Esercizio 14

Prima Parte

Dimostriamo che per $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, vale:

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{Bin(N,q)}(k).$$

Tenendo in considerazione che la densità binomiale è:

$$p_{Bin(N,q)}(k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}, \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots, N$$

Calcolo e semplificazione del rapporto tra le probabilità

$$\frac{p_{Bin(N,q)}(k+1)}{p_{Bin(N,q)}(k)} = \frac{\binom{N}{k+1} \cdot q^{k+1} \cdot (1-q)^{N-(k+1)}}{\binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k}}$$

Coefficienti binomiali:

$$\frac{\binom{N}{k+1}}{\binom{N}{k}} = \frac{\frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!}}{\frac{N!}{k!(N-k)!}} = \frac{k! \cdot (N-k)!}{(k+1)! \cdot (N-k-1)!} = \frac{N-k}{k+1}$$

che abbiamo ottenuto sapendo che
- $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$, quindi si semplifica $k!$
- $(N-k)! = (N-k) \cdot (N-k-1)!$, quindi si semplifica $(N-k-1)!$

Termini q:

$$\frac{q^{k+1}}{q^k} = q$$

Termini $(1-q)$:

$$\frac{(1-q)^{N-k-1}}{(1-q)^{N-k}} = \frac{1}{1-q}$$

Combinazione dei risultati

$$\frac{p_{Bin(N,q)}(k+1)}{p_{Bin(N,q)}(k)} = \frac{N-k}{k+1} \cdot q \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1}$$

Moltiplicando entrambi i lati per $p_{Bin(N,q)}(k)$, si ottiene:

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{Bin(N,q)}(k).$$

Seconda Parte

Verifichiamo che per $k \in \{0, \ldots, N\}$:

$$p_{Bin(N,q)}(k) = p_{Bin(N,1-q)}(N-k).$$

Calcolo di $p_{Bin(N,q)}(k)$

$$p_{Bin(N,q)}(k) = \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k}$$

Calcolo di $p_{Bin(N,1-q)}(N-k)$

$$p_{Bin(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{N-k} \cdot (1-q)^{N-k} \cdot q^k$$

Osservazione delle simmetrie

$\binom{N}{N-k} = \binom{N}{k}$ (proprietà dei coefficienti binomiali).
Sostituendo:

$$p_{Bin(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{k} \cdot (1-q)^{N-k} \cdot q^k$$

Confronto

$$p_{Bin(N,q)}(k) = \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k} = p_{Bin(N,1-q)}(N-k)$$

Conclusione

Entrambe le relazioni sono verificate.