1. Recordar

Sea
$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{(\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{g})^2}{(\boldsymbol{g}^T B\boldsymbol{g})(\boldsymbol{g}^T B^{-1}\boldsymbol{g})}.$$
De Tarea 4 sabemos que B simétrica positiva definida $\implies \sigma \leq 1$.

2. Problemas

1. Sin usar el [Lemma 4.2, Nocedal] demuestre que B s. p. d. implica que

$$\|\boldsymbol{p}_C\|_2 \leq \sigma \|\boldsymbol{p}_B\|_2 \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{p}_B \stackrel{\text{def}}{=\!=} -B^{-1}\boldsymbol{g}\,,$$

y $\boldsymbol{p}_C$ es el punto de Cauchy.
Ayuda: desigualdad de Cauchy

2. Sean $\|\boldsymbol{p}_B\|_2 > \Delta$ y $\|\boldsymbol{p}_C\|_2 < \Delta$.

a) Demuestre que
$$\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_C) = -(\boldsymbol{g}^T B^{-1}\boldsymbol{g})(1-\sigma)\,.$$

b) Para la ecuación
$$\|\boldsymbol{p}_U + \alpha(\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_U)\|_2^2 = \Delta^2$$
calcular ambas raíces α_1 y α_2.

c) Demuestre que $\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{p}_B \leq \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{p}_C$.

d) Considera la curva
$$\phi(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{p}_U + \alpha(\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_U) \qquad \text{con} \qquad \alpha \in [0,1]$$
Muestre que

- la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(\alpha) = \phi(\alpha)^T\phi(\alpha)$ es monótona creciente.
- la función $\tilde{h}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{h}(\alpha) = m(\phi(\alpha))$ es monótona decreciente.