



Realtà Virtuale From 3D to 2D

Prof. Alberto Borghese Dipartimento di Informatica

alberto.borgnese@unimi.it

Università degli Studi di Milano

A.A. 2021-2022



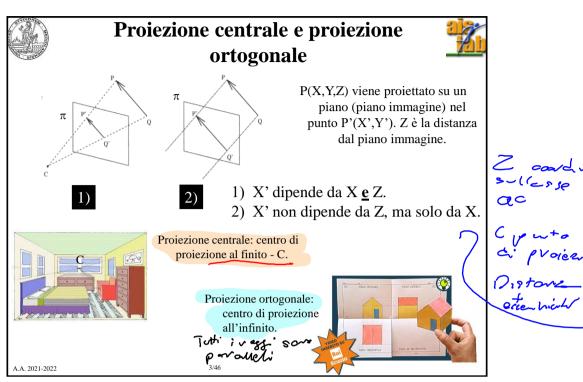
Sommario

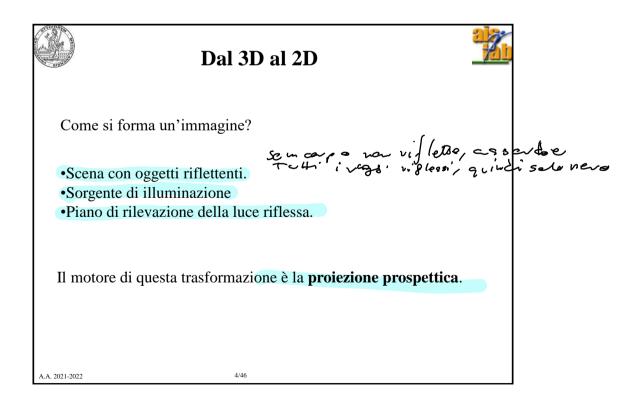


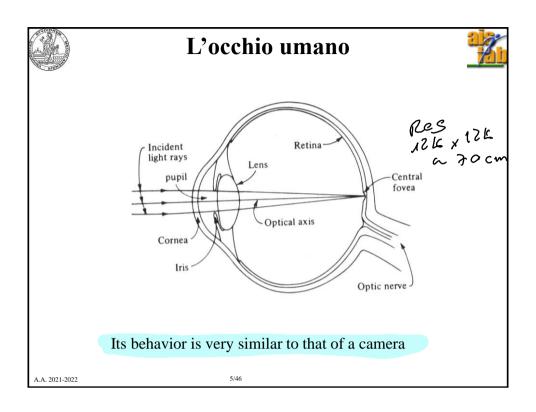
- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

