ČETVRTI TJEDAN

1. Definirati pojmove: predikat, karakteristični skup predikata, n-mjesni predikat.

Predikat je funkcija P(·) koja svakom elementu x iz nekog skupa (domene predikata) D pridružuje sud P(x). (Obavezno treba zadati domenu iz koje uzimamo elemente u tom predikatu.)

Skup svih elemenata domene D na kojem je predikat istinit zove se **karakteristični skup predikata**.

Kažemo da je predikat P(x) jednomjestan ako ima (ovisi o) jednu varijablu $x \in D$. Dvomjesni predikat P(x, y) ima dvije varijable $x \in D_1$, $y \in D_z$, dok **n -mjesni predikat** ima n varijabla $X_k \in D_k$, k = 1, . . . , n . Skup $D = D_1 \times \ldots \times Dn$ zove se domena predikata. Jasno je da n -mjesni predikat možemo gledati i kao jednomjesni predikat, s elementima domene koji su poredani n-terci.

2. Što su vezane varijable, a što fiktivne varijable?

Kažemo da je neki nastup varijable x_i u formuli predikatnog računa **vezan** ako uz nju dolazi kvantifikator $\forall x_i$ ili $\exists x_i$. Inače kažemo daje nastup varijable X_i **slobodan**.

Ako semantička vrijednost (vrijednost istinitosti) predikata ne ovisi o nekoj varijabli, onda se ta varijabla zove **fiktivna varijabla**. Npr. ako sa P(x, y) označimo predikat "$x \geq 1$", gdje su x, y $\in$ R , onda je varijabla y fiktivna. Varijabla o kojoj ne ovisi taj predikat i njezina vrijednost ne utječe na vrijednost predikata.

3. Definirati pojmove: univerzalni kvantifikator i egzistencijalni kvantifikator.

Neka je P(x) predikat i x iz zadane domene D . Onda sa $\forall$x P(x) označavamo sud koji je istinit onda i samo onda ako je sud P(a) istinit za svaki $a \in D$. Sud $\forall$x P(x) čitamo "za svaki x vrijedi P(x) ", "za sve x je P(x) ". Simbol **$\forall$** zovemo **univerzalnim kvantifikatorom**.

Na sličan način sa $\exists$ P(x) označavamo sud koji je istinit ako postoji barem jedan element $a \in D$ za koji je sud P(a) istinit. Sud $\exists$ P(x) čitamo "postoji x tako da vrijedi P(x) ". Simbol **$\exists$** je **egzistencijalni kvantifikator** (kvantifikator postojanja).

Primjer:

$$\begin{aligned} &\text{slijed } (a_n) \text{ je konvergentan} \quad \equiv \\ &(\exists a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Za slijed koji nije konvergentan kažemo da je *divergentan*. Prema tome, uzimajući u obzir činjenicu da je $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$, dobivamo na temelju prethodnog teorema ovakav zaključak:

$$\begin{aligned} &\text{slijed } (a_n) \text{ je divergentan} \quad \equiv \\ &\neg[(\exists a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)] \equiv \\ &(\forall a \in \mathbf{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbf{N})(\exists n \in \mathbf{N})(n > n_0 \wedge |a_n - a| \geqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

4. Kada kažemo da su dvije formule predikatnog računa logički ekvivalentne?

Za dvije formule predikatnog računa kažemo da su logički ekvivalentne ako za svaki predikat s pomoću kojih su definirane, i za svaki izbor vrijednosti iz domena predikata, dobivamo ekvivalentne sudove.

5. Iskazati i dokazati teorem koji daje DeMorganove formule za predikate.

Teorem 1. *Vrijede ove DeMorganove formule za predikate* $P(x)$ *:*

(a) $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$,

(b) $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$.

Valjda:

a) $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$

Treba dokazat $\underbrace{\top \equiv \top}_{(i)}$ i $\underbrace{\bot \equiv \bot}_{(ii)}$

(i) Neka je $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \top$. Onda je $\forall x\, P(x) \equiv \bot$

$\Rightarrow$ tada $\exists x$ za koji je $P(x)$ lažan tj. $\exists x\, \neg P(x) \equiv \top$

(ii) Neka je $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \bot$. Onda je $\forall x\, P(x) \equiv \top$

tada $\exists x$ za koji je $P(x)$ istinit tj. $\exists x\, \neg P(x) \equiv \bot$

b) $\neg(\exists x\, P(x)) = \forall x\, \neg P(x)$

Treba dokazat $\underbrace{\top \equiv \top}_{(i)}$ i $\underbrace{\bot \equiv \bot}_{(ii)}$

(i) Neka je $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \top$. Onda je $\exists x\, P(x) \equiv \bot$

Dakle, ne postoji niti jedan $x \in D$ za koji je $P(x)$ istinit.

Odnosno, $\forall x\, \neg P(x) \equiv \top$

(ii) Neka je $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \bot$. Tada je $\exists x\, P(x) \equiv \top$

Dakle, nije istina da za svaki x vrijedi negacija od $P(x)$,

tj $\forall x\, \neg P(x) \equiv \bot$