1. 设随机变量(X,Y)具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘分布函数.

【分析】运用边缘概分布函数的定义.

解 $F_X\left(x\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}F\left(x,y\right)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$F_Y\left(y\right)=\lim_{x\to+\infty}F\left(x,y\right)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2. 一批产品中有一等品 50%，二等品 30%，三等品 20%，从中有放回的抽取 5 件，以X,Y分别表示取出的 5 件中一等品、二等品的件数,求(X,Y)的分布律.

【分析】 运用模型公式计算.

解 设X,Y分别表示一等品和二等品的件数，其中$X=0,1,2,3,4,5$，

$Y=0,1,2,3,4,5$. 运用公式可得

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{5!}{i!\,j!(5-i-j)!}(0.5)^i(0.3)^j(0.2)^{5-i-j},\ i+j\le 5.$$

4. 设二维离散随机变量(X,Y)的可能值为$(0,0),(-1,0),(-1,2),(1,0)$. 且取这些值的

概率依次为$\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{5}{12}$，试求$X$和$Y$各自的边缘分布律.

【分析】运用边缘分布律定义.

解 根据题意可得如下表格

$X \backslash Y$	0	2	$P_{i.}$
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{12}$
1	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{5}{12}$
$P_{.j}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

所以有

X	-1	0	1
p_k	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$

Y	0	2
p_k	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$

5. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 确定常数k；

(2) 求$P\{X<1,Y<3\}$；

(3) 求$P\{X<1.5\}$；

(4) 求$P\{X+Y\le 4\}$.

【分析】运用二维连续型随机变量的运算性质.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_2^4 k\left(6-x-y\right)\mathrm{d}y=\int_0^2 6k-2kx\ \mathrm{d}x=8k.$

所以$k=\frac{1}{8}$.

(2) $P\{\mathrm{X}<1,\mathrm{Y}<3\}=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_2^3\frac{1}{8}\left(6-x-y\right)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-x\ \mathrm{d}x=\frac{3}{8}.$$

(3) $P\{\mathrm{X}<1.5\}=\int_{-\infty}^{1.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{1.5}\mathrm{d}x\int_2^4\frac{1}{8}\left(6-x-y\right)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}6-2x\ \mathrm{d}x=\frac{27}{32}.$$

(4) $P\{X+Y\le 4\}=\frac{1}{8}\int_0^2\mathrm{d}x\int_2^{4-x}6-x-y\ \mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^2 6-4x+\frac{x^2}{2}\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$

6.设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 (1) 常数k；

(2) (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$；

(3) $P\{0<X<1, 0<Y<2\}$.

【分析】运用联合概率密度和联合分布函数间的关系.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-(3x+4y)}\ \mathrm{d}y = \frac{k}{4}\int_0^{+\infty} e^{-3x}\ \mathrm{d}x = \frac{k}{12}$.

所以 $k=12$.

(2) 当 $x>0, y>0$ 时，$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_0^x\int_0^y 12e^{-(3u+4v)}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=12\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y e^{-(3u+4v)}\mathrm{d}v = -3\int_0^x \left(e^{-4y}-1\right)e^{-3u}\ \mathrm{d}u$$

$$=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right).$$

因此，$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right), & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $P\{0<X<1, 0<Y<2\}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}\ \mathrm{d}y$

$$=-3\int_0^1\left(e^{-8}-1\right)e^{-3x}\mathrm{d}x=\left(1-e^{-8}\right)\left(1-e^{-3}\right).$$

9. 试求以下二维均匀分布的边缘概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

【分析】运用边缘概率密度的定义.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y, & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y, & -1<y<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1<y<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

10. (1) 设随机变量(X,Y)具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})y, & x\geq 0, 0\leq y\leq 1,\\ 1-e^{-\alpha x}, & x\geq 0, y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \qquad \alpha>0,$$

证明X,Y相互独立.

