Proyecto de Optimización Numérica
Método de Punto Interior

1. Introducción

.
Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (1/2)x^T Q x^T + c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax \geq b \end{array} \tag{1}$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ es simétrica y positiva definida, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, , c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Suponemos que $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax > b \ \} \neq \emptyset$.

Las condiciones necesarias de primer orden para un mínimo local de (1) son

$$F(x,\ \lambda,\ \mu,\ z) = \begin{pmatrix} Qx - A^T\mu + c \\ Ax - y - b \\ YUe \end{pmatrix} = 0, \ \ (y, \mu) \geq 0, \tag{2}$$

donde $U = diag(\mu)$, $Y = diag(y)$ y $e = (1,\ 1,\ ...,\ 1)^T \in \mathbb{R}^m$.

Definición. *La trayectoria central asociada al problema (1) es el conjunto de puntos* $(x_\eta,\ y_\eta,\ \mu_\eta)$ *con* $\eta > 0$ *tales que*

$$F(x_\eta,\ y_\eta,\ \mu_\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta e \end{pmatrix}, \ \ (y_\eta, \mu_\eta) > 0. \tag{3}$$

Se puede demostrar que existe $\eta^* > 0$ tal que para cada $\eta \in (0,\ \eta^*)$ la solución en (3) es única.

La idea en puntos interiores es usar el método de Newton para aproximar una solución de (3) tratando de que la actualización en y_η y μ_η sean positivas.

2. El paso de Newton

La ecuación lineal a resolver en el método de Newton aplicado a (3) es

$$\begin{pmatrix} Q & 0 & -A^T \\ A & -I_m & 0 \\ 0 & U & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_\mu \end{pmatrix}, \tag{4}$$

donde $r_x = Qx - A^T\mu + c,\ r_y = Ax - y - b,\ r_\mu = YUe - \eta e$.

Bajo las hipótesis iniciales, la matriz en (4) es no singular. La solución numérica de (4) no usa factorizaciones sobre la matriz del sistema por dos razones: la dimensión es muy grande y se llenarían entradas que son cero.

En la segunda ecuación lineal se obtiene

$$A\Delta x - \Delta y = -r_y,$$

es decir

$$\Delta y = A\Delta x + r_y.$$

Notemos que $(y,\ \mu) > 0$ entonces la última ecuación lineal es

$$U\Delta y + Y\Delta\mu = -r_\mu.$$

es decir

$$\Delta\mu = -Y^{-1}(U\Delta y + r_\mu).$$

Después de manipulaciones algebraicas el sistema lineal se reduce a:

$$(Q + A^T Y^{-1} UA)\Delta x = -(r_x + A^T Y^{-1} U r_y + Y^{-1} r_\mu). \tag{5}$$

Como la matriz Q es simétrica, definida positiva se concluye que la matriz en (5) es simétrica y definida positiva. Numéricamente el sistema lineal (5) puede resolverse con factorización de Cholesky o gradiente conjugado cuando n es muy grande y la matriz es rala.

Las incógnitas Δy y $\Delta\mu$ se obtienen con las fórmulas usadas arriba.

El sistema lineal (5) corresponde a las condiciones necesarias de primer orden del problema cuadrático

$$\text{Minimizar} \quad (1/2)\Delta x^T (Q + A^T Y^{-1} UA)\Delta x + (r_x + A^T Y^{-1} U r_y + Y^{-1} r_\mu)^T \Delta x$$

3. Recorte de paso

Una vez obtenida la solución del sistema lineal en (4), se determina $\alpha \in (0,1]$ tal que $y_+ = y + \alpha \Delta y > 0$, y $\mu_+ = \mu + \alpha \Delta \mu > 0$.

Defina para cada $k = 1, \ ..., \ m$, los valores

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta y_k \geq 0 \\ -(y_k/\Delta y_k) & \text{si } \Delta y_k < 0 \end{cases}$$

y

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \mu_k \geq 0 \\ -(\mu_k/\Delta \mu_k) & \text{si } \Delta \mu_k < 0. \end{cases}$$

Sea $\hat{\alpha} = \min \ (\{ \ \beta_k \mid k = 1, \ ..., \ m \ \} \bigcup \{ \ \gamma_k \mid k = 1, \ ..., \ m \ \})$.

