第 1 章 随机事件及其概率

1.2 节：随机事件的关系和运算

一、了解**和事件，积事件，差事件，互不相容（互斥），对立（互逆）的含义， 运算律**。

1.差事件的公式：$A-B=A\overline{B}=A-AB$

2 德摩根律：$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$，$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$

例 1：教材 p4 页上的**例 3 要吃透。**

例 2：判断题：设 A、B 是 Ω 中地随机事件,则(A∪B)-B=A (×)

解答：画示意图可以判断，并从示意图可以得出结论：$(A\cup B)-B=A-AB$

例 3：判断题：设随机事件 A,B 互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 $P(A)=1-P(B)$ ，

解答：错。当 A,B 互为对立，才成立 $P(A)=1-P(B)$。

例 4：判断题：设随机事件 A,B 互不相容，则 A,B 互为对立。 (×)

分析：相互对立可以推出互不相容，反之不一定成立。

因为 A,B 互不相容：$AB=\Phi$

而 A,B 互为对立：$AB=\Phi$且$A\cup B=S$，这里S是样本空间

1.3 节：随机事件的概率

1. 概率的定义里面可列可加性或有限可加性，要强调条件“事件是两两互不相容的”

判断题：

例 1： 设 A,B **是任意两个事件**，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (×)

分析：正确的公式应该是 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

例 2： 设 A,B **互不相容(互斥)**，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (√)

分析：可由有限可加性得出。

例 3：设 A,B **是任意两个事件**，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ (×)

分析：当$B\subset A$时题目等式才成立

例 4：设 A,B **是任意两个事件**，且 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ (√)

例 5：设 A,B **是任意两个事件**，且 $B\subset A$，则 $P(A)\geq P(B)$ (√)

分析：这是书上的结论。

例 6：若 $P(A)=0.1$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.2$，则$P(\overline{A}B)=0.2$. (√)

分析：正确。因为 $\overline{A}B = B - A = B - AB$，所以

$$P(\overline{A}B) = P(B - A) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

上面 $P(B - AB) = P(B) - P(AB)$ 是因为 $AB \subset B$ （当 $M \subset N$ 时，有 $P(N - M) = P(N) - P(M)$）

1.4 节：古典概率

会做简单的题就可以，不要耗费太多时间在这一节。

例题 1：10 个球中有 3 个白球，任取 2 个球，设 A 为"恰好取到 1 个白球"，则概率 P（A）=（　）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{15}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{7}{15}$

答案：选 D。 因为 $P(A) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{3 \times 7}{\frac{10 \times 9}{2!}} = \frac{7}{15}$

2．判断： 抛掷一枚六面骰子两次，两次都出现点数相同的概率为 $\frac{1}{6}$ （ √ ）

1.5 节 条件概率（本章重点）

本章重点：全概率公式，贝叶斯公式（往年考一道大题）。

例 1 某商店员工手机掉了，掉在家里，商店，路上的概率依次为 0.5， 0.3， 0.2，掉在这 3 个地方被找到的概率依次为 0.8，0.3，0.1，

（1） 求找到手机的概率；

（2） 已知该员工已经找到该手机，求在商店找到手机的概率。

解: (1)设 A 表示" 找到手机"，B_1 表示"掉在家里"，B_2 表示"掉在商店"，B_3 表示"掉在路上"，则 $P(B_1) = 0.5$，$P(B_2) = 0.3$，$P(B_3) = 0.2$，$P(A|B_1) = 0.8$，$P(A|B_2) = 0.3$，$P(A|B_3) = 0.1$，

则找到手机的概率为

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0.5 \times 0.8 + 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.1 = 0.51 \end{aligned}$$

(2) 在商店找到手机的概率为

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.3}{0.51} = \frac{3}{17}$$

例 2 有 2 个编号分别为 I 和 II 的篮子，已知篮子 I 里有 3 个红球，2 个黑球，篮子 II 里有 4 个红球，2 个黑球，现随机的选取一个篮子，并从中抽取一个球，求：

（1） 求抽中球是黑球的概率；

（2） 已知抽出的球是黑球，求该球取自篮子 II 的概率。

解：设 A 表示" 抽到黑球"，B_1 表示"球取自篮子 I"，B_2 表示"球取自篮子 II"，

则 $P(B_1)=\frac{1}{2}$，$P(B_2)=\frac{1}{2}$， $P(A|B_1)=\frac{2}{5}$，$P(A|B_2)=\frac{2}{6}$，

（1）抽中球是黑球的概率为

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{11}{30}$$

（3） 已知抽出的球是黑球，该球取自篮子 II 的概率为

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}}{\frac{11}{30}}=\frac{5}{11}$$

1.6 节：事件的独立性

例 1 设设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{5}$，则P(AB)=____$\frac{1}{10}$________

P(A$\cup$B)=____$\frac{3}{5}$_________

分析：事件 A,B 相互独立等价于 $P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

了解并掌握教材上的定义 1 和定义 2，定理 2，

==

第 2 章 随机变量及其分布

2.2 节 离散型随机变量及其分布律

书上的性质，二项分布，0-1 分布，泊松分布的分布律的表达式要牢记。

例 1：设随机变量 $X\sim B(2,\ 0.4)$，则$P\{X=0\}$=______________

解：分析：根据二项分布的分布律表达式

$$P\{X=0\}=C_2^0\cdot(0.4)^0\cdot(1-0.4)^{2-0}=0.36$$

例 2：设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$， $k=0,1,2\cdots$，且

$P(X=0)=P(X=1)$，则λ=_____________

解：根据题目条件有 $\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$，得到$\lambda=1$

例 3：设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X\le 1)=4P(X=2)$，则 $P(X=3)=$ _($\lambda=1$)___.

注意：泊松分布里参数 $\lambda>0$

2.3 节 连续型随机变量及其分布律

书上的性质，均匀分布，指数分布，高斯正态分布的概率密度函数的表达式要牢记。

2.4 节 分布函数

1 定义：设 X 为随机变量，x 是任意实数，则函数 $F(x)=P(X\le x)$

称为随机变量 X 的分布函数，本质上是一个累积函数。

$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$ 可以得到 X 落入区间 $(a,b]$ 的概率。分布函数 $F(x)$ 表示随机变量落入区间（– ∞，x]内的概率。

2 分布函数具有如下性质：

1° $0\le F(x)\le 1,\quad -\infty<x<+\infty$；

2° $F(x)$ 是单调不减的函数，即 $x_1<x_2$ 时，有 $F(x_1)\le F(x_2)$；

3° $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

3 分布函数的计算 （往年考一道大题!!!）

对于离散型随机变量，$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$；

对于连续型随机变量，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$ 。

例 1 ：随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{6}$

（1） 求 a 的值

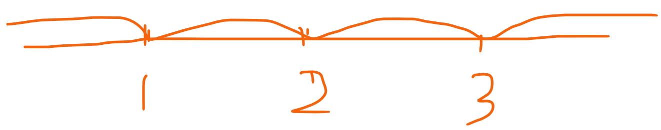
（2） 求 X 的分布函数 $F(x)$

（3） 求概率 $P\{\frac{5}{4}<X\le\frac{5}{2}\}$；　$P\{2\le X\le 4\}$

解：（1）根据概率之和等于 1 的性质，$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{6}=1$，立即等到 $a=\frac{1}{3}$

