Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Informationen

Dies ist eine Mitschrift des Übungsbetriebs der Vorlesung Analysis I für Informatiker und Statistiker im Wintersemester 2015/16 bei Prof. Dr. Peter Pickl. Ohne Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.

1 Blatt 01

1.1 Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2}(\sum_{j=1}^{3}(ij)) &= (\sum_{j=1}^{3}(1j))\cdot(\sum_{j=1}^{3}(2j))\\ &= ((1\cdot 1)+(1\cdot 2)+(1\cdot 3))\cdot((2\cdot 1)+(2\cdot 2)+(3\cdot 2))\\ &= (1+2+3)\cdot(2+4+6)\\ &= 6\cdot 12\\ &= 72\end{aligned}$$

b) Die Umbennung der Variablen i, j aus a) zu k, m ändert nichts am Rechenweg und somit auch nicht das Ergebnis. Das Ergebnis ist wieder 72.

c)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{3}(\prod_{k=1}^{2}(km)) &= (\prod_{k=1}^{2}(k1))+(\prod_{k=1}^{2}(k2))+(\prod_{k=1}^{2}(k3))\\ &= (1\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)+(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)+(1\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\\ &= (2+8+18)\\ &= 28\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2}(k\sum_{m=1}^{3}(m)) &= (1\sum_{m=1}^{3}(m))\cdot(2\sum_{m=1}^{3}(m))\\ &= (1\cdot(1+2+3))\cdot(2\cdot(1+2+3))\\ &= (1\cdot 6)\cdot(2\cdot 6)\\ &= 72\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{3}(m\prod_{k=1}^{2}(k)) &= (1\prod_{k=1}^{2}(k))+(2\prod_{k=1}^{2}(k))+(3\prod_{k=1}^{2}(k))\\ &= (1\cdot(1\cdot 2))+(2\cdot(1\cdot 2))+(3\cdot(1\cdot 2))\\ &= 2+4+6\\ &= 12\end{aligned}$$

1.2 Aufgabe 2

a) *Bemerkung:* Bernoulli
Induktionsanfang: $n = 1$

$$(1+x)^1 = (1+x) \geq 1+1x$$

Induktionsvoraussetzung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu Zeigen ist

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)x$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{(n+1)} &= (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \\
&\overset{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) \\
&= 1+x+nx+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+\underbrace{(nx^2)}_{\geq 0} \\
&\geq 1+(n+1)x \quad \square
\end{aligned}$$

b) *Bemerkung:* Dies ist eine Erweiterung der gaußschem Summenformel.
Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+2)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu Zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&\overset{IV}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \square
\end{aligned}$$

1.3 Aufgabe 3

Bemerkung: Einfach immer: Laut Vorlesung sieht man leicht, dass ... gilt.

i) $1 \cdot n = n \cdot 1$

ii) $n \cdot m = m \cdot n$

Laut Vorlesung gilt:

a) $1 \cdot n = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $m \cdot n' = m \cdot n + m \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$

c) $m' \cdot n = m \cdot n + n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Zeige i)

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n \overset{a)}{=} n$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu Zeigen ist

$$(n+1) \cdot 1 = 1 \cdot (n+1) = n+1$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot 1 &= n' \cdot 1 \\ &\overset{c)}{=} n \cdot 1 + 1 \\ &\overset{IV}{=} n + 1 \quad \square\end{aligned}$$

Zeige nun ii)

$$n \cdot m = m \cdot n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Induktion über m.
Induktionsanfang: $m = 1$

$$n \cdot 1 \overset{i)}{=} 1 \cdot n$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot m = m \cdot n$$

Induktionsschritt: $m \to m+1$
Zu Zeigen ist

$$n \cdot (m+1) = (m+1) \cdot n$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}(m+1)\cdot n &= m'\cdot n\\ &\overset{c)}{=} m\cdot n+n\\ &\overset{IV}{=} n\cdot m+n\\ &\overset{b)}{=} n\cdot m'\\ &= n\cdot(m+1) \quad \square\end{aligned}$$

1.4 Aufgabe 4

Finde Tripel (M, e, S).
Bemerkung: $M \longleftarrow$ Mengensystem, $e \longleftarrow$ neutrales Element, $S \longleftarrow$ Abbildungsvorschrift.

a) i), ii) und iv) werden erfüllt. Das heißt entweder $k \in M$ existieren, sodass $S(k) = e$ gilt [iii) verletzt, da 1 kein Nachfolger einer $\mathbb{N}$-Zahl ist], oder $\exists X$, $e \in X$ und $k \in X \cap M$ gilt $S(k) \in X$ <u>aber</u> $M \not\subset X$ [v) verletzt].
Beispiel:

$$\begin{aligned}M &= \{e, \star\}\\ S(e) &= \star\\ S(\star) &= e\end{aligned}$$

i) $e \in M$ per Defintion von M

ii) $S(k)$ existiert für alle $k \in M$ und ist <u>eindeutig</u>.

