一、求一维随机变量的分布函数和概率计算的题型

1. 离散型随机变量的情形

例 1：随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{6}$

（1） 求 a 的值

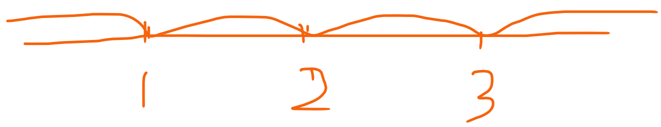
（2） 求 X 的分布函数 $F(x)$

（3） 求概率 $P\{\frac{5}{4}<X\le\frac{5}{2}\}$;　　$P\{2\le X\le 4\}$

解:（1）根据概率之和等于 1 的性质，$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{6}=1$, 立即等到 $a=\frac{1}{3}$

（2）离散型随机变量求分布函数的方法如下：

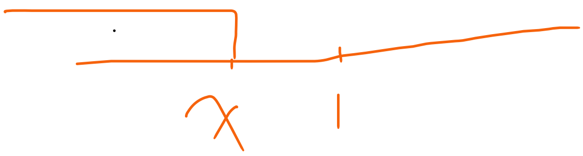
如图，用 X 的取值点 1，2，3 剖分数轴得到 4 个区间，而且这 4 个区间写成左闭右开的形式 $(-\infty,1)$,　$[1,2)$，$[2,3)$，$[3,+\infty)$



我们分别讨论 x 落在这 4 个区间 $(-\infty,1)$,　$[1,2)$，$[2,3)$，$[3,+\infty)$ 的情况。

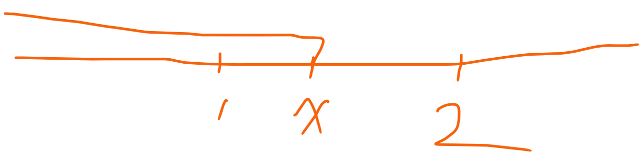
由于分布函数 $F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$，这说明求分布函数就是求落在 x 的左边的 X 的取值点的概率之和。

① 当 $x<1$时，根据位置关系如下图



只要看 x 的左边有没有 X 的取值点 1，2，3，因为没有 X 的取值点落在 x 的左边，所以 $F(x)=0$

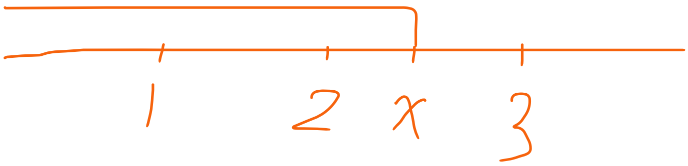
② 当$1\le x<2$时，根据位置关系如下图



因为 X 的取值点 1 落在 x **的左边，所以**

$$F(x)=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

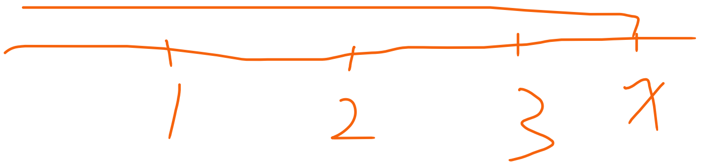
③当 $2\le x<3$ 时，根据位置关系如下图



因为 X 的取值点 1 和 2 落在 x **的左边，所以**

$$F(x)=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

④当 $3\le x$ 时，根据位置关系如下图



因为 X 的取值点 1，2，3 落在 x **的左边，所以**

$$F(x)=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

综上讨论，整理出答案：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{5}{6}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$$

（3）利用分布函数的公式来做，但要**注意：**

X 是连续型时，这四个区间的概率都相等

$P\{a<x<b\}=P\{a\le x<b\}=P\{a<x\le b\}=P\{a\le x\le b\}=F(b)-F(a)$。

但是

X 是离散型时，只有下面这个式子才成立：

$P\{a<x\le b\}=F(b)-F(a)$

所以

$$P\{\frac{5}{4}<X\le\frac{5}{2}\}=F(\frac{5}{2})-F(\frac{5}{4})=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

而下面区间因为不是左开右闭的形式，所以概率的计算要采取“减点加点“的方法来做

$$P\{2 \le X \le 4\} = P\{2 < X \le 4\} + P\{X = 2\} - P\{X = 4\}$$

$$= F(4) - F(2) + P\{X = 2\} - P\{X = 4\} = 1 - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{2}$$

2. 连续型随机变量的情形

例2 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} A(1-x), & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

试求（1）常数 A；(2) X 的分布函数；(3) $P\{-2 < X < 3\}$.