（2）离散型随机变量求分布函数的方法如下：

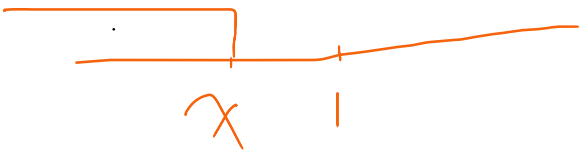
如图，用 X 的取值点 1，2，3 剖分数轴得到 4 个区间，而且这 4 个区间写成左闭右开的形式 $(-\infty,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，$[3,+\infty)$



我们分别讨论 x 落在这 4 个区间 $(-\infty,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，$[3,+\infty)$ 的情况。

由于分布函数 $F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$，这说明求分布函数就是求落在 x 的左边的 X 的取值点的概率之和。

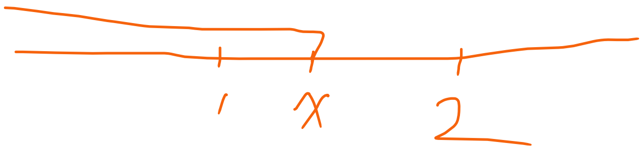
① 当 $x<1$ 时，根据位置关系如下图



只要看 x 的左边有没有 X 的取值点 1，2，3，因为没有 X 的取值点落在 x 的左边，所以

$$F(x)=0$$

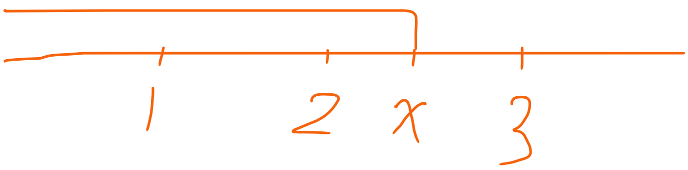
② 当 $1\le x<2$ 时，根据位置关系如下图



因为 X 的取值点 1 落在 x 的左边，所以

$$F(x)=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

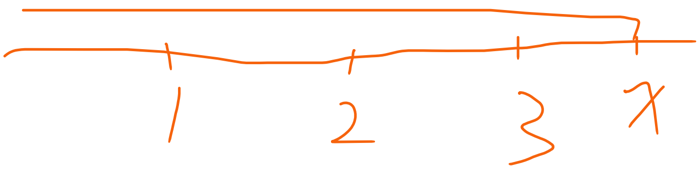
③当 $2\le x<3$ 时，根据位置关系如下图



因为 X 的取值点 1 和 2 落在 x 的左边，所以

$$F(x)=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

④当 $3\le x$ 时，根据位置关系如下图



因为 X 的取值点 1，2，3 落在 x 的左边，所以

$$F(x)=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

综上讨论，整理出答案：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{5}{6}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$$

（3）利用分布函数的公式来做，但要**注意：**

X是连续型时，这四个区间的概率都相等

$P\{a<x<b\}=P\{a\le x<b\}=P\{a<x\le b\}=P\{a\le x\le b\}=F(b)-F(a)$。

但是

X是离散型时，只有下面这个式子才成立：

$P\{a<x\le b\}=F(b)-F(a)$

所以

$$P\{\frac{5}{4}<X\le\frac{5}{2}\}=F(\frac{5}{2})-F(\frac{5}{4})=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

而下面区间因为不是左开右闭的形式，所以概率的计算要采取“减点加点“的方法来做

$$P\{2\le X\le 4\}=P\{2<X\le 4\}+P\{X=2\}-P\{X=4\}$$

$$=F(4)-F(2)+P\{X=2\}-P\{X=4\}=1-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-0=\frac{1}{2}$$

例 2 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}A(1-x), & 0\le x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

试求（1）常数 A； (2) X 的分布函数； (3) $P\{-2<X<3\}$.

解（1）

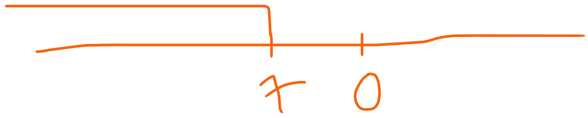
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 A(1-x)dx=\frac{1}{2}\cdot A=1,\quad A=2\ ;$$

（2）

分段点 0 和 1 把数轴剖分成 $(-\infty,0)$, $[0,1)$, $[1,+\infty)$，根据连续型随机变量的分布函数的定义 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$，可知积分路线是从 $-\infty$ 积到 x，**所以主要看落在 x 左边的分段点构成几个子区间，为什么要这样呢，因为概率密度函数在这些子区间的表达式不同。**

下面我们在 $(-\infty,0)$, $[0,1)$, $[1,+\infty)$ 上讨论

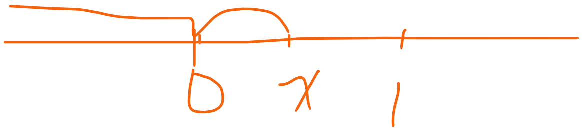
① 当 $x<0$ 时，位置关系如图



x 的左边没有分段点，所以

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$$

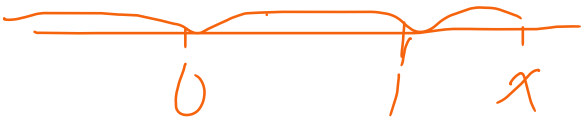
② 当 $0\le x<1$ 时，位置关系如图



x 的左边有分段点 0， x 的左边被分段点 0 分成 2 个子区间，所以在这两个子区间上积分，得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}2(1-x)dx=2x-x^2,$$

③ 当 $x\ge1$ 时，位置关系如图



x 的左边有分段点 0 和 1， x 的左边被分段点 0 和 1 分成 3 个子区间，所以在这 3 个子区间上积分，得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}2(1-x)dx+\int_{1}^{x}0dx$$

综上讨论，得到最终答案：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0, & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}2(1-x)dx=2x-x^2, & 0\le x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}2(1-x)dx+\int_{1}^{x}0dx=1, & x\ge1\end{cases}$$

（3）直接根据第 2 问的分布函数来做!!!

$$P\{-2<X<3\}=F(3)-F(-2)=1-0=1$$

下面这个方法也可以做，但积分区间要拆分

$$P\{-2<X<3\}=\int_{-2}^{3} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} 2(1-x)dx+\int_{1}^{3} 0dx=1$$

这种方法不推荐!!!因为有的同学会犯下面的错误，没有拆分积分区间

$P\{-2<X<3\}=\int_{-2}^{3} 2(1-x)dx$，**这是错的!!!**

例题 3：设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} A\cos x, & \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

试求（1）常数 A；（2）X 的分布函数；（3）$P\{0<X<\frac{\pi}{4}\}$.