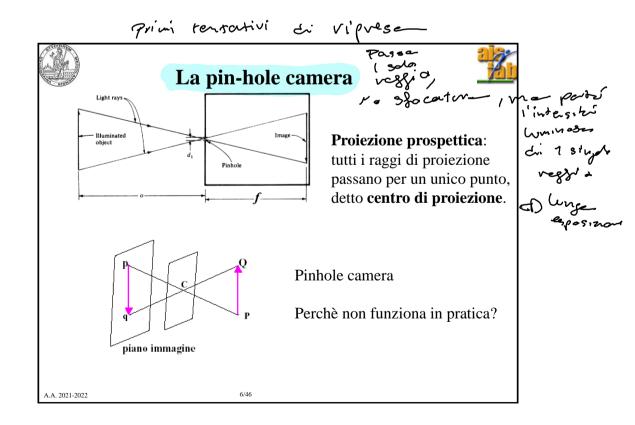
A.A. 2021-2022 2/

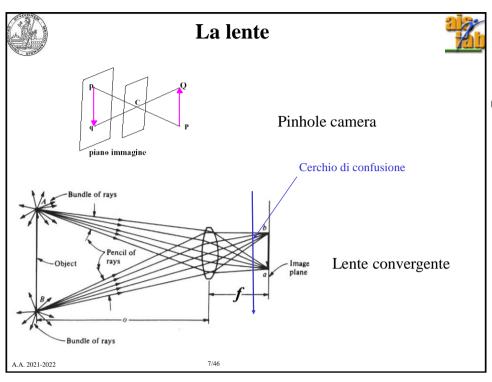










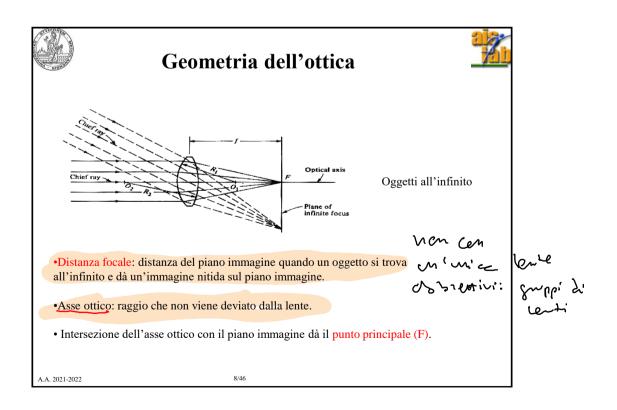


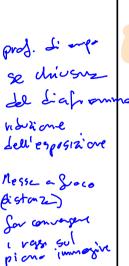
(Cristolina)

Afroco:

lente
e piono
, mucgine
sero degra

tuico
puro

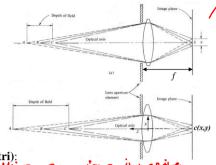






Problema della messa a fuoco

La profondità di campo dipende dall'apertura dell'obbiettivo.



Parametri di camera (o intrinseci – 3 parametri):

- · Punto principale c(x,y) Proieziore as & oblico
- distanza focale (piano messa a fuoco), f

Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).

Distorsioni.

A.A. 2021-2022

9/46

Difficular cottenent note parollele

Distorsioni

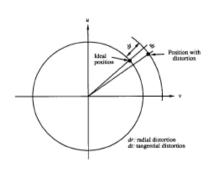


Distorsioni radiali.

Distorsioni tangenziali.

Shrinkage ($x' = \lambda x, y' = y$).

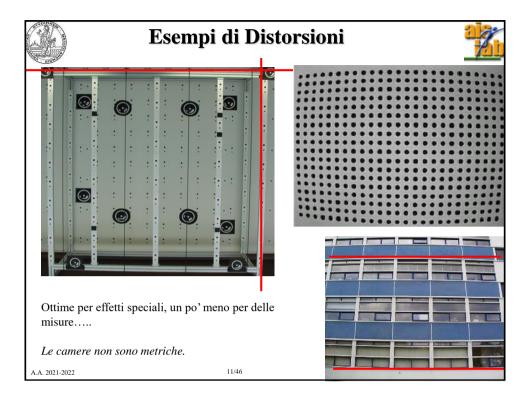
$$x_m = x + f(x,y)$$
$$y_m = y + g(x,y)$$

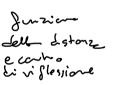


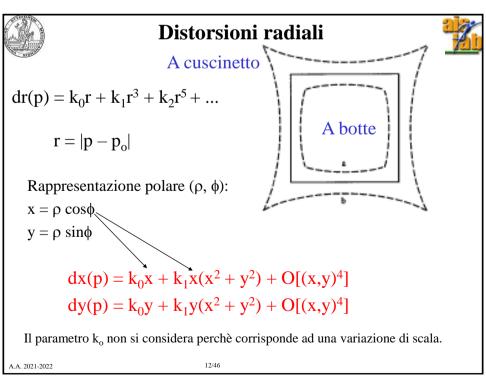
A.A. 2021-2022

10/46

http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese









I modelli di distorsioni

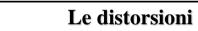


Modelli parametrici

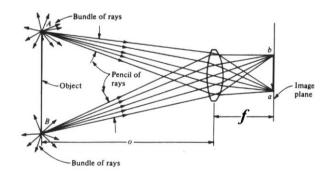
1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$ (1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x \Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y $ (2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$ (3)

In alternativa: modelli **semi-parametrici** che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.

