TREĆI TJEDAN

1. Definirati pojmove: tautologija, kontradikcija.

Kažemo da je formula P algebre sudova **tautologija** ako je P uvijek istina, tj. P ≡ T, oznaka:

$\models P$, i čitamo "P je tautologija".

Kažemo da je formula Q **kontradikcija** ako je Q ≡ ⊥. Formula F je kontradikcija onda i samo onda ako je ⌐F tautologija.

F je tautologija ↔ ⌐F kontradikcija

(

Za formulu G kažemo da je *logička posljedica* formule F ako iz pretpostavke da je F istinita slijedi i da je G istinita ($\tau(F) = \top \implies \tau(G) = \top$) što pišemo $F \models G$.

Teorem dedukcije:

Ako vrijedi $F_1, F_2, \ldots F_n \models G$ onda je $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \implies G$ tautologija.)

2. Zapisati formulama pa dokazati (algebarski i tablicom) sljedeća pravila zaključivanja: zakon isključenja trećega, pravilo silogizma, zakon neproturječnosti, zakon dvostruke negacije, pravilo kontrapozicije, zakoni apsorpcije.

a) pravilo isključenja trećeg:

$\models A \vee \neg A$ *„tertium non datur"* - svaki sud je ili istinit ili lažan, trećega nema

„A ili neA"

A	⌐A	A V ⌐A
T	⊥	T
⊥	T	T

Iz svojstva: ***komplementiranost:*** $A \vee \neg A \equiv \top$, $A \wedge \neg A \equiv \bot$

b) pravilo silogizma (tranzitivnost implikacije):

$$\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

$\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ pr. silogizma

$(*)$

Dokaz: $(*) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow (\neg A \vee C) \equiv \neg\big((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)\big) \vee (\neg A \vee C)$

$\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee (\neg A \vee C) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C \equiv$

De Morg.

$\equiv \big(\neg A \vee (A \wedge \neg B)\big) \vee \big(C \vee (B \wedge \neg C)\big) \equiv$

$\equiv \big((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)\big) \vee \big((C \vee B) \wedge (C \vee \neg C)\big)$

$\equiv \big(T \wedge (\neg A \vee \neg B)\big) \vee \big((C \vee B) \wedge T\big)$

$\equiv T \wedge \big((\neg A \vee \neg B) \vee (C \vee B)\big) \equiv T \wedge (\neg A \vee \underbrace{\neg B \vee B}_{T} \vee C) \equiv T \wedge T \equiv T$ Q.E.D

A	B	C	A → B	B → C	A → C	(A→B) ∧ (B → C)	(A→B) ∧ (B→C) → (A→C)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	T	⊥	T	T	⊥	T
T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T

c) zakon neproturječnosti

$\models \neg(\boldsymbol{A} \wedge \neg \boldsymbol{A})$

A	¬A	A ∧ ¬A	¬(A ∧ ¬A)
T	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	T

$\models \neg(A \wedge \neg A)$

$\neg\underbrace{(A \wedge \neg A)}_{\perp} = T$

komplementiranost

d) zakon dvostruke negacije

$$\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$$

A	$\neg$A	$\neg\neg$A	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
T	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T

e) pravilo kontrapozicije

$$\models (A \Rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

A	B	$\neg$A	$\neg$B	$A \rightarrow B$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
T	T	⊥	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T

Valjda:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \equiv (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee \neg A)$$

$$\equiv [(\neg A \vee B) \Rightarrow (B \vee \neg A)] \wedge [(B \vee \neg A) \Rightarrow (\neg A \vee B)] \equiv$$

$$\equiv [\neg(\neg A \vee B) \vee (B \vee \neg A)] \wedge [\neg(B \vee \neg A) \vee (\neg A \vee B)] \equiv$$

$$\equiv [\underbrace{(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]}_{L} \wedge [\underbrace{(\neg B \wedge A) \vee (\neg A \vee B)]}_{D}$$

$$L = (A \wedge \neg B) \vee B \vee \neg A \equiv [(A \vee B) \wedge \underbrace{(\neg B \vee B)}_{T}] \vee \neg A$$

$$\equiv [(A \vee B) \wedge T] \vee \neg A \equiv (A \vee B) \vee \neg A \equiv \underbrace{A \vee \neg A}_{T} \vee B \equiv T$$

$$D = (\neg B \wedge A) \vee \neg A \vee B \equiv [(\neg B \vee \neg A) \wedge \underbrace{(A \vee \neg A)}_{T}] \vee B$$

$$\equiv \neg B \vee B \vee \neg A \equiv T \vee \neg A \equiv T$$

$$D \wedge L \equiv T \wedge T \equiv T$$

f) zakoni apsorpcije

$$\models A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A \text{ i dualno } \models A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