解：（1）根据概率密度函数的性质

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos xdx=A\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=A(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}A,\ 得到A=2$$

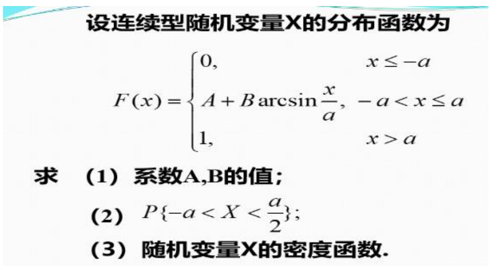
(2) 做这种题，要学会模仿上一题在草稿值上画出图，模仿分析方法!!!

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx=0, & x<\frac{\pi}{6} \\ \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 2\cos xdx=2\sin x-1, & \frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2} \\ \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dx=1, & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

（3）

$$P\{0<X<\frac{\pi}{4}\}=F(\frac{\pi}{4})-F(0)=2(\sin\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})-0=\sqrt{2}-1$$

例题 4：



设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -a \\ A+B\arcsin\frac{x}{a}, & -a<x\le a \\ 1, & x>a \end{cases}$$

求 （1）系数A,B的值；

（2）$P\{-a<X<\frac{a}{2}\}$；

（3）随机变量X的密度函数.

解 （1）因为X是连续型随机变量，所以$F(x)$ **连续**，故有 $F(-a)=\lim\limits_{x\to -a}F(x)$，　$F(a)=\lim\limits_{x\to a}F(x)$，

即

$$A+B\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right)=A-\frac{\pi}{2}B=\mathbf{0}$$

$$A+B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right)=A+\frac{\pi}{2}B=\mathbf{1}$$

解之得

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\qquad \boldsymbol{B}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi}}$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a\\ 1, & x>a\end{cases}$$

$$(2)\ P\{-a<X<\frac{a}{2}\}=F(\frac{a}{2})-F(-a)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin(\frac{a}{2a})-0=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}.$$

由于

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a\\ 1, & x>a\end{cases}$$

（3）随机变量X的密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}1\big/\pi\sqrt{a^2-x^2}, & -a<x<a\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

2.5 节 二维随机变量 2.6 节边缘分布 2.8 相互独立的随机变量

提醒：这三节内容往年会结合起来考，往年会考一道大题，如下面的题型：

例题 1：设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
0	0.09	0.21	0.24
1	0.07	0.12	0.27

（1）　求 $P\{X+Y=2\}$；求 $P\{X+Y<3\}$

（2）　求 X 和 Y 的边缘分布律；

（3）判断 X 和 Y 是否相互独立。

解: (1)满足 $X+Y=2$的点有2个，即（0，2）和（1，1），所以

$P\{X+Y=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}=0.21+0.07=0.28$

满足 $X+Y<3$的点有3个，即（0，1），（0，2）和(1, 1)，所以

$P\{X+Y<3\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}=0.37$

(2) X 的边缘分布律为：

X	0	1
p_k	0.54	0.46

Y 的边缘分布律为：

Y	1	2	3
p_k	0.16	0.33	0.51

（3）由于 $P\{X=0,Y=1\}=0.09$； $P\{X=0\}=0.54$； $P\{Y=1\}=0.16$

从而 $P\{X=0,Y=1\}\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}$

所以 X 和 Y 不是相互独立。

注意：考试时，不能只回答不是相互独立，要给出反例，也就是要说明理由。

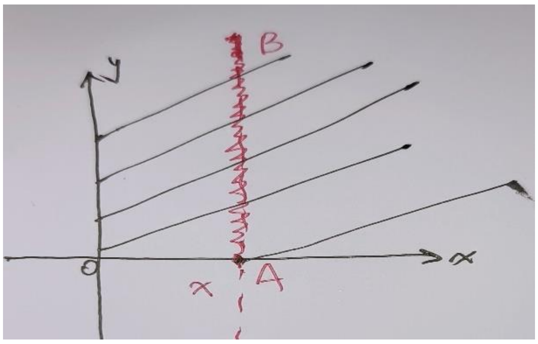
例题 2： 若 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

(1)计算 X,Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2)判断 X，Y 是否相互独立，说明理由.

解：方法提示：**一定要画图！求 $f_X(x)$ 时，要把密度不等于 0 的区域看成 X 型区域，作 x 轴的垂线确定 y 的积分范围；求 $f_Y(y)$ 时，要把密度不等于 0 的区域看成 Y 型区域，作 y 轴的垂线确定 x 的积分范围；**

（1）设联合概率密度函数不等于 0 的区域为 D，由题目可知 D 表示第一象限区域



当$0 < x < +\infty$时，

在x轴上作垂直x轴的直线，交区域D的一条射线AB

射线 AB 上点的纵坐标范围为$0 < y < +\infty$，所以区域 D 看成 X 型区域

$$\begin{cases} 0 < x < +\infty \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$$

所以

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy = e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & 其\ 他 \end{cases}$$

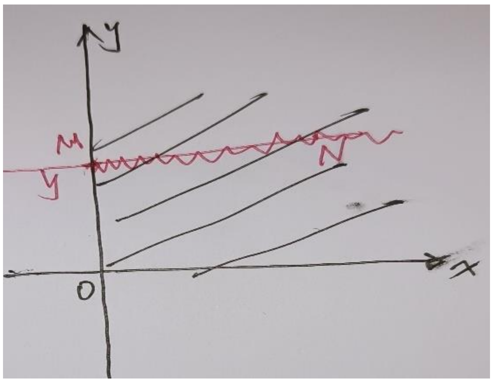
类似地

当$0 < y < +\infty$时，

在y轴上作垂直y轴的直线，交区域D得到一条射线MN

射线 MN 上点的纵坐标范围为$0 < x < +\infty$，所以区域 D 看成 Y 型区域

$$\begin{cases} 0 < y < +\infty \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$



所以

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dx = e^{-y}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & 其\ 他 \end{cases}$$

（3） 因为

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

所以 X, Y 相互独立

例 3 设(X,Y)的概率密度为

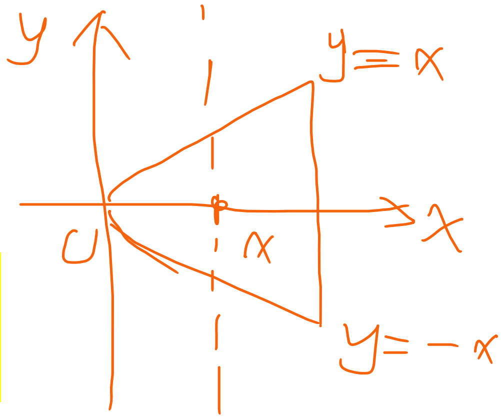
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 关于 X ， Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；

(2) 试判断 X 与 Y 是否相互独立.