A.A. 2021-2022 13/46



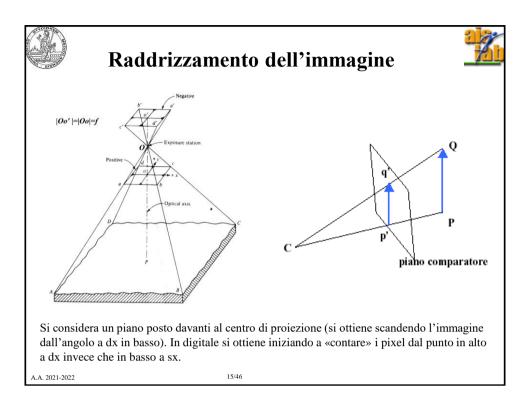


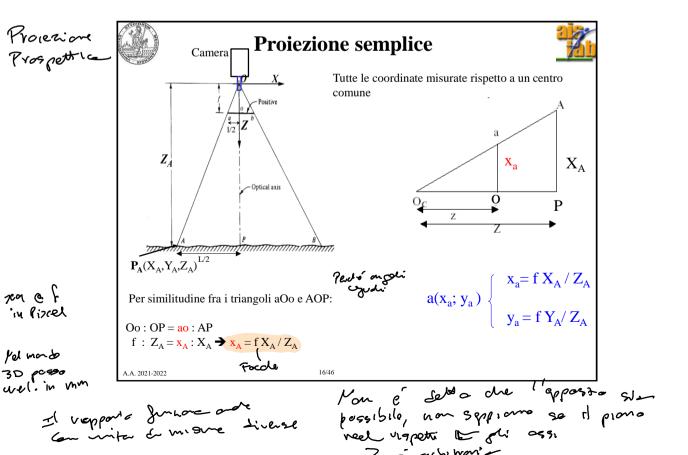


$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + ...$$

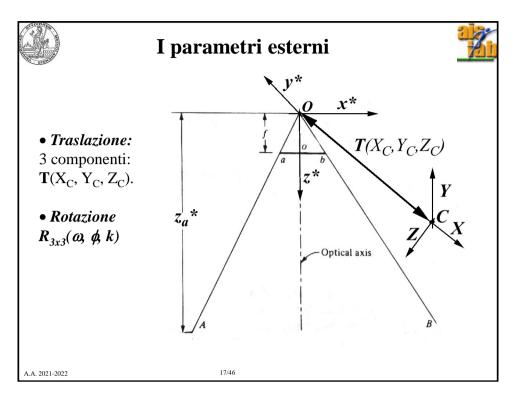
Il punto a per effetto delle distorsioni viene misurato in una posizione $\boldsymbol{p}_a + d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}_a)$

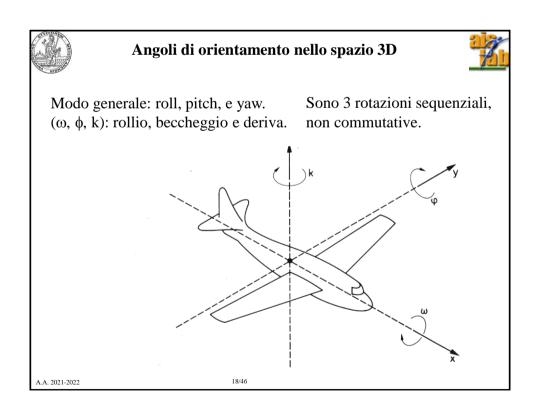
A.A. 2021-2022 14/46





Distinhing
the pione
immigne
e sistemes
di vidassourto







Rototraslazione



$$P* = R(P-T)$$

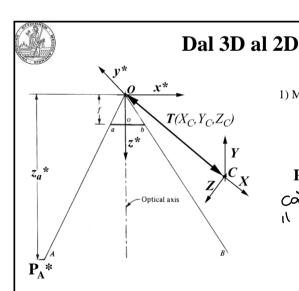
$$\begin{split} X^* &= r_{11}(X \text{-} X_C) + r_{12}(Y \text{-} Y_C) + r_{13}(Z \text{-} Z_C) \\ Y^* &= r_{21}(X \text{-} X_C) + r_{22}(Y \text{-} Y_C) + r_{23}(Z \text{-} Z_C) \\ Z^* &= r_{31}(X \text{-} X_C) + r_{32}(Y \text{-} Y_C) + r_{33}(Z \text{-} Z_C) \end{split}$$