解（1）

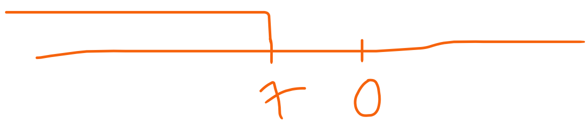
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 A(1-x)dx = \frac{1}{2} \cdot A = 1, \quad A = 2 \;;$$

（2）

分段点 0 和 1 把数轴剖分成 $(-\infty, 0), \quad [0,1), \quad [1, +\infty)$，根据连续型随机变量的分布函数的定义 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$，可知积分路线是从 $-\infty$ 积到 x，**所以主要看落在 x 左边的分段点构成几个子区间，为什么要这样呢，因为概率密度函数在这些子区间的表达式不同。**

下面我们在 $(-\infty, 0), \quad [0,1), \quad [1, +\infty)$ 上讨论

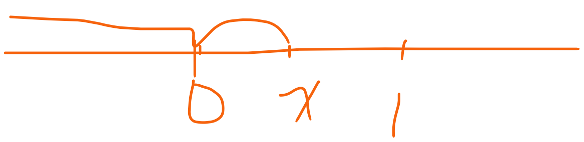
① 当 $x < 0$ 时，位置关系如图



x 的左边没有分段点，所以

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

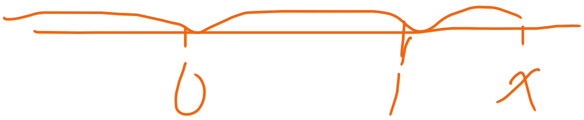
② 当 $0 \le x < 1$时，位置关系如图



x 的左边有分段点 0，x 的左边被分段点 0 分成 2 个子区间，所以在这两个子区间上积分，得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} 2(1-x)dx = 2x - x^2,$$

③ 当 $x \ge 1$时，位置关系如图



x 的左边有分段点 0 和 1，x 的左边被分段点 0 和 1 分成 3 个子区间，所以在这 3 个子区间上积分，得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2(1-x)dx + \int_{1}^{x} 0dx$$

综上讨论，得到最终答案：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0, & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} 2(1-x)dx = 2x - x^2, & 0 \le x < 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2(1-x)dx + \int_{1}^{x} 0dx = 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

（3）直接根据第 2 问的分布函数来做

$$P\{-2 < X < 3\} = F(3) - F(-2) = 1 - 0 = 1$$

下面这个方法也可以做，但积分区间要拆分

$$P\{-2 < X < 3\} = \int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$$
$$= \int_{-2}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2(1-x)dx + \int_{1}^{3} 0dx = 1$$

这种方法不推荐！！！因为有的同学会犯下面的错误，没有拆分积分区间

$P\{-2 < X < 3\} = \int_{-2}^{3} 2(1-x)dx$，**这是错的！！！**

二、求二维连续性随机变量的边缘概率密度函数

例 3 设(X,Y)的概率密度为

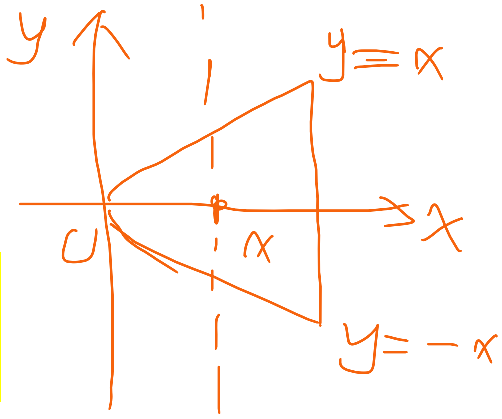
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 关于 X，Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(2) 试判断 X 与 Y 是否相互独立.