解（1）一定要在草稿纸上画图!

求 X 的边缘概率密度时，要把密度不等于 0 的区域看成 X 型区域，通过作 x 轴的垂线来确定 y 的积分范围，如图



X 型区域:

当 $0<x<1$ 时， $-x<y<x$

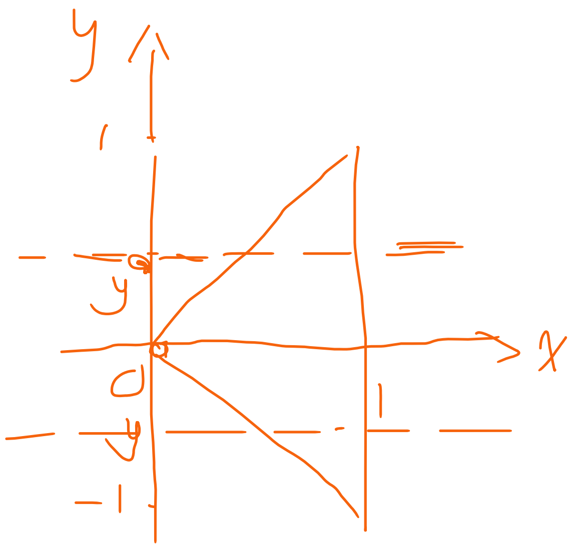
所以

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$$

求 Y 的边缘概率密度时，要把密度不等于 0 的区域看成 Y 型区域，通过作 y 轴的垂线来确定 x 的积分范围，如图

Y 型区域，而且要剖分:

当 $-1<y<0$ 时， $-y<x<1$



当 $0<y<1$ 时， $y<x<1$

所以

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1} dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1} dx=1-y, & 0\le y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

（2）因为

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2x(1+y), & 0<x<1,\quad -1<y<0\\ 2x(1-y), & 0<x<1,\quad 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为 $f_X(x)\cdot f_Y(x)\neq f(x,y)$，所以不独立

例题 4 设（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

（1） 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

（2） **判断 X 和 Y 是否相互独立，说明理由。**

解 （1）要画出联合密度不等于 0 的区域，我这里画图略

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{0}^{x} 1dy=y\Big|_0^x=x, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{1} 1dx=x\Big|_y^1=1-y, & 0<y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

（2）因为

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}x(1-y), & 0<x<1,\quad 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为 $f_X(x)\cdot f_Y(x)\neq f(x,y)$，所以不独立

2.9 节 随机变量函数的分布

重点要抓住课本 pp63 页的第一个内容：函数 $Y = g(X)$ 的分布，往年考一个大题。

1 当 X 是离散型随机变量时

例题 1

设随机变量 X 具有分布律

X	−2	1	2	3
p_k	3/10	2/10	1/10	4/10

求 $Y = X^2 - 1$ 的分布律.

解　当 X 取值 ±2, 1, 3 时，

Y 所有可能取的值 为0，3，8，由

$$P\{Y=0\} = P\{X^2-1=0\} = P\{X=1\} = \frac{2}{10}$$

$$P\{Y=3\} = P\{X^2-1=3\} = P\{(X=-2)\cup(X=2)\}$$

$$= P\{(X=-2)\cup(X=2)\}$$

$$= P\{X=-2\} + P\{X=2\} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$$

$$P\{Y=8\} = P\{X^2-1=8\} = P\{X^2=9\} = P\{X=3\} = \frac{4}{10}$$

得到Y的分布律为

Y	0	3	8
p_k	2/10	4/10	4/10

2 当 X 是连续型随机变量时

例 1，设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $U = |X|$ 的概率密度。

解：设 X, U 的概率密度分别为 $f_X(x), f_U(u)$，U 的分布函数为 $F_U(u)$。则

当 $u \le 0$ 时，$F_U(u) = P\{U \le u\} = P\{|X| \le u\} = 0$，$f_U(u) = 0$；

当 $u > 0$ 时，

$$F_U(u) = P\{U \le u\} = P\{|X| \le u\} = P\{-u \le X \le u\} = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1,$$

（注意上面倒数第二式要用到 $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ ）

$$f_U(u) = [F_U(u)]' = 2 f_X(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u^2/2}。$$

所以，$f_U(u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-u^2/2} & u>0\\ 0 & u\le 0\end{cases}$。

例题 2 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 求 $Y=2X+2$ 的概率密度函数.

解：设 Y 的概率密度和分布函数分别为 $g(y),G(y)$。则

$G(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+2\le y\}=P\{X\le\dfrac{y-2}{2}\}=F_X(\dfrac{y-2}{2})$，　故

$$g(y)=[G(y)]'=\frac{1}{2}f(\frac{y-2}{2})=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{y-2}{2}+1}{2}=\frac{y}{8},\quad -1<\frac{y-2}{2}<1$$

所以 $Y=2X+2$ 的概率密度函数为

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{8}, & 0<y<4,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

第 3 章　随机变量的数字特征

1 要掌握数学期望和方差，协方差的计算方法，性质，见课本

如数学期望的性质：

（1）　E(C)=C

（2）　E(CX)=CE(X)

（3）　E(X+Y)=E(X)+E(Y)，$E(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(X_i)$

（4）　X 和Y相互独立 $\Rightarrow$ E(XY)=E(X)·E(Y)，但反之不一定成立。

注意：

X和Y不相关 $\Leftrightarrow$ 相关系数 $\rho_{XY}=0$ $\Leftrightarrow$ 协方差 $\text{cov}(X,Y)=0$ $\Leftrightarrow$ E(XY)=E(X)·E(Y)

因此　X 和Y相互独立 $\Rightarrow$ X 和 Y 不相关，但反之不一定成立

如方差的性质：

D(C)=0；E(C)=C

（1）　D(aX)=a^2D(X)；　E(aX)=aE(X)

（2）　D(aX+b)= a^2D(X)；

E(aX+b)=aE(X)+b

（3）　D(X)=E(X^2)-E^2(X)

（4）　X和Y相互独立$\Rightarrow D$(X±Y)=D(X)+D(Y)，但反之不一定成立

注意：

D(X±Y)=D(X)+D(Y) ±2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]，无条件成立。

而 E(X+Y)=E(X)+E(Y)，无条件成立。

2. 0-1 分布，二项分布，泊松分布，均匀分布，指数分布，高斯正态分布这六大分布的期望和方差结论要背下来（见课本 pp307 页分布）。

	期望	方差
0-1 分布 $B(1, p)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $e(\lambda)$	θ	θ^2
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

常见考试题型:

例题 1: 判断题: 若随机变量X和Y相互独立，则协方差$Cov(X,Y)=0$.

答案: 正确, 因为

若随机变量X和Y相互独立$\Rightarrow$E(XY)=E(X)E(Y)$\Rightarrow$协方差$Cov(X,Y)=$E(XY)-E(X)E(Y)$=0$.

