

第7章 假设检验

1. 设某种产品的指标服从正态分布，它的标准差 $\sigma=150$ ，今抽取一个容量为 26 的样本，计算得平均值为 1637. 问在 5% 的显著性水平下，能否认为这批产品的指标的期望值 $\mu=1600$ ？

【分析】 方差 σ^2 已知，关于均值 μ 的假设检验——Z 检验

$$\text{检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

双边检验: $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$.

拒绝域: $\left\{ |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$. ——双尾域

解 (1) 根据题意需要检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 1600, H_1: \mu \neq \mu_0(1600)$

$$(2) \text{ 检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(3) 由 $\alpha = 0.05$ ，查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ， H_0 的拒绝域为 $\left\{ |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \right\}$.

(4) $\bar{x} = 1637$ ，计算， $|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = 1.2578 < 1.96$

接受 H_0 ，可以认为这批产品的指标的期望值 $\mu = 1600$.

2. 某厂生产的合金强度服从正态分布 $X \sim N(\theta, 16)$ ，其中 θ 的设计值为不低于 110(Pa). 为保证质量，该厂每天都要对生产情况做例行检查，以判断生产是否正常进行，即该合金的平均强度不低于 110 (Pa). 某天从生产中随机抽取 25 块合金，测得其强度均值为 $\bar{x} = 108$ (Pa)，问当日生产是否正常？

【分析】 方差 σ^2 已知，关于均值 μ 的假设检验——Z 检验

$$\text{检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

左边检验: $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$.

拒绝域: $\{z \leq -z_\alpha\}$. ——左尾域

解 根据题意需要检验假设 $H_0: \theta \geq 110$, $H_1: \theta < 110$

$$\text{检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma / \sqrt{n}},$$

由 $\alpha = 0.05$, 查表得 $z_\alpha = 1.645$, H_0 的拒绝域为 $\{z \leq z_\alpha = -1.645\}$

$$\text{计算 } z = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma / \sqrt{n}} = -2.5 < -1.645$$

说明 z 的值落在拒绝域中, 即拒绝 H_0 , 可以认为当日生产不正常.

3. 成年男子肺活量为 $\mu = 3750$ 毫升的正态分布, 选取 20 名成年男子参加某项体育锻炼一定时期后, 测定他们的肺活量, 得平均值为 $\bar{x} = 3808$ 毫升, 设方差为 $\sigma^2 = 120^2$, 试检验肺活量的均值的是否有显著提高 (取 $\alpha = 0.02$) ?

【分析】 方差 σ^2 已知, 关于均值 μ 的假设检验—— Z 检验

$$\text{检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

右边检验: $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$.

拒绝域: $\{z \geq z_\alpha\}$. ——右尾域

解 根据题意需要检验假设 $H_0: \mu = 3750$, $H_1: \mu > 3750$

$$\text{检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

由 $\alpha = 0.02$, 查表得 $z_\alpha = 2.06$, H_0 的拒绝域为 $\{z \geq z_\alpha = 2.06\}$

$$\text{计算 } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.1615 > 2.06$$

说明 z 的值落在拒绝域中, 即拒绝 H_0 , 可以认为肺活量的均值有显著提高.

4. 某种电子元件的电阻值 (单位: 欧姆) 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 随机抽取 25 个元件, 测得平均电阻值 $\bar{x} = 992$, 样本标准差 $s = 25$, 试在 $\alpha = 0.1$ 下检验电阻值的期望 μ 是否为

1000?

【分析】 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验法

$$\text{检验统计量为: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

$$\text{双边检验: } H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

$$\text{拒绝域: } \left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}. \quad \text{——双尾域}$$

解 根据题意需要检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 1000$, $H_1: \mu \neq \mu_0 (1000)$

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

$$\text{由 } \alpha = 0.1, \text{ 查表得 } t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05}(24) = 1.7109,$$

$$H_0 \text{ 的拒绝域为 } \left\{ |t| > t_{\alpha/2}(n-1) = 1.7109 \right\}$$

$$\text{计算 } |t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| = 1.6 < 1.7109$$

接受 H_0 , 可以认为检验电阻值的期望 μ 为 1000.

