Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Informationen

Dies ist eine Mitschrift des Übungsbetriebs der Vorlesung Analysis I für Informatiker und Statistiker im Wintersemester 2015/16 bei Prof. Dr. Peter Pickl. Ohne Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.

Die Mitschrift wird auf http://andreasellw.github.io/ana-lsg verwaltet und aktualisiert. Dort sind auch die .tex-Files zu finden. Bei Fehlern bitte einen New issue auf GitHub einreichen. Momentan (9. Dezember 2015) ist die Mitschrift noch nicht vollständig.

1 Blatt 01

1.1 Aufgabe 1

a)

$$\prod_{i=1}^{2}(\sum_{j=1}^{3}(ij)) = (\sum_{j=1}^{3}(1j)) \cdot (\sum_{j=1}^{3}(2j)) \tag{1.1.1}$$
$$= ((1\cdot 1)+(1\cdot 2)+(1\cdot 3)) \cdot ((2\cdot 1)+(2\cdot 2)+(3\cdot 2)) \tag{1.1.2}$$
$$= (1+2+3)\cdot(2+4+6) \tag{1.1.3}$$
$$= 6\cdot 12 \tag{1.1.4}$$
$$= 72 \tag{1.1.5}$$

b) Die Umbennung der Variablen i, j aus a) zu k,m ändert nichts am Rechenweg und somit auch nicht das Ergebnis. Das Ergebnis ist wieder 72.

c)

$$\sum_{m=1}^{3}(\prod_{k=1}^{2}(km)) = (\prod_{k=1}^{2}(k1)) + (\prod_{k=1}^{2}(k2)) + (\prod_{k=1}^{2}(k3)) \tag{1.1.6}$$
$$= (1\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)+(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)+(1\cdot 3)\cdot(2\cdot 3) \tag{1.1.7}$$
$$= (2+8+18) \tag{1.1.8}$$
$$= 28 \tag{1.1.9}$$

d)

$$\prod_{k=1}^{2}(k\sum_{m=1}^{3}(m)) = (1\sum_{m=1}^{3}(m))\cdot(2\sum_{m=1}^{3}(m)) \tag{1.1.10}$$
$$= (1\cdot(1+2+3))\cdot(2\cdot(1+2+3)) \tag{1.1.11}$$
$$= (1\cdot 6)\cdot(2\cdot 6) \tag{1.1.12}$$
$$= 72 \tag{1.1.13}$$

e)

$$\sum_{m=1}^{3}(m\prod_{k=1}^{2}(k)) = (1\prod_{k=1}^{2}(k)) + (2\prod_{k=1}^{2}(k)) + (3\prod_{k=1}^{2}(k)) \tag{1.1.14}$$
$$= (1\cdot(1\cdot 2))+(2\cdot(1\cdot 2))+(3\cdot(1\cdot 2)) \tag{1.1.15}$$
$$= 2+4+6 \tag{1.1.16}$$
$$= 12 \tag{1.1.17}$$

1.2 Aufgabe 2

a) *Bemerkung:* Bernoulli
Induktionsanfang: $n = 1$

$$(1+x)^1 = (1+x) \geq 1 + 1x \tag{1.2.1}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2.2}$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu Zeigen ist

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1 + (n+1)x \tag{1.2.3}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{(n+1)} &= (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} && (1.2.4)\\
&\overset{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) && (1.2.5)\\
&= 1 + x + nx + nx^2 && (1.2.6)\\
&= 1 + (n+1)x + \underbrace{(nx^2)}_{\geq 0} && (1.2.7)\\
&\geq 1 + (n+1)x \quad \square && (1.2.8)
\end{aligned}$$

b) *Bemerkung:* Dies ist eine Erweiterung der gaußschem Summenformel.
Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 2)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \tag{1.2.9}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6} \tag{1.2.10}$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu Zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \tag{1.2.11}$$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \tag{1.2.12}$$

$$\overset{IV}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.2.13}$$

$$= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.2.14}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \square \tag{1.2.15}$$

1.3 Aufgabe 3

Bemerkung: Einfach immer: Laut Vorlesung sieht man leicht, dass ... gilt.

i) $1 \cdot n = n \cdot 1$

ii) $n \cdot m = m \cdot n$

Laut Vorlesung gilt:

a) $1 \cdot n = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $m \cdot n' = m \cdot n + m \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$

c) $m' \cdot n = m \cdot n + n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Zeige i)

