

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Informationen (letztes Update: 25.11.2015)	2
1 Blatt 01	3
1.1 Aufgabe 1	3
1.2 Aufgabe 2	3
1.3 Aufgabe 3	4
1.4 Aufgabe 4	6
2 Blatt 02	7
2.1 Aufgabe 1	7
2.2 Aufgabe 2	7
2.3 Aufgabe 3	7
2.4 Aufgabe 4	7
3 Blatt 03	8
3.1 Aufgabe 1	8
3.2 Aufgabe 2	8
3.3 Aufgabe 3	8
3.4 Aufgabe 4	8
4 Blatt 04	9
4.1 Aufgabe 1	9
4.2 Aufgabe 2	9
4.3 Aufgabe 3	9
4.4 Aufgabe 4	9
5 Blatt 05	10
5.1 Aufgabe 1	10
5.2 Aufgabe 2	10
5.3 Aufgabe 3	10
5.4 Aufgabe 4	10

Allgemeine Informationen

Dies ist eine Mitschrift des Übungsbetriebs der Vorlesung Analysis I für Informatiker und Statistiker im Wintersemester 2015/16 bei Prof. Dr. Peter Pickl. Ohne Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.

1 Blatt 01

1.1 Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (ij) \right) &= \left(\sum_{j=1}^3 (1j) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 (2j) \right) \\ &= ((1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 3)) \cdot ((2 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (3 \cdot 2)) \\ &= (1 + 2 + 3) \cdot (2 + 4 + 6) \\ &= 6 \cdot 12 \\ &= 72\end{aligned}$$

b) Die Umbenennung der Variablen i, j aus a) zu k, m ändert nichts am Rechenweg und somit auch nicht das Ergebnis. Das Ergebnis ist wieder 72.

c)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^3 \left(\prod_{k=1}^2 (km) \right) &= \left(\prod_{k=1}^2 (k1) \right) + \left(\prod_{k=1}^2 (k2) \right) + \left(\prod_{k=1}^2 (k3) \right) \\ &= (1 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) + (1 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \\ &= (2 + 8 + 18) \\ &= 28\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^2 \left(k \sum_{m=1}^3 (m) \right) &= \left(1 \sum_{m=1}^3 (m) \right) \cdot \left(2 \sum_{m=1}^3 (m) \right) \\ &= (1 \cdot (1 + 2 + 3)) \cdot (2 \cdot (1 + 2 + 3)) \\ &= (1 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 6) \\ &= 72\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^3 \left(m \prod_{k=1}^2 (k) \right) &= \left(1 \prod_{k=1}^2 (k) \right) + \left(2 \prod_{k=1}^2 (k) \right) + \left(3 \prod_{k=1}^2 (k) \right) \\ &= (1 \cdot (1 \cdot 2)) + (2 \cdot (1 \cdot 2)) + (3 \cdot (1 \cdot 2)) \\ &= 2 + 4 + 6 \\ &= 12\end{aligned}$$

1.2 Aufgabe 2

a) *Bemerkung:* Bernoulli
Induktionsanfang: $n = 1$

$$(1+x)^1 = (1+x) \geq 1+1x$$

Induktionsvoraussetzung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Zu Zeigen ist

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)x$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{(n+1)} &= (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x + \underbrace{(nx^2)}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)x \quad \square\end{aligned}$$

b) *Bemerkung:* Dies ist eine Erweiterung der gaußschen Summenformel.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 2)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Zu Zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \\ &\stackrel{IV}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \square\end{aligned}$$

1.3 Aufgabe 3

Bemerkung: Einfach immer: Laut Vorlesung sieht man leicht, dass ... gilt.

i) $1 \cdot n = n \cdot 1$

ii) $n \cdot m = m \cdot n$

Laut Vorlesung gilt:

a) $1 \cdot n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $m \cdot n' = m \cdot n + m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

c) $m' \cdot n = m \cdot n + n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Zeige i)

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n \underset{a)}{=} n$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Zu Zeigen ist

$$(n + 1) \cdot 1 = 1 \cdot (n + 1) = n + 1$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (n + 1) \cdot 1 &= n' \cdot 1 \\ &\underset{c)}{=} n \cdot 1 + 1 \\ &\underset{IV}{=} n + 1 \quad \square \end{aligned}$$

Zeige nun ii)

$$n \cdot m = m \cdot n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Induktion über m .

Induktionsanfang: $m = 1$

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n \underset{i)}{=}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n \cdot m = m \cdot n$$

Induktionsschritt: $m \rightarrow m + 1$

Zu Zeigen ist

$$n \cdot (m + 1) = (m + 1) \cdot n$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 (m+1) \cdot n &= m' \cdot n \\
 &= m \cdot n + n \\
 &\stackrel{c)}{=} n \cdot m + n \\
 &\stackrel{IV}{=} n \cdot m' \\
 &\stackrel{b)}{=} n \cdot (m+1) \quad \square
 \end{aligned}$$

1.4 Aufgabe 4

Finde Tripel (M, e, S) .

Bemerkung: $M \leftarrow$ Mengensystem, $e \leftarrow$ neutrales Element, $S \leftarrow$ Abbildungsvorschrift.

