

Analysis 1 - Definitionen

February 26, 2018

1 Logik und Mengenlehre

1.1 Logische Negation

$\neg A$

1.2 Logische Konjunktion

$A \wedge B$ (and)

1.3 Logische Disjunktion

$A \vee B$ (or)

1.4 Logische Implikation

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

1.5 Logische Äquivalenz

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

1.6 Bestimmung von Wahrheitswerten von Aussageformen

1.7 Gleichheit von Mengen

$M = N$ wenn alle Elemente von N in M vorkommen. \Rightarrow Wir können nur Aussagen über Mengen treffen wenn wir alle ihre Elemente kennen. $\forall x \in M : x \in N \wedge \forall y \in N : y \in M$

1.8 Teilmenge (Inklusion)

$M \subseteq N$, wenn alle Elemente aus M in N vorkommen. $\forall x \in M : x \in N$

$M \subset N$, wenn Elemente in N vorhanden sind, die in M nicht vorkommen spricht man von einer echten Teilmenge. $\exists x \in N : x \notin M$

1.9 Obermenge

Ist $M \subseteq N$, dann ist N die Obermenge von M .

Ist M Obermenge von N und umgekehrt, so sind die Mengen äquivalent, $M = N$

1.10 Durchschnitt

$M, N : x \in M \wedge x \in N$ Der Durchschnitt zweier Mengen $M \cap N$ ist die Menge an Elementen, die in beiden Mengen M, N vorkommen.

1.11 Vereinigung

$M, N : x \in M \vee x \in N$ Die Vereinigung zweier Mengen $M \cup N$ ist die Menge an Elementen, die in entweder M oder N vorkommen.

1.12 Differenz von Mengen

Die Differenz zweier Mengen $M \setminus N$ ist die Menge an Elementen, die in M vorkommen, aber nicht in N . $M, N : x \in M \wedge x \notin N$

1.13 Komplement

Ist Menge N eine Teilmenge der Menge M ($M \subseteq N$, M ist Universum von N), dann wird $M \setminus N$ auch das Komplement N zu M genannt. $N^c := M \setminus N$

1.14 Disjunktheit und disjunkte Vereinigung

Ist der Durchschnitt zweier Mengen $M \cap N$ die leere Menge, so sind diese Mengen disjunkt. Die Vereinigung zweier disjunkter Mengen lautet dann eine disjunkte Vereinigung und wird $M \dot{\cup} N$ geschrieben.

1.15 Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen: $M = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

2 Funktionen und Relationen

2.1 Definition der Funktion (insbesondere: Definitionsbereich, Wertebereich, Zuordnungsvorschrift, Graph)

Eine Funktion oder Abbildung f ist eine Beziehung zwischen zweier Mengen A, B , welche jedes Element $x \in A$ einem Element $y \in B$ zuordnet. In diesem Fall schreibt man auch $f(x)$ für das Element y . Die Menge A wird das der Definitionsbereich von f genannt, auch geschrieben $\mathcal{D}(f)$, und die Menge B der Wertebereich, geschrieben $\mathcal{R}(f)$.

Eine Funktion wird in folgender Weise notiert: $f : A \longrightarrow B, x \mapsto f(x)$ wobei $x \mapsto f(x)$ die Zuordnungsvorschrift genannt wird.

Die Menge der geordneten Paare $\{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$ wird der Graph von f , $\text{graph}(f)$ genannt.

2.2 Definition von Bild und Urbild einer Menge zu einer gegebenen Funktion.

Seien A, B Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Funktion.

- Ist T eine Teilmenge von A , dann ist $f(T) := \{f(x) \in B : x \in T\}$ das Bild von T unter f .
- Ist U eine Teilmenge von B , dann ist $f^{-1}(U) := \{x \in A : f(x) \in U\}$ das Urbild von U unter f .

