Esercizio 12, Foglio 3

Antonio Sandu, Andrea Masiero, Francesco Pasqual

Giustificazione Matematica e Procedure

Modello Generale

La scacchiera è strutturata come un esperimento aleatorio con 12 variabili indipendenti $X_k(t)$, dove $X_k(t)$ rappresenta la posizione (n° riga) della pedina nella colonna k al tempo t. Ogni lancio di dadi corrisponde a un incremento:

$$X_s(t+1) = X_s(t) + 1 \quad \text{con probabilità } p_s = \frac{\#\text{ combinazioni che danno somma } s}{36}$$

dove $s \in \{2, \ldots, 12\}$ (s non può essere 1). Il gioco termina quando una pedina raggiunge $X_k(t) \geq 19$.

Punto a)

Sia $A = \{\text{Colonna 7 vince prima della 8}\}$. La probabilità $P(A)$ è determinata dalla competizione tra due processi indipendenti. Sfruttando la linearità delle aspettative:

$$P(A) = \frac{p_7}{p_7 + p_8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p_8}{p_7}\right)^{19}}{1 - \left(\frac{p_8}{p_7}\right)^{38}}$$

oppure

$$P(A) = \frac{p_7 + p_8}{p_7} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p_7}{p_8}\right)^{38}}{1 - \left(\frac{p_7}{p_8}\right)^{19}}$$

Tuttavia, tenendo conto della struttura non omogenea delle probabilità, si preferisce una stima Monte Carlo con 10^5 simulazioni condizionate al solo movimento delle colonne 7 e 8.

Punto b)

Per ogni colonna $k \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, calcoliamo la probabilità che la pedina in quella colonna sia la prima a raggiungere la riga 19. Intuitivamente, ci aspettiamo che le colonne con maggiore probabilità di essere selezionate nei lanci dei dadi abbiano maggiori probabilità di vittoria.

Per ogni simulazione, registriamo quale colonna raggiunge per prima la riga 19. La probabilità stimata per ciascuna colonna k è:

$$P(\text{colonna } k \text{ vince}) = \frac{\text{numero di vittorie della colonna } k}{\text{numero totale di simulazioni}}$$

Punti c), d), e)

Sia T la variabile aleatoria che rappresenta la durata del gioco (cioè il numero di lanci necessari affinché una pedina raggiunga la riga 19).

Punto c) Calcoliamo la distribuzione di probabilità di T:

$$P(T = N) = \frac{\text{numero di partite con durata } N}{\text{numero totale di simulazioni}} \quad \text{per } N \in \{1, 2, \ldots, 200\}$$

Punti d) ed e) Calcoliamo rispettivamente:

$$P(T > 100) = \sum_{N=101}^{\infty} P(T = N), \qquad P(T > 200) = \sum_{N=201}^{\infty} P(T = N)$$

Queste probabilità vengono stimate empiricamente contando le partite che superano le soglie specificate.

Durata Media

Il valore atteso $E[T]$ è stimato tramite media campionaria:

$$E[T] \approx \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} T_i$$

dove S è il numero di simulazioni.

Implementazione Numerica

L'implementazione utilizza il metodo Monte Carlo con 100,000 simulazioni per stimare le probabilità richieste:

1. Per ogni simulazione:
   - Inizializziamo le posizioni di tutte le pedine a 0;
   - A ogni turno, lanciamo due dadi (generando numeri casuali);
   - Incrementiamo la posizione della pedina nella colonna corrispondente alla somma ottenuta;
   - Terminiamo quando una pedina raggiunge o supera la riga 19;
   - Registriamo la colonna vincente e il numero di mosse.
2. Analisi statistica dei risultati:
   - Calcoliamo le frequenze relative di vittoria per ciascuna colonna;
   - Costruiamo la distribuzione empirica delle durate delle partite;
   - Calcoliamo le probabilità che la durata superi determinati valori soglia;
   - Stimiamo la durata media come media campionaria.

Con 100,000 simulazioni, l'errore standard nelle stime di probabilità è dell'ordine di:

$$\frac{1}{2\sqrt{100{,}000}} \approx 0{,}0016$$

fornendo stime sufficientemente precise per l'analisi richiesta.