

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Informationen (letztes Update: 2. Dezember 2015 21:07:25 CET)	2
1 Blatt 01	3
1.1 Aufgabe 1	3
1.2 Aufgabe 2	4
1.3 Aufgabe 3	5
1.4 Aufgabe 4	6
2 Blatt 02	8
2.1 Aufgabe 1	8
2.2 Aufgabe 2	8
2.3 Aufgabe 3	8
2.4 Aufgabe 4	8
3 Blatt 03	9
3.1 Aufgabe 1	9
3.2 Aufgabe 2	9
3.3 Aufgabe 3	9
3.4 Aufgabe 4	9
4 Blatt 04	10
4.1 Aufgabe 1	10
4.2 Aufgabe 2	10
4.3 Aufgabe 3	11
4.4 Aufgabe 4	11
5 Blatt 05	12
5.1 Aufgabe 1	12
5.2 Aufgabe 2	12
5.3 Aufgabe 3	12
5.4 Aufgabe 4	12
6 Blatt 06	13
6.1 Aufgabe 1	13
6.2 Aufgabe 2	13
6.3 Aufgabe 3	14
6.4 Aufgabe 4	14

Allgemeine Informationen

Dies ist eine Mitschrift des Übungsbetriebs der Vorlesung Analysis I für Informatiker und Statistiker im Wintersemester 2015/16 bei Prof. Dr. Peter Pickl. Ohne Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.

Die Mitschrift wird auf <http://andreasellw.github.io/ana-lsg> verwaltet und aktualisiert. Dort sind auch die .tex-Files zu finden. Bei Fehlern bitte einen New issue auf GitHub einreichen. Momentan (2. Dezember 2015) ist die Mitschrift noch nicht vollständig.

1 Blatt 01

1.1 Aufgabe 1

a)

$$\prod_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (ij) \right) = \left(\sum_{j=1}^3 (1j) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 (2j) \right) \quad (1.1.1)$$

$$= ((1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 3)) \cdot ((2 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (3 \cdot 2)) \quad (1.1.2)$$

$$= (1 + 2 + 3) \cdot (2 + 4 + 6) \quad (1.1.3)$$

$$= 6 \cdot 12 \quad (1.1.4)$$

$$= 72 \quad (1.1.5)$$

b) Die Umbenennung der Variablen i, j aus a) zu k, m ändert nichts am Rechenweg und somit auch nicht das Ergebnis. Das Ergebnis ist wieder 72.

c)

$$\sum_{m=1}^3 \left(\prod_{k=1}^2 (km) \right) = \left(\prod_{k=1}^2 (k1) \right) + \left(\prod_{k=1}^2 (k2) \right) + \left(\prod_{k=1}^2 (k3) \right) \quad (1.1.6)$$

$$= (1 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) + (1 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \quad (1.1.7)$$

$$= (2 + 8 + 18) \quad (1.1.8)$$

$$= 28 \quad (1.1.9)$$

d)

$$\prod_{k=1}^2 \left(k \sum_{m=1}^3 (m) \right) = \left(1 \sum_{m=1}^3 (m) \right) \cdot \left(2 \sum_{m=1}^3 (m) \right) \quad (1.1.10)$$

$$= (1 \cdot (1 + 2 + 3)) \cdot (2 \cdot (1 + 2 + 3)) \quad (1.1.11)$$

$$= (1 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 6) \quad (1.1.12)$$

$$= 72 \quad (1.1.13)$$

e)

$$\sum_{m=1}^3 \left(m \prod_{k=1}^2 (k) \right) = \left(1 \prod_{k=1}^2 (k) \right) + \left(2 \prod_{k=1}^2 (k) \right) + \left(3 \prod_{k=1}^2 (k) \right) \quad (1.1.14)$$

$$= (1 \cdot (1 \cdot 2)) + (2 \cdot (1 \cdot 2)) + (3 \cdot (1 \cdot 2)) \quad (1.1.15)$$

$$= 2 + 4 + 6 \quad (1.1.16)$$

$$= 12 \quad (1.1.17)$$

1.2 Aufgabe 2

a) *Bemerkung:* Bernoulli

Induktionsanfang: $n = 1$

$$(1+x)^1 = (1+x) \geq 1+1x \quad (1.2.1)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2.2)$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Zu Zeigen ist

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)x \quad (1.2.3)$$

Es gilt:

$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \quad (1.2.4)$$

$$\stackrel{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) \quad (1.2.5)$$

$$= 1+x+nx+nx^2 \quad (1.2.6)$$

$$= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \quad (1.2.7)$$

$$\geq 1+(n+1)x \quad \square \quad (1.2.8)$$

b) *Bemerkung:* Dies ist eine Erweiterung der gaußschen Summenformel.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 2)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad (1.2.9)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6} \quad (1.2.10)$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Zu Zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad (1.2.11)$$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \quad (1.2.12)$$

$$\stackrel{IV}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1.2.13)$$

$$= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1.2.14)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \square \quad (1.2.15)$$