解（1）

求 X 的边缘概率密度时，要把密度不等于 0 的区域看成 X 型区域，通过作 x 轴的垂线来确定 y 的积分范围，如图



X 型区域：

当 $0<x<1$ 时，$-x<y<x$

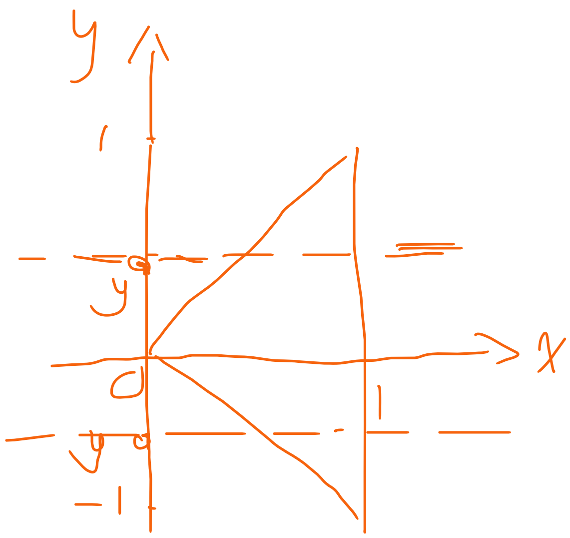
所以

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

求 Y 的边缘概率密度时，要把密度不等于 0 的区域看成 Y 型区域，通过作 y 轴的垂线来确定 x 的积分范围，如图

Y 型区域，而且要剖分：

当 $-1<y<0$ 时，$-y<x<1$



当 $0<y<1$ 时，$y<x<1$

所以

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1} dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1} dx=1-y, & 0\le y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

(2) 因为

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2x(1+y), & 0<x<1,\quad -1<y<0\\ 2x(1-y), & 0<x<1,\quad 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为 $f_X(x)\cdot f_Y(x)\neq f\left(x,y\right)$，所以不独立

三、求二维随机变量的函数的数学期望

1 二维随机变量是离散型的情形

例 4：见练习册上第 3 章的第 14 题。

14. 设随机变量 (X,Y) 具有分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

求 $E(X),E(Y),E(XY),E(X-Y),E(3X+2Y)$.

解：求出边缘分布律如下

X \ Y	0	1	2	$P\{X=k\}$
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	3/14	3/14	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
$P\{Y=k\}$	10/28	15/28	3/28	1

设 X 的取值为 i， Y 的取值为 j，
求得 X 的边缘分布律：

$P\{X=0\}=\mathbf{15/28};\quad P\{X=1\}=\mathbf{12/28};\quad P\{X=2\}=\mathbf{1/28};$

求得 Y 的边缘分布律：

$P\{Y=0\}=\mathbf{10/28};\quad P\{Y=1\}=\mathbf{15/28};\quad P\{Y=3\}=\mathbf{1/28};$

下面求期望的方法就是依据

若(X,Y)为离散型随机变量,其分布律为

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$,则有

$$E(V)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

① 求$E(X)$时

设$g(X,Y)=X$，此时上面公式里的联合密度换成边缘密度$P\{X=i\}$，即

$$E(X)=\sum_{i=0}^{2}i\cdot P\{X=i\}=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{1}{28}=1/2,$$

② 求$E(Y)$时

设$g(X,Y)=Y$，此时上面公式里的联合密度换成边缘密度$P\{Y=j\}$，即

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{2}j\cdot P\{Y=j\}=0\times\frac{10}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=3/4,$$

③求$E(XY)$时，

设$g(X,Y)=XY$，此时上面公式里的联合密度取$P\{X=i,Y=j\}$，即

$$\begin{aligned}E(XY)&=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}i\cdot j\cdot P\{X=i,Y=j\}\\&=0\times0\times\frac{3}{28}+0\times1\times\frac{9}{28}+0\times2\times\frac{3}{28}\\&+1\times0\times\frac{3}{14}+1\times1\times\frac{3}{14}+1\times2\times0\\&+2\times0\times\frac{1}{28}+2\times1\times0+2\times2\times0\\&=1\times1\times3/14=3/14\end{aligned},$$

