Dimostrazione Relazioni per la Distribuzione Binomiale

Prima Parte:
Dimostriamo che per $k \in \{0, \dots, N-1\}$, vale:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k).$$

La densità binomiale è:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}, \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, N.$$

1. **Calcolo del rapporto tra le probabilità $\frac{p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1)}{p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k)}$:**

$$\frac{p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1)}{p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k)} = \frac{\binom{N}{k+1} \cdot q^{k+1} \cdot (1-q)^{N-(k+1)}}{\binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k}}.$$

2. **Semplificazione dei termini:**

   - **Coefficienti binomiali:**

$$\frac{\binom{N}{k+1}}{\binom{N}{k}} = \frac{\frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!}}{\frac{N!}{k!(N-k)!}} = \frac{k! \cdot (N-k)!}{(k+1)! \cdot (N-k-1)!} = \frac{N-k}{k+1}.$$

     (Si semplifica $k!$ e $(N-k-1)!$)

   - **Termini q:**

$$\frac{q^{k+1}}{q^k} = q.$$

   - **Termini $(1-q)$:**

$$\frac{(1-q)^{N-k-1}}{(1-q)^{N-k}} = \frac{1}{1-q}.$$

3. **Combinazione dei risultati:**

$$\frac{p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1)}{p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k)} = \frac{N-k}{k+1} \cdot q \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1}.$$

   Moltiplicando entrambi i lati per $p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k)$, si ottiene:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k).$$

Seconda Parte:
Verifichiamo che per $k \in \{0, \dots, N\}$:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k).$$

1. **Calcolo di $p_{\mathbf{Bin}(N,q)}(k)$:**

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k}.$$

2. **Calcolo di $p_{\mathbf{Bin}(N,1-q)}(N-k)$:**

$$p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{N-k} \cdot (1-q)^{N-k} \cdot q^k.$$

3. **Osservazione delle simmetrie:**
   - $\binom{N}{N-k} = \binom{N}{k}$ (proprietà dei coefficienti binomiali).
   - Sostituendo:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{k} \cdot (1-q)^{N-k} \cdot q^k.$$

4. **Confronto:**

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k} = p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k).$$

Conclusione:
Entrambe le relazioni sono verificate.