## Contrôle Continu n°3

Durée : 1h45 Documents, téléphones et appareils électroniques interdits

## Exercice 1 (Question de cours)

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés.

- 1. À quelle condition X est-il compact?
- 2. Soit  $f: X \to Y$  une application continue. Montrer que si X est compact alors f(X) est compact.

## Exercice 2 (Compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ )

Soit  $\mathcal{T}$  la topologie standard sur  $\mathbb{R}^n$ , et définissons l'ensemble  $X = \mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ . Le but de cet exercice est d'introduire une topologie  $\mathcal{T}_{\infty}$  sur X qui étend la topologie  $\mathcal{T}$  et telle que  $(X, \mathcal{T}_{\infty})$  soit compact. Pour définir  $\mathcal{T}_{\infty}$ , on déclare que  $U \subset X$  est ouvert si et seulement si :

- soit  $\infty \notin U$  et  $U \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert pour  $\mathcal{T}$ ;
- soit  $\infty \in U$  et  $\mathbb{R}^n \setminus U$  est compact pour  $\mathcal{T}$ .
- 1. Montrer que cette définition donne une topologie sur X.
- 2. Montrer que la topologie induite sur  $\mathbb{R}^n$  coïncide avec  $\mathcal{T}$ .
- 3. Montrer que  $(X, \mathcal{T}_{\infty})$  est séparé.
- 4. Soit  $\{U_i : i \in I\}$  une famille d'ouverts pour  $\mathcal{T}_{\infty}$  qui recouvre X et supposons  $\infty \in U_{i_0}$ . Montrer que  $\{U_i \cap \mathbb{R}^n : i \in I, i \neq i_0\}$  est une famille d'ouverts pour  $\mathcal{T}$  qui recouvre  $\mathbb{R}^n \setminus U_{i_0}$ .
- 5. En déduire que  $(X, \mathcal{T}_{\infty})$  est compacte.

Nous allons maintenant montrer que la topologie  $\mathcal{T}_{\infty}$  est unique avec ces propriétés. Considérons donc une topologie  $\mathcal{T}'$  sur X telle que  $(X, \mathcal{T}')$  soit compacte et telle que la topologie induite par  $\mathcal{T}'$  sur  $\mathbb{R}^n$  coïncide avec  $\mathcal{T}$ .

- 6. Montrer que  $U \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert pour  $\mathcal{T}'$  si et seulement si U est ouvert pour  $\mathcal{T}$ .
- 7. Soit maintenant U un ouvert pour  $\mathcal{T}'$  qui contient  $\infty$ , et soient  $U_i \subset \mathbb{R}^n$  ouverts, pour  $i \in I$ . Observer que la famille  $\{U\} \cup \{U_i : i \in I\}$  recouvre X si et seulement si la famille  $\{U_i : i \in I\}$  recouvre  $\mathbb{R}^n \setminus U$ .
- 8. En deduire qu'une partie U de X contenant  $\infty$  est ouverte si et seulement si  $\mathbb{R}^n \setminus U$  est compact.
- 9. Conclure que  $\mathcal{T}'$  et  $\mathcal{T}_{\infty}$  coïncident.

En utilisant les points précédents, répondre aux questions suivantes :

- 10. Montrer que si n=1, le compactifié X de  $\mathbb{R}$  est homéomorphe à  $S^1$ .
- 11. Pour n général, à quel espace topologique est homéomorphe le compactifié de  $\mathbb{R}^n$ ?

## Exercice 3 (Compact de Banach-Mazur)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le but de cet exercice est de construire une distance sur

 $\{(X, \|\cdot\|_X) \text{ espace vectoriel norm\'e de dimension } n\}/\sim$ 

où  $(X, \|\cdot\|_X) \sim (Y, \|\cdot\|_Y)$  s'il existe un isomorphisme isométrique  $f: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ . Soit

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{L : X \to Y \text{ linéaire}\}\$$
,

et rappelons que

$$|||L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||L(x)||_Y}{||x||_X}$$

définit une norme sur  $\mathcal{L}(X,Y)$ .

1. Montrer que pour  $L: X \to Y$  et  $M: Y \to Z$ ,  $||M \circ L|| \le ||M|| \cdot ||L||$ .

Nous définissons alors :

$$\delta((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)) := \inf\{\log\left(\|\|L\|\|\cdot\|\|L^{-1}\|\right) : L \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ isomorphisme}\}.$$

- 2. Appliquer le point 1 pour montrer que  $\delta(X,Y) \geq 0$ .
- 3. Montrer que  $\delta(X,Y)=0$  s'il existe un isomorphisme isométrique entre X et Y.
- 4. Montrer que  $\delta$  est symétrique.
- 5. Montrer que  $\delta$  satisfait l'inégalité triangulaire.

Il faut maintenant montrer que si  $\delta(X,Y)=0$  alors il existe un isomorphisme isométrique entre X et Y. Montrons d'abord que c'est le cas si la borne inférieure dans la définition de  $\delta$  est atteinte :

6. Observer que, pour tout  $L: X \to Y$  linéaire, et pour  $L' = \lambda L, \lambda \in \mathbb{R}^*$ ,

$$|||L|| \cdot ||L^{-1}|| = ||L'|| \cdot ||(L')^{-1}||.$$

- 7. En deduire que, s'il existe  $L: X \to Y$  inversible telle que  $|||L||| \cdot |||L^{-1}||| = 1$ , alors on peut supposer |||L||| = |||L'||| = 1.
- 8. Conclure que, si  $\delta(X,Y)=0$  et la borne inférieure est atteinte, alors il existe un isomorphisme isométrique entre X et Y.

Pour terminer l'exercice, nous allons montrer que la borne inférieure dans la définition de  $\delta$  est toujours atteinte. Considérons donc une suite  $L_n$  telle que  $\log(||L_n|| \cdot ||L_n^{-1}||)$  converge vers  $\delta(X,Y)$ .

- 9. Utiliser le point 6 pour montrer qu'on peut supposer  $||L_n|| = 1$ , et en déduire que  $||L_n^{-1}||$  est bornée.
- 10. Déduire qu'on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que  $L_n$  et  $L_n^{-1}$  convergent dans  $\mathcal{L}(X,Y)$ . (Indice :  $\mathcal{L}(X,Y)$  est de dimension finie.)
- 11. Conclure que  $\delta(X,Y)=0$  implique que X et Y sont isométriques, et donc que  $\delta$  induit une distance sur  $\{(X,\|\cdot\|_X)$  espace vectoriel normé de dimension  $n\}/\sim$ .