计算过程复杂吗？不复杂！因为某一项的乘积因子为 0 时，这一项的结果就为 0、

④求 $E(X-Y)$ 时，设 $g(X,Y)=X-Y$，此时上面公式里的联合密度取 $P\{X=i,Y=j\}$，

$$E(X-Y)=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}(i-j)P\{X=i,Y=j\}$$

$$=(0-0)\times\frac{3}{28}+(0-1)\times\frac{9}{28}+(0-2)\times\frac{3}{28}$$

$$+(1-0)\times\frac{3}{14}+(1-1)\times\frac{3}{14}+(1-2)\times 0 \quad ,$$

$$+(2-0)\times\frac{1}{28}+(2-1)\times 0+(2-2)\times 0$$

$$=-1/4$$

⑤求 $E(3X+2Y)$ 时，设 $g(X,Y)=3X+2Y$，此时上面公式里的联合密度取 $P\{X=i,Y=j\}$，计算可得

$$E(3X+2Y)=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}(3i+2j)P\{X=i\}P\{Y=j\}=84/28=3$$

2 随机变量是连续型的情形

例 5 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(1)求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$Cov(X,Y)$；

(2)判断 X 和 Y 是否相关，并说明理由。

解：计算公式如下

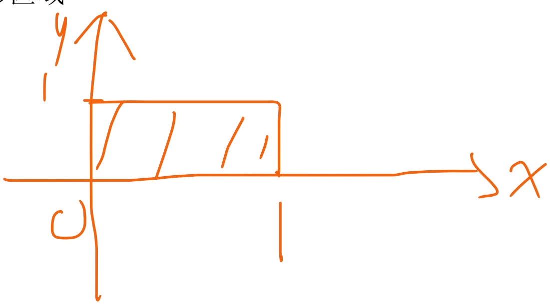
,设 V 是随机变量 X,Y 的函数 $V=g(X,Y)$（g 是连续函数），那么，V 是一个一维随机变量. 若二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则有

$$E(V)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（1） 求 $E(X)$ 时，设 $g(X,Y)=X$，

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy$$

我们只要在联合概率密度不等于 0 的区域上计算积分就可以，这个区域是矩形区域



把二重积分转化为二次积分去算，即先对 x 积分，后对 y 积分

$$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x\cdot 2ydxdy=\int_0^1 2ydy\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

同理 求 $E(Y)$ 时，在公式里设 $g(X,Y)=Y$，

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^1 y\cdot 2ydxdy=\int_0^1 2y^2dy\int_0^1 dx=\frac{2}{3}$$

同理 求 $E(XY)$ 时，在公式里设 $g(X,Y)=XY$，

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 2ydxdy=\int_0^1 2y^2dy\int_0^1 xdx=\frac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=0,$$ （1 分）

（2）因为

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$，从而 X 和 Y 不相关 （2 分）

例题 6，练习册上的题目

16. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, x+y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

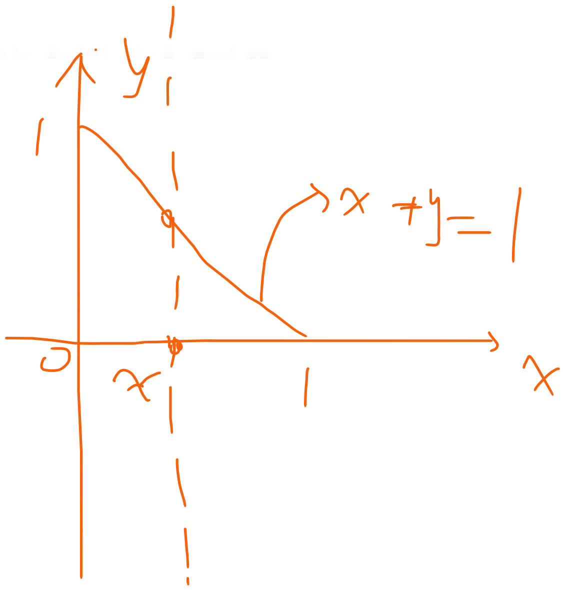
求 $E(X),E(Y),E(XY)$.