1.3 Aufgabe 3

Bemerkung: Einfach immer: Laut Vorlesung sieht man leicht, dass ... gilt.

i) $1 \cdot n = n \cdot 1$

ii) $n \cdot m = m \cdot n$

Laut Vorlesung gilt:

a) $1 \cdot n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $m \cdot n' = m \cdot n + m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

c) $m' \cdot n = m \cdot n + n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Zeige i)

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n \stackrel{a)}{=} n \quad (1.3.1)$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (1.3.2)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n \quad (1.3.3)$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Zu Zeigen ist

$$(n+1) \cdot 1 = 1 \cdot (n+1) = n+1 \quad (1.3.4)$$

Es gilt:

$$(n+1) \cdot 1 = n' \cdot 1 \quad (1.3.5)$$

$$\stackrel{c)}{=} n \cdot 1 + 1 \quad (1.3.6)$$

$$\stackrel{IV}{=} n + 1 \quad \square \quad (1.3.7)$$

Zeige nun ii)

$$n \cdot m = m \cdot n \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (1.3.8)$$

Induktion über m .

Induktionsanfang: $m = 1$

$$n \cdot 1 \stackrel{i)}{=} 1 \cdot n \quad (1.3.9)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot m = m \cdot n \quad (1.3.10)$$

Induktionsschritt: $m \rightarrow m + 1$

Zu Zeigen ist

$$n \cdot (m+1) = (m+1) \cdot n \quad (1.3.11)$$

Es gilt:

$$(m+1) \cdot n = m' \cdot n \quad (1.3.12)$$

$$\stackrel{c)}{=} m \cdot n + n \quad (1.3.13)$$

$$\stackrel{IV}{=} n \cdot m + n \quad (1.3.14)$$

$$\stackrel{b)}{=} n \cdot m' \quad (1.3.15)$$

$$= n \cdot (m+1) \quad \square \quad (1.3.16)$$

1.4 Aufgabe 4

Finde Tripel (M, e, S) .

Bemerkung: $M \longleftarrow$ Mengensystem, $e \longleftarrow$ neutrales Element, $S \longleftarrow$ Abbildungsvorschrift.

- a) i), ii) und iv) werden erfüllt. Das heißt entweder $k \in M$ existieren, sodass $S(k) = e$ gilt [iii) verletzt, da 1 kein Nachfolger einer \mathbb{N} -Zahl ist], oder $\exists X, e \in X$ und $k \in X \cap M$ gilt $S(k) \in X$ aber $M \not\subset X$ [v) verletzt].

Beispiel:

$$M = \{e, \star\} \quad (1.4.1)$$

$$S(e) = \star \quad (1.4.2)$$

$$S(\star) = e \quad (1.4.3)$$

i) $e \in M$ per Definition von M

ii) $S(k)$ existiert für alle $k \in M$ und ist eindeutig.

iv) $S(k) = S(\tilde{k}) \implies k = \tilde{k} \quad \forall k, \tilde{k} \in M$

iii) ist wegen $S(\star) = e$ verletzt.

b) (M, e, S) soll i), ii), iii) und v) erfüllen.

Beispiel:

$$M = \{e, \star\} \quad (1.4.4)$$

$$S(e) = \star \quad (1.4.5)$$

$$S(\star) = \star \quad (1.4.6)$$

iv) wegen $S(e) = S(\star) = \star$ jedoch $e \neq \star$ verletzt.

c) (M, e, S) verletzt iv) und v), erfüllt aber i), ii), iii).

Beispiel:

$$M = \{e, \star, <>\} \quad (1.4.7)$$

$$S(e) = \star \quad (1.4.8)$$

$$S(\star) = \star \quad (1.4.9)$$

$$S(<>) = \star \quad (1.4.10)$$

i), ii), iii) offensichtlich erfüllt. iv) nach b) verletzt.

Sei dazu $X = \{e, \star\}$. Dann ist $e \in X, S(e) = \star \in X$

Aber, weil $<> \notin X$ ist $M \not\subset X$. Also v) verletzt.

2 Blatt 02

2.1 Aufgabe 1

a) *Bemerkung:* $\Leftrightarrow \Leftarrow$ genau, wenn dann

$$a \sim_a b \Leftrightarrow r = \tilde{r}, \text{ wobei } a = m \cdot 7 + r \text{ und } b = \tilde{m} \cdot 7 + \tilde{r} \ (m, \tilde{m}, r, \tilde{r} \in \mathbb{N}_0)$$

- **Reflexivität:** ist offensichtlich.
- **Symmetrie:** ist offensichtlich.
- **Transitivität:** Sei dazu $a \sim b \wedge b \sim c$. Dann gilt

$$a = m \cdot 7 + r \text{ und } b = k \cdot 7 + \tilde{r} \quad (2.1.1)$$

$$b = n \cdot 7 + r \text{ und } c = l \cdot 7 + \tilde{r} \quad (2.1.2)$$

Zu Zeigen ist $r = \tilde{r}$.