- a) i), ii) und iv) werden erfüllt. Das heißt entweder $k \in M$ existieren, sodass $S(k) = e$ gilt [iii) verletzt, da 1 kein Nachfolger einer \mathbb{N} -Zahl ist], oder $\exists X, e \in X$ und $k \in X \cap M$ gilt $S(k) \in X$ aber $M \not\subset X$ [v) verletzt].
Beispiel:

$$\begin{aligned}
 M &= \{e, \star\} \\
 S(e) &= \star \\
 S(\star) &= e
 \end{aligned}$$

- i) $e \in M$ per Definition von M
 ii) $S(k)$ existiert für alle $k \in M$ und ist eindeutig.
 iv) $S(k) = S(\tilde{k}) \implies k = \tilde{k} \quad \forall k, \tilde{k} \in M$
 iii) ist wegen $S(\star) = e$ verletzt.
 b) (M, e, S) soll i), ii), iii) und v) erfüllen.
 Beispiel:

$$\begin{aligned}
 M &= \{e, \star\} \\
 S(e) &= \star \\
 S(\star) &= \star
 \end{aligned}$$

- iv) wegen $S(e) = S(\star) = \star$ jedoch $e \neq \star$ verletzt.
 c) (M, e, S) verletzt iv) und v), erfüllt aber i), ii), iii).
 Beispiel:

$$\begin{aligned}
 M &= \{e, \star, <>\} \\
 S(e) &= \star \\
 S(\star) &= \star \\
 S(<>) &= \star
 \end{aligned}$$

- i), ii), iii) offensichtlich erfüllt. iv) nach b) verletzt.
 Sei dazu $X = \{e, \star\}$. Dann ist $e \in X, S(e) = \star \in X$
 Aber, weil $<> \notin X$ ist $M \not\subset X$. Also v) verletzt.

2 Blatt 02

2.1 Aufgabe 1

a) *Bemerkung:* $\Leftrightarrow \longleftarrow$ genau, wenn dann

$$a \sim_a b \Leftrightarrow r = \tilde{r}, \text{ wobei } a = m \cdot 7 + r \text{ und } b = \tilde{m} \cdot 7 + \tilde{r} \ (m, \tilde{m}, r, \tilde{r} \in \mathbb{N}_0)$$

- **Reflexivität:** ist offensichtlich.
- **Symmetrie:** ist offensichtlich.
- **Transitivität:** Sei dazu $a \sim b \wedge b \sim c$. Dann gilt

$$a = m \cdot 7 + r \text{ und } b = k \cdot 7 + \tilde{r}$$

$$b = n \cdot 7 + r \text{ und } c = l \cdot 7 + \tilde{r}$$

Zu Zeigen ist $r = \tilde{r}$.

Wäre $r \neq \tilde{r}$, dann wäre wegen $k = n$ auch $b \neq b$. Fehler!

Also $r = \tilde{r}$.

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation \sim_a ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) $a \sim_b b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = k \cdot 7 \ (a, b, k \in \mathbb{Z})$

- **Reflexivität:** $a^2 - a^2 = 0 \cdot 7 \checkmark$
- **Symmetrie:** Sei dazu $a \sim b$. Dann $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 - b^2 = k \cdot 7 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = -k \cdot 7$$

Da $-k \in \mathbb{Z}$ folgt $b \sim a$.

- **Transitivität:** Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann $\exists k, l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= k \cdot 7 \wedge b^2 - c^2 = l \cdot 7 \checkmark \\ \Rightarrow a^2 - c^2 &= k \cdot 7 + b^2 + l \cdot 7 - b^2 = \underbrace{(k+l)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 7 \checkmark \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, denn die Relation \sim_b ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

2.2 Aufgabe 2

2.3 Aufgabe 3

2.4 Aufgabe 4

3 Blatt 03

3.1 Aufgabe 1

3.2 Aufgabe 2

3.3 Aufgabe 3

3.4 Aufgabe 4

4 Blatt 04

4.1 Aufgabe 1

Bemerkung: Archimedisches Axiom, Bernoulli Ungleichung

$$0 < q < 1$$

zu Zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad q^n < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Archimedisches Axiom:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 + nx, \quad x > 0$$

Bernoulli Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1, \quad \forall n \geq 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \stackrel{Ar.}{<} 1+nx \stackrel{Be.}{\leq} (1+x)^n$$

Damit

$$\frac{1}{\varepsilon} < (1+x)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^n} < \varepsilon$$

Setze $x := \frac{1}{q} - 1$, dann folgt

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} < \varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon \quad \square$$

4.2 Aufgabe 2

Bemerkung: Cantor Diagonalargument

zu a)

Sei $M_j \forall j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge. Dann ist zu zeigen: $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$ ist abzählbar. Da M_j abzählbar, existiert für

jedes $j \in \mathbb{N}$ bijektive Abbildung $\rho_j : \mathbb{N} \rightarrow M_j$.

Nummeriere Elemente von M_j wie folgt:

$$m_1^j \quad : \quad \rho_j(1) \dots m_n^j := \rho_j(n)$$

4.3 Aufgabe 3

4.4 Aufgabe 4

5 Blatt 05

5.1 Aufgabe 1

5.2 Aufgabe 2

5.3 Aufgabe 3

5.4 Aufgabe 4