分析：密度不等于 0 的三角型区域，画图如下

我们把该区域看成 X 型区域，通过作 x 轴的垂线来确定 y 的积分范围，即

$0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x$

这时候即使二重积分，就是先对 y 积分，后对 x 积分



解：$E(X)=\iint\limits_{R\times R} xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 24x^2ydy=24\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} ydy=2/5$，

$E(Y)=\iint\limits_{R\times R} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 24y^2xdy=24\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} y^2dy=2/5$，

$E(XY)=\iint\limits_{R\times R} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 24x^2y^2dy=24\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} y^2dy=2/15$。

四、矩估计法

思想：

用样本矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 替代总体矩 $\mu_k=E(X^k)$

记住：

① 若估计 1 个未知参数，只要用到**样本均值** $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$ **替代总体均值** $\mu_1=E(X)$

② 若估计 2 个未知参数，要用到**样本均值** $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$ **替代总体均值** $\mu_1=E(X)$，

而且用样本二阶矩 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ **替代总体矩** $\mu_2=E(X^2)$

1 总体 X 是离散型的例子

例 1，设总体 $X\sim B(n,p)$，参数 p 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求 p 的矩估计量。

解题步骤：

① 先算出总体 X 的一阶总体原点矩为 $\mu_1=E(X)=100p$；

② 根据上面的式子解出未知参数 p，即 $p=\frac{\mu_1}{100}$

③ 替代：用样本一阶原点矩 $A_1=\bar{X}$ 替代 μ_1，可得 p 的矩估计量为 $p=\frac{\bar{X}}{100}$。

2 **总体 X 是连续型的例子**

例 2 设总体 X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{\theta} & 0<x<\theta\\ 0 & 其\ 他\end{cases}$，参数 θ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求 θ 的矩估计量。

解题步骤：

① 先计算总体 X 的一阶总体原点矩为 $\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{\theta} x \cdot (1-\frac{x}{\theta})dx = \frac{\theta^2}{6}$，

② 根据上面的式子解出未知参数 θ，即 $\theta = \sqrt{6\mu_1}$

③ 替代：样本一阶原点矩 $A_1 = \bar{X}$ 替代 μ_1，可得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \sqrt{6\bar{X}}$ 。

注意：如果这个题目要你求的是矩估计值，只要把上面答案里的大写的 X 改写成小写的 x，即 $\hat{\theta} = \sqrt{6\bar{x}}$

注意：估计两个未知参数的例子，看教材 p147 页例题 3

五、最（极）大似然估计法（重点掌握）

记住解题步骤：

1 写出似然函数

2 写出对数似然函数

3 用对数似然函数对未知参数求导（**不是对 x 求导!!!!**），令导数等于 0，求得驻点，驻点即未知参数的估计值。

牢牢记住：

（1） 当总体 X 是离散型随机变量时，假设待估的未知参数是 θ，**则似然函数为**

$$L(\theta) = P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\cdots P\{X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

（2）当总体 X 是连续型随机变量时，假设待估的未知参数是 θ，**则似然函数为**

$$L(\theta) = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

在解题过程中，写出对数似然函数时，要充分利用对数性质来简化，例如

$$\ln(\frac{MN}{Q}) = \ln(MN) - LnQ = \ln M + \ln N - \ln Q$$

$$ln(e^Q) = Q; \qquad \ln(\mathrm{M}^N) = N\ln M$$

(一) 总体 X 是离散型随机变量的例题

例 1 设 $X \sim B(m, p)$, m 已知，$0 < p < 1$ 未知，求 p 的最大似然估计值。

解题步骤：总体 X 服从二项分布，总体 X 是离散型随机变量，我们首先写出总体 X 的分布律来，如下：

$$P\{X = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots m$$

但在统计学里 X 的取值是 x，应该该写成

$$P\{X = x\} = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, \quad x = 0,1,2,\cdots m$$