要注意： 若协方差$Cov(X,Y)=0$，不一定能推出随机变量X和Y相互独立.!!!

下面几个例题是判断题:

例题 2: 若随机变量X和Y不相关，则X和Y相互独立.

答案: 错误。因为X和Y相互独立$\Rightarrow X$和Y不相关，但反之不一定成立

例题 3： 若相关系数$\rho_{XY}=0$，则随机变量X和Y相互独立.

答案：错误， $\rho_{XY}=0$表示X和Y不相关，不能推出X和Y相互独立

例题 4: 判断题: 随机变量X和Y的相关系数ρ_{XY}一定大于等于0.

答案：错误，见课本知道 $|\rho_{XY}|\le 1$，相关系数有可能是负数。

例题 5：$D(2Y)=2D(Y)$

答案：错误，由方差的性质可知 $D(2Y)=4D(Y)$

例题 6：$D(2)=2$

答案：错误，$D(2)=0$

例题 7：$D(X+2Y)=D(X)+2D(Y)$

答案：错误，正确的是

$$D(X+2Y)=D(X)+D(2Y)+2\operatorname{cov}(X,2Y)=D(X)+4D(Y)+4\operatorname{cov}(X,Y)$$

例题 8：若随机变量 X 和 Y 相互独立，则

$$D(X+2Y)=D(X)+D(2Y)=D(X)+4D(Y)$$

答案：正确，随机变量 X 和 Y 相互独立有 E(XY)=E(X)·E(Y)，此时 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$，

往年考的大题题型是求如下：

一、二维离散型随机变量求数学期望

14. 设随机变量 (X,Y) 具有分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

求 $E(X),E(Y),E(XY),E(X-Y),E(3X+2Y)$.

解：求出边缘分布律如下

X \ Y	0	1	2	$P\{X=k\}$
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	3/14	3/14	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
$P\{Y=k\}$	10/28	15/28	3/28	1

设 X 的取值为 i， Y 的取值为 j，
求得 X 的边缘分布律：

$P\{X=0\}=\mathbf{15}/\mathbf{28}$; $\quad P\{X=1\}=12/\mathbf{28}$; $\quad P\{X=2\}=\mathbf{1}/\mathbf{28}$;

求得 Y 的边缘分布律： $P\{Y=0\}=10/\mathbf{28}$; $\quad P\{Y=1\}=15/\mathbf{28}$; $\quad P\{Y=3\}=\mathbf{1}/\mathbf{28}$;

下面求期望的方法就是依据

若 (X,Y) 为离散型随机变量，其分布律为

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，则有

$$E(V)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

① 求 $E(X)$ 时

设 $g(X,Y)=X$， 此时上面公式里的联合密度换成边缘密度 $P\{X=i\}$， 即

$$E(X)=\sum_{i=0}^{2}i\cdot P\{X=i\}=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{1}{28}=1/2,$$

② 求 $E(Y)$ 时

设 $g(X,Y)=Y$， 此时上面公式里的联合密度换成边缘密度 $P\{Y=j\}$， 即

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{2}j\cdot P\{Y=j\}=0\times\frac{10}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=3/4,$$

③求 $E(XY)$ 时，

设 $g(X,Y)=XY$， 此时上面公式里的联合密度取 $P\{X=i,Y=j\}$， 即

$$E(XY)=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}i\cdot j\cdot P\{X=i,Y=j\}$$
$$=0\times0\times\frac{3}{28}+0\times1\times\frac{9}{28}+0\times2\times\frac{3}{28}$$
$$+1\times0\times\frac{3}{14}+1\times1\times\frac{3}{14}+1\times2\times0 \quad ,$$
$$+2\times0\times\frac{1}{28}+2\times1\times0+2\times2\times0$$
$$=1\times1\times3/14=3/14$$

计算过程复杂吗？不复杂！因为某一项的乘积因子为 0 时，这一项的结果就为 0、

二，二维连续型随机变量求数学期望（通常把联合密度不为 0 的区域看成 X 型）

例题 1：设随机变量(X,Y)具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(1)求$E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$Cov(X,Y)$；

(2)判断X和Y是否相关，并说明理由。

解: **区域图略**

（1）$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x\cdot 2ydxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 2ydy=\frac{1}{2}$，

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^1 y\cdot 2ydxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 2ydxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 2y^2dy=\frac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=0,$$

（2）因为

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$，从而$X$和$Y$不相关

例题 2：设随机变量(X,Y)具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x, \quad 0<x<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$，

判断X,Y的相关性和独立性.

解: **区域图略**

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x x.1dy=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x y.1dy=\frac{1}{6}$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy.1dy=\frac{1}{8}$$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\neq 0$ 所以 X,Y 相关.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 1dy=x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 1dx=1-y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立.

例题 3 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$Cov(X,Y)$，ρ_{XY}，$D(X+Y)$.

解：**区域图略**。$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2ydy=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy^2dy=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2y^2dy=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{12},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2\cdot xydy=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 y^2\cdot xydy=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{36}=\frac{7}{72},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{36}=\frac{7}{72}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{7}{72}}\sqrt{\frac{7}{72}}}=\frac{6}{7},$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{7}{72}+\frac{7}{72}+2\times\frac{1}{12}=\frac{13}{36}.$$

例题 4 已知 $E(X)=1$， $D(X)=2$，求：$E(2X^2+4)$，$D(5-3X)$

解：$E(2X^2+4)=2E(X^2)+4=2\{D(X)+[E(X)]^2\}+4=10$

$D(5-3X)=D(5)+(-3)^2D(X)=0+18=18$

例题 5 已知 D(X)=4，则 D(3X+4)= （ ）
答案： 36，根据方差的性质 $D(aX+b)=a^2D(X)$来计算或 D(3X+4)=D(3X)+D(4)来计算。

第 4 章 正态分布

4.1 节 正态分布介绍

1 一般的正态分布和标准的正态分布，它们各自的概率密度函数和分布函数的表达式要背住。

例题 1：设 $X\sim N(4,9)$，则 $E(X)=$____4_____ $D(X)=9$

分析：$N(4,9)$ 里的第一个数4表示X的期望，第二个数9表示X的方差。

例题 2 若 X 服从正态分布，已知 X 的期望是 2，标准方差是 3，则可以表示成 $X\sim N(2,9)$

一般地，若 X 服从正态分布，则可以表示成 $X\sim N(E(X),D(X))$ 的形式。

2 一般的正态分布的重要结论有：
（a）

引理： 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) $Y=aX+b\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right)$.

(2) $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

（b）由上面的引理可知

由引理知，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则它的分布函数 $F(x)$ 与概率密度函数 $f(x)$ 可分别写成

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

3 标准正态分布的重要结论

$\Phi(0)=\frac{1}{2}$ ； $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ ； $z_{1-\alpha}=-z_{\alpha}$ ；

$$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$$

4 两种情形下计算随机变量落在区间的概率公式

若 $X\sim N(0,1)$，

$$P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Y\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

4.2 节 正态随机变量的线性组合

教材上非常重要的定理，请大家务必记住!!!