iv) $S(k) = S(\tilde{k}) \Longrightarrow k = \tilde{k} \qquad \forall k, \tilde{k} \in M$

iii) ist wegen $S(\star) = e$ verletzt.

b) (M, e, S) soll i), ii), iii) und v) erfüllen.
Beispiel:

$$\begin{aligned}M &= \{e, \star\}\\ S(e) &= \star\\ S(\star) &= \star\end{aligned}$$

iv) wegen $S(e) = S(\star) = \star$ jedoch $e \neq \star$ verletzt.

c) (M, e, S) verletzt iv) und v), erfüllt aber i), ii), iii).
Beispiel:

$$\begin{aligned}M &= \{e, \star <>\}\\ S(e) &= \star\\ S(\star) &= \star\\ S(<>) &= \star\end{aligned}$$

i), ii), iii) offensichtlich erfüllt. iv) nach b) verletzt.
Sei dazu $X = \{e, \star\}$. Dann ist $e \in X$, $S(e) = \star \quad \in X$
Aber, weil $<> \notin X$ ist $M \not\subset X$. Also v) verletzt.

2 Blatt 02

2.1 Aufgabe 1

a) *Bemerkung:* $\Leftrightarrow \longleftarrow$ genau, wenn dann
$a \sim_a b \Leftrightarrow r = \widetilde{r}$, wobei $a = m \cdot 7 + r$ und $b = \widetilde{m} \cdot 7 + \widetilde{r}$ $(m, \widetilde{m}, r, \widetilde{r} \in \mathbb{N}_0)$

- **Reflexivität:** ist offensichtlich.
- **Symmetrie:** ist offensichtlich.
- **Transitivität:** Sei dazu $a \sim b \wedge b \sim c$. Dann gilt

$$a = m \cdot 7 + r \text{ und } b = k \cdot 7 + \widetilde{r}$$
$$b = n \cdot 7 + r \text{ und } c = l \cdot 7 + \widetilde{r}$$

Zu Zeigen ist $r = \widetilde{r}$.
Wäre $r \neq \widetilde{r}$, dann wäre wegen $k = n$ auch $b \neq b$. Fehler!
Also $r = \widetilde{r}$.

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation $\sim_a$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) $a \sim_b b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = k \cdot 7$ $(a, b, k \in \mathbb{Z})$

- **Reflexivität:** $a^2 - a^2 = 0 \cdot 7$ ✓
- **Symmetrie:** Sei dazu $a \sim b$. Dann $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = -k \cdot 7$$

Da $-k \in \mathbb{Z}$ folgt $b \sim a$.

- **Transitivität:** Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann $\exists k, l \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \ \wedge \ b^2 - c^2 = l \cdot 7 \ ✓$$
$$\Rightarrow a^2 - c^2 = k \cdot 7 + b^2 + l \cdot 7 - b^2 = \underbrace{(k+l)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 7 \ ✓$$

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation $\sim_b$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

2.2 Aufgabe 2

2.3 Aufgabe 3

2.4 Aufgabe 4

3 Blatt 03

3.1 Aufgabe 1

3.2 Aufgabe 2

3.3 Aufgabe 3

3.4 Aufgabe 4

4 Blatt 04

4.1 Aufgabe 1

Bemerkung: Archimedisches Axiom, Bernoulli Ungleichung

$$0 < q < 1$$

zu Zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad q^n < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Archimedisches Axiom:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 + nx, \quad x > 0$$

Bernoulli Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x \geq -1, \quad \forall n \geq 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \overset{Ar.}{<} 1 + nx \overset{Be.}{\leq} (1+x)^n$$

Damit

$$\frac{1}{\varepsilon} < (1+x)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^n} < \varepsilon$$

Setze $x := \frac{1}{q} - 1$, dann folgt

$$\frac{1}{(\frac{1}{q})^n} < \varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon \quad \square$$

4.2 Aufgabe 2

Bemerkung: Cantor Diagonalargument
zu a)
Sei M_j $\forall j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge. Dann ist zu zeigen: $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j$ ist abzählbar. Da M_j abzählbar, existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ bijektive Abbildung $\rho_j : \mathbb{N} \to M_j$.
Nummeriere Elemente von M_j wie folgt:

$$m_1^j \quad : \quad \rho_j(1) ... m_n^j := \rho_j(n)$$

4.3 Aufgabe 3

4.4 Aufgabe 4

5 Blatt 05

5.1 Aufgabe 1

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
Zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, also insbesondere beschränkt. Das heißt $\exists K > 0$ mit $|a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Durch eventuelle Vergrößerung von K gilt auch $|b_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2 Aufgabe 2

5.3 Aufgabe 3

5.4 Aufgabe 4