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n \overset{a)}{=} n \tag{1.3.1}$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 \cdot 1 = 1 \tag{1.3.2}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n \tag{1.3.3}$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu Zeigen ist

$$(n+1) \cdot 1 = 1 \cdot (n+1) = n+1 \tag{1.3.4}$$

Es gilt:

$$(n+1)\cdot 1 = n'\cdot 1 \tag{1.3.5}$$
$$\overset{c)}{=} n\cdot 1+1 \tag{1.3.6}$$
$$\overset{IV}{=} n+1 \quad \square \tag{1.3.7}$$

Zeige nun ii)

$$n\cdot m = m\cdot n \qquad \forall m,n\in\mathbb{N} \tag{1.3.8}$$

Induktion über m.
Induktionsanfang: $m=1$

$$n\cdot 1 \overset{i)}{=} 1\cdot n \tag{1.3.9}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n\cdot m = m\cdot n \tag{1.3.10}$$

Induktionsschritt: $m\to m+1$
Zu Zeigen ist

$$n\cdot(m+1) = (m+1)\cdot n \tag{1.3.11}$$

Es gilt:

$$(m+1)\cdot n = m'\cdot n \tag{1.3.12}$$
$$\overset{c)}{=} m\cdot n+n \tag{1.3.13}$$
$$\overset{IV}{=} n\cdot m+n \tag{1.3.14}$$
$$\overset{b)}{=} n\cdot m' \tag{1.3.15}$$
$$= n\cdot(m+1) \quad \square \tag{1.3.16}$$

1.4 Aufgabe 4

Finde Tripel (M,e,S).
Bemerkung: $M\longleftarrow$ Mengensystem, $e\longleftarrow$ neutrales Element, $S\longleftarrow$ Abbildungsvorschrift.

a) i), ii) und iv) werden erfüllt. Das heißt entweder $k\in M$ existieren, sodass $S(k)=e$ gilt [iii) verletzt, da 1 kein Nachfolger einer $\mathbb{N}$-Zahl ist], oder $\exists X$, $e\in X$ und $k\in X\cap M$ gilt $S(k)\in X$ <u>aber</u> $M\not\subset X$ [v) verletzt].

Beispiel:

$$M = \{e, \star\} \tag{1.4.1}$$
$$S(e) = \star \tag{1.4.2}$$
$$S(\star) = e \tag{1.4.3}$$

i) $e \in M$ per Defintion von M

ii) $S(k)$ existiert für alle $k \in M$ und ist eindeutig.

iv) $S(k) = S(\tilde{k}) \Longrightarrow k = \tilde{k} \qquad \forall k, \tilde{k} \in M$

iii) ist wegen $S(\star) = e$ verletzt.

b) (M, e, S) soll i), ii), iii) und v) erfüllen.
Beispiel:

$$M = \{e, \star\} \tag{1.4.4}$$
$$S(e) = \star \tag{1.4.5}$$
$$S(\star) = \star \tag{1.4.6}$$

iv) wegen $S(e) = S(\star) = \star$ jedoch $e \neq \star$ verletzt.

c) (M, e, S) verletzt iv) und v), erfüllt aber i), ii), iii).
Beispiel:

$$M = \{e, \star <>\} \tag{1.4.7}$$
$$S(e) = \star \tag{1.4.8}$$
$$S(\star) = \star \tag{1.4.9}$$
$$S(<>) = \star \tag{1.4.10}$$

i), ii), iii) offensichtlich erfüllt. iv) nach b) verletzt.
Sei dazu $X = \{e, \star\}$. Dann ist $e \in X$, $S(e) = \star \quad \in X$
Aber, weil $<> \notin X$ ist $M \not\subset X$. Also v) verletzt.

2 Blatt 02

2.1 Aufgabe 1

a) *Bemerkung:* $\Leftrightarrow \longleftarrow$ genau, wenn dann
$a \sim_a b \Leftrightarrow r = \widetilde{r}$, wobei $a = m \cdot 7 + r$ und $b = \widetilde{m} \cdot 7 + \widetilde{r}$ $(m, \widetilde{m}, r, \widetilde{r} \in \mathbb{N}_0)$

- **Reflexivität:** ist offensichtlich.
- **Symmetrie:** ist offensichtlich.
- **Transitivität:** Sei dazu $a \sim b \wedge b \sim c$. Dann gilt

$$a = m \cdot 7 + r \text{ und } b = k \cdot 7 + \widetilde{r} \tag{2.1.1}$$
$$b = n \cdot 7 + r \text{ und } c = l \cdot 7 + \widetilde{r} \tag{2.1.2}$$

Zu Zeigen ist $r = \widetilde{r}$.
Wäre $r \neq \widetilde{r}$, dann wäre wegen $k = n$ auch $b \neq b$. Fehler!
Also $r = \widetilde{r}$.

