**成都信息工程大学计算机学院**

**数值分析实验报告**

非线性方程求根

|  |  |
| --- | --- |
| **姓 名：** |  |
| **学 号：** |  |
| **班 级：** |  |
| **完成日期：** |  |
| **任课教师：** |  |
| **成 绩：** | **分** |

实验一 非线性方程求根实验

1. **实验目的**

1、掌握非线性方程的各种解法，包括二分法、牛顿迭代法、弦截法等，并通过编程练习与上机运算，体会牛顿迭代法、弦截法的不同特点。

2、掌握解非线性方程的弦截法，并与牛顿迭代法作比较。

3、了解各种方法的收敛速度。

1. **实验题目**(共100分)

已知一个粮仓的体积是400立方米，粮仓的下半部分是圆柱形，顶部是半球形，且圆柱的高度是10米。

1. 用二分法求粮仓的底半径，精确到4位有效小数。(20分)

2. 用牛顿法求粮仓的底半径，精确到4位有效小数；请用至少3个不同的初值进行迭代计算，收敛次数有何不同及分析原因？(38分)

3. 用弦截法求粮仓的底半径，精确到4位有效小数。(30分)

4. 前面三种方法，分别需要迭代多少次，才能达到精度要求；并自我总结、比较分析3种方法的特点和收敛性，请填入表中。(12分)

1. **实验原理**

**1、牛顿法**

设方程有根，且，根据函数的几何图象（图1），我们可以给出一种求的方法。

首先，在附任取一点，作曲线在点处的切线。

令，可得到切线与轴的交点。

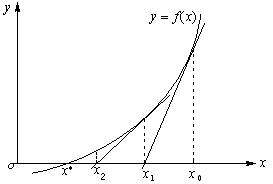


图1 函数的几何图象

其次，再作曲线在点处的切线



令，可得到切线与轴的交点。

从几何上看，，越来越接近。

由此，不难归纳出一般的迭代公式

, 为初值。

这就是**牛顿法（也称切线法）**。

**牛顿法迭代算法：**

step1 选定初值，计算，。

step 2 迭代，计算，。

step 3 如果满足或，以作为所求根近似值，终止迭代；否则转步4。

这里，，是允许误差（一般可取），而

，C是绝对误差或相对误差的控制常数，一般可取C=1。

step 4 如果迭代次数达到预先指定的次数N，或者，显示方法失败信息；否则，用代替，转步2继续迭代。

**2、快速弦截法**

为了提高收敛速度，用差商作为的近似，将牛顿法进行改造，得



这种迭代法称之为**快速弦截法（也叫两点弦截法）**。

快速弦截法的几何意义见图2。

曲线上横坐标为的点记为，横坐标为的点记为，作弦，该弦的方程为



令可求得它与轴的交点



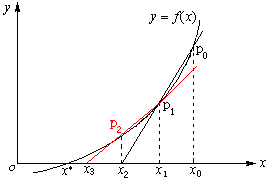


图2 快速弦截法的几何意义

可以证明：如果在零点的附近具有二阶连续导数，且，则快速弦截法迭代式所得到的序列收敛于，且收敛速度是超线性的，其收敛阶为p=1.618。

**快速弦截法算法**

step1 选定初始近似值，，精度，允许迭代的最大次数，迭代次数，

计算，；

step 2 迭代，，计算；

step 3 如果或，输出，终止迭代；否则，转步4

step 4 如果，给出快速弦截法失败信息，停止计算，否则，，，，，返回步2继续迭代。

1. **实验内容与结果**

**注意：程序必须贴源码，不能贴图，否则没法运行验证。运行图形结果就贴图。**

1. 用二分法求粮仓的底半径，精确到4位有效小数。(20分，得 分)

|  |  |
| --- | --- |
| 二分法代码（代码复制，不截图）(10分) | 结果截图(7分) |
| % 定义函数 f(x) ，表示给定底半径 x 时粮仓的体积 function V = f(x) r = x; % 底半径 h = 10; % 圆柱高度 V\_cylinder = pi \* r^2 \* h; % 圆柱体积 V\_sphere = 2/3 \* pi \* r^3; % 半球体积 V = V\_cylinder + V\_sphere; % 粮仓总体积 end  % 粮仓总体积 V\_total = 400;  % 定义搜索区间 [a,b] a = 0; b = 10;  % 定义精度 tol tol = 1e-4;  % 开始二分法搜索 while abs(b-a) > tol     mid = (a+b)/2; % 中间值     if f(mid) > V\_total         b = mid;     else         a = mid;     end end  % 输出结果 r = (a+b)/2; fprintf("粮仓的底半径为 %.4f 米\n", r); |  |
| (3分)分析总结：精确到4位有效小数，即绝对误差限（0.0001 ）；取初始区间为[0，10]，则二分法迭代收敛的次数为（ 17 ）次。 | |