5. 某次考试的考生成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 都未知, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 平均成绩 63.5 分, 样本标准差 $s=15$ 分, 问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下是否可以认为全体考生的平均成绩为 70 分?

【分析】 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

$$\text{检验统计量为: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

$$\text{双边检验: } H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

$$\text{拒绝域: } \left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}. \quad \text{——双尾域}$$

解 根据题意需要检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 70$, $H_1: \mu \neq \mu_0 (70)$

检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 由 $\alpha = 0.05$, 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.0301$

H_0 的拒绝域为 $\{|t| > t_{\alpha/2}(n-1) = 2.0301\}$

计算 $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = 2.6 > 2.0301$

说明 t 值落在拒绝域中, 即拒绝 H_0 , 不可以认为全体考生的平均成绩为 70 分.

6. 在某个城市, 家庭每天的平均消费额为 90 元, 从该城市中随机抽取 15 个家庭组成一个随机样本, 得到样本均值为 84.50 元, 样本标准差为 14.50 元. 假设家庭每天的消费额 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下, 检验假设 $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$.

【分析】 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

检验统计量为: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$,

双边检验: $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$.

拒绝域: $\left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$. ——双尾域

解 双边检验 $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$.

检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, $\alpha = 0.05$, 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448$

H_0 的拒绝域为 $\{|t| > t_{\alpha/2}(n-1) = 2.1448\}$

计算 $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = 1.4691 < 2.1448$

t 值没有落在拒绝域当中, 即接受 H_0 , 可以认为家庭每天的消费额均值是 90 元.

7. 根据资料, 用某种旧安眠药时, 平均睡眠时间为 20.8 h, 标准差为 1.6 h. 有一种新安眠药, 据说在一定剂量下, 能比旧安眠药平均增加睡眠时间 3 h. 为了检验这个说法是否正确, 收集到一组使用新安眠药的睡眠时间 (单位: h) 为:

26.7 22.0 24.1 21.0 27.2 25.0 23.4

试问: 从这组数据能否说明新安眠药已达到新的疗效 (假定睡眠时间服从正态分布, 取

$\alpha = 0.05$).

【分析】 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

检验统计量为: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$,

双边检验: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$.

拒绝域: $\left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$. ——双尾域

解 根据题意需要做出检验假设

$H_0: \mu = \mu_0 = 23.8$, $H_1: \mu \neq \mu_0$.

检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$, 由 $\alpha = 0.05$, 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(6) = 2.4469$

H_0 拒绝域为 $\left\{ |t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = 2.4469 \right\}$

计算 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 24.2$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 5.29$ $S = 2.3$

$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = 0.46 < 2.4469$

接受 H_0 , 可以认为新安眠药已达到新的疗效.

8. 用传统工艺加工的某种水果罐头中, 每瓶平均维生素 C 的含量为 19mg, 现改进了加工工艺, 抽查了 16 瓶罐头, 测得维生素含量为: $\bar{x} = 20.8$ mg, $s = 1.6$ mg. 已知水果罐头中的维生素 C 的含量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知, 则新工艺下维生素 C 含量是否比旧工艺下维生素 C 含量有显著提高? (取 $\alpha = 0.01$)

【分析】 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

检验统计量为: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$,

右边检验: $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$.

拒绝域: $\{t \geq t_{\alpha}(n-1)\}$. ——右尾域

解 根据题意需要做出检验假设 $H_0: \mu \leq 19$, $H_1: \mu > 19$

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

由 $\alpha = 0.01$, 查表得 $t_\alpha(n-1) = t_{0.01}(15) = 2.6025$

H_0 的拒绝域为 $\{t \geq t_\alpha(n-1) = 2.6025\}$

$$\text{计算 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = 4.5 > 2.6025$$

说明 t 的值落在拒绝域中, 即拒绝 H_0 , 可以认为新工艺下维生素 C 含量比旧工艺下维生素 C 含量有显著提高.

9. 已知某种发动机的运转时间服从正态分布, 现测试装配好的 6 台的运转时间分别为 (分):

28 27 31 29 30 27

按要求平均运转时间应不低于 30 分钟, 在 $\alpha = 0.05$ 下检验这种发动机是否符合要求?

