一、(8 分) 设某公路上经过的客车与货车数量之比是 1:3, 客车中途停车修理的概率是 0.01，货车中途停车修理的概率是 0.03. （1）求汽车中途停车修理的概率。（2）现在有一辆汽车中途停车修理，求该汽车是货车的概率。

解：设 A 表示“汽车中途停车修理”， B_1 表示“经过的是货车”，B_2 表示“经过的是客车”，

则 $A = AB_1 \cup AB_2$.

(1) 由全概率公式得

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{3}{4}\times 0.03 + \frac{1}{4}\times 0.01 = 0.025 \quad \text{...... 4 分}$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} = \frac{\frac{3}{4}\times 0.03}{\frac{3}{4}\times 0.03 + \frac{1}{4}\times 0.01} = 0.9 \text{...... 4 分}$$

二、(8 分)

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} A\cos x, & \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

试求（1）常数 A； (2) X 的分布函数; (3) $P\{0 < X < \frac{\pi}{4}\}$.

解：（1）根据概率密度函数的性质

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos x dx = A\sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = A(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}A, \quad \text{得到} A = 2 \text{ ...... 3 分}$$

(2)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0, & x < \frac{\pi}{6} \\ \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 2\cos x dx = 2\sin x - 1, & \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2} \text{ ...... 3 分} \\ \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dx = 1, & \mathrm{x} \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

（3）

$$P\{0 < X < \frac{\pi}{4}\} = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = 2(\sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) - 0 = \sqrt{2} - 1 \text{...... 2 分}$$

或按下面的方法做也可以

$$P\{0<X<\frac{\pi}{4}\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}0dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos xdx=\sqrt{2}-1$$

三、(8 分) **设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为**

X \ Y	1	2	3
0	0.08	0.2	0.25
1	0.03	0.14	0.3

（1） **求 $P\{X+Y=3\}$；**

（2） **求 X 和 Y 的边缘分布律；**

（3）判断 X 和 Y 是否相互独立，说明理由。

解: (1)

$P\{X+Y=3\}=P\{X=0,Y=3\}+P\{X=1,Y=2\}=0.25+0.14=0.39$ …… 2 分

(2) X 的边缘分布律为:

X	0	1
p_k	0.53	0.47

Y 的边缘分布律为:

Y	1	2	3
p_k	0.11	0.34	0.55

…… 4 分

(3) 由于 $P\{X=0,Y=1\}=0.08$； $P\{X=0\}=0.53$； $P\{Y=1\}=0.11$

从而 $P\{X=0,Y=1\}\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}$

所以 X 和 Y 不是相互独立。…… 2 分

四、(8 分)设（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2x(x-y), & 0<x<1,\quad -x<y<x\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

（1） 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

（2） **判断 X 和 Y 是否相互独立，说明理由。**

解 (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}2x(x-y)dy=4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$ …… 3 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1} 2x(x-y)dx=\frac{5}{3}y^3-y+\frac{2}{3}, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1} 2x(x-y)dx=\frac{1}{3}y^3-y+\frac{2}{3}, & 0\le y<1\\ 0, & 其\quad他\end{cases}$$ …… 3 分

（2）因为

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4x^3(\frac{5}{3}y^3-y+\frac{2}{3}), & 0<x<1,\quad -1<y<0\\ 4x^3(\frac{1}{3}y^3-y+\frac{2}{3}), & 0<x<1,\quad 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为 $f_X(x)\cdot f_Y(x)\ne f(x,y)$，所以不独立

…… 2 分

五、(8 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 求 $Y=2X+2$ 的概率密度函数.

解：设 Y 的概率密度和分布函数分别为 $g(y),G(y)$。则

$G(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+2\le y\}=P\{X\le\frac{y-2}{2}\}=F_X(\frac{y-2}{2})$，…… 3 分 故

$g(y)=[G(y)]'=\frac{1}{2}f(\frac{y-2}{2})=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{y-2}{2}+1}{2}=\frac{y}{8},\quad -1<\frac{y-2}{2}<1$ …… 3 分

所以 $Y=2X+2$ 的概率密度函数为

$$g(y)=\begin{cases}\frac{y}{8}, & 0<y<4,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ …… 2 分