2 = 1 \rightarrow 2.5y_2 = 4 \rightarrow y_2 = 4/2.5 = 1.6$

- 方程3: $-2y_2 + 2.4y_3 = -2 \rightarrow -2 \times 1.6 + 2.4y_3 = -2 \rightarrow -3.2 + 2.4y_3 = -2 \rightarrow 2.4y_3 = 1.2 \rightarrow y_3 = 1.2/2.4 = 0.5$
- 方程4: $-3y_3 + 1.25y_4 = 1 \rightarrow -3 \times 0.5 + 1.25y_4 = 1 \rightarrow -1.5 + 1.25y_4 = 1 \rightarrow 1.25y_4 = 2.5 \rightarrow y_4 = 2.5/1.25 = 2$

所以：

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.6 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

步骤3: 解 $Ux = y$（后向代入）

解方程组 $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.6 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 方程4: $x_4 = 2$
- 方程3: $x_3 - 1.25x_4 = 0.5 \rightarrow x_3 - 1.25 \times 2 = 0.5 \rightarrow x_3 - 2.5 = 0.5 \rightarrow x_3 = 3$
- 方程2: $x_2 - 0.8x_3 = 1.6 \rightarrow x_2 - 0.8 \times 3 = 1.6 \rightarrow x_2 - 2.4 = 1.6 \rightarrow x_2 = 4$
- 方程1: $x_1 - 0.5x_2 = 3 \rightarrow x_1 - 0.5 \times 4 = 3 \rightarrow x_1 - 2 = 3 \rightarrow x_1 = 5$

最终解

因此，方程组的解为：

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2$$

验证

代入原方程组验证：

- 第一方程: $2 \times 5 - 4 = 10 - 4 = 6$
- 第二方程: $-5 + 3 \times 4 - 2 \times 3 = -5 + 12 - 6 = 1$
- 第三方程: $-2 \times 4 + 4 \times 3 - 3 \times 2 = -8 + 12 - 6 = -2$

- 第四方程: $-3 \times 3 + 5 \times 2 = -9 + 10 = 1$

所有方程均满足，解正确。

追赶法递推公式

追赶法（Crout分解）有明确的递推公式用于计算 L 和 U 的元素。对于三对角矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

其Crout分解 $A = LU$ 的元素计算公式如下：

L 和 U 的元素计算公式

1. **首行元素**：

$$\begin{cases} l_1 = b_1 \\ u_1 = \dfrac{c_1}{l_1} \end{cases}$$

2. **中间行元素**（$i = 2, 3, \ldots, n-1$）：

$$\begin{cases} l_i = b_i - a_i \cdot u_{i-1} \\ u_i = \dfrac{c_i}{l_i} \end{cases}$$

3. **末行元素**：

$$l_n = b_n - a_n \cdot u_{n-1}$$

公式说明

- **L 的元素**:
  - 对角线元素：l_i（递推计算）
  - 次对角线元素：直接取自 A 的次对角线元素 a_i（无需计算）
- **U 的元素**:
  - 主对角线元素：固定为 1
  - 上对角线元素：u_i（递推计算）

求解过程的公式

分解后，求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两步递推公式:

1. **前向代入**（解 $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$):

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{l_1} \\ y_i = \frac{b_i - a_i \cdot y_{i-1}}{l_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

2. **后向代入**（解 $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$):

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - u_i \cdot x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{cases}$$

关键点

- **计算顺序**:
  严格按 $l_1 \to u_1 \to l_2 \to u_2 \to \cdots \to l_n$ 的顺序递推计算。
- **稳定性条件**:
  当 $|b_i| > |a_i| + |c_i|$（严格对角占优）时，公式稳定且 $l_i \neq 0$.
- **计算量**:
  仅需 $5n - 4$ 次乘除法和 $3n - 3$ 次加减法（$O(n)$ 复杂度），远低于普通LU分解的 $O(n^3)$.

