Giustificazione matematica

La probabilità che il candidato A vinca il ballottaggio è determinata dalla condizione $S_N + M > \frac{N+M}{2}$, dove S_N rappresenta il numero di voti ottenuti da A tra gli N elettori indecisi, seguendo una distribuzione binomiale $\mathrm{Bin}(N, 1/2)$. Per trasformare questa condizione in una forma utilizzabile, si procede come segue:

Riscrittura della disuguaglianza

$$S_N + M > \frac{N+M}{2} \Rightarrow S_N > \frac{N+M}{2} - M \Rightarrow S_N > \frac{N-M}{2}$$

Adattamento ai valori discreti

Poiché S_N assume solo valori interi, il limite inferiore per k deve essere il primo intero strettamente maggiore di $\frac{N-M}{2}$. Se $\frac{N-M}{2}$ non è intero, si utilizza la funzione floor per definire il limite:

$$k_{\min} = \left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor + 1$$

Espressione della probabilità come sommatoria

La probabilità cercata è la somma delle probabilità di tutti i valori k per cui $S_N = k$ soddisfa $k > \frac{N-M}{2}$. Essendo $S_N \sim \mathrm{Bin}(N, 1/2)$, si ha:

$$\mathbf{P}\left(S_N > \frac{N-M}{2}\right) = \sum_{k=\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor + 1}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Conclusione

La procedura è matematicamente giustificata dalla trasformazione algebrica della disuguaglianza e dall'uso della funzione di massa di probabilità binomiale per coprire tutti i casi favorevoli. La sommatoria include esattamente i valori k in cui S_N supera la soglia critica $\frac{N-M}{2}$, garantendo un calcolo corretto della probabilità di vittoria di A.