1 Blatt 06

1.1 Aufgabe 1

1.2 Aufgabe 2

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}, \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2.1}$$

a)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{4}, \quad a_3 = \frac{7}{5}, \quad a_4 = \frac{9}{6}, \quad a_5 = \frac{11}{7}$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{7}{4}, \quad b_3 = \frac{7}{9}, \quad b_4 = \frac{21}{16}, \quad b_5 = \frac{21}{25}$$

b) Da $b_1 < b_2$ aber $b_2 > b_3$ kann b_n nicht monoton sein.
a_n monoton steigend?

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \tag{1.2.2}$$

Es gilt:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} \Longrightarrow a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+3} \tag{1.2.3}$$

$$n+2 < n+3 \Longrightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \Longrightarrow -\frac{1}{n+2} < -\frac{1}{n+3} \Longrightarrow 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} \qquad \forall n \tag{1.2.4}$$

c) Gibt es $c_a, C_a, c_b, C_b \in \mathbb{R}: \quad c_a \leq a_n \leq C_a$
$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $c_a = 0$.
Außerdem $a_n = 2 - \frac{3}{n+2}$ auch $a_n \leq 2 \quad \forall n$
$\Longrightarrow C_a = 2$
Es gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + (-1)^n \cdot n + 1}{n^2} \\ &\geq \frac{n^2 - n + 1}{n^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

$\Longrightarrow c_b = 0$
Außerdem $\frac{1}{n} \leq 1$, $\frac{1}{n^2} \leq 1$.
Also

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3$$

$\Longrightarrow C_b = 3$

d) Konvergenz?
a_n: monotone Folgen und beschränkt $\overset{VL}{\Longrightarrow}$ konvergent.
b_n: $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ sind Nullfolgen und wegen ...

1.3 Aufgabe 3

1.4 Aufgabe 4