Finalmente tomamos $\alpha = (0{,}995) * min(1, \hat{\alpha})$ y actualizamos

$$(x, \ y, \ \mu)_+ = (x, \ y, \ \mu) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta \mu).$$

4. El parámetro η

Para el iterando actual $(x, \ y, \ \mu)$ se considera el promedio

$$\hat{\eta} = \frac{y^T \mu}{m},$$

que es el promedio de las condiciones de complementaridad

$$y_k \mu_k = 0, \ k = 1, \ ..., \ m.$$

El valor del parámetro de perturbación se define como

$$\eta = \sigma \hat{\eta}, \ \text{ donde } \ \sigma \in [0, \ 1].$$

Notemos que $\sigma = 0$ determina en (3) las condiciones necesarias de primer orden para un mínimo local.

5. Criterio de paro

El criterio de parar en el programa será

$$\|F(x,\ y,\ \mu)\|_2 \leq tol,$$

donde tol es una tolerancia determinada, por ejemplo, $tol = 10^{-8}$.

Es posible incorporar un contador para saber cuantos sistemas lineales se resuelven en el método. Sea $maxiter$ el número máximo de iteraciones permitidas y $cinter$ el contador de las iteraciones. Se inicia con $cinter = 0$ y se incrementa como $cinter = cinter + 1$ en la parte iterativa.

6. Punto inicial

Se requiere un punto inicial (x^0, y^0, μ^0) tal que $y^0 > 0$ y μ^0. Los vectores iniciales pueden ser $\mu^0 = y^0 = (1,\ ...,\ 1)^T \in \mathbb{R}^m$.

Para obtener un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax > b$ se fija $\epsilon > 0$ y se plantea el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & e^T z \\ \text{s. a.} & Ax + \epsilon e - z = b \\ & z \geq 0, \end{array}$$

buscando que en el valor óptimo sea $e^T z* = 0$.

7. Programación

Escriba una función en MATLAB de la forma
function $[x,\ y,\ \mu] = punintpc(Q, A, c, b)$
% Resuelve el problema cuadrático por el método de punto interior.

Las variantes de programación son las siguientes:
a) Se resuelve una iteración para el método de Newton para cada valor de η y se reduce el valor acorde a $\sigma * (\mu_+^T y_+/m)$.
b) (método predictor-corrector) Se hace un paso de predicción con $\sigma = 0$ y

después un paso de correción con $\sigma > 0$.

8. Problema

Sea $X \in \mathbb{R}^{rxp}$ tal que $X_{ij} \geq 0$ para todo par $(i,\ j)$.

Fijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k << r$ y $k << p$, se considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|X - WH\|_F^2 \\ \text{Sujeto a} & W_{rxk} \geq 0 \\ & H_{kp} \geq 0. \end{array} \tag{6}$$

El problema (6) se conoce como factorización no negativa de una matriz y tiene diferentes aplicaciones en procesos de imágenes y análisis de texto.

La factorización no negativa tiene varios mínimos locales y es un problema no lineal en las variables W y H.

Una forma de aproximar un mínimo local es el descenso en dos pasos que :

Paso 1.-] Sean $W_0 \in \mathbb{R}^{rxk},\ H_0 \in \mathbb{R}^{kxp}$ tales que $W \geq 0,\ H \geq 0$. Hacer $k \leftarrow 0$.

Paso 2.- Para $k = 0,\ 1,\ \ldots,$ **hacer**

1. Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|X - W_k\ H\|_F^2 \\ \text{Sujeto a} & H \geq 0. \end{array} \tag{7}$$

   Sea H_{k+1} la única solución.

2. Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|X - W\ H_{k+1}\|_F^2 \\ \text{Sujeto a} & W \geq 0. \end{array} \tag{8}$$

   Sea W_{k+1} la única solución.

