Esercizio 15 Foglio 1

Antonio Sandu   Francesco Pasqual   Andrea Masiero

23 marzo 2025

Giustificazione Matematica per il Calcolo del Punto di Minimo di $\phi(a, b)$

Sia $\phi(a, b)$ definita come:

$$\phi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2 .$$

Per determinare il punto di minimo, calcoliamo le derivate parziali rispetto a a e b e risolviamo il sistema risultante. Manipolando le formule delle derivate parziali otteniamo una riscrittura delle stesse in termini statistici.

Passo 1: Derivata parziale rispetto a b

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right) .$$

Poniamo $\frac{\partial \phi}{\partial b} = 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0$$
$$\implies \sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0.$$

Notiamo che dividendo per n ricaviamo le formule delle medie campionarie di x e y:

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i}_{\overline{y}} - a \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\overline{x}} - b = 0$$
$$\implies \boxed{b = \overline{y} - a\overline{x}}.$$

Passo 2: Derivata parziale rispetto a a

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - a x_i - b\right).$$

Poniamo $\frac{\partial \phi}{\partial a} = 0$ e sostituiamo $b = \overline{y} - a\overline{x}$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - a x_i - (\overline{y} - a\overline{x})\right) = 0.$$

Semplificando:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \overline{y}) - a \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \overline{x}) = 0.$$

Passo 3: Collegamento a Covarianza e Varianza Campionaria

A partire dalle definizioni chiave di:

- Varianza campionaria di x:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = (n-1)s_x^2.$$

- Covarianza campionaria:

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = (n-1)\mathrm{cov}(x, y).$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$(n-1)\mathrm{cov}(x, y) - a(n-1)s_x^2 = 0$$

$$\implies \boxed{a = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{s_x^2}}.$$

Formula Finale

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{s_x^2}, \quad b = \overline{y} - a\overline{x}}$$

Conclusione

Le derivate parziali e la manipolazione delle formule ci portano a concludere che la soluzione dipende dalle medie campionarie $(\overline{x}, \overline{y})$, dalla varianza (s_x^2) e dalla covarianza $(\mathrm{cov}(x, y))$.