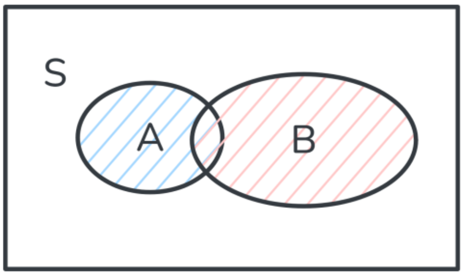

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(\bar{A}B) = P[(S-A)B] = P(B) - P(AB)$$

$$P[(A \cup B)(\overline{AB})] = P[(A \cup B)(S - AB)] = P(A \cup B) - P[(A \cup B)(AB)]$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

解 （1）$\because Y = \mathrm{e}^x > 0$，故当 $y \le 0$ 时 $F_Y(y) = 0$.

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\mathrm{e}^x \le y\} = P\left\{X \le \ln y\right\} = F_X(\ln y)$，

所以

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

对于连续型随机变量 x，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1，\quad F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t，$$

$$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$E(X) = \iint_{R \times R} x f(x,y) dxdy$$

$$E(XY) = \iint_{R \times R} xy f(x,y) dxdy$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(X^2) = \iint_{R \times R} x^2 f(x,y) dxdy$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

解似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}$

当$x_i>0$时，$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$$

得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\bar{x}$。

T 分布，μ的置信水平为 1-α的置信区间为：$\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t\alpha_{/2}(n\text{-}1)$，适用于σ未知的情况，求解条件：均值$\bar{x}$，标准差 s，样本总数 n，置信概率 1-α*100%

Z 分布，μ的置信水平为 1-α的置信区间为：$\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z\alpha_{/2}$，适用于σ已知的情况，求解条件：均值$\bar{x}$，方差σ，样本总数 n，置信概率 1-α*100%

χ分布，方差σ^2的置信水平 1-α的置信区间为：$[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1\text{-}\alpha/2}(n-1)}]$，μ未知的情况，「$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$」是一个数，eg.

故σ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{8\times s^2}{\chi^2_{0.025}(8)}},\sqrt{\frac{8\times s^2}{\chi^2_{0.975}(8)}}\right)=(0.4591,1.3021).$$

假设检验：

双边：$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，拒绝域：$z\geq z_0$

右尾：$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu\geq\mu_0$，拒绝域：$z\geq z_0$

左尾：$H_0:\mu\geq\mu_0,H_1:\mu\leq\mu_0$，拒绝域：$z\leq z_0$

【分析】 方差σ^2已知，关于均值μ的假设检验——$\boxed{Z\text{ 检验}}$

检验统计量 $\boxed{Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$

右边检验：$H_0:\mu\le\mu_0$，　$H_1:\mu>\mu_0$.

拒绝域：　$\{z\ge z_\alpha\}$.　——右尾域

【分析】 方差σ^2未知，关于均值μ的假设检验——$\boxed{t\text{ 检验法}}$

检验统计量为：$\boxed{T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}},}$

双边检验：$H_0:\mu=\mu_0$　　$H_1:\mu\ne\mu_0$.

拒绝域：　$\left\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$.　——双尾域

【分析】 关于方差σ^2的假设检验——$\boxed{\chi^2\text{ 检验}}$

双边检验：　$H_0:\sigma^2=\sigma_0{}^2$，　$H_1:\sigma^2\ne\sigma_0{}^2$.

检验统计量为：$\boxed{\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}}$

拒绝域：　$\{\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}\cup\{\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$——双尾域

附表 1 常用随机变量的分布、数学期望和方差

	常见分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
离散型随机变量	(0-1) 分布	$0 < p < 1$	$P\{X = 1\} = p, P\{X = 0\} = 1 - p$	p	$p(1-p)$
	二项分布 $B(n, p)$	$n \geqslant 1, 0 < p < 1$	$P\{X = k\} = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n$	np	$np(1-p)$
	泊松分布 $\pi(\lambda)$	$\lambda > 0$	$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \cdots$	λ	λ
	几何分布	$0 < p < 1$	$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, \cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
	超几何分布	N, M, n $(M \leqslant N)(n \leqslant N)$	$P\{X = k\} = \frac{\mathrm{C}_M^k \mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}, k$ 为整数, $\max\{0, n - N + M\} \leqslant k \leqslant \min\{n, M\}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
连续型随机变量	均匀分布 $U(a, b)$	$a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	指数分布	$\theta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$	θ	θ^2
	正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$\mu\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	μ	σ^2

$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$