3. $k \leftarrow k + 1$

4. **Ir a Paso 2**

Fin

Notar que los problema (7) y (8) son problemas cuadráticos.

Sean X_{*j} y H_{*j} las columnas j-ésima de X y H respectivamente.

Se tiene que la función objetivo de (7) es

$$\|X - W_k\ H\|_F^2 \;=\; \sum_{j=1}^{p} \|X_{*j} - W_k\ H_{*j}\|_2^2.$$

De donde el problema (7) son p problemas cuadráticos de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|X_{*j} - W_k\ H_{*j}\|_2^2 \\ \text{Sujeto a} & H_{*j} \geq 0, \end{array} \tag{9}$$

para $j = 1,\ \ldots,\ p$.

Similarmente el problema (8) se convierte en r problemas cuadráticos :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|X_{i*} - W_{i*}\ H_{k+1}\|_2^2 \\ \text{Sujeto a} & W_{i*} \geq 0. \end{array} \tag{10}$$

para $i = 1,\ \ldots,\ r$.

9. Proyecto

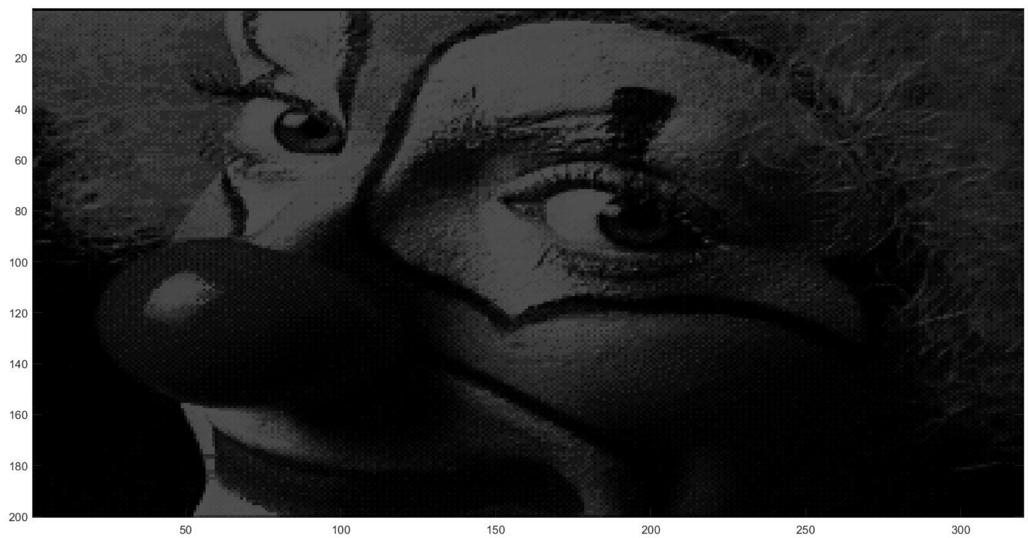
El proyecto consiste en:

1. Programar el método de puntos interiores para programación cuadrática (1).

2. Programar en Matlab el método del descenso en dos pasos.
   function $[W, H] = descenso2pasos(X,\ k)$

3. En un script, **payaso.m**, usar la imagen del payaso en Matlab:
   load clown
   mapcolor('gray')
   image(X)

   Para obtener la gráfica



   X es una matriz de 200x320.
   Resolver el problema de descenso en dos pasos con diferentes valores de $k = 5,\ 20,\ 30,\ 60,\ 80$, reportando las imágenes obtenidas.

10. Qué Entregar

1. Fecha: **jueves 8 de octubre de 2020**.

2. Equipos de a lo más de tres alumnos.

3. Enviar por TEAMS, **punintpc.m, descenso2pasos.m, payaso.m, clown.mat**. Las imágenes de su resultado final.

4. Comparen sus resultados ahora con **quadprog.m**, obteniendo las imágenes correspondientes y muestre los timepos de máquina de ambas estrategias.

5. Programas debidamente documentados.