2.3 Definition von Injektivität

Eine Funktion f ist injektiv, wenn jedes $y \in B$ (maximal) genau ein Urbild besitzt, also wenn das Urbild von $\{y\}$ höchstens ein Element besitzt:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow \forall y \in B (f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \exists! f(x) = y) \\ f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \end{aligned}$$

2.4 Definition von Surjektivität

Eine Funktion f ist surjektiv, wenn jedes Element des Wertebereichs (mindestens) ein Urbild besitzt:

$$\begin{aligned} f \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \forall y \in B \exists x \in A \quad y = f(x) \\ f \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \forall y \in B f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

2.5 Definition von Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

2.6 Definition von Monotonie (wachsend, streng wachsend, fallend, streng fallend)

Sind A, B nichtleere Mengen mit einer Partialordnung, hier beide als \leq bezeichnet (auch wenn sie unterschiedlich sein können). Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist

- (strikt) isoton (steigend), wenn

$$\forall x, y \in A \quad (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) < f(y)))$$

- (strikt) antiton (fallend), wenn

$$\forall x, y \in A \quad (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) > f(y)))$$

Ist eine Funktion (strikt) isoton oder (strikt) antiton, dann ist sie (streng) monoton.

2.7 Definition der Komposition von Abbildungen.

Eine Komposition oder eine Verknüpfung zweier Funktionen f, g , wobei $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ und $f(A) \subseteq C$ ist definiert als die Funktion

$$g \circ f : A \rightarrow D, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

und wird "g verknüpft mit f", "g komponiert mit f" oder "g nach f" gelesen. Verknüpfungen sind nicht kommutativ.

2.8 Definition der Invertierbarkeit und der inversen Abbildung.

Gegeben eine nichtleere Menge A ist die Funktion $\text{Id}_A : A \rightarrow A$, wobei $\text{Id}_A(x) := x$, die identische Abbildung, oder die Identität. Eine Funktion $g : B \rightarrow A$ wird das rechts-inverse (bzw. links-inverse) einer Funktion $f : A \rightarrow B$ genannt, wenn $f \circ g = \text{Id}_B$ (bzw. $g \circ f = \text{Id}_A$). Ist g ein Inverses von f , so schreibt man auch f^{-1} . Eine Funktion f wird (rechts- bzw. links) invertierbar genannt, wenn ein solches (rechts- bzw. links) Inverses existiert.

2.9 Satz: Funktion ist invertierbar genau dann, wenn sie bijektiv ist.

Sind A, B nichtleere Mengen, dann ist die Funktion

- $f : A \rightarrow B$ rechts-invertierbar, wenn die Funktion injektiv ist.
- $f : A \rightarrow B$ links-invertierbar, wenn die Funktion surjektiv ist.
- $f : A \rightarrow B$ invertierbar, wenn die Funktion bijektiv ist.

2.10 Satz: Strenge Monotonie impliziert Injektivität.

Seien A, B nichtleere Mengen mit Partialordnungen, hier beide \leq , und ist die Ordnung auf A eine Totalordnung, so gilt: Ist die Funktion $f : A \rightarrow B$ strikt isoton oder strikt antiton, so ist f injektiv.

2.11 Definitionen

Sei \leq eine Partialordnung auf $A \neq \emptyset, \emptyset \neq B \subseteq A$.

2.11.1 Definition von oberer (unterer) Schranke

$x \in A$ lautet untere (bzw. obere) Schranke von B , wenn für alle $b \in B : x \leq b$ (bzw. $b \leq x$). B lautet nach unten (bzw. nach oben) beschränkt, wenn eine untere (bzw. obere) Schranke existiert.

$y \in B$ lautet das Minimum (bzw. das Maximum) von B , wenn y eine untere bzw. eine obere Schranke von B ist.

2.11.2 Definition von Supremum

Das Supremum der Menge B ist das Minimum der Menge an oberer Schranken zur Menge B , geschrieben $\sup B$.

2.11.3 Definition von Infimum

Das Infimum der Menge B ist das Maximum der Menge an unterer Schranken zur Menge B , geschrieben $\inf B$.

2.11.4 Definition von Beschränktheit von Mengen

Eine Menge ist *beschränkt*, wenn sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist.