【分析】 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

$$\text{检验统计量为: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

左边检验: $H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$.

拒绝域: $\{t \leq -t_\alpha(n-1)\}$. ——左尾域

解 根据题意需要做出检验假设 $H_0: \mu \geq 30$, $H_1: \mu < 30$

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

由 $\alpha = 0.05$, 查表得 $-t_\alpha(n-1) = -t_{0.05}(5) = -2.0150$

H_0 拒绝域为 $\{t \leq -t_\alpha(n-1) = -2.0150\}$

$$\text{由已知条件计算: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 28.6667,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 2.66668, \quad s = 1.6330$$

$$\text{得 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = -1.9999 > -2.0150$$

接受 H_0 ，可以认为这种发动机符合要求.

10. 设正品镍合金线的抗拉强度服从均值不低于 10620 (kg/mm²) 的正态分布，今从某厂生产的镍合金线中抽取 10 根，测得平均抗拉强度 10600 (kg/mm²)，样本标准差为 80 mm，问该厂的镍合金线的抗拉强度是否不合格？(取 $\alpha = 0.1$)

【分析】 方差 σ^2 未知，关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

$$\text{检验统计量为: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

$$\text{左边检验: } H_0: \mu \geq \mu_0 \quad H_1: \mu < \mu_0.$$

$$\text{拒绝域: } \{t \leq -t_\alpha(n-1)\}. \quad \text{——左尾域}$$

解 根据题意需要做出检验假设 $H_0: \mu \geq 10620$, $H_1: \mu < 10620$

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}, \quad \text{由 } \alpha = 0.1, \quad \text{查表得 } -t_\alpha(n-1) = -t_{0.1}(9) = -1.3830$$

$$\text{拒绝域为 } \{t < -t_\alpha(n-1) = -1.3830\}$$

$$\text{计算 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = -0.79 > -1.3830$$

接受 H_0 ，可以认为该厂的镍合金线的抗拉强度合格.

11. 某公司声称某种类型的电池的平均寿命至少为 21.5 小时. 有一实验室检验了该公司制造的 6 套电池，得到寿命如下（单位：小时）

19 18 22 20 16 25

设电池的寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，试问：这些结果是否表明，这种类型的电池低于该公司所声称的寿命？(取 $\alpha = 0.05$)

【分析】 方差 σ^2 未知，关于均值 μ 的假设检验—— t 检验

检验统计量为: $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$,

左边检验: $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

拒绝域: $\{t \leq -t_\alpha(n-1)\}$. ——左尾域

解 根据题意需要做出检验假设 $H_0: \mu \geq \mu_0 = 21.5$, $H_1: \mu < \mu_0(21.5)$

检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 由 $\alpha = 0.05$, 查表得 $-t_\alpha(n-1) = -t_{0.05}(5) = -2.0150$

拒绝域为 $\{t < -t_\alpha(n-1) = -2.0150\}$

由已知条件计算: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 20$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 10$, $s = \sqrt{10}$,

得 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1.1619 > -2.0150$

接受 H_0 , 可以认为这种类型的电池不低于该公司所声称的寿命.

12. 某型零件的长度服从标准差为 2.4 公分的正态分布. 现从一批新生产的该型零件中随机选取 25 根, 测得样本标准差为 2.7 公分. 试以显著性水平 1% 判断该批零件长度的标准差是否为 2.4 公分? (取 $\alpha = 0.01$)

【分析】 关于方差 σ^2 的假设检验—— χ^2 检验

双边检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

检验统计量为: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域: $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$. ——双尾域

解 根据题意需要做出检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2.4^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 2.4^2$

检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 由 $\alpha = 0.01$, 查表得

$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.995}^2(24) = 9.886$, $\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.005}^2(24) = 45.559$

拒绝域为 $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\} = \{\chi^2 \leq 9.886\} \cup \{\chi^2 \geq 45.559\}$

计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 30.375$, 由于 $9.886 < \chi^2 < 45.558$

接受 H_0 , 可以认为该批零件长度的标准差为 2.4 公分.