A	B	A ∧ B	A V (A ∧ B)	A V (A ∧ B) ⟷ A
T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T
⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	⊥	T

$$\models A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

$$[A \vee (A \wedge B)] \Leftrightarrow A \equiv [[A \vee (A \wedge B)] \Rightarrow A] \wedge [A \Rightarrow [A \vee (A \wedge B)]] \equiv$$

$$\equiv [\neg(A \vee (A \wedge B)) \vee A] \wedge [\neg A \vee (A \vee (A \wedge B))] \equiv$$

$$\equiv [(\neg A \wedge \neg(A \wedge B)) \vee A] \wedge [\underbrace{\underbrace{\neg A \vee A}_{T} \vee (A \wedge B)}_{T}] \equiv$$

$$\equiv [(\neg A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee A] \wedge T \equiv (\underbrace{A \vee \neg A}_{T}) \wedge [A \vee (\neg A \vee \neg B)]$$

$$\equiv \underbrace{A \vee \neg A}_{T} \vee \neg B \equiv T \vee \neg B \equiv T$$

3. Definirati pojmove logička posljedica sudova, premise, zaključak.

Kažemo da je sud A logička posljedica (zaključak) sudova $P_1, P_2, \ldots, P_n$ i pišemo

$P_1, \ldots, P_n \models A$, ako iz istinitosti sudova $P_1, \ldots, Pn$ slijedi istinitost suda A.

Sudovi $P_1, \ldots, Pn$,. zovu se **premise** (pretpostavke) , a sud A je **konzekvenca (zaključak)**.

5. Iskazati i dokazati teorem koji karakterizira pojam logičke posljedice sudova pomoću implikacije.

Teorem 1. *Ako vrijedi $P_1, \ldots, P_n \models A$, onda je $\models P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$, i obratno.*

DOKAZ. Neka je $P_1, \ldots, P_n \models A$. Pretpostavimo da $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$ nije tautologija. Onda je moguće odabrati semantičke vrijednosti za $P_1, \ldots, P_n$ tako da vrijedi $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \equiv \top$ i $A \equiv \bot$. To je nemoguće, jer je onda $P_1 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv \top$ i $A \equiv \bot$.

Obratno, neka je $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$ tautologija. Ako je $P_1 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv \top$, onda mora biti i $A \equiv \top$. Time je dokazano da $P_1, \ldots, P_n \models A$. Q.E.D.

Sa sata:

TM 1 (str 21)

za impl.:

$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

taut. vrijedi akko i samo ako → vrijedi u oba smjera

$P_1, P_2, \ldots P_n \models A \underbrace{\Leftrightarrow}_{} (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow A$ je tautologija

<u>Dz</u> $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $P_1, \ldots P_n \models A$. Pretpostavimo suprotno tj. da je $\underbrace{(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)}_{\top} \Rightarrow \underbrace{A}_{\bot}$ laž.

Tada je:

$P_1 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv \top$ $\Rightarrow$ kontradikcija s pretpostavkom $P_1, \ldots, P_n \models A$

Za drugi smjer:

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\underbrace{(\underset{\top}{P_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\top}{P_n})}_{\top} \Rightarrow A$ tautologija. Neka su $P_1 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv \top$

zbog druge reč.

$\Rightarrow A \equiv \top$ $\Rightarrow P_1, \ldots, P_n \models A$

Iz pretp. prvi sud u impl. i ono na kraj je istina

6. Iskazati i dokazati pravila modus ponens i modus tollens.

Za sudove A i B vrijedi

$$A,\ A \Rightarrow B \models B.$$

Takvo pravilo zaključivanja zove se **modus ponens** ili pravilo otkidanja.

DOKAZ. Ako su premise istinite, tj. $A \equiv \top$ i $A \Rightarrow B \equiv \top$, onda mora biti i $B \equiv \top$ (vidi tablicu istinitosti za $\Rightarrow$).

Dokaz možemo lako provesti i s pomoću tablice istinitosti za $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, koja je identički istinita, tj. tautologija. Q.E.D.

PRIMJEDBA 4. Prema tome, modus ponens je ekvivalentan s ovom tautologijom: $\models A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Tradicionalni zapis modusa ponensa izgleda ovako:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{A \qquad} \\ B \end{array}$$

A	B	A → B	A ∧ (A → B)	A ∧ (A → B) → B Iz teorema 1
T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	T
⊥	⊥	T	⊥	T

PRIMJER 3. U svakom logičkom posljedku smijemo pojedine sudove na svim mjestima zamijeniti sa nekim drugim. Isto tako smijemo pojedine sudove zamijeniti sa njima logički ekvivalentnima. Npr. u modusu ponensu $A \Rightarrow B,\ A \models B$ možemo A zamijeniti sa $\neg B$, B sa $\neg A$. Dobivamo $\neg B \Rightarrow \neg A,\ \neg B \models \neg A$. Zbog pravila kontrapozicije onda vrijedi

$$A \Rightarrow B,\ \neg B \models \neg A.$$

Ovo pravilo zaključivanja zove se **modus tollens.**[3] Tradicionalni zapis za modus tollens glasi:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{\neg B \quad\quad} \\ \neg A \end{array}$$

I= (A → B) ∧ ⌐B → ⌐A

A	B	⌐A	⌐B	A → B	(A → B) ∧ ⌐B	(A → B) ∧ ⌐B → ⌐A
T	T	⊥	⊥	T	⊥	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	T	⊥	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T