2.12 Definition der Familie

Gegeben einer Indexmenge I und einer Menge A , wird eine Funktion $f : I \rightarrow A$ eine Familie und wird als $(a_i)_{i \in I}$, wobei $a_i := f(i)$, notiert.

2.13 Definition der Folge

Eine Folge in Menge A ist eine Familie an Elementen aus A , bei der die Indexmenge die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} ist. Notiert wird diese in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_1, a_2, \dots) . Eine Familie wird auch eine Folge genannt, wenn eine bijektive Funktion zwischen der Indexmenge I und einer Teilmenge von \mathbb{N} existiert.

3 Induktion, Rekursion, Kardinalität

3.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage **TBD** welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung **TBD (1)**, erhält man **TBD** was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschliesst.

- **IA** $n = 1$
- **IV**
- **IS** $n \rightarrow n + 1$

3.2 Rekursive Definition

z.B. Fibonacci-Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

3.3 Summationssymbol

$$\sum_{i=1}^1 a_i := a_i$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i := a_i + \sum_{i=1}^n \text{ für } n \geq 1$$

3.4 Produktsymbol

$$\prod_{i=1}^1 a_i := a_i$$
$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i := a_i * \prod_{i=1}^n \text{ für } n \geq 1$$

3.5 Formel für (endliche) geometrische Summen

3.6 Definition von endlich, unendlich, abzählbar.

Die Menge A lautet

- endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $\#A = n$ ($\#A$:= Kardinalität, Anzahl Elemente in A)
- unendlich $\Leftrightarrow A$ ist nicht endlich. ($\#A = \infty$)
- abzählbar $\Leftrightarrow A$ ist endlich oder $\#A = \#\mathbb{N}$

Theorem 4.7. *The following statements and rules are valid in the set of real numbers \mathbb{R} (and, more generally, in every totally ordered field):*

- (a) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$.
- (b) $x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ holds as well as $x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.
- (c) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 := x \cdot x > 0$. In particular $1 > 0$.
- (d) $x > 0 \Rightarrow 1/x > 0$, whereas $x < 0 \Rightarrow 1/x < 0$.
- (e) If $0 < x < y$, then $x/y < 1$, $y/x > 1$, and $1/x > 1/y$.
- (f) $x < y \wedge u < v \Rightarrow x + u < y + v$.
- (g) $0 < x < y \wedge 0 < u < v \Rightarrow xu < yv$.
- (h) $x < y \wedge 0 < \lambda < 1 \Rightarrow x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$. In particular $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Theorem 4.7

4 Reelle und komplexe Zahlen

Es wird erwartet, dass Sie die schon aus der Schule bekannten in den natürlichen, rationalen und reellen Zahlen gültigen Rechengesetze beherrschen: Dazu gehören die in Theorem 4.6 und Theorem 4.7 im Skript aufgelisteten Gesetze, insbesondere die Bruchrechnung, sowie die binomischen Formeln und die Potenzgesetze. Definition von Intervallen (alle Typen aus (4.11) sollten Sie kennen).

4.1 Definition der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen

4.2 Definition der komplexen Addition und Multiplikation.

4.3 Definition von Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen

Komplexe Zahl $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = x + iy$

4.4 Definition von und Rechenregeln für komplexe/r Konjugation.

4.5 Definition der Betragsfunktion reeller und komplexer Zahlen.

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Rechenregeln der Betragsfunktion, speziell Dreiecksungleichung und umgekehrte Dreiecksungleichung. Veranschaulichung der komplexen Zahlen und ihrer Arithmetik (speziell von Konjugation, Addition, Multiplikation und Betrag) in der komplexen Ebene. Regeln für endliche Summen und Produkte.

5 Funktionsarithmetik und Polynome

Die punktweise definierte Arithmetik reell- und komplexwertiger Funktionen. Monome und Polynome. Grad von Polynomen.

