Esercizio 14 e Esercizio 15

Introduzione

Nella prima parte, dimostriamo una proprietà ricorsiva della distribuzione binomiale, che è utile per il calcolo efficiente delle probabilità. Nella seconda parte, applichiamo questa proprietà per calcolare la probabilità che un candidato vinca un ballottaggio.

Esercizio 14

Dimostrazione:

Sia $p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k)$ la densità discreta della distribuzione binomiale di parametri N e q. Si dimostri che:

1. Per $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k).$$

2. Per $k \in \{0, \dots, N\}$,

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k).$$

Dimostrazione della prima parte:

Per definizione, la densità binomiale è data da:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}.$$

Calcoliamo $p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1)$:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \binom{N}{k+1} q^{k+1} (1-q)^{N-(k+1)}.$$

Ricordiamo che:

$$\binom{N}{k+1} = \frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!} = \frac{N-k}{k+1} \cdot \binom{N}{k}.$$

Sostituendo nell'espressione di $p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1)$:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{N-k}{k+1} \cdot \binom{N}{k} q^{k+1}(1-q)^{N-k-1}.$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $(1-q)$:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot \binom{N}{k} q^{k}(1-q)^{N-k}.$$

Riconosciamo $\binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}$ come $p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k)$, quindi:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k).$$

Dimostrazione della seconda parte:

Per simmetria, si verifica che:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}.$$

Sostituendo q con $1-q$ e k con $N-k$:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{N-k} (1-q)^{N-k} q^k.$$

Poiché $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$, segue che:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = p_{\mathrm{Bin}(N,1-q)}(N-k).$$

Esercizio 15

Dimostrazione:

Si consideri un ballottaggio tra due candidati, A e B, con $N+M$ elettori, dove N sono indecisi e M sostengono A. Vogliamo trovare la probabilità che A vinca, cioè:

$$P(S_N + M > \frac{N+M}{2}),$$

dove S_N è una variabile aleatoria binomiale di parametri N e $\frac{1}{2}$.

Dimostrazione:

La condizione $S_N + M > \frac{N+M}{2}$ può essere riscritta come:

$$S_N > \frac{N-M}{2}.$$

Poiché S_N ha distribuzione binomiale $\mathrm{Bin}(N, \frac{1}{2})$, la probabilità è:

$$P(S_N > \frac{N-M}{2}) = \sum_{k=\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor + 1}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^N .$$

Per calcolare numericamente questa probabilità, si può utilizzare la relazione ricorsiva dimostrata in Esercizio 14:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,\frac{1}{2})}(k+1) = \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{\mathrm{Bin}(N,\frac{1}{2})}(k).$$