定理 1 设随机变量 $Y_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 Y_1，Y_2 相互独立，则有

$$Y_1+Y_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

定理 2 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，则对于任意不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，有

$$U = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$
$$\sim N(C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \cdots + C_n\mu_n, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2).$$

例题 1 设随机变量

X和Y相互独立且$X \sim N(3,4)$, $\quad Y \sim N(2,9)$, 则$2X+3Y \sim (\qquad)$

解：利用上面的定理 2，可知答案填 $N(12,97)$

或者这样做：因为

$2X+3Y$是正态随机变量X和Y的线性组合，所以$2X+3Y$也服从正态分布，

又

$$E(2X+3Y) = E(2X)+E(3Y) = 2E(X)+3E(Y) = 2\times3+3\times2 = 12$$
$$D(2X+3Y) = D(2X)+D(3Y) = 4D(X)+9D(Y) = 4\times4+9\times9 = 97$$

所以 $2X+3Y \sim N(12,97)$

系 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且服从同一分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的算术平均，则

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad 或 \quad \bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n). \qquad (4.2.1)$$

下面的例题要用到的参考数据，卷子上会印出来，这些题型非常重要， 往年考大题!!!!

参考数据：

$\Phi(1)=0.8413$; $\Phi(1.6)=0.9452$; $\Phi(1.645)=0.95$; $\Phi(2)=0.9772$; $\Phi(3)=0.9997$;

例题 2 (1) 设 $X \sim N(0,1)$，求 $P\{-1.6 \le X \le 1\}$.

(2) 设 $X \sim N(3,4)$，求 $P\{5 \le X \le 7\}$，$P\{-0.2 \le X \le 9\}$.

解: (1) X 已经是标准正态随机变量，不需要标准化。

$$P\{-1.6 \le X \le 1\} = \Phi(1)-\Phi(-1.6) = \Phi(1)-(1-\Phi(1.6))$$
$$= \Phi(1)+\Phi(1.6)-1 = 0.8413+0.9452-1 = 0.7865$$

(2) X 不是标准正态随机变量，需要标准化，只有标准化了，才能借助标准正态分布函数做题！

$$P\{5 \le X \le 7\} = P\{\frac{5-3}{2} \le \frac{X-3}{2} \le \frac{7-3}{2}\}$$
$$= P\{1 \le \frac{X-3}{2} \le 2\} = \Phi(2) - \Phi(1)$$
$$= 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

$$P\{-0.2 \le X \le 9\} = P\{\frac{-0.2-3}{2} \le \frac{X-3}{2} \le \frac{9-3}{2}\} = P\{-1.6 \le \frac{X-3}{2} \le 3\}$$
$$= \Phi(3) - \Phi(-1.6) = \Phi(3) + \Phi(1.6) - 1 = 0.9997 + 0.9452 - 1 = 0.9449$$

例题 3 某种动物的体重（单位：kg） $X \sim N(166, 8^2)$，求

(1) 随机地选出一只动物，其体重大于 174kg 的概率.
(2) 随机地选出 4 只动物，其平均体重大于 174kg 的概率.
分析：本题 X 不是标准正态随机变量，计算过程中需要标准化!!!!!
解：（1）

$$P\{X > 174\} = 1 - P\{X < 174\} = 1 - P\{\frac{X-166}{8} < \frac{174-166}{8}\}$$
$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

（3） 本题要用到如下结论

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

设 4 只动物的体重分别记为随机变量 $X_1, \cdots X_4$， $\bar{X} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i$ 。则

$\bar{X} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(166, \frac{8^2}{4})$， $\bar{X}$ 不是标准正态随机变量，下面的计算过程中需要标准化!!!!!，所以这 4 只动物的平均体重大于 174kg 的概率为

$$P\{\bar{X} > 174\} = 1 - P\{\bar{X} < 174\} = 1 - P\{\frac{\bar{X}-166}{4} < \frac{174-166}{4}\}$$
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

例题 4 某超市出售的玉米每袋的标准重量是 10kg，设每袋重量（单位：kg）$X \sim N(10, 0.1^2)$，求

（1）随机抽取一袋大米，求 $P\{9.8 < X < 10.2\}$;

(2) 求常数 c，使得每袋的重量大于 c 的概率为 0.05.
分析：本题 X 不是标准正态随机变量，计算过程中需要标准化!!!!!
解：（1）

$$P\{9.8 < X < 10.2\} = P\{\frac{9.8-10}{0.1} < X < \frac{10.2-10}{0.1}\} = P\{-2 < X < 2\}$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

（2）

$$P\{X > c\} = 1 - P\{X < c\} = 1 - P\{\frac{X-10}{0.1} < \frac{c-10}{0.1}\}$$
$$= 1 - \Phi(\frac{c-10}{0.1}) = 0.05$$

即 $\Phi(\frac{c-10}{0.1}) = 0.95$，因为 $\Phi(1.645) = 0.95$，所以 $\frac{c-10}{0.1} = 1.645$ 得到 $c = 10.1645$

例题 5

例5 设活塞的直径(以 cm 计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$，气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$，X 和 Y 相互独立.任取一支活塞，任取一只气缸，求活塞能装入气缸的概率.

解：按题意需求 $P\{X < Y\}$，即求 $P\{X - Y < 0\}$.

由于 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$

故有
$$P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$$
$$= P\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\}$$
$$= \Phi(\frac{0.10}{0.05}) = \Phi(2) = 0.9772$$

$$X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$$

这是

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 22.4 - 22.5 = -0.1$$

因为 X 和 Y 相互独立，$D(X-Y) = D(X) + D(-Y)$
$$= D(X) + (-1)^2 D(-Y) = 0.03^2 + 0.04^2 = 0.0025$$

上面解题过程中， $X - Y$ 不是标准正态随机变量，计算过程中标准化!!!!!