6 Konvergenz reeller und komplexer Folgen

Definition und Veranschaulichung der Epsilon-Umgebung sowie der Umgebung einer reellen Zahl sowie einer komplexen Zahl. Definition der Beschränktheit reeller und komplexer Folgen. Definition von Konvergenz und Grenzwert/Limes reeller und komplexer Folgen. Definition von Divergenz reeller und komplexer Folgen. Satz: Konvergente Folgen sind beschränkt. Nullfolgen sind solche, die gegen Null konvergieren. Satz: Eine durch eine Nullfolge beschränkte Folge ist selbst eine Nullfolge. Satz: Das Produkt aus einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge. Die Grenzwertsätze aus Th. 7.13 wissen und zur Bestimmung von Grenzwerten anwenden können. Einschachtelungssatz. Definition der bestimmten Divergenz gegen plus oder minus Unendlich. Eine monoton steigende Folge konvergiert oder divergiert bestimmt gegen plus Unendlich; eine monoton fallende Folge konvergiert oder divergiert bestimmt gegen minus Unendlich. Definition von Teilfolge und Umordnung einer Folge. Satz: Jede Teilfolge und jede Umordnung einer konvergenten Folge ist konvergent mit dem selben Limes.

7 Stetigkeit plus Zubehör

Definition der Stetigkeit von Funktionen, die auf Teilmengen der komplexen (oder reellen) Zahlen definiert sind und in die reellen oder komplexen Zahlen abbilden. Folgenkriterium für Stetigkeit. Sie sollten einfache Stetigkeitsbeweise sowohl mit dem Epsilon-Delta-Kriterium als auch mit dem Folgenkriterium durchführen können. Satz: Sind zwei Funktionen stetig, so auch Vielfache, die Summe, das Produkt, der Quotient, falls der Nenner nicht Null ist, der Betrag der Funktion sowie der Realteil und der Imaginärteil der Funktion. Satz: Eine komplexwertige Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil beide stetig sind. Satz: Betragsfunktion, Polynome und rationale Funktionen sind stetig, sofern der Nenner nicht Null ist. Satz: Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig. Definition von beschränkten, abgeschlossenen und kompakten Teilmengen der komplexen Zahlen. Beschränkte Intervalle sind beschränkt, abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen. Offene und halboffene Intervalle sind nicht abgeschlossen. Nur Intervalle der Form $[a,b]$ sind kompakt. Epsilon-Umgebungen sind beschränkt, aber nicht abgeschlossen. Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte erhalten Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit. Endliche Mengen sind kompakt. Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen. Abgeschlossene Kreisscheiben und Kreise sind kompakt. Halbräume in den komplexen Zahlen sind abgeschlossen. Satz: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. Definition globaler und lokaler Extrema ((strenge) Minima und Maxima). Satz: Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen nehmen ihr (globales) Maximum und Minimum an. Nullstellensatz von Bolzano, Zwischenwertsatz, stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle ab. Definition der n -ten Wurzel einer nichtnegativen Zahl; die zugehörige Funktion ist stetig und streng monoton steigend. Nicht rationale Zahlen lauten irrational; die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar; die Menge der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar. Definition der Dichtheit einer Menge in den reellen Zahlen. Satz: Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen Zahlen; die irrationalen Zahlen sind ebenfalls dicht. Satz: Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer streng steigenden Folge rationaler Zahlen und einer streng fallenden Folge rationaler Zahlen. Definition von Potenzen mit nichtnegativer Basis und reellen Exponenten; es gelten die üblichen Potenzgesetze. Definition von allgemeinen Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen. Satz: Potenzfunktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig, sowie streng steigend für positiven und streng fallend für negativen Exponenten. Satz: Exponentialfunktionen sind stetig sowie streng steigend für Basis $a > 1$ und streng

fallend für Basis $0 < a < 1$. Definition des Logarithmus, speziell des natürlichen Logarithmus, Logarithmengesetze gemäß Th. 7.75.