(2) 设随机变量(X,Y)具有分布律$P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2}, 0<p<1, x, y$均为正整数，问$X,Y$是否相互独立.

【分析】运用随机变量相互独立的定义.

证明 (1) $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}y, & 0\leq y\leq 1,\\ 1, & y>1,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

容易验证$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以X与Y独立.

(2) $P\{X=x\}=\sum\limits_{y=1}^{+\infty}P\{X=x,Y=y\}$

$$=\sum_{y=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{x-2}(1-p)^y$$

$$=p^2(1-p)^{x-2}\sum_{y=1}^{+\infty}(1-p)^y$$

$$=p(1-p)^{x-1}.$$

$$P\{Y=y\}=\sum_{x=1}^{+\infty}P\{X=x,Y=y\}$$

$$=\sum_{x=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{x-2}(1-p)^y$$

$$=p^2(1-p)^{y-2}\sum_{x=1}^{+\infty}(1-p)^x$$

$$=p(1-p)^{y-1}.$$

易验证 $P\{X=x,Y=y\}=P\{X=x\}P\{Y=y\}$，所以 X 与 Y 独立.

11. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |x|<y,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 (1) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；(2) X 与 Y 是否独立？

【分析】运用随机变量相互独立的定义.

解 (1) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{1}1\ \mathrm{d}y, & -1<x<0,\\ \int_{x}^{1}1\ \mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{y}1\ \mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 由于当 $-1<x<1,0<y<1$ 时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立.

12. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim U(0,1),Y$ 服从参数为 1 的指数分布.

试求：(1) X 和 Y 的联合概率密度；(2) $P\{Y\le X\}$；(3) $P\{X+Y\le 1\}$.

【分析】运用随机变量相互独立的性质.

解 由题意可得

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P\{X\ge Y\}=\iint\limits_{X\ge Y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1 1\text{-}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=e^{-1}.$$

$$P\left\{X+Y\leq 1\right\}=\iint\limits_{X+Y\leq 1} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1 1\text{-}\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x=e^{-1}.$$

14. 设随机变量 X 和 Y 的分布律分别为

X	-1	0	1
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

已知 $P\{XY=0\}=1$，试求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律.

【分析】运用随机变量函数分布律计算公式.

解 由 $P\left\{XY=0\right\}=1$ 得 $P\left\{X=1,Y=1\right\}=0,\ P\left\{X=-1,Y=1\right\}=0.$

又因为 $1=P\left\{XY=0\right\}=P\left\{X=0\right\}+P\left\{Y=0\right\}-P\left\{X=0,Y=0\right\}$ 得

$P\left\{X=0,Y=0\right\}=0.$

所以有如下二维联合分布律

Y / X	0	1	$P_{i.}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$P_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

从而可得 $Z=\max\left\{X,Y\right\}$ 的分布律

Z	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

15. 设随机变量(X,Y)的分布律

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求$P\{X=2\mid Y=2\},P\{Y=3\mid X=0\}$；

(2) 求$V=\max\{X,Y\}$的分布律；

(3) 求$U=\min\{X,Y\}$的分布律；

(4) 求$W=X+Y$的分布律.

【分析】运用随机变量函数分布律的计算公式.

解 (1) 由题意可得

$$P\left\{Y=2\right\}=0.16,\quad P\left\{X=2,Y=2\right\}=0.05,\quad P\left\{X=0\right\}=0.25,\quad P\left\{X=0,Y=3\right\}=0.05,$$

所以$P\left\{X=2\mid Y=2\right\}=\dfrac{5}{16},\quad P\left\{Y=3\mid X=0\right\}=\dfrac{1}{5}.$

(2) 易得V的可能取值有$0,1,2,3,4,5,$ 计算可得

$$P\left\{V=0\right\}=0,\quad P\left\{V=1\right\}=0.04,\quad P\left\{V=2\right\}=0.16,$$
$$P\left\{V=3\right\}=0.28,\quad P\left\{V=4\right\}=0.24,\quad P\left\{V=5\right\}=0.28.$$

