Análisis Aplicado
Dr. Andreas Wachtel
Lab. 6

Inspirado por Dr. Zeferino Parada.

Región de Confianza (un ejemplo simple)

Sea $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$, entonces

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para las siguientes tareas considere el punto $\boldsymbol{x}_0 = (2\,,\ 1)^T$.

1. Escriba explícitamente el modelo cuadrático de f en $\boldsymbol{x}_0$, es decir,

$$m_c(\boldsymbol{p}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T B\boldsymbol{p}\,,$$

donde $\boldsymbol{g} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ y $B = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_0)$.

2. Calcule la dirección de Newton $\boldsymbol{p}_N$ y su norma $\|\boldsymbol{p}_N\|_2$.

3. Escriba explícitamente el (SPRC) con radio $\Delta > 0$, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & m_c(\boldsymbol{p}) \\ \text{Sujeto a} \quad & \|\boldsymbol{p}\|_2 \le \Delta\,. \end{aligned} \tag{1}$$

4. Del Teorema (SPRC) sabemos que el subproblema (1) con $\Delta < \|\boldsymbol{p}_N\|_2$ tiene la solución única $\boldsymbol{p}_\star(s)$ para un $s = s(\Delta) \ge 0$ tal que

$$(B + sI)\boldsymbol{p}_\star(s) = -\boldsymbol{g}$$
$$\|\boldsymbol{p}_\star(s)\|_2^2 = \Delta^2$$

Encuentre $\boldsymbol{p}_\star$ en términos de s y evalué

$$\eta(s) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \|\boldsymbol{p}_\star(s)\|_2^2\,.$$

Ayuda: El resultado es

$$\eta(s) = \frac{64}{(4+s)^2} + \frac{4}{(2+s)^2}\,.$$

5. Demuestre que $\eta'(s) < 0$ para $s > -2$, es decir, la función es estrictamente decreciente para $s > -2$.

6. Haz un *plot* en MatLab u Octave de $\eta(s)$ para $s \in [-1, 5]$. Además, concluya que la ecuación $\eta(s) = \Delta^2$ tiene una única solución para $s > -2$ y $0 < \Delta < \|\boldsymbol{p}_N\|_2$.

Teo. Para cada $\Delta \geq 0$ existe $s = s(\Delta) \geq 0$ tal que

$$p^*(s) = -(B + sI)^{-1} \nabla f(x).$$

Observaciones:

(i) $B + \cancel{s}I = V(\Lambda + sI)\cancel{V}^T$

(ii) $(B + sI)^{-1} = V(\Lambda + sI)^{-1} V^T$

(iii) Existe $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tal que $V\vec{\alpha} = \nabla f(x)$.

(iv)
$$p^*(s) = V(\Lambda + \cancel{s}I)^{-1} V^T V \vec{\alpha}$$
$$= V(\Lambda + sI)^{-1} \vec{\alpha}$$

$$\therefore \quad \| p^*(s) \|_2^2 = \vec{\alpha}^T (\Lambda + sI)^{-2} \vec{\alpha}.$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\lambda_i + s)^2} \alpha_i^2 \overset{def}{=} \eta(s)$$

$\therefore$ La función $\eta(s)$ no está definida en:

$$\{ -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n \}.$$

$\therefore$ Si B es s.p.d., entonces. $\eta(s)$ está definida para todo $s \geq 0$.

Con el orden

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

la gráfica de $\eta(s)$ se ve como sigue: