Pràctica 1: Modelització del tractament d'ablació cardíaca IVS

Instruccions

Aquesta pràctica consistirà en desenvolupar un senzill model per descriure a primer ordre el procés físic que es produeix durant un tractament d'ablació cardíaca IVS. S'haurà de realitzar un informe de longitud màxima (estricta) de 6 pàgines. Tant el desenvolupament del model com els passos a seguir per fer la solució numèrica estaran indicats pas a pas, amb l'objectiu que us serveixi d'exemple del que heu de procurar fer a les dues pràctiques vinents. L'informe ha de contenir:

- Títol i el nom de tots els membres del grup (i amb el NIU).
- **BREU** introducció teòrica (podeu referenciar la informació) i plantejament del problema. Solució analítica del problema.
- Discretització del sistema i de les equacions, condicions de contorn i mètode/s numèric/s utilitzat/s.
- Presentació dels resultats obtinguts. Es valorarà la síntesi d'informació (escollir bé les gràfiques a presentar, utilitzar o no taules...). Les gràfiques han d'estar ben presentades, seguint les mateixes normes que les pràctiques de laboratori. Les qüestions que es plantegen al guió s'han d'anar contestant dins les discussions de cada apartat.
- Breus conclusions, resaltant els resultats principals però evitant tant com es pugui la repetició d'informació.

Introducció

L'ablació cardíaca IVS és una cirugia simple que s'aplica a aquells pacients que pateixen arritmies que poden posar en perill la seva vida, i que reaccionen negativament als fàrmacs. Per entendre aquest procediment primer hem d'entendre que causa una arritmia. El cor batega a causa d'impulsos elèctrics coordinats, que fa que tots dos ventricles bateguin de forma coordinada. Tot i això, és possible que en alguna zona del teixit muscular del cos alguna part del teixit es "descoordini" elèctricament. Quan aquest teixit es troba dins la paret que separa tots dos ventricles, s'aplica l'ablació cardíaca IVS.

El procediment consisteix en el següent: S'introdueixen dos catèters amb electrodes de polaritat oposada per una arteria i una vena, fins arribar al cor, de forma que queda un electrode a cada ventricle. Es coloquen els electrodes de forma que el teixit malalt queda entre mig. A continuació s'aplica una radiofreqüència microones a una certa diferència de potencial. Aquesta diferència de potencial indueix uns corrents que per efecte Joule escalfen el teixit. L'objectiu és escalfar aquest teixit per sobre de 50°C, temperatura a partir de la qual hi ha mort cel·lular, anant en compte de no arribar a 80°C, ja que a aquesta temperatura comença a haver evaporació d'algunes mol·lècules d'aigua i es pot causar una trombosis mortal.

Problema

En aquesta pràctica volem solucionar el següent problema, de forma aproximada: Si tenim un pacient, amb una paret entre ventricles amb un gruix de 2 cm, al centre del qual hi ha una porció de 0.5 cm de gruix malalta, durant quant de temps hem d'aplicar una senyal de 40V per tal que el tractament sigui el més eficient possible? Per avaluar l'eficiència del tractament heu de tenir en compte 3 coses:

- Que la màxima regió de teixit malalt estigui entre 50°C I 80°C el màxim temps possible.
- Que la regió sana no arribi a 50°C
- Que cap punt arribi a 80°C.

Assumpcions i model

Aquí comença la nostra feina com a modelitzadors. El primer que farem es establir la/les equacions que ens regiran el sistema. En concret en aquesta pràctica farem servir la llei de Fourier per a la temperatura:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left(\kappa \nabla T \right) + P_{ext} \tag{1}$$

Aquesta equació, coneguda també com l'equació del calor, descriu l'evolució temporal i espacial de la distribució de temperatura en un volum. c_v és el calor específic, ρ és la densitat, κ és la conductivitat tèrmica i P_{ext} fa referència a totes les fonts de calor externes del sistema. En concret, en aquest problema, assumirem que l'única font de calor que hi haurà són els elèctrodes que generen calor per efecte Joule.

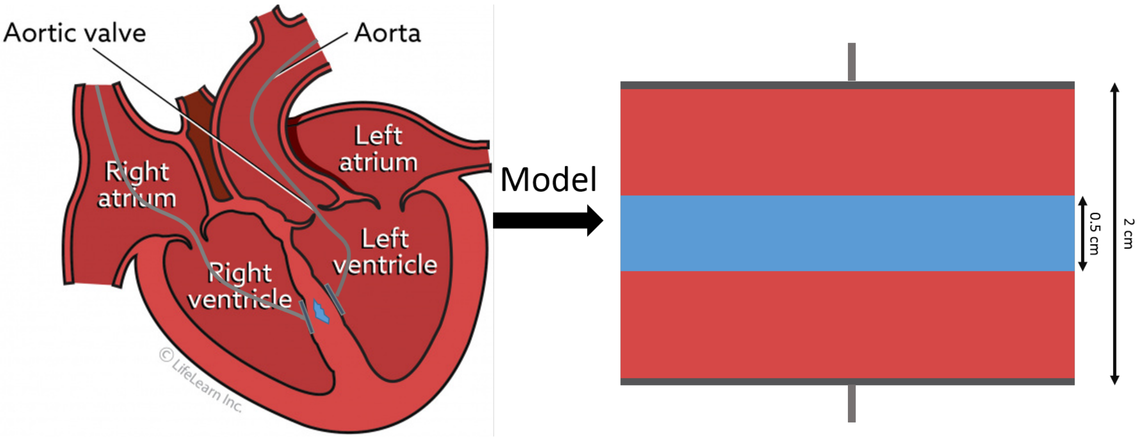

Figura 1: A l'esquerra, un esquema d'una intervenció d'ablació cardíaca IVS. Els dos fils grisos acabats amb plaques planes serien els elèctrodes, i la zona blava a la paret que separa els ventricles seria el teixit malalt. A la dreta ja hem modelat el sistema de forma que hem fet una aproximació de la geometria del sistema prop de la zona malalta per tal de simplificar el problema i reduir-ho a un problema d'una dimensió

Pel que fa a la geometria, a la Fig. 1 (esquerra) tenim un esquema del sistema que volem simular. Com observem la paret que separa els ventricles és molt irregular, tant en forma com en gruix, així com els elèctrodes, i la distància entre diferent punts dels elèctrodes. El que farem és fer l'aproximació mostrada en la Fig. 1 (dreta). Assumirem el teixit malalt com un disc uniforme, d'altura $h = 0.5$ cm i aproximarem els electrodes com un condensador planoparal·lel ideal. Busquem en la bibliografia les propietats termoelèctriques mitjanes del teixit cardíac i trobem què:

$$c_v = 3686 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \qquad \rho = 1081 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad \kappa = 0.56 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} \qquad \sigma = 0.472 \ \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}} \tag{2}$$

On σ és la conductivitat elèctrica.

Un cop trobeu el sistema simplificat a un espai cilíndricament simètric, calculeu P_{ext} en el nostre problema en funció de les propietats del material en el que ens trobem (conductivitat elèctrica) i la diferència de potencial aplicada entre els electròdes. Recordeu que es tracta d'un procés de corren altern, que podeu tractar com un de corrent continu utilitzant com a potencial efectiu el potencial de pic a pic dividit per $\sqrt{2}$.

Condicions inicials i de frontera

Per a resoldre una equació diferencial en derivades parcials necessitem conèixer la distribució inicial i les condicions que s'han de complir a la frontera del nostre sistema. En aquesta cas, com a condició inicial considerarem que tot el sistema es troba a la temperatura natural del cos humà, uns $T_c = 36.5$ °C. Com que les parets entre ventricles estan en contacte amb una quantitat gran de sang que es troba en circulació continua, considerarem que la temperatura a la frontera sempre serà de T_c.

Adimensionalització de les equacions

Sempre que anem a enfrontar-nos a un problema numèric, és convenient adimensionalitzar les equacions per treballar amb variables sense unitats, amb valors propers a la unitat per minimitzar l'error numèric per truncament i per reduir el nombre de paràmetres dels que depèn el sistema. Procediu a renormalitzar l'equació del calor:

Reduïu al màxim possible la quantitat de paràmetres del problema. Quina informació obtenim al fer la renormalització? Quin rol compleix la difusivitat tèrmica $\alpha = \frac{\kappa}{c_v \rho}$ en el nostre sistema?

Solució analítica

Aquest problema té solució analítica, i calcular-la ens permetrà calcular quin és l'error numèric comés al fer les simulacions. Aprendre a solucionar analíticament EDPs no és l'objectiu d'aquesta assignatura, és per això que en l'annex d'aquesta pràctica trobareu una guia de com solucionar analíticament una equació com la plantejada. És obvi que és absurd resoldre numèricament una EDP que té solució analítica, però en aquest cas didàctic ho farem per veure com varia l'error numèric amb diferents mètodes numèrics.

Trobeu la solució analítica de l'Eq.(1) normalitzada, i comproveu que aquesta és efectivament solució del problema.

Solució numèrica: Euler Explícit

Implementeu un codi que solucioni l'Eq.(1) utilitzant el mètode numèric Euler explícit, explicat a classe de teoria. Sigui $N = 101$ el nombre de punts del mallat espacial, $\Delta\hat{x}$ l'amplada del mallat espacial normalitzat i $\Delta\hat{t}$ l'amplada del mallat temporal normalitzat; troba $T(x, t_a)$, on $t_a = 0.025$ (adimensional) amb els següents mallats:

$$\Delta\hat{t} = 0.51(\Delta\hat{x})^2 \qquad \Delta\hat{t} = 0.49(\Delta\hat{x})^2 \qquad \Delta\hat{t} = 0.25(\Delta\hat{x})^2$$

Representeu gràficament aquestes solucions i els seus respectius errors numèrics i compareu-les. En cas de no conèixer la solució analítica, quines comprovacions podríeu fer per a confirmar que el programa va bé?

Solució numèrica: Euler Implicit

Implementeu un codi que solucioni l'Eq.(1) utilitzant el mètode numèric Euler implícit, explicat a classe de teoria. Feu, com a mínim, aquests dos casos ($N = 101$, $t_a = 0.025$)

$$\Delta\hat{t} = \Delta\hat{x} \qquad \Delta\hat{t} = 0.5\Delta\hat{x}$$

Representeu gràficament aquestes dues solucions i els seus respectius errors numèrics i compareu-les. Compareu també les solucions obtingudes amb aquest mètode amb les obtingudes amb el mètode anterior. Raoneu quines són les avantatges i els inconvenients de cada mètode.

Solució numèrica: Crank-Nicolson

Repeteix el mateix que en l'apartat del mètode implícit, però utilitzant l'esquema de Crank-Nicolson. Si feu aquest apartat compareu els tres mètodes numèrics en aquest apartat.

Heu de fer aquest apartat si voleu optar a la màxima nota, si no la nota màxima serà 8.5.

Solució del problema

Resoleu el problema plantejat, utilitzant algun dels mètodes numèrics que heu implementat.

Extra: Milloreu el model

Explica com millloraries el model per fer-lo més realista i incorpora aquestes millores a les equacions que formen el sistema i/o a la seva discretització si és convenient. NO heu de solucionar el sistema millorat.

Extra: Animacions

Presenteu els resultats en forma d'imatge animada o de vídeo de forma que es pugui apreciar visualment l'evolució de la temperatura en funció del temps.

Annex

Sigui l'equació del tipus:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t) \tag{3}$$

On $f(x,t)$ és la funció que volem trobar, i $q(x,t)$ és una funció coneguda. També són conegudes la condició inicial, $f(x,0) = \beta$, i les de frontera $f(0,t) = f(1,t) = \beta$, on $x = 0$ i $x = 1$ són les fronteres del sistema.

Trobeu la sèrie de Fourier de sinus de la funció $q(x,t)$ i de la condició inicial:

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\pi x \qquad b_n(t) = 2\int_0^1 q(x,t)\sin(n\pi x)dx \tag{4}$$

La solució serà:

$$f(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left(\frac{1 - e^{-n^2\pi^2 t}}{n^2\pi^2} \right) \sin n\pi x \tag{5}$$