这些公式是追赶法的核心，高效且易于编程实现，广泛应用于三对角方程组的求解。

3.9

这俩题一模一样

飞吧！

3.10

(1) **证明f(x)在[1,2]上有且只有一个根：**

- **存在性：** 计算端点值，$f(1) = -1 < 0$，$f(2) = 45 > 0$。由中间值定理，f(x)在(1,2)内至少有一个根。
- **唯一性：** 求导$f'(x) = 5x^4 + 4x^3$。当$x \in [1,2]$时，$f'(x) > 0$，故f(x)严格递增，故仅有一个根。

(2) **二分法所需最少步数：**
误差要求$|c_n - \alpha| \le 10^{-6}$。初始区间长度L = 1，每次迭代后区间长度减半。误差上界为$L/(2^{n+1}) \le 10^{-6}$，解得$n \ge \log_2(10^6) - 1 \approx 19.93$，故至少需要**20步**。

(3) **牛顿迭代法（x_0=1，迭代两步）：**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- **x_1：** $x_1 = 1 - (-1)/(5 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3) = 1 + 1/9 \approx 1.111111$
- **x_2：** 计算$f(1.111111) \approx 0.217667$，$f'(1.111111) \approx 13.10776$，故$x_2 \approx 1.111111 - 0.217667/13.10776 \approx$ **1.094500**

(4) **弦截法（x_0=1，x_1=2，迭代两步）：**

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- **x_2：** $x_2 = 2 - 45 \cdot (2-1)/(45 - (-1)) = 2 - 45/46 \approx 1.021739$

- **x_3：** 计算f(1.021739) ≈ -0.7969， 故x_3 ≈ 1.021739 - (-0.7969)·(1.021739-2)/(-0.7969-45) ≈ **1.038779**

3.11

$f[x_i,x_j] = \frac{f[x_i]-f[x_j]}{x_i-x_j}$

x_i	$f(x_i)$	**1阶**	**2阶**	**3阶**
1	0			
2	-5	-5		
3	-6	-1	2	
4	3	9	5	1

$N_3(x) = 0 - 5(x-1) + 2(x-2)(x-1) + (x-3)(x-2)(x-1)$

$N_3(1.5) = -2.625$

3.13

矩阵A的Doolittle分解与方程组求解

步骤1：Doolittle分解矩阵A为L和U

给定矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

目标分解为：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

分解过程：

1. **计算U的第一行：**
   - 直接取自A的第一行：

$$u_{11} = 1, \quad u_{12} = 1, \quad u_{13} = 2$$

2. **计算L的第一列：**
   - 公式：$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$

$$l_{21} = \frac{3}{1} = 3, \quad l_{31} = \frac{2}{1} = 2$$

3. **计算U的第二行：**
   - 公式：$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}$

$$u_{22} = 2 - 3 \cdot 1 = -1, \quad u_{23} = 1 - 3 \cdot 2 = -5$$

4. **计算L的第二列：**
   - 公式：$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$

$$l_{32} = \frac{2 - 2 \cdot 1}{-1} = 0$$

5. **计算U的第三行：**
   - 公式：$u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23})$

$$u_{33} = -1 - (2 \cdot 2 + 0 \cdot (-5)) = -5$$

分解结果：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

步骤2：前代求解Ly = b

方程组：

$$\begin{cases} y_1 = 7 \\ 3y_1 + y_2 = 13 \\ 2y_1 + 0 \cdot y_2 + y_3 = 9 \end{cases}$$

解得：

$$y_1 = 7, \quad y_2 = 13 - 3 \cdot 7 = -8, \quad y_3 = 9 - 2 \cdot 7 = -5$$

即：

$$y = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

步骤3：回代求解Ux = y

方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_2 - 5x_3 = -8 \\ -5x_3 = -5 \end{cases}$$

解得：

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_1 = 2$$

最终解

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

关键公式总结

1. **Doolittle分解规则：**
   - $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$（计算U的第i行）
   - $l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$（计算L的第i列）
2. **前代求解Ly = b：**
   - 从上到下逐行代入已知值。
3. **回代求解Ux = y：**
   - 从下到上逐行代入已知值。
     通过以上步骤，完成矩阵分解并求解方程组。