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2021-2022

19/46

http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese



70

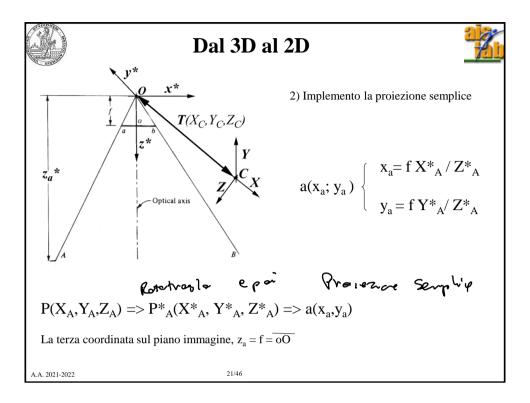
1) Mi riconduco alla proiezione semplice

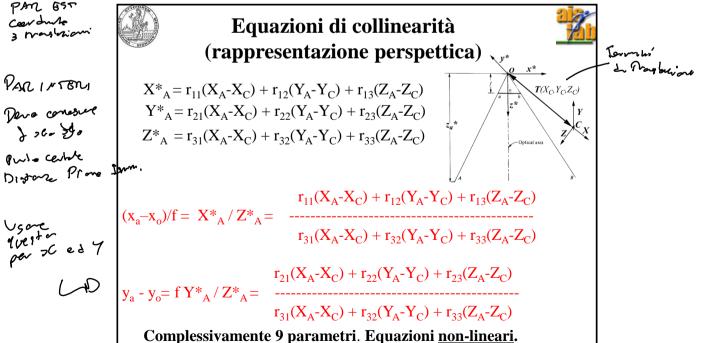
$$P_A^* = R (P_A - T)$$

Canadente on
Il 919tems inhinstee

$$P(X_A, Y_A, Z_A) => P^*_{\ A}(X^*_{\ A}, \ Y^*_{\ A}, \ Z^*_{\ A})$$

A.A. 2021-2022





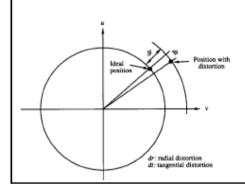
A.A. 2021-2022

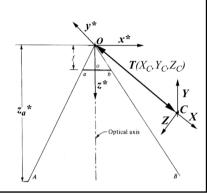


Modello reale della ripresa fotografica



$$\begin{aligned} x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) &= -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)} \\ y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) &= -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)} \end{aligned}$$



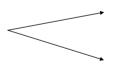




Tassonomia dei parametri



 $P^3 \rightarrow p^2$ Interior parameters



Focal length, f Principal point (x_0, y_0)

 $P^3 \rightarrow P^3$ Exterior parameters



Orientation (ω, ϕ, κ)

Position (X_o,Y_o,Z_o)

 $p^2 \rightarrow p^2_{m} \qquad \begin{array}{c} \text{Distortion parameters: } g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \\ \qquad \qquad (f(x, y, x_o, y_o); g(x, y, x_o, y_o)) \end{array}$



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$
2021-2022

Zer 6 vedta armentate ma in Jam-matricicle



Notazione matriciale



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_o \\ 0 & f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Transformazione mediante scala (f) e translazione (x_0, y_0)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Roto-traslazione

$$\mathbf{p} = (\mathbf{KMA})\mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Che forma ha H? Che dimensioni?