那么个体 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 的分布律为

$$P\{X_1 = x_1\} = C_m^{x_1} p^{x_1}(1-p)^{m-x_1}, \quad x_1 = 0,1,2,\cdots m$$
$$P\{X_2 = x_2\} = C_m^{x_2} p^{x_2}(1-p)^{m-x_2}, \quad x_2 = 0,1,2,\cdots m$$
$$\vdots$$
$$P\{X_n = x_n\} = C_m^{x_n} p^{x_n}(1-p)^{m-x_n}, \quad x_n = 0,1,2,\cdots m$$

所以，似然函数为

$$L(p) = P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\cdots P\{X_n = x_n\}$$
$$= C_m^{x_1} p^{x_1}(1-p)^{m-x_1} \cdot C_m^{x_2} p^{x_2}(1-p)^{m-x_2} \cdots \cdot C_m^{x_n} p^{x_n}(1-p)^{m-x_n},$$
$$= \prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i} \times p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times (1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

取对数，相应的对数似然函数为

$$\ln[L(p)] = \ln(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i} \times p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times (1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n} x_i})$$
$$= \ln(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}) + \ln(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}) + \ln((1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n} x_i}) 。$$
$$= \ln(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}) + \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet (\ln p) + \left(mn - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \bullet \ln(1-p)$$

令对数似然函数对未知参数 p 的一阶导数为零，即

$$\frac{d\ln[L(p)]}{dp} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}\left(mn - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

解出 $p = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 的表达式，作为 p 的最大似然估计值：

$$\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\overline{x}}{m}$$

提示：$\ln(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i})$ 里面没有 p，所以它对 p 求导为 0，

还有 $\ln(1-p)$ 对 p 求导是 $-\frac{1}{1-p}$，不是 $\frac{1}{1-p}$!!!!!!!

注意：如果这个题目要求的是 p 的最大似然估计量，　则只要把答案里的小写的 x 改写成 X，即　$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$

(二)总体 X 是连续型随机变量的例题

例 2 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\mu)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x-\mu)^2},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ **是来自总体的样本值，求参数** μ **的最大似然估计值。**

解题步骤：因为总体 X 的概率密度已知，个体和总体同分布，所以个体的概率密度函数和总体的密度函数形式上类似，所以个体 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 的概率密度函数为

$$f(x_1;\mu)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x_1-\mu)^2},\qquad -\infty<x_1<+\infty.$$

$$f(x_2;\mu)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x_2-\mu)^2},\qquad -\infty<x_2<+\infty$$

$$\vdots$$

$$f(x_n;\mu)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x_n-\mu)^2},\qquad -\infty<x_n<+\infty$$

所以我们写出似然函数为

$$\begin{aligned}L(\mu)&=f(x_1;\mu)\cdot f(x_2;\mu)\cdots f(x_n;\mu)\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x_1-\mu)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x_2-\mu)^2}\cdots\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x_n-\mu)^2},\\&=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{4}}\end{aligned}$$

对上式两边取对数，相应的对数似然函数为

$$\ln L(\mu)=\ln\left[\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{4}}\right]。$$

$$=\ln\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^n}+\ln e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{4}}=-\ln\left(2\sqrt{\pi}\right)^n-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{4}$$

令对数似然函数对 μ 的一阶导数为零，即

$$\frac{\partial\ln L(\mu)}{\partial\mu}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu)=0$$

得到 μ 的最大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}\text{。}$$

提示 ： 上面求导过程中 $-\ln\left(2\sqrt{\pi}\right)^n$ 不含 μ，所以这一项对 μ 求导为 0；而

$$\begin{aligned}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2]' &= [(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2]' \\ &= [(\mu-x_1)^2+(\mu-x_2)^2+\cdots+(\mu-x_n)^2]' \\ &= 2(\mu-x_1)+2(\mu-x_2)+\cdots+2(\mu-x_n) \\ &= 2(n\mu-\sum_{i=1}^{n}x_i)\end{aligned}$$

所以

$$\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{4}\right]'=-\frac{1}{4}\times\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]'=-\frac{1}{4}\times 2(n\mu-\sum_{i=1}^{n}x_i)=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu)$$