2. 用牛顿法求粮仓的底半径，精确到4位有效小数；请用至少3个不同的初值进行迭代计算，收敛次数有何不同及分析原因？(38分，得 分)

|  |  |
| --- | --- |
| 牛顿法代码1(5分) | 第1次取初值：x0=(4)，第( 4 )次到达收敛精度。(2分) |
| % 给定的常数  h = 10; % 圆柱的高度  V = 400; % 总体积  pi = 3.1415926; % 圆周率  r0 = 4; % 初值  eps = 0.0005; % 精度要求  iter = 0; %记录迭代次数  % 牛顿法求解方程  err = eps + 1;  r = r0;  while err > eps  f = (2/3)\*pi\*r^3 + pi\*r^2\*h - V;  df = 2\*pi\*r^2 + 2\*pi\*r\*h;  dr = -f / df;  r = r + dr;  err = abs(dr);  iter = iter + 1;  end  % 输出结果  fprintf('底面半径为：%.4f米\n', r);  fprintf('迭代次数为：%d次\n', iter); | 第1次结果截图(3分) |
|  |
| 牛顿法代码2(5分) | 第2次取初值：x0=(3.5)，第(3)次到达收敛精度。(2分) |
| % 给定的常数 h = 10;         % 圆柱的高度 V = 400;        % 总体积 pi = 3.1415926; % 圆周率 r0 = 3.5;       % 初值 eps = 0.0005;   % 精度要求 iter = 0;     %记录迭代次数 % 牛顿法求解方程 err = eps + 1; r = r0; while err > eps     f = (2/3)\*pi\*r^3 + pi\*r^2\*h - V;     df = 2\*pi\*r^2 + 2\*pi\*r\*h;     dr = -f / df;     r = r + dr;     err = abs(dr); iter = iter + 1; end  % 输出结果 fprintf('底面半径为：%.4f米\n', r); fprintf('迭代次数为：%d次\n', iter); | 第2次结果截图(3分) |
|  |
| 牛顿法代码3(5分) | 第3次取初值：x0=(6)，第(5)次到达收敛精度。(2分) |
| % 给定的常数  h = 10; % 圆柱的高度  V = 400; % 总体积  pi = 3.1415926; % 圆周率  r0 = 6; % 初值  eps = 0.0005; % 精度要求  iter = 0; %记录迭代次数  % 牛顿法求解方程  err = eps + 1;  r = r0;  while err > eps  f = (2/3)\*pi\*r^3 + pi\*r^2\*h - V;  df = 2\*pi\*r^2 + 2\*pi\*r\*h;  dr = -f / df;  r = r + dr;  err = abs(dr);  iter = iter + 1;  end  % 输出结果  fprintf('底面半径为：%.4f米\n', r);  fprintf('迭代次数为：%d次\n', iter); | 第3次结果截图(3分) |
|  |
| 分析总结：精确到4位有效小数，即绝对误差限（ 0.0001 ）；取3次不同的初始x0，则牛顿法迭代收敛最慢的是第（6）次，收敛最快的是第（3）次，原因是（牛顿法是一种局部收敛的算法，其收敛性与初始点的选取密切相关。如果初始点选择的离真实解比较远，可能会导致牛顿法迭代时出现振荡或发散现象，从而导致收敛失败或收敛速度变慢。）。(8分，其中最后1空5分) | |

3. 用弦截法求粮仓的底半径，精确到4位有效小数。(30分，得 分)

|  |  |
| --- | --- |
| 弦截法代码(15分) | 取初值为：x0=(3.4)；x1=(3.3)。(2分) |
| % 定义函数f(r)  function y = f(r)  h = 10; % 圆柱的高度  V = 400; % 粮仓的总体积  y = pi \* r^2 \* h + 2/3 \* pi \* r^3 - V;  end  % 弦截法求解f(r)=0的解  x0 = 3.4;  x1 = 3.3;  tol = 0.0005;  maxiter = 100;  for i = 1:maxiter  fx0 = f(x0);  fx1 = f(x1);  x2 = x1 - fx1 \* (x1 - x0) / (fx1 - fx0);  if abs(x2 - x1) < tol  break;  end  x0 = x1;  x1 = x2;  end  % 输出结果  fprintf('底半径r = %.4f\n', x2); | 结果截图(13分) |
|  |

4. 前面三种方法，分别需要迭代多少次，才能达到精度要求；并自我总结、比较分析3种方法的特点和收敛性，请填入表中。(12分，得 分)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 序号 | 方法 | 精度要求 | (平均)迭代次数(1分) | 比较分析(3分) |
| 1 | 二分法 | 4位有效小数 | 17 |  |
| 2 | 牛顿法 | 4位有效小数 | 4 |  |
| 3 | 弦截法 | 4位有效小数 | 3 |  |

二分法：

优点：简单易懂，收敛速度较快，对于单峰函数和凸函数都能收敛到全局最优解。

缺点：每次迭代只能减半区间长度，收敛速度较慢，需要先确定区间。

牛顿迭代法：

优点：收敛速度很快，通常只需要几步迭代就能达到所需精度，对于函数可导，且导数不为0的函数，有较好的效果。

缺点：需要求解导数，计算量较大，且可能会出现迭代过程中出现不收敛的情况。

弦截法：

优点：收敛速度较快，对于函数在某一区间内的单根，可以收敛到该根。

缺点：需要先确定区间，且可能会出现迭代过程中出现不收敛的情况，对于函数的性质有一定的限制。