用表格表示如下

V	1	2	3	4	5
p_k	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3) 易得U的可能取值有$0,1,2,3,$ 计算可得

$$P\left\{U=0\right\}=0.28,\quad P\left\{U=1\right\}=0.30,\quad P\left\{U=2\right\}=0.25,\quad P\left\{U=3\right\}=0.17.$$

用表格表示如下

U	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) 易得W的可能取值有$0,1,2,3,4,5,6,7,8,$计算可得

$$
\begin{aligned}
&P\{W=0\}=0,\quad P\{W=1\}=0.02,\quad P\{W=2\}=0.06,\\
&P\{W=3\}=0.13,\quad P\{W=4\}=0.19,\quad P\{W=5\}=0.24,\\
&P\{W=6\}=0.19,\quad P\{W=7\}=0.12,\quad P\{W=2\}=0.06,\\
&P\{W=8\}=0.05.
\end{aligned}
$$

用表格表示如下

W	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

17. 设X和Y是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$
f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

求随机变量$Z=X+Y$的概率密度.

【分析 1】运用分布函数法计算概率密度.

解法 1 由X与Y相互独立可得 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,0\le x\le 1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$$
F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)
$$

$$
=\begin{cases}\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y, & 0<z<1,\\ \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y, & z\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}-\int_0^z e^{x-z}-1\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ -\int_0^1 e^{x-z}-1\mathrm{d}x, & z\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}e^{-z}+z-1, & 0<z<1,\\ e^{-z}-e^{1-z}+1, & z\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

$$
f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\ge 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

【分析 2】运用随机变量函数概率密度计算公式.

解法 2　由 X 与 Y 独立可得

$$f_Z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{x-z}\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ \int_0^1 e^{x-z}\mathrm{d}x, & z\geq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ \left(e-1\right)e^{-z}, & z\geq 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

19. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

【分析】运用随机变量相互独立的定义和分布函数法计算概率密度.

解　(1) $f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)e^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)e^{-(x+y)}\Big|_0^{+\infty}+\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}\mathrm{d}\left(x+y\right), & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x+1\right)e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理可得　$f_Y\left(y\right)==\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(y+1\right)e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

易验证，当 $x>0,y>0$ 时， $f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)\neq f\left(x,y\right)$，所以 X 与 Y 不独立.

(2) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=\begin{cases}\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^z [-\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\Big|_0^{z-x}-\frac{1}{2}e^{-(x+y)}\Big|_0^{z-x}]\mathrm{d}x, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^z -\frac{1}{2}ze^{-z}-\frac{1}{2}e^{-z}+\frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}\mathrm{d}x, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\left(\frac{1}{2}z^2e^{-z}+ze^{-z}+e^{-z}\right), & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

20. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 试确定常数b；

(2) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(3) 求函数$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.

【分析】运用边缘概率密度的定义和随机变量函数的分布函数计算公式.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}\mathrm{d}y$

$$=b\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=b-be^{-1},$$

从而有$b=\frac{e}{e-1}$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases} be^{-x}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e}{e-1}e^{-x}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 be^{-(x+y)}\mathrm{d}x, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} b\left(1-e^{-1}\right)e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) $F_U(u)=P(U\le u)=P\left(\max\{X,Y\}\le u\right)=P(X\le u,Y\le u)$

$$=\begin{cases} \int_0^u \mathrm{d}x\int_0^u be^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & 0\le u<1, \\ \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^u be^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & u\ge 1, \\ 0, & u<0. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} b\left(1-e^{-u}\right)^2, & 0\le u<1, \\ b\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-u}\right), & u\ge 1, \\ 0, & u<0. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{e}{e-1}\left(1-e^{-u}\right)^2, & 0\le u<1, \\ \left(1-e^{-u}\right), & u\ge 1, \\ 0, & u<0. \end{cases}$$