7. Definirati pojam Booleove algebre (raspisati sva svojstva).

Skup B (skup bilo kakvih objekata) u kojemu su istaknuta 2 različita elementa: 0 i 1, zajedno sa 3 operacije: množenje '*', zbrajanje '+' i komplement ' ¯ ' naziva se **Booleova algebra**, ako su ispunjena sljedeća svojstva:

(1) *idempotentnost* operacija zbrajanja i množenja: $a + a = a,\ a \cdot a = a$;
(2) *asocijativnost*: $(a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
(3) *komutativnost*: $a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a$;
(4) *distributivnost*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$;
(5) **DeMorganove formule**: $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b},\ \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$;
(6) $a + 0 = a,\ a \cdot 1 = a$,
(7) $a + 1 = 1,\ a \cdot 0 = 0$;
(8) *komplementiranost*: $a + \overline{a} = 1,\ a\overline{a} = 0$;
(9) *involutivnost komplementiranja*: $\overline{\overline{a}} = a$.

Booleova algebra je **uređena šestorka** (B, +, *, ¯, 0, 1). Kod dokazivanja je dovoljno provjeriti svojstva: 3, 4, 6 i 8 jer se sva druga svojstva mogu izvući iz tih svojstava.

8. Dokazati da su, u Booleovoj algebri, nula i jedinica jedinstvene, te da vrijede pravila apsorpcije.

Propozicija 1:

a) Elementi 0 i 1 u Booleovoj algebri B određeni su jednoznačno.

b) U svakoj Booleovoj algebri vrijede pravila apsorpcije:

$$a + ab = a, \quad a(a + b) = a,$$

Ne znam jel ovo za '1' točno:

Dz a) za 0

Pretpostavimo suprotno, tj. neka $\exists\, 0_1, 0_2 \in B$, $0_1 \neq 0_2$

Tada po svojstvu 6) $a + 0 = a, \forall a \in B$ vrijedi:

$$a + 0 = a$$

$$(1) \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{element} \\ \in B}}{0_1} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{NULA}}}{0_2} = 0_1$$

$$(2) \quad 0_2 + 0_1 = 0_2$$

Zbog komutativnosti zbrajanja u Bool. alg. slijedi

$0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1$ pa zaključujemo

$$0_1 = 0_2$$

=> Pretpostavka je pogrešna. 0 mora biti jedinstvena

za 1

Pretpostavimo suprotno, tj neka $\exists\, 1_1, 1_2 \in B$, $1_1 \neq 1_2$

Tada po svojstvu 6) $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in B$ vrijedi

$$(1) \quad 1_1 \cdot 1_2 = 1_1$$

$$(2) \quad 1_2 \cdot 1_1 = 1_2$$

Iz komutativnosti množenja u Bool. alg. slijedi

$$1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1$$

$$1_1 = 1_2$$

=> Pretpostavka je pogrešna. 1 mora biti jedinstvena.

(b) $a + a \cdot b = (a \cdot 1) + (a \cdot b) = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a$

$a \cdot (a + b) = (a + 0) \cdot (a + b) = a + 0 \cdot b = a$

9. Definirati pojam izomorfizma Booleovih algebri.

Neka su B_1 i B_2 Booleove algebre. Za funkciju f: $B_1 \rightarrow B_2$ kažemo da je **izomorfizam** ako je f bijekcija i vrijedi:

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \qquad (1)$$

$$f(\overline{a}) = \overline{f(a)}. \qquad (2)$$

1) čuva umnožak
2) čuva komplement

(Najmanja Booleova algebra može imati 2 elementa i izomorfna je sa bilo kojom drugom dvočlanom B. algebrom.)

10. Dokazati da izomorfizam Booleovih algebri čuva zbrajanje, nulu i jedinicu.

Propozicija 2:
Ako je j : $B_1 \rightarrow B_2$ izomorfizam Booleovih algebara, onda vrijedi:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(0_1) = 0_2, \quad f(1_1) = 1_2.$$

$_1$, $_2$ označava u kojoj Booleovoj algebri.

Dokaz:

a) $f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b)$

$$f(a +_1 b) = f(\overline{\overline{a +_1 b}}) = f(\overline{\bar{a} \cdot_1 \bar{b}}) = \overline{f(\bar{a} \cdot \bar{b})} = \overline{f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b})}$$
$$= \overline{f(\bar{a})} +_2 \overline{f(\bar{b})} = f(\bar{\bar{a}}) +_2 f(\bar{\bar{b}}) = f(a) + f(b)$$

b) $f(0_1) = 0_2$

$$f(0_1) = f(\underbrace{0_1 \cdot \bar{0}_1}_{a \cdot \bar{a} = 0,\ \forall a \in B \quad (a = 0_1)}) = f(0_1) \cdot_2 f(\bar{0}_1) = f(0_1) \cdot_2 \overline{f(0_1)} = 0_2$$

c) $f(1_1) = 1_1$

$$f(1_1) = f(\bar{0}_1) = \overline{\underbrace{f(0_1)}_{0_2 \text{ iz } b)}} = \bar{0}_2 = 1_2$$