Lab 7 (CG)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d. y $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Vimos que la única sol. del sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

también es el único mínimo de la fución

$$\phi(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} x^T A x - b^T x .$$

Sabemos que

- $$\nabla \phi(\vec{x}) = \underbrace{A\vec{x} - \vec{b}}_{\text{residuo.}} \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{r}(\vec{x})$$

- ~~D~~ Cada una dirección $\vec{d}$, la sol. del problema

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \phi(\vec{x} + \alpha \vec{d})$$

es

$$\alpha^* = -\frac{\nabla\phi(\vec{x})^T d}{d^T A d.} = \frac{-r(x)^T d}{d^T A d}$$

- Tomando un vector canónico, digamos $\vec{e}_k$, tenemos

$$\alpha^* = \frac{-r_k}{A_{kk}}.$$

y

$\vec{x} + \alpha^* \vec{e}_k$ solo se cambia en una entrada.

De esto podemos definir un descenso cíclico por coordenadas:

Alg. (Descenso cíclico por coordenadas)

Entradas: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d. y $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $tol > 0$.

Salida: x^* (aproximado), numero de it. (#it)

Pseudo código

$m \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0$, $\vec{r} \leftarrow Ax_0 - b$

while $\|\vec{r}\| > tol$

  $k \leftarrow k+1$

  if $k > n$

    $k \leftarrow 1$

    $m \leftarrow m+1$

  end if

  $\alpha \leftarrow -\dfrac{r_k}{A_{kk}}$

  $\vec{x}(k) \leftarrow x(k) + \alpha$

  $r \leftarrow A\vec{x} - b$

end (while)

$\#it = m + k.$

P3

Para la implementación del alg. CG.
Considere las siguientes optimizaciones:

- $$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{p_k^T A p_k} \qquad (7a')$$

- $$\beta_{k+1} = \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2} \qquad (7d')$$

Demuestre estas expresiones usando Teo. 2 (5) y (6) y Teo. 3 (8d) y (4), y las expresiones originales de α_k, β_{k+1}.

Implementa el alg. CG con las expresiones para α_k, β_{k+1} en <u>esta</u> página.

Pruebas:

1) La matriz $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ del spline cúbico:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \text{Ceros} \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \text{Ceros} & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{útil: spdiags}}$

y $\vec{b}$ el vector de unos en $\mathbb{R}^{100}$.

2) El alg. de descenso cíclico termina en n iteraciones cuando A es diagonal. Haz un experimento.

3) El alg. CG es el método de mayor descenso en el primer paso. Vimos que este método llega en un paso si los eigenvalores de A son iguales, ie., la gráfica de ϕ en $\mathbb{R}^{n+1}$ es una bola..

La gráfica de ϕ restingido a un eigenespacio $Eig_\lambda(A) = \{ v : Av = \lambda v \}$ es una bola en $\mathbb{R}^{\dim(Eig_\lambda A)+1}$.

Eso da la intuición, que para cada eigenvalor alcanza un paso para encontrar el mínimo en esta bola.

P5

Verifique esta intuición como sigue:

a) · Usar "unifrnd" para construir una matriz aleatoria W

· $W = QR$ "Fact. QR"

· definir A s.p.d. como sigue.

$$A \overset{\text{def}}{=} Q D Q^T \quad \text{para alguna } D.$$

b) escoger D tal que tenga 1 eigenvalor

2 eigevalores

5 — " —

10 — " —

n — " —

c) ver cuántas iteraciones requiere el alg. CG.

(⇒ Idea de grupar eigenvalores ~~con~~ → precondicionar)

4) Usar

$\text{pascal}(n)$, $b = -\text{ones}(n,1)$

$(\Rightarrow \quad x^* = \vec{e}_1. \quad \forall n.)$

Hacer un plot de

residuos vs. paso (k)

y error vs. paso (k).