归纳:

$M \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 M 可以标准化得到标准的正态随机变量 Y，即

若 $Y = \frac{M - E(M)}{\sqrt{D(M)}} = \frac{M - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

例题 6： 设 $X \sim N(1,5),\ Y \sim N(0,4),\ X和Y相互独立，则P\{X+Y<3\}=(\quad)$

A. $1-\Phi(\frac{1}{3})$　　B. $\Phi(\frac{1}{3})$　　C. $\Phi(\frac{2}{3})$　　D. $1-\Phi(\frac{2}{3})$

解：选 C。因为 $X+Y \sim N(1,9)$，所以下面的不等式变形的目的是使 $X+Y$ 标准化

$$P\{X+Y<3\}=P\{\frac{X+Y-1}{3}<\frac{3-1}{3}\}=\Phi（\frac{2}{3}）$$

例题 7：

设 $X \sim N(1,\frac{9}{2}),\ Y \sim N(0,4),\ X和Y相互独立，则P\{2X+3Y>18\}=(\quad)$

B. $1-\Phi(2)$　　B. $\Phi(2)$　　C. $\Phi(\frac{2}{3})$　　D. $1-\Phi(\frac{2}{3})$

解：因为

$2X+3Y$是正态随机变量X和Y的线性组合，所以$2X+3Y$也服从正态分布。

又

$$E(2X+3Y)=E(2X)+E(3Y)=2E(X)+3E(Y)=2\times1+3\times0=2$$

$$D(2X+3Y)=D(2X)+D(3Y)=4D(X)+9D(Y)=4\times\frac{9}{2}+9\times4=64$$

所以 $2X+3Y \sim N(2,64)$，下面的不等式变形的目的是使 $2X+3Y$ 标准化

$$P\{2X+3Y>18\}=1-P\{2X+3Y\le18\}$$

$$=1-P\{\frac{(2X+3Y)-2}{8}\le\frac{18-2}{8}\}=1-\Phi（2）$$

所以选 A。

第 5 章 样本及抽样分布

5.3 节　统计量

1 统计量的定义

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的一个样本，称 $g=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为样本函数，其中 g 为一个连续函数。如果 g 中不包含任何未知参数，则**称 $g=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一个统计量**。

注意：这里要强调 g 中包含 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，或 $\overline{X}$，或含 n（它是样本容量，不是参数），或其它已知参数；但是不能含任何未知参数；如果含了未知参数，则 g 不是统计量了。

例题 1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ, σ^2 未知，$\overline{X}$和S 分别表示样本均值和样本标准差，则下列为统计量的是 （　　　）

（A）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$　（B）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　（C）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$　（D）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

答案：选 D。由于题目强调了 μ, σ^2 未知，而选项 A, B， C 均含有未知的参数

μ或σ或σ^2.，所以 A,B,C 不是统计量。

提醒：在本章中 μ表示总体均值，σ^2表示总体方差

例题 2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{12}$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ, σ^2 未知，$\overline{X}$和S 分别表示样本均值和样本标准差，则下列说法正确的是 （　　　）

A.　X_{12} 服从 $N(\mu, \sigma^2)$　　　B.　$S^2 = \dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

C.　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{12}}$　　　D.　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{12}}$

答案：选 A，因为个体和总体同分布。

B 错误，正确的是 $S^2 = \dfrac{1}{11}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

C，D 选项中含有未知参数 μ, σ 。

2 常见的统计量要记住，如下：

样本均值　$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

样本方差　$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

样本标准差　$S = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

样本 k 阶原点矩

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k, k = 1, 2, \cdots.$$

样本 k 阶中心矩

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots.$$

请大家注意区分

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$

和　样本二阶中心矩 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，不同的地方看明白了吗？

重要的结论： $E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，$E(S^2)=\sigma^2$，$E(B_2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

由 $E(S^2)=\sigma^2$ 可知，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 是总体方差的无偏估计!!!

例题 3　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，　则（　　　）是总体方差的无偏估计。

(A)　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$　　　　(B)　$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$

(C)　$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$　　　　(D)　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2.$

答案：选　(B)，　B 选项表示样本方差。由 $E(S^2)=\sigma^2$ 可知。

5.4 节　抽样分布

一、**χ^2分布，t 分布，F 分布的定义要背住!**

二、**本节课重要的结论要记住！如下：**

1

定理 1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则有

$$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n).$$

此外还有 $\overline{X}$ 的标准化变量 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$

解释：定理已知条件是总体

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 即总体X的期望为$E(X)=\mu$, 总体X的方差为$D(X)=\sigma^2$, 样本容量为n,

那么有结论：样本均值$\overline{X}$和总体X的期望相同，即$E(\overline{X})=E(X)=\mu$，样本均值$\overline{X}$的方差是总体X的方差的$\frac{1}{n}$，即$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$

例题 1：设总体$X\sim N(2,4)$，$\overline{X}$为样本均值，样本容量为7，则

$E(\overline{X})=$____2____；　$D(\overline{X})=$____$\frac{4}{7}$____

2

定理 2　设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则有

1°　$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\tag{5.4.13}$$

2°　$\bar{X}$与S^2独立.

（证明略）

3

定理 3　设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).\tag{5.4.14}$$

4

定理 3　设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).\tag{5.4.14}$$

5

定理 4 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立①. 设

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$$

分别是两个样本的均值.

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

分别是这两个样本的方差，则有

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

例题 2 ：判断题：

设 X_1,X_2 是来自总体 $N(1,2^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则 $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$. （ ）

答案：正确。 由题意知 $n=2,\ \mu=1,\ \sigma=2$ 代入 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. 立即得到。

第 6 章 参数估计

6.1 节 参数的点估计

1 要掌握的方法：矩估计法，最大似然估计法（重点方法，往年考一道大题）

例题 1， 设总体 X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{\theta} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其 他}\end{cases}$，参数 θ 未知，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求 θ 的矩估计量。

解：总体 X 的一阶总体原点矩为 $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{\theta}x\cdot(1-\dfrac{x}{\theta})dx=\dfrac{\theta^2}{6}$，

样本一阶原点矩 $A_1=\overline{X}$ 替代 μ_1，可得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{6\overline{X}}$ 。

例题 2. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体的样本值，求参数 β 的最大似然估计值。

解： 似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}\right]=\frac{\beta^n}{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\beta+1}},$$

相应的对数似然函数为

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)\text{。}$$

令对数似然函数对 μ 的一阶导数为零，即

$$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)=0$$

得到 β 的最大似然估计值为

$$\beta=\frac{n}{\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)}\text{。}$$

6.2 节 估计量的评选标准

主要掌握无偏性，有效性的定义，利用定义判定。

例题 1 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，X_2，X_3 为总体的样本，估计量 μ_1，μ_2，μ_3，μ_4 中（　　）不是 μ 的无偏估计量。

(A)　$\mu_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{3}{10}X_3$　　　(B)　$\mu_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{5}{12}X_3$

(C)　$\mu_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{15}X_3$　　　(D)　$\mu_4=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$

解：答案选 C. 因为个体服从总体, **有** $E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=E(X)=\mu$;

(A)选项算得 ： $E(\mu_1)=E(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{3}{10}X_3)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{5}E(X_2)+\frac{3}{10}E(X_3)=\mu$

所以 μ_1是μ的无偏估计，类似的方法去算 （B）(D) 选项都是无偏估计；而

$E(\mu_3)=\frac{2}{3}\mu\neq\mu$，所以(C)选项不是无偏估计。

例题 2 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，X_2，X_3 为总体的样本，则下列 μ 的无偏估计量中最有效的是（　　）

(A)　$\mu_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$　　　(B)　$\mu_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

(C)　$\mu_3=\frac{3}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2-\frac{2}{5}X_3$　　　(D)　$\mu_4=\frac{1}{6}X_1+\frac{2}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$