Wäre $r \neq \tilde{r}$, dann wäre wegen $k = n$ auch $b \neq b$. Fehler!

Also $r = \tilde{r}$.

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation \sim_a ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) $a \sim_b b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = k \cdot 7 \ (a, b, k \in \mathbb{Z})$

- **Reflexivität:** $a^2 - a^2 = 0 \cdot 7 \checkmark$
- **Symmetrie:** Sei dazu $a \sim b$. Dann $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = -k \cdot 7 \quad (2.1.3)$$

Da $-k \in \mathbb{Z}$ folgt $b \sim a$.

- **Transitivität:** Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann $\exists k, l \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \wedge b^2 - c^2 = l \cdot 7 \checkmark \quad (2.1.4)$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = k \cdot 7 + b^2 + l \cdot 7 - b^2 = \underbrace{(k+l)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 7 \checkmark \quad (2.1.5)$$

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation \sim_b ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

2.2 Aufgabe 2

2.3 Aufgabe 3

2.4 Aufgabe 4

3 Blatt 03

3.1 Aufgabe 1

3.2 Aufgabe 2

3.3 Aufgabe 3

3.4 Aufgabe 4

4 Blatt 04

4.1 Aufgabe 1

Bemerkung: Archimedisches Axiom, Bernoulli Ungleichung

$$0 < q < 1 \quad (4.1.1)$$

zu Zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad q^n < \varepsilon \quad \forall n > N \quad (4.1.2)$$

Archimedisches Axiom:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 + nx, \quad x > 0 \quad (4.1.3)$$

Bernoulli Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1, \quad \forall n \geq 0 \quad (4.1.4)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \stackrel{Ar.}{<} 1+nx \stackrel{Be.}{\leq} (1+x)^n \quad (4.1.5)$$

Damit

$$\frac{1}{\varepsilon} < (1+x)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^n} < \varepsilon \quad (4.1.6)$$

Setze $x := \frac{1}{q} - 1$, dann folgt

$$\frac{1}{(\frac{1}{q})^n} < \varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon \quad \square \quad (4.1.7)$$

4.2 Aufgabe 2

Bemerkung: Cantor Diagonalargument

zu a)

Sei $M_j \forall j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge. Dann ist zu zeigen: $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$ ist abzählbar. Da M_j abzählbar, existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ bijektive Abbildung $\rho_j : \mathbb{N} \rightarrow M_j$.

Nummeriere Elemente von M_j wie folgt:

$$m_1^j \quad : \quad \rho_j(1) \dots m_n^j := \rho_j(n) \quad (4.2.1)$$

4.3 Aufgabe 3

4.4 Aufgabe 4

5 Blatt 05

5.1 Aufgabe 1

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Zu zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \quad (5.1.1)$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, also insbesondere beschränkt. Das heißt $\exists K > 0$ mit $|a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Durch eventuelle Vergrößerung von K gilt auch $|b_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2 Aufgabe 2

5.3 Aufgabe 3

5.4 Aufgabe 4

6 Blatt 06

6.1 Aufgabe 1

6.2 Aufgabe 2

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}, \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.2.1)$$

a)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= \frac{5}{4}, & a_3 &= \frac{7}{5}, & a_4 &= \frac{9}{6}, & a_5 &= \frac{11}{7} \\ b_1 &= 1, & b_2 &= \frac{7}{4}, & b_3 &= \frac{7}{9}, & b_4 &= \frac{21}{16}, & b_5 &= \frac{21}{25} \end{aligned}$$

b) Da $b_1 < b_2$ aber $b_2 > b_3$ kann b_n nicht monoton sein.
 a_n monoton steigend?

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \quad (6.2.2)$$

Es gilt:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} \implies a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+3} \quad (6.2.3)$$

$$n+2 < n+3 \implies \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \implies -\frac{1}{n+2} < -\frac{1}{n+3} \implies 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} \quad \forall n \quad (6.2.4)$$

c) Gibt es $c_a, C_a, c_b, C_b \in \mathbb{R}$: $c_a \leq a_n \leq C_a$

$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $c_a = 0$.

Außerdem $a_n = 2 - \frac{3}{n+2}$ auch $a_n \leq 2 \quad \forall n$

$\implies C_a = 2$

Es gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + (-1)^n \cdot n + 1}{n^2} \\ &\geq \frac{n^2 - n + 1}{n^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

$\implies c_b = 0$

Außerdem $\frac{1}{n} \leq 1, \frac{1}{n^2} \leq 1$.

Also

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3$$

$$\implies C_b = 3$$

d) Konvergenz?

a_n : monotone Folgen und beschränkt \xRightarrow{VL} konvergent.

b_n : $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ sind Nullfolgen und wegen ...

6.3 Aufgabe 3

6.4 Aufgabe 4