A.A. 2021-2022



Proiezione in coordinate omogenee



$$P^* = MA P = \begin{cases} m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0) \\ m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0) \\ m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RT} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{omogene} \\ y_{omogene} \\ w_{omogene} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} fX^* + x_0Z^* \\ fY^* + y_0Z^* \\ Z^* \end{bmatrix}$$

Dividendo per la terza coordianata, w_{omogenee}.

$$\begin{bmatrix} x_{cartesiana} \\ y_{cartesiana} \\ w = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX^*/Z^* + x_0 \\ fY^*/Z^* + y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2021-2022



Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

A.A. 2021-2022

Travere
ed duineare
I sigteme.
CAD
- quello



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{P(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{p(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ii}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}\$

3 problemi:

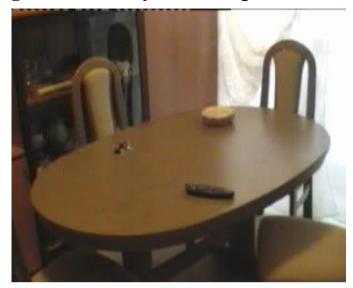
- A) + B) → C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2021-2022 28/46



Augmented reality at work (proiezione)





A.A. 2021-2022

20110



Le operazioni richieste



- Posiziono l'oggetto virtuale nella scena reale manualmente
 - Definisco la sua posizione e orientamento
 - Definisco la sua grandezza (proiezione)ù
- Applico all'oggetto virtuale la stessa rototraslazione della camera
 - Calcolo la rototraslazione della camera a ogni frame (dallo spostamento di un insieme di punti identificati nella scena attraverso marker virtuali o reali)
 - Applico la stessa rototraslazione all'oggetto virtuale

A.A. 2021-2022

30/46

http:\\homes.dsi.unimi.it\~borghese



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) &= -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) &= -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned}$$

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{P(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{p(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ii}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) → C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2021-2022



Set-up



Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to view the volume of interest!

Set-up requires:

- ·Cameras position
- •Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- •Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

Optimal set-up may require some time and/or Multiple cameras are used.

A.A. 2021-2022



In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- Parametri esterni: X_C , Y_C , Z_C , $m_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- · Parametri interni: x_0 , y_0 , f.
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): g₁, g₂, g₃, g₄, k₁,

Calibrazione dei parametri esterni può essere fatta separatamente dai parametri interni e/o di distorsione.

A.A. 2021-2022

33/46



Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione precise degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.
- Per proiettare oggetti virtuali su camere.

A.A. 2021-2022



Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).

Metodi:

- Scacchiere (Zhang et al., Software in Matalab e OpenCV)
- Barra rigida con 2 marker (Borghese e Cerveri, 2000; utilizzata nei sistemi di Mocap; e.g. nello SMART-3D).
- Griglie 3D (non più utilizzato, Borghese et al., 1990)

Metodi ibridi:

 Structure from Motion (SfM), SLAM (Simultaneous Localization and Mapping), vengono ricostruite le coordinate 3D dei punti, stimati i parametri interni e determinato il movimento. Molto utilizzata in robotica.

Algoritmi:

- DLT (Direct Linear Transform -> da 9 parametri, si passa a 12 in un sistema lineare).
- Bundle adjustment. Stima iterativa dei parametri.

A.A. 2021-2022

35/46



2D Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).



A.A. 2021-2022 36/46



Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità. Ho 9 + D parametri aggiuntivi.

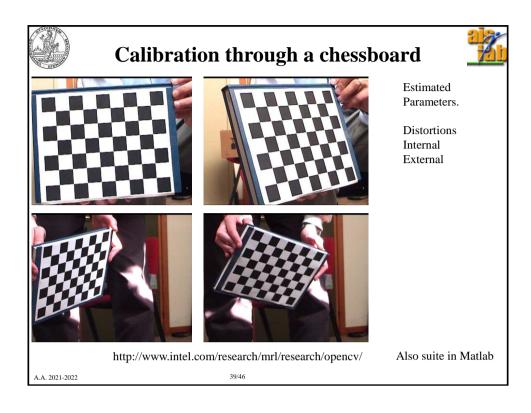
Ho bisogno di (9 + D) / 2 punti di controllo (ogni punto di controllo -> 2 equazioni).