解：答案选 B. 因为个体服从总体, **有** $D(X_1)=D(X_2)=D(X_3)=D(X)=\sigma^2$;

$$D(\mu_1)=D(\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{16}D(X_3)=\frac{3}{8}\sigma^2$$

类似可算得 $D(\mu_2)=\dfrac{1}{3}\sigma^2$； $D(\mu_3)=\dfrac{9}{25}\sigma^2$； $D(\mu_4)=\dfrac{7}{18}\sigma^2$； 通过比较可知 $D(\mu_2)=\dfrac{1}{3}\sigma^2$ 最小。

6.3 节　参数的区间估计

注意：掌握单个正态总体均值与方差的双侧置信区间的计算（考大题!!!），计算公式见课本 p166 页，见下表，必须背牢固！

	待估参数	其他参数	枢轴量 W 的分布	置信区间
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
	μ	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

下面 2 个例题参考数据：

$z_{0.025}=1.96,\ z_{0.05}=1.645,\ \chi^2_{0.025}(19)=32.825,\ \chi^2_{0.975}(19)=8.906,\ \chi^2_{0.05}(11)=19.675$，

$t_{0.025}(11)=2.2010$

例题 1 已知天平称量结果 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（单位：g），其标准差为 $\sigma=0.1$.

用天平称量某物体的质量 16 次，得平均值为 $\overline{x}=15.4$． 求该物体平均质量 μ 的置信水平为 0. 95 的置信区间。

解：这是一个方差已知的正态总体均值的区间估计问题。μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{x}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$，在本题中 $\overline{x}=15.4$，$\sigma=0.1$，$n=16$，

$1-\alpha=0.95,\ \alpha=0.05,\ z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

μ 的置信水平为 0. 95 的置信区间为

$$\left(15.4\pm\frac{0.1}{\sqrt{16}}\times1.96\right)=(15.4\pm0.049)=(15.351,\ 15.449)$$

例题 2，一油漆商希望知道某种新的内墙油漆的干燥时间。在面积相同的 12 块内墙上做试验，记录干燥时间（以分计），得样本均值 $\bar{x}=66.3$ 分，样本标准差 $s=9.4$ 分。设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知。求干燥时间的数学期望的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：这是一个方差未知的正态总体均值的区间估计问题。根据已知结论，干燥时间的数学期望的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)=\left(66.3\pm\frac{9.4}{\sqrt{12}}\times 2.2010\right)=(66.3\pm 5.97)=(60.33,\quad 72.27)$$

例题 3. 假设某种固体燃料火箭推进器的燃烧率（单位：cm/s）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现取得一容量为 20 的样本，测得样本方差 $s^2=5$， 求方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。（保留小数点后两位）

解：这是一个 μ 未知的正态总体方差的区间估计问题， σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$。在本题中 $s^2=5$， $n=20$，

$$1-\alpha=0.95,\ \alpha=0.05,\ \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(19)=32.825,\quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(19)=8.906$$

方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{(20-1)\times 5}{32.825},\ \frac{(20-1)\times 5}{8.906}\right)=(2.89,10.67)$$

第 7 章 假设检验（主要考选择或判断题）

注意：我们只考虑单个样本，要用到的检验方法是 Z 检验法，t 检验法， χ^2 检验法这 3 个方法，我们要牢牢记住何种情形下选取的检验统计量是什么，拒绝域的表达式是什么。总结如下：

一、 均值的检验：Z 检验法，t 检验法

1. 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的均值的假设检验

(1) 方差 σ^2 已知时关于 μ 的检验（Z 检验）

使用检验统计量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Z 检验	检验统计量的观察值 $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$（显著性水平为 α）	
H_0	H_1	H_0 的拒绝域
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\{z \geqslant z_\alpha\}$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\{z \leqslant - z_\alpha\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\{\lvert z \rvert \geqslant z_{\alpha/2}\}$

(2) 方差 σ^2 未知时关于 μ 的检验（t 检验）

使用统计量

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

t 检验	检验统计量的观察值 $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$（显著性水平为 α）	
H_0	H_1	H_0 的拒绝域
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\{t > t_\alpha(n-1)\}$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\{t < - t_\alpha(n-1)\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\{\lvert t \rvert \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\}$

二、 方差的检验：χ^2 检验法

1. 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的方差的假设检验

取 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量.

表 7.5

χ^2 检验	检验统计量的观察值 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$（显著性水平为 α）	
H_0	H_1	H_0 的拒绝域
$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\{\chi^2\geqslant\chi_\alpha^2(n-1)\}$
$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\{\chi^2\leqslant\chi_{1-\alpha}^2(n-1)\}$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\{\chi^2\leqslant\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\}\cup\{\chi^2\geqslant\chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$

例题 1

假设检验中的显著性水平α 是(　　　)。

A　推断时犯第 II 类错误的概率

B　推断时犯第 I 和第 II 类错误的概率

C　推断时犯第 I 类错误的概率

D　推断时犯第III类错误的概率

【正确答案】：C

【答案解析】

[解析] 显著性水平α 是犯第 I 类错误的概率，也就是原假设 H_0 为真，却拒绝 H_0 的概率。

例题 2 判断题

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,2^2)$ 样本，$\bar{X}$ 为样本均值，显著性水平为 α，检验假设 H_0：

$\mu=3$，H_1：$\mu\neq3$，可选用检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-3}{2/\sqrt{n}}$.(　　)

答案：正确，根据上面我列出的。

例题 3 判断题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ 未知，显著性水平为 α，假设检验

$H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$, 则选用检验统计量为Z=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$（　　）

答案：错误。这是总体方差σ^2未知情况下对总体均值μ的检验，应该

选用检验统计量为T=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

例题 4 判断题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ 未知，显著性水平为 α，假设检验

$H_0:\mu\leq\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$, 则选用检验统计量为Z=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$（　　）

答案：错误。这是总体方差σ^2未知情况下对总体均值μ的右边检验，应该

选用检验统计量为T=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

例题 5 判断题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 已知，显著性水平为 α，假设检验

$H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$, 则选用检验统计量为Z=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，$z$ 是观察值，该假设检验

的拒绝域为$\{|z|\geq z_\alpha\}$　　（　　）

答案：错误。这是双边检验，该假设检验的拒绝域为$\{|z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$

例题 6 判断题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，显著性水平为 α，假设检验

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$, 则选用检验统计量为$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，

答案：正确，如我上面总结的结论。

例题 7 判断题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，显著性水平为 α，假设检验

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$, 选用检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 设

ϖ 为 χ^2 的观察值，则该假设检验的拒绝域为 $\{\varpi\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}\cup\varpi\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

答案：正确，如我上面给的表格结论。

例题 8 判断题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 未知，显著性水平为 α，假设检验

$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$, 则选用检验统计量为 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，$t$ 是观察值，该假设检验

的拒绝域为 $\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}$　　（　　）

答案：错误。这是双边检验，该假设检验的拒绝域为 $\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$，拒绝域表达式里面的自由度是 $n-1$，不是 n