第 4 章 随机变量的数字特征

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$ 和 $E(2X+6)$.

【分析】 利用离散型随机变量数学期望的定义计算.

解 $E(X)=-2\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$，

$$E(2X+6)=(-2\times2+6)\times0.4+(0\times2+6)\times0.3+(2\times2+6)\times0.3=5.6.$$

4. 某保险公司的某险种规定：如果某事件 A 在一年内发生了，则保险公司应付给投保人金额 a 元. 而事件 A 在一年内发生的概率为 p. 如果保险公司向投保人收取的保险费为 ka 元，则 k 为多少时，才能使保险公司期望收益达到 a 的 10%.

【分析】 这是一道关于数学期望的应用题。可根据题意先设保险公司的收益额为随机变量，并给出对应的分布律，进而计算其数学期望的表达式，再根据给定的数学期望列出等式，计算 k 的值.

解 设 X 为保险公司一年的收益额，则

X	$ka-a$	ka
p	p	$1-p$

$$E(X)=(ka-a)p+a(1-p)=0.1a$$

解得，$k=0.1+p$.

即 $k=0.1+p$ 时，才能使保险公司期望收益达到 a 的 10%.

5. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x<a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求（1）常数 a；（2）$E(X)$.

【分析】 根据密度函数的性质列出关于 a 的方程，求出 a，再根据数学期望的定义计

算 $E(X)$.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^a (2-x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}a^2 + 2a - 1 = 1$,

则 $a = 2$.

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)x dx = 1$.

7. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

如果 $E(X) = \frac{2}{3}$，求 a 和 b.

【分析】 利用密度函数的性质与连续性变量数学期望的定义.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (a + bx^2)\mathrm{d}x = a + \frac{1}{3}b = 1$,

$$E(X) = \int_0^1 x(a + bx^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = \frac{2}{3},$$

则可解得，$a = \frac{1}{3}$, $b = 2$.

9. 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

求 (1) $Y = 2X$ (2) $Z = e^{-2X}$ 的数学期望.

【分析】 利用随机变量函数数学期望的定义.

解 $E(Y) = E(2X) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}\mathrm{d}x = 2$,

$$E(Z) = E(e^{-2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1

2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(\frac{Y}{X})$，$E[(X-Y)^2]$.

【分析】 利用数学期望的定义.

解 $E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2$，

$$E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0,$$

$$E(\frac{Y}{X})=-1\times0.2-\frac{1}{2}\times0.1-\frac{1}{3}\times0+1\times0.1+\frac{1}{2}\times0.1+\frac{1}{3}\times0.1=-\frac{1}{15},$$

$$E\{(X-Y)^2\}=4\times0.2+9\times0.1+1\times0.1+4\times0+9\times0.3+1\times0.1+4\times0.1=5.$$

11. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且各自的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $E(X+Y)$，$E(X^2Y)$，$E(2X-3Y^2)$.

【分析】 利用数学期望的定义与性质.

解 $E(X)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，　$E(X^2)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$，

$$E(Y)=\int_0^{+\infty} ye^{-y}\mathrm{d}y=1,\quad E(Y^2)=\int_0^{+\infty} y^2e^{-y}\mathrm{d}y=2,$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{3}{2},$$

$$E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=\frac{1}{3},$$

$$E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=-5..$$

12. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(720,30^2)$，$Y\sim N(640,25^2)$. 求概率

$P(X>Y),P(X+Y>1400)$.

【分析】利用正态分布的数学期望和方差以及性质进行计算.

解 设 $Z_1=X-Y$，$Z_2=X+Y$，则 $Z_1\sim N(80,1525)$，$Z_2\sim N(1360,1525)$，故

$$P(X>Y)=P(X-Y>0)=P(Z_1>0)=1-P(Z_1\le0)$$

$$=1-\Phi(\frac{0-80}{\sqrt{1525}})\approx0.9798.$$

$$P(X+Y>1400)=P(Z_2>1400)=1-P(Z_2\le1400)$$

$$=1-\Phi(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}})\approx 0.1539.$$

13. 设随机变量满足 $E(X)=D(X)=\lambda$，又知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，求 λ.

【分析】利用数学期望和方差的性质进行计算.

解 $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=1$，

又 $E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=\lambda+\lambda^2$，

所以，$\lambda^2-2\lambda+1=0$，解得 $\lambda=1$.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1
-1	0.25	0
0	0	0.5
1	0.25	0

求 (1) $E(X)$；(2) $D(X)$；(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；(4) 判断 X 和 Y 是否相互独立；

(5) 判断 X 和 Y 是否相关.

【分析】利用数学期望、方差、协方差和相关系数的定义进行计算.

