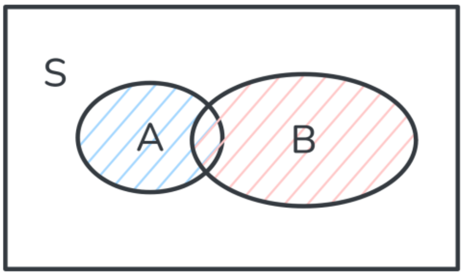
Test1

画一个韦恩图就解决了



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(\bar{A}B) = P[(S-A)B] = P(B) - P(AB)$

$P[(A \cup B)(\overline{AB})] = P[(A \cup B)(S - AB)] = P(A \cup B) - P[(A \cup B)(AB)]$

$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，

$$P\{a < X \le b\} = P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$P\{X \le \mu\} = P\{X > \mu\}$.

设"一名被检验者经检验认为患有关节炎"记为事件 A，"一名被检验者确实患有关节炎"记为事件 B。根据全概率公式有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 10\% \times 85\% + 90\% \times 4\% = 12.1\%$$

对于连续型随机变量 x，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,\quad F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t ,$$

$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

指数分布：$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$

用Y表示三个元件中使用 1000 小时损坏的元件数，由于各元件的寿命是否超过 1000 小时是独立的，则$Y\sim \mathrm{B}(3,1-e^{-1})$。

所求概率为：$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}\ =1-C_3^0(1-e^{-1})^0(e^{-1})^3=1-e^{-3}.$

对于连续型随机变量 X，有

$$P\{a<X<b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

设随机变量 X 具有概率密度$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2},-1\le x\le 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解　设Y和X的分布函数分别为$F_Y(y)$和$F_X(x)$，

注意到 $Y=X^2\ge 0$，故当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0.$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$F_Y(y)=P(Y\le y)$

求导可得

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）若 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

有

$$f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}+1}{2}, & 0\le\sqrt{y}\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）若 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

有

$$f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}+1}{2}, & 0\le\sqrt{y}\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_X(-\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}, & 0\ge-\sqrt{y}>-1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由（1）式

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\dfrac{\sqrt{y}+1}{2}+\dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}\right], & 0<y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

某单项选择题有四个答案可供选择．已知 60%的考生对相关知识完全掌握，他们可选出正确答案；20%的考生对相关知识部分掌握，他们可剔除两个不正确答案，然后随机选一个答案；20%的考生对相关

知识完全不掌握，他们任意选一个答案．现任选一位考生，求

（1）其选对答案的概率．

（2）若已知该考生选对答案，问其确实完全掌握相关知识的概率是多少？

【分析】 利用全概率公式和贝叶斯公式求解．

解 设 A_1 表示该考生完全掌握相关知识；A_2 表示该考生掌握部分相关知识；A_3 表示该考生完全不掌握相关知识；B 表示该考生选对答案；由题意，$P(A_1)=\frac{3}{5}$，$P(B|A_1)=1$，

$P(A_2)=\frac{1}{5}$，$P(B|A_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{1}{5}$，$P(B|A_3)=\frac{1}{4}$；

（1）由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{3}{5}\times 1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

（2）由贝叶斯公式得 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{5}\times 1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{5}$

Test2

$$E(X)=\iint_{R\times R}xf(x,y)dxdy$$

$$E(XY)=\iint_{R\times R}xyf(x,y)dxdy$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$E(X^2)=\iint_{R\times R}x^2f(x,y)dxdy$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

2.（8）设某地区女子的身高（以 m 计）$W\sim N(1.63,0.025^2)$，男子身高（以 m 计）$M\sim N(1.73,0.05^2)$。设各人身高相互独立。

（1）在这一地区随机选一名女子，一名男子，求女子比男子高的概率；

（2）在这一地区随机选 50 名女子，求这 50 名女子的平均身高达于 1.60 的概率。

（3）在这一地区随机选 5 名女子，求至少有 4 名的身高大于 1.60 的概率；

解：（1）因为 $M-W\sim N(0.1,\quad 0.003125)$，所以

$$P\{W>M\}=P\{M-W<0\}=\Phi(\frac{0-0.1}{\sqrt{0.003125}})\approx\Phi(-1.79)=1-0.9633=0.0367$$ ；

（2） 设这 50 名女子的身高分别记为随机变量 $W_1,\cdots W_{50}$，$\overline{W}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}W_i$。则 $\overline{W}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}W_i\sim N(1.63,\frac{0.025^2}{50})$，所以这 50 名女子的平均身高达于 1.60 的概率为

$$P\{\overline{W}>1.60\}=1-\Phi(\frac{1.60-1.63}{0.025/\sqrt{50}})=\Phi(8.49)\approx 1$$

（3）随机选择的女子身高达于 1.60 的概率为

$$P\{W>1.60\}=1-\Phi(\frac{1.60-1.63}{0.025})=\Phi(1.2)=0.8849$$，

随机选择的 5 名女子，身高大于 1.60 的人数服从二项分布 $B(5,0.8849)$，所以至少有 4 名的身高大于 1.60 的概率为

$$C_5^4\times 0.8849^4\times(1-0.8849)+C_5^5\times 0.8849^5=0.8955$$

Test3

解似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}$

当$x_i>0$时，$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$$

得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\bar{x}$。

T 分布

μ的置信度为α的置信区间为$\left[\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$

又 $\bar{x}=65.143,\ s=11.220, n=9, \alpha=0.05, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.3060$

带入得区间

本题求μ

因为σ已知，且 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

故 $P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le U_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$

依题意 $\alpha=0.05,\quad U_{\frac{\alpha}{2}}=1.96,\quad n=100,\quad \sigma=1,\quad \bar{x}=5$

则μ的置信水平为 95%的置信区间为

$[\bar{x}-U_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+U_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

带入得区间

Z 分布

检验统计量为 $$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

拒绝域$\left\{|z|\geq z_{\alpha/2}\right\}$，其中$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.=const

$$z_{0.025}=1.96$$

比较，如果 const 落入拒绝域则假设不成立

某地区成年男子的体重（以公斤计）服从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，现抽取 16 个成年男子，样本均值$\bar{x}=72.66$，样本标准差$s=8$，试取$\alpha=0.05$，检验假设：$H_0:\mu=72.64,\quad H_1:\mu\neq 72.64$

解：这是一个方差未知的正态总体的均值检验，属于双边检验问题，

检验统计量为 $$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域 $$|t|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$t=\frac{\bar{x}-72.64}{s/\sqrt{n}}。$$

代入本题具体数据，得到$t=\frac{72.66-72.64}{\frac{8}{\sqrt{16}}}=0.01$。

检验的临界值为$t_{0.025}(15)=2.1315$。

因为$|t|=0.01<2.1315$，所以样本值没有落入拒绝域中，故接受原假设H_0，即认为该地区成年男子的平均体重为 72.64 公斤。