参考数据：$\Phi(2.5)=0.9938$；$\Phi(0.5)=0.6915$

$\Phi(0)=0.5$; $\Phi(1)=0.8413$; $\Phi(1.6)=0.9452$; $\Phi(1.8)=0.9641$; $\Phi(2)=0.9772$;

1. (6 分) 设随机变量(X,Y)具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}8x, & 0\le x\le \frac{1}{2},\ 0\le y\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(1)求$E(X)$，$D(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$Cov(X,Y)$；

(2)判断X和Y是否相关，并说明理由。

解：（1）$E(X)=\int_0^1\int_0^{1/2} x\cdot 8x\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{1/2}8x^2dx=\frac{1}{3}$,

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^{1/2} x^2\cdot 8x\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{1/2}8x^3dx=\frac{1}{8} \qquad (1分)$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{1}{72} \qquad (1分)$$

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^{1/2} y\cdot 8x\,dx\,dy=\int_0^1 ydy\int_0^{1/2}8xdx=\frac{1}{2} \qquad (1分)$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{1/2} xy\cdot 8x\,dx\,dy=8\int_0^1 ydy\int_0^{1/2}x^2dx=\frac{1}{6} \qquad (1分)$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=0, \qquad (1分)$$

（2）因为

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$，从而$X$和$Y$不相关　　（1 分）

2. (6 分) 设随机变量X和Y相互独立，且$X\sim N(3,\ 4)$，$Y\sim N(2,\ 9)$，则$3X+Y$服从什么分布？且求出：$E(3X+Y)$，$D(3X+Y)$

解：由于随机变量X和Y相互独立，且都是正态随机变量，所以它们的线性组合$3X+Y$服从正态分布。　（2 分）

$E(3X+Y)=3E(X)+E(Y)=3\times 3+2=11$　（2 分）

$D(3X+Y)=9D(X)+D(Y)=9\times 4+9=45$　（2 分）

3. (6 分) (1) 设 $X \sim N(0,1)$，求 $P\{-1 \le X \le 1\}$.

(2) 设 $X \sim N(2,4)$，求 $P\{X \ge 6\}$，$P\{-1.2 \le X \le 2\}$.

解: (1)

$$P\{-1 \le X \le 1\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ = 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826 \qquad \text{(2 分)}$$

(2)

$$P\{X \ge 6\} = 1 - P\{X \le 6\} = 1 - P\{\frac{X-2}{2} \le \frac{6-2}{2}\}$$

$$= 1 - P\{\frac{X-2}{2} \le 2\} = 1 - \Phi(2) \qquad \text{(2 分)}$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P\{-1.2 \le X \le 2\} = P\{\frac{-1.2-2}{2} \le \frac{X-2}{2} \le \frac{2-2}{2}\} = P\{-1.6 \le \frac{X-2}{2} \le 0\}$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-1.6) = \Phi(0) - (1 - \Phi(1.6)) = 0.5 - 1 + 0.9452 = 0.4452 \qquad \text{（2 分）}$$

4. (6 分) 将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器内，液体的温度 X （以 $^\circ C$ 计）

是一个随机变量，且 $X \sim N(80, \sigma^2)$．参考数据：

（1） 若 $\sigma = 0.4$，求 X 大于 81 的概率；

（2） 若要求保持液体的温度至少为 85 的概率不低于 0.3085，问 σ 至少为多少？

解：因为 $X \sim N(80, \sigma^2)$，所以 $\frac{X-80}{\sigma} \sim N(0,1)$。

（1）

$$P\{X > 81\} = 1 - P\{X \le 81\} = 1 - P\{\frac{X-80}{0.4} \le \frac{81-80}{0.4}\} = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

（3 分）

（3） 若要求 $P\{X \ge 85\} \ge 0.3085$，那么就有

$$P\{X \ge 85\} = 1 - P\{X \le 85\} = 1 - P\{\frac{X-80}{\sigma} \le \frac{85-80}{\sigma}\} = 1 - \Phi(\frac{5}{\sigma}) \ge 0.3085,$$

即 $\Phi(\frac{5}{\sigma}) \le 0.6915$， 即 $\Phi(\frac{5}{\sigma}) \le 0.6915 = \Phi(0.5)$，从而 $\frac{5}{\sigma} \le 0.5$，最后得到 $\sigma \ge 10$，即 σ 至少应为 10. （3 分）

5. (6 分) 某商出售的食盐每袋的标准重量是 500g, 设每袋重量（单位：g）$X \sim N(500, 5^2)$，求

（1）随机抽取一袋食盐，求 $P\{492 < X < 508\}$;

(2) 求常数c，使得每袋的重量大于c的概率为0.0359.

解：（1）

$$P\{492 < X < 508\} = P\{\frac{492-500}{5} < \frac{X-500}{5} < \frac{508-500}{5}\} = P\{-1.6 < \frac{X-500}{5} < 1.6\}$$
$$= \Phi(1.6) - \Phi(-1.6) = 2\Phi(1.6) - 1 = 2 \times 0.9452 - 1 = 0.8904$$

（2 分）

（2）

$$P\{X > c\} = 1 - P\{X < c\} = 1 - P\{\frac{X-500}{5} < \frac{c-500}{5}\}$$

（2 分）

$$= 1 - \Phi(\frac{c-500}{5}) = 0.0359$$

即 $\Phi(\frac{c-500}{5}) = 0.9641$，因为 $\Phi(1.8) = 0.9641$，所以 $\frac{c-500}{5} = 1.8$ 得到 $c = 509$

（2 分）