8 Unendliche Reihen

Definition von unendlichen Reihen sowie von Summanden, Partialsummen und Resten von solchen Reihen. Definition von Konvergenz und Divergenz von Reihen. Geometrische Reihen mit Formel für den Grenzwert. Linearität, komplexe Konjugation und Monotonie bei der Reihenkonvergenz. Satz: Bei konvergenten Reihen konvergieren die Summanden gegen Null. Satz: Die Summe einer Reihe mit nichtnegativen Summanden ist das Supremum der Partialsummen, wenn diese beschränkt sind und andernfalls unendlich. Satz: Eine beliebige Reihe ist konvergent, wenn sich die Beträge ihrer Summanden nach oben durch die Summanden einer konvergenten Reihe abschätzen lassen; eine Reihe mit nichtnegativen Summanden ist divergent, wenn sich ihre Summanden nach unten durch die Summanden einer divergenten Reihe mit ebenfalls nichtnegativen Summanden abschätzen lassen. Definition der absoluten Konvergenz von Reihen. Satz: Absolut konvergente Reihen sind konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen. Wurzelkriterium und Quotientenkriterium jeweils für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz. Definition der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen bestehend aus reell- oder komplexwertigen Funktionen. Satz: Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt. Satz: Konvergieren stetige Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig. Definition von Funktionenreihen, speziell Definition von Potenzreihen. Definition der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen (man spricht von Reihenentwicklung bzw. Potenzreihenentwicklung der Grenzfunktion). Konvergiert eine Funktionenreihe stetiger Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion stetig. Definition des Konvergenzradius und Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius von Potenzreihen. Satz: Potenzreihen sind auf dem offenen r -Kreis um Null stetig, wenn r der Konvergenzradius ist. Definition der komplexen Exponentialfunktion als Potenzreihe. Satz: Die komplexe Exponentialfunktion ist stetig und stimmt auf den reellen Zahlen mit der früher definierten Exponentialfunktion überein. Definition des Limes einer reell- oder komplexwertigen Funktion. Definition von Potenzen mit positiver Basis und komplexen Exponenten, dazu Potenzgesetze und Stetigkeit der nun allgemeineren Potenz- und Exponentialfunktionen.

9 Trigonometrische Funktionen

Sie brauchen NICHT die Potenzreihendefinition von Sinus und Kosinus auswendig wissen, sondern nur jeweils den schon aus der Schule bekannten groben Verlauf des reellen Sinus und des reellen Kosinus (also im Wesentlichen die Grafen mit Lage der Nullstellen, Maxima, Minima und Monotoniebereichen sowie $\sin\sin+\cos\cos=1$ - das beinhaltet die Eigenschaften aus Th. 8.22 auSSer den Additionstheoremen und den Grenzwerten). Sie sollten auch wissen, dass \sin und \cos auf den ganzen komplexen Zahlen definiert und stetig sind. Eulersche Formel (8.46a). Definition von Tangens und Cotangens, ebenfalls mit Nullstellen und Monotonieintervallen. Polarkoordinaten komplexer Zahlen (Betrag, Argument). Darstellung in der komplexen Ebene. Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten.

10 Differentialrechnung

Definition der Differenzierbarkeit und Ableitung für reell- und für komplexwertige Funktionen. Satz: Eine komplexwertige Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil differenzierbar sind. Satz: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Ableitungsregeln: Ableiten ist linear, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel. Ableitungen von Polynomen, von der reellen Exponentialfunktion, vom natürlichen Logarithmus, vom reellen Sinus und vom reellen Kosinus. Ableitung von Potenzfunktionen mit reellen Exponenten. Definition von Ableitungen höherer Ordnung. Satz: Ist eine Funktion in einem lokalen Extremum differenzierbar, so verschwindet dort die Ableitung, Satz über den Zusammenhang des Vorzeichens der Ableitung mit der Monotonie einer differenzierbaren Funktion. Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Maxima und Minima bei differenzierbaren Funktionen.

11 Riemannintegral auf kompakten Intervallen

Satz: Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind integrierbar. Linearität des Riemannintegrals. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Definition der Stammfunktion. Partielle Integration. Substitutionsformel. Aufgaben vom Typ wie in den Beispielen 10.21, 10.23 und 10.25 lösen können.