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation $\sim_a$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) $a \sim_b b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = k \cdot 7$ $(a, b, k \in \mathbb{Z})$

- **Reflexivität:** $a^2 - a^2 = 0 \cdot 7$ ✓
- **Symmetrie:** Sei dazu $a \sim b$. Dann $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = -k \cdot 7 \tag{2.1.3}$$

Da $-k \in \mathbb{Z}$ folgt $b \sim a$.

- **Transitivität:** Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann $\exists k, l \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \ \wedge \ b^2 - c^2 = l \cdot 7 \ ✓ \tag{2.1.4}$$
$$\Rightarrow a^2 - c^2 = k \cdot 7 + b^2 + l \cdot 7 - b^2 = \underbrace{(k+l)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 7 \ ✓ \tag{2.1.5}$$

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation $\sim_b$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

2.2 Aufgabe 2

2.3 Aufgabe 3

2.4 Aufgabe 4

3 Blatt 03

3.1 Aufgabe 1

3.2 Aufgabe 2

3.3 Aufgabe 3

3.4 Aufgabe 4

4 Blatt 04

4.1 Aufgabe 1

Bemerkung: Archimedisches Axiom, Bernoulli Ungleichung

$$0 < q < 1 \tag{4.1.1}$$

zu Zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad q^n < \varepsilon \quad \forall n > N \tag{4.1.2}$$

Archimedisches Axiom:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 + nx, \quad x > 0 \tag{4.1.3}$$

Bernoulli Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x \geq -1, \quad \forall n \geq 0 \tag{4.1.4}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \overset{Ar.}{<} 1 + nx \overset{Be.}{\leq} (1+x)^n \tag{4.1.5}$$

Damit

$$\frac{1}{\varepsilon} < (1+x)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^n} < \varepsilon \tag{4.1.6}$$

Setze $x := \frac{1}{q} - 1$, dann folgt

$$\frac{1}{(\frac{1}{q})^n} < \varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon \quad \square \tag{4.1.7}$$

4.2 Aufgabe 2

Bemerkung: Cantor Diagonalargument
zu a)
Sei M_j $\forall j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge. Dann ist zu zeigen: $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j$ ist abzählbar. Da M_j abzählbar, existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ bijektive Abbildung $\rho_j : \mathbb{N} \to M_j$.
Nummeriere Elemente von M_j wie folgt:

$$m_1^j \quad : \quad \rho_j(1) ... m_n^j := \rho_j(n) \tag{4.2.1}$$

4.3 Aufgabe 3

4.4 Aufgabe 4

5 Blatt 05

5.1 Aufgabe 1

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
Zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \tag{5.1.1}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, also insbesondere beschränkt. Das heißt $\exists K > 0$ mit $|a_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$. Durch eventuelle Vergrößerung von K gilt auch $|b_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2 Aufgabe 2

5.3 Aufgabe 3

5.4 Aufgabe 4

6 Blatt 06

6.1 Aufgabe 1

6.2 Aufgabe 2

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}, \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.2.1}$$

a)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{4}, \quad a_3 = \frac{7}{5}, \quad a_4 = \frac{9}{6}, \quad a_5 = \frac{11}{7}$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{7}{4}, \quad b_3 = \frac{7}{9}, \quad b_4 = \frac{21}{16}, \quad b_5 = \frac{21}{25}$$

b) Da $b_1 < b_2$ aber $b_2 > b_3$ kann b_n nicht monoton sein.
a_n monoton steigend?

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \tag{6.2.2}$$

Es gilt:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} \Longrightarrow a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+3} \tag{6.2.3}$$

$$n+2 < n+3 \Longrightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \Longrightarrow -\frac{1}{n+2} < -\frac{1}{n+3} \Longrightarrow 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} \qquad \forall n \tag{6.2.4}$$

c) Gibt es $c_a, C_a, c_b, C_b \in \mathbb{R}: \quad c_a \leq a_n \leq C_a$
$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $c_a = 0$.
Außerdem $a_n = 2 - \frac{3}{n+2}$ auch $a_n \leq 2 \quad \forall n$
$\Longrightarrow C_a = 2$
Es gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + (-1)^n \cdot n + 1}{n^2} \\ &\geq \frac{n^2 - n + 1}{n^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

$\Longrightarrow c_b = 0$
Außerdem $\frac{1}{n} \leq 1$, $\frac{1}{n^2} \leq 1$.
Also

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3$$

$\Longrightarrow C_b = 3$

d) Konvergenz?
a_n: monotone Folgen und beschränkt $\overset{VL}{\Longrightarrow}$ konvergent.
b_n: $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ sind Nullfolgen und wegen ...

6.3 Aufgabe 3

6.4 Aufgabe 4