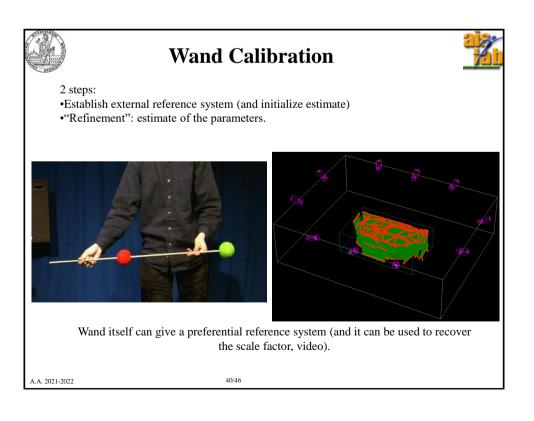
$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

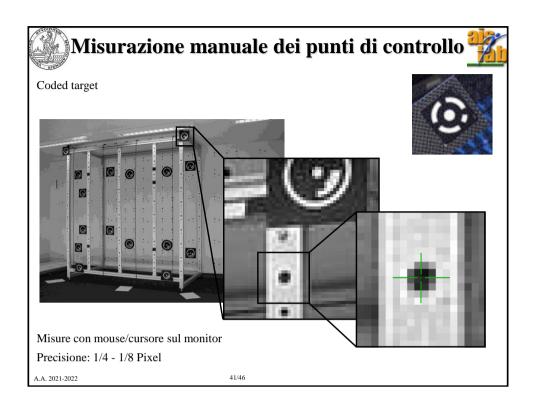
 $y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$ A.A. 2021-2022

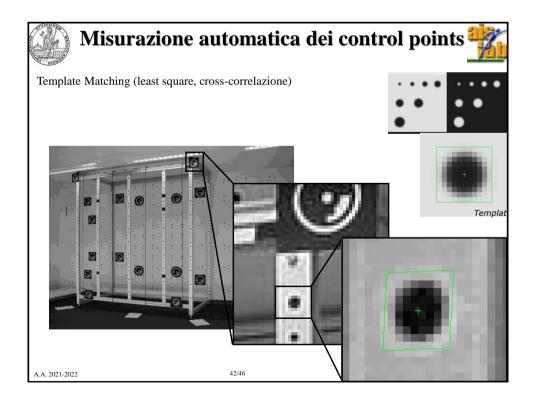
Test field (Known control points)

3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.











Cross-correlazione

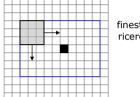


Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

$$\gamma(x,y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$

$$\sigma_{L} = \sqrt{\frac{\sum_{i} \sum_{j} \left(g_{L}\left(x_{i}, y_{j}\right) - \overline{g}_{L}\right)^{2}}{mn - 1}} \quad \sigma_{R} = \sqrt{\frac{\sum_{i} \sum_{j} \left(g_{R}\left(x_{i}, y_{j}\right) - \overline{g}_{R}\right)^{2}}{mn - 1}} \quad \sigma_{LR} = \frac{\sum_{i} \sum_{j} \left(\left(g_{L}\left(x_{i}, y_{j}\right) - \overline{g}_{L}\right)\left(g_{R}\left(x_{i}, y_{j}\right) - \overline{g}_{R}\right)\right)}{nm - 1}$$





finestra di ricerca

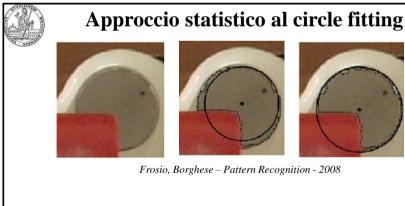
Conjugate pixels



Search window

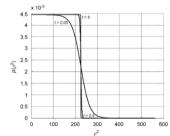
A.A. 2021-2022

43/46



44/46

$$L(\mathbf{p}_{C}, R_{C}) = \prod_{i=1}^{N} p(\rho_{i}^{2}, R_{C}).$$



A.A. 2021-2022

22



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{P(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{p(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C,\,Y_C,\,Z_C,\,m_{ij}(\omega,\!\varphi,\,k),\,f,\,x_o,\,y_o,\{ap_x\},\,\{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) → C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).

A.A. 2021-2022

15/16



Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

A.A. 2021-2022