Análisis Aplicado
Dr. Andreas Wachtel
Tarea 1

Aviso: Las ayudas no aparecen en un parcial.
*Ejercicio **6.** es un resultado útil de perturbación. Este sugiere que si aproximamos la Hessiana, entonces pequeños cambios en la matriz no afectan "tanto" la definidad positiva.*

1. Encuentre el único mínimo de la función

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\,.$$

2. Demuestre que $\boldsymbol{x}^\star = (1,\, 1)^T$ es un mínimo local estricto de la función de Rosenbrock:

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 100(x^2 - y)^2 + (x-1)^2\,.$$

3. Si la Hessiana $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz constante (indep. de $\boldsymbol{x}$) y un vector $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema

$$\mathbf{0} = \nabla f(\boldsymbol{y}) + \nabla^2 f(\boldsymbol{y})\boldsymbol{d}$$

entonces $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}$ es un punto estacionario.
Ayuda: Use Taylor.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica positiva definida con eigenvalores $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Sea $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ un vector de longitud ℓ, es decir, tal que $\|\boldsymbol{y}\|_2 = \ell$. Demuestre que

$$\boldsymbol{y}^T A \boldsymbol{y} \ge \lambda_1 \ell^2\,.$$

Ayuda: Existe una matriz V de eigenvectores ortonormales tal que $AV = V\Lambda$.
Recuerde también que matrices ortogonales preservan la longitud de vectores.

5. Dados $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$ y la matriz $\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Demuestre que la norma de la matriz es el producto de las longitudes de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, es decir

$$\left\|\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}^T\right\|_2 = \|\boldsymbol{z}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2\,.$$

Ayuda: Use la norma operador para matrices. Muestre primero que $\left\|\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}^T\right\|_2 \le \|\boldsymbol{z}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2$ y después encuentre $\boldsymbol{x}$ tal que la igualdad de cumple.

6. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica positiva definida (con eigenvalores como en **3.**), $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\boldsymbol{y}\|_2 = \ell$ y $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz. Demuestre que

$$\boldsymbol{y}^T (A + E)\boldsymbol{y} \ge (\lambda_1 - \|E\|_2)\ell^2\,.$$

Ayuda: Usar Cauchy y la norma operador.

7. Utilizando los ejercicios **4.**, **5.** y **6.** construye una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que es positiva definida pero no simétrica.