解 （1） 由题意可得，

X	-1	0	1
p	0.25	0.5	0.25

因此，$E(X)=(-1)\times 0.25+0\times 0.5+1\times 0.25=0$.

(2)

X^2	0	1
p	0.5	0.5

因此，$E(X^2)=0^2\times 0.5+1^2\times 0.5=0.5$，

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.5$.

(3)

Y	0	1
p	0.5	0.5

因此，$E(Y)=0^2\times0.5+1^2\times0.5=0.5$，

$$E(XY)=(-1)\times0\times0.25+(-1)\times1\times0+0\times0\times0+0\times1\times0.5+1\times0\times0.25+1\times1\times0=0,$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$

(4) $\because P(X=0,Y=0)=0\neq P(X=0)\cdot P(Y=0)$，

$\therefore X$ 和 Y 不相互独立.

(5) $\because \rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$

$\therefore X$ 和 Y 不相关.

15. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & 0<x^2<y<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$；(2) 判断 X 和 Y 是否相互独立.

【分析】利用协方差的定义进行计算. 判断是否相互独立可由两个随机变量相关直接推出不独立.

解 （1）由题意可得

$$E(X)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}6x\mathrm{d}y=\frac{1}{2},\quad E(Y)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}6y\mathrm{d}y=\frac{2}{5}$$

$$E(XY)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}6xy\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{20}.$$

(2) $\because \mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{20}\neq0$

$\therefore X$ 和 Y 相关，故不相互独立.

16. 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 (1) $E(X)$；(2) $E(Y)$；(3) $Cov(X,Y)$ 和 ρ_{XY}；(4) $D(X+Y)$.

【分析】利用数学期望、方差、协方差和相关系数的定义进行计算.

解 （1） $E(X)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 \frac{1}{8}x(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$.

（2） $E(Y)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 \frac{1}{8}y(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$.

（3） $E(XY)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 \frac{1}{8}xy(x+y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$,

$$E(X^2)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 \frac{1}{8}x^2(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3},$$

$$E(Y^2)=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^2 \frac{1}{8}y^2(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3},$$

$$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36},$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{11}{36}=D(Y),$$

$$\therefore \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}.$$

（4） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{5}{9}$.

17. 设 $D(X)=25$， $D(Y)=36$， $\rho_{XY}=\frac{1}{6}$，求 (1) $D(X+Y)$；(2) $D(X-Y)$.

【分析】利用方差的性质进行计算.

解 $\because \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{6}$,

$$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{6}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=5,$$

$$\therefore D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=25+36+10=71,$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=25+36-10=51.$$

18. 已知随机变量 X 、Y 和 Z 满足 $E(X)=E(Y)=E(Z)=-1$，$\rho_{XY}=0$， $\rho_{YZ}=-\dfrac{1}{2}$，$\rho_{xz}=-\dfrac{1}{2}$， $D(X)=D(Y)=D(Z)=1$.

求 (1) $E(X+Y+Z)$；(2) $D(X+Y+Z)$.

【分析】利用数学期望和方差的性质进行计算.

解 （1） $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=-3$.

(2) $\because \rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$,

$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

同理，可得 $\mathrm{Cov}(Y,Z)=-\dfrac{1}{2}$， $\mathrm{Cov}(X,Z)=-\dfrac{1}{2}$,

$$\therefore D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+2\mathrm{Cov}(Y,Z)+2\mathrm{Cov}(X,Z)$$
$$=1.$$

28. 已知随机变量 X 的数学期望和方差分别为 $E(X)=100$， $D(X)=10$，估计 X 落在 $(80,120)$ 内的概率.

【分析】利用切比雪夫不等式.

解 $P(80<X<120)=P(|X-100|<20)$,

则由切比雪夫不等式可得，

$$P(|X-100|<20)\geq 1-\frac{10}{20^2}=\frac{39}{40}=0.975.$$

30. 某一加法器同时收到 20 个噪声电压 V_k， $k=1,2,\cdots,20$，设它们是相互独立的随机变量，且都在区间（0，10）上服从均匀分布. 记 $V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求 $P\{V>105\}$ 的近似值.

【分析】利用独立同分布中心极限定理.

解 由题意可得，$V_k \sim U(0,10)$， $\therefore E(V_k)=5$, $D(V_k)=\dfrac{25}{3}$,

$$\therefore \frac{V-20\times 5}{\sqrt{20}\sqrt{25/3}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1),$$

$$\therefore P(V > 105) = 1 - P(V \leq 105) = 1 - P\left(\frac{V - 20\times 5}{\sqrt{20}\sqrt{25/3}} \leq \frac{105 - 20\times 5}{\sqrt{20}\sqrt{25/3}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(0.387\right) \approx 0.348\,.$$