13. 从一台车床加工的成批轴料中抽取 15 件测量其椭圆度, 计算得 $s^2 = 0.025$, 设轴料的椭圆度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则该批轴料的椭圆度的总体方差 σ^2 与规定的方差 $\sigma_0^2 = 0.035$ 有无显著差别? (取 $\alpha = 0.05$)

【分析】 关于方差 σ^2 的假设检验—— χ^2 检验

双边检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$

检验统计量为: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域: $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$. ——双尾域

解 根据题意需要做出检验假设

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.035, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 (0.035).$

检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 由 $\alpha = 0.05$, 查表得

$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(14) = 26.119, \quad \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(14) = 5.629$

拒绝域为 $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\} = \{\chi^2 \leq 5.629\} \cup \{\chi^2 \geq 26.119\}$

计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 10$ $5.629 < \chi^2 < 26.119$

接受 H_0 , 可以认为该批轴料的椭圆度的总体方差 σ^2 与规定的方差 $\sigma_0^2 = 0.035$ 无显著差别.

14. 一个制造商所生产的零件直径的方差本来是 0.00156. 后来为削减成本, 就采用一种费用较低的生产方法. 从新方法制造的零件中随机抽取 20 个作样本, 测得零件直径的方差为 0.00211. 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下, 检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq 0.00156, H_1: \sigma^2 > 0.00156$.

【分析】 关于方差 σ^2 的假设检验—— χ^2 检验

检验统计量为: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

右边检验: $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ 或 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

拒绝域: $\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)\}$ ——右尾域

解 $H_0: \sigma^2 \leq 0.00156$, $H_1: \sigma^2 > 0.00156$

检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 由 $\alpha = 0.05$, 查表得 $\chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(19) = 30.143$

拒绝域为 $\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1) = 30.144\}$

计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 25.6987 < 30.144$

接受 H_0 .

15. 测定某种溶液中的水份, 它的 10 个测定值给出 $s = 0.034\%$. 设测定值总体为正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知, 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设:

$H_0: \sigma \geq 0.037\%$, $H_1: \sigma < 0.037\%$

【分析】 关于方差 σ^2 的假设检验

左边检验: $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

检验统计量为: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域: $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\}$ ——左尾域

解 (1) $H_0: \sigma \geq 0.037\%$, $H_1: \sigma < 0.037\%$

(2) 检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$,

(3) $\alpha = 0.05$, 查表得 $\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = 3.325$,

H_0 的拒绝域为: $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1) = 3.325\}$.

(4) 计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9S^2}{0.00037^2} = 7.5997 > 3.325,$

接受 H_0 .

16. 由生产经验知, 某种钢筋的强度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 但 μ 和 σ^2 均未知. 今随机抽取 6 根钢筋进行强度试验, 测得强度 (单位: MPa) 分别是:

485 490 535 495 560 525

(1) 问能否认为该种钢筋的平均强度为 520 (取 $\alpha = 0.05$)?

(2) 能否认为该种钢筋的方差为 780 (取 $\alpha = 0.05$)?

【分析】 (1) 方差 σ^2 未知, 关于均值 μ 的假设检验—— t 检验法

双边检验: $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$.

检验统计量为: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}.$

拒绝域: $\left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}.$ ——双尾域

(2) 关于方差 σ^2 的假设检验—— χ^2 检验

双边检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2,$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$

检验统计量为: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域: $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$ ——双尾域

解 由已知条件计算: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 515,$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 890, \quad s = 29.8329$

(1) 根据题意要求检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 520, \quad H_1: \mu \neq \mu_0 = 520$

检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}, \quad \alpha = 0.05,$ 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(5) = 2.5706$

拒绝域为 $\{|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = 2.5706\}$

$$\text{计算 } |t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| = 0.4105 < 2.5706$$

接受 H_0 ，可以认为该种钢筋的强度为 520.

(2) 根据题意需要做出检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 780$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 (780)$

$$\text{检验统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \alpha = 0.05 \quad \text{查表得 } \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(5) = 0.831$$

$$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(5) = 12.832$$

拒绝域为 $\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\} = \{\chi^2 \leq 0.831\} \cup \{\chi^2 \geq 12.833\}$

$$\text{计算 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 5.7051, \quad 0.831 < \chi^2 < 12.833$$

接受 H_0 ，可以认为该种钢筋的方差为 780.