Análisis Aplicado
Dr. Andreas Wachtel
Tarea 2

Algunas tareas son del Dr. Zeferino Parada.
Aviso: Las ayudas no aparecen en un parcial.
*Ejercicio **4.** es otro para entender porque la dirección de Newton es buena (localmente).*

1. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que la función

$$f(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + 1$$

tiene un único mínimo local si y solo si A es positiva definida.

2. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ fijo tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$.
Además, sea $\mathcal{D}$ el conjunto de direcciones de descenso asociado, *i.e.*,

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left\{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d} < 0\right\} .$$

a) Demuestre que $\mathcal{D}$ es no vació, convexo, abierto y que cualquier combinación lineal finita de vectores en $\mathcal{D}$ con coeficientes no negativos pertenece a $\mathcal{D}$.

b) Supón que $n = 2$ y que $\theta \in (0, \pi/2)$ es un ángulo fijo. Construya un vector $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$ tal que el ángulo entre $\boldsymbol{d}$ y $-\nabla f(\boldsymbol{x})$ es θ.

c) Para n general, construye una sucesión de vectores $\left\{\boldsymbol{d}^k\right\} \subset \mathcal{D}$ con elementos de longitud constante que converge a $\boldsymbol{d}^\star$ con $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d}^\star = 0$.

3. Sean $\boldsymbol{x}$, $\nabla f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ fijos. Hemos visto varías direcciones de descenso $\boldsymbol{d}$. Con el fin de asegurar un descenso, queremos que el ángulo θ entre $\boldsymbol{d}$ y $-\nabla f(\boldsymbol{x})$ es menor o igual a una constante $C < \pi/2$. Contestamos la siguiente pregunta: ¿De qué depende esa constante C?

a) Sea $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ un vector canónico (de longitud 1) con signo tal que $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d} = -\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_\infty$.
Demuestre que

$$\cos(\theta) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

b) Sea $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ un vector con $\|\boldsymbol{d}\|_\infty = 1$ tal que $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d} = -\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_1$.
Demuestre que

$$\cos(\theta) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

c) Sean $\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$, $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ simétrica positiva definida con eigenvalores $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ y $\boldsymbol{d}^N$ la dirección de Newton $\boldsymbol{d}^N \stackrel{\text{def}}{=\!=} -(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}))^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x})$. Demuestre que

$$\cos(\theta) \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_n} .$$

d) Interpretar los resultados.

4. Sea $\boldsymbol{x}$ (fijo) tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ y $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ es definida positiva. Demuestre que la dirección de Newton $\boldsymbol{d}^N \stackrel{\text{def}}{=\!=} -(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}))^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x})$ es el único mínimo del modelo cuadrático de f en $\boldsymbol{x}$ definido por

$$m_c(\boldsymbol{d}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} + \nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d} + f(\boldsymbol{x})\,.$$

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica positiva definida, $\boldsymbol{x}$ (fijo) tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$. Demuestre que el ángulo θ entre los vectores $-\nabla f(\boldsymbol{x})$ y $-A\nabla f(\boldsymbol{x})$ es tal que $|\theta| < \pi/2$.
Ayuda: Considerar la factorización en eigenvalores y -vectores.

6. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ (fijos) tales que $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{p} = a < b = \nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{s} < 0$ y $\|\boldsymbol{p}\|_2 = \|\boldsymbol{s}\|_2 = 1$.
Para $c \in (a, b)$ construya un vector $\boldsymbol{d}$ tal que $\|\boldsymbol{d}\|_2 = 1$ y $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d} = c$.