Divide and Conquer & The Master Theorem

Algorithms and Datastructures, F25, Lecture 3

Andreas Holck Høeg-Petersen

Department of Computer Science
Aalborg University

February 26, 2025

Opdateringer

AALBORG UNIVERSITET

- Første programmeringsopgave er lagt op - har alle set den?
- Fra evaluering:
  - Fordeling af tid til første og andet session af exercises var lidt skæv
  - Klasserumsinteraktion og trin-for-trin gennemgang af algoritmen var godt!

Outline

Outline

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Metoden har overordnet set 3 skridt:

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Metoden har overordnet set 3 skridt:

Divide
: Del problemet op i et eller flere sub-problemer, der er mindre instanser af det samme problem

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Metoden har overordnet set 3 skridt:

Divide Del problemet op i et eller flere sub-problemer, der er mindre instanser af det samme problem

Conquer Løs sub-problemerne rekursivt

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Metoden har overordnet set 3 skridt:

- **Divide** Del problemet op i et eller flere sub-problemer, der er mindre instanser af det samme problem
- **Conquer** Løs sub-problemerne rekursivt
- **Combine** Kombiner løsningerne på sub-problemerne til en løsning på det oprindelige problem

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Metoden har overordnet set 3 skridt:

- **Divide** Del problemet op i et eller flere sub-problemer, der er mindre instanser af det samme problem
- **Conquer** Løs sub-problemerne rekursivt
- **Combine** Kombiner løsningerne på sub-problemerne til en løsning på det oprindelige problem

Divide and Conquer

Algoritmiske teknikker

Divide-and-conquer er en effektiv teknik til at designe effektive algoritmer til at løse komplekse problemer ved at bryde dem ned i mindre dele. Ofte giver det en asymptotisk køretid i $\Theta(n \log n)$.

Metoden har overordnet set 3 skridt:

- **Divide** Del problemet op i et eller flere sub-problemer, der er mindre instanser af det samme problem
- **Conquer** Løs sub-problemerne rekursivt
- **Combine** Kombiner løsningerne på sub-problemerne til en løsning på det oprindelige problem

Hvis problemet er småt nok (base case), løses det uden videre. Ellers (recursive case) fortsætter man rekursionen.

Divide and Conquer

Rekursion???

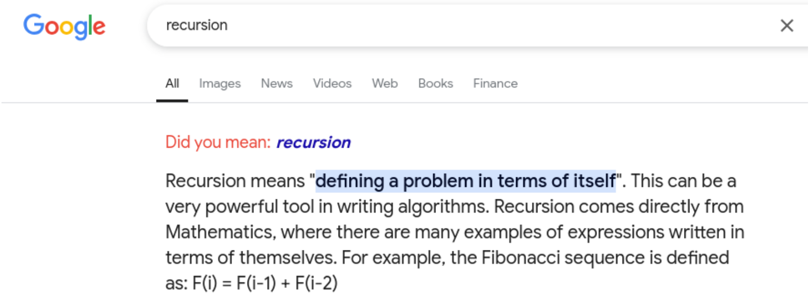


Figure: Google søgning på ‘recursion’

Divide and Conquer

Rekursion???

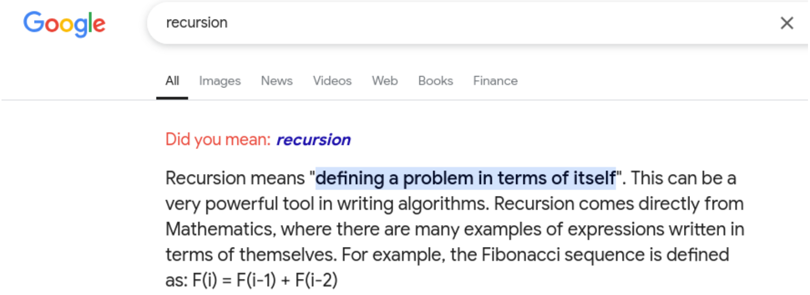


Figure: Google søgning på ‘recursion’

Example (Fibonacci-sekvensen)

Det næste tal i Fibonacci-sekvensen er givet ved at summere de to foregående elementer. Den starter med 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Men den kan dermed også defineres rekursivt, således at det i'ende elementer er givet ved $F(i) = F(i-1) + F(i-2)$.

I algoritmisk forstand forstår vi en rekursion $T(n)$ således, at der for en tilpas stor konstant n_0 skal gælde følgende:

1. For alle $n < n_0$ har vi at $T(n) = \Theta(1)$ — dvs. $T(n)$ er konstant
2. For alle $n \geq n_0$ må alle stier af rekursionen ende i en defineret base case inden for et endeligt antal rekursive kald.

Divide and Conquer

Algoritmisk rekursion

I algoritmisk forstand forstår vi en rekursion $T(n)$ således, at der for en tilpas stor konstant n_0 skal gælde følgende:

1. For alle $n < n_0$ har vi at $T(n) = \Theta(1)$ — dvs. $T(n)$ er konstant
2. For alle $n \geq n_0$ må alle stier af rekursionen ende i en defineret base case inden for et endeligt antal rekursive kald.

I kurset her gælder det for alle rekursioner, vi ser på, men det er værd at have in mente, hvis I selv designer algoritmer, som gør brug af rekursion.

Divide and Conquer

Eksempler

I dag skal vi se på to eksempler på divide-and-conquer-algoritmer:

- Merge sort
- Quicksort

Outline

Merge sort

Den kender I jo!

- En af de mest berømte og benyttede sorteringsalgoritmer — og en af de første til at blive implementeret i en computer (ca. 1945 af John von Neumann)
- Ide:

Divide	Opdel sekvensen i to lige store sub-sekvenser og kald algoritmen rekursivt
Conquer	Når algoritmen modtager en sekvens med kun et element, returner det trivielt sorterede element
Combine	Kombiner de sorterede sub-sekvenser, så sorteringsrækkefølgen overholdes

Merge sort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$

```
Merge-Sort(A, p, r)
if p ≥ r
    return
q = ⌊(p + r)/2⌋
Merge-Sort(A, p, q)
Merge-Sort(A, q + 1, r)
Merge(A, p, q, r)
```

Merge sort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså Merge-Sort$(A, 1, n)$

```
Merge-Sort(A, p, r)
if p ≥ r
        return
q = ⌊(p + r)/2⌋
Merge-Sort(A, p, q)
Merge-Sort(A, q + 1, r)
Merge(A, p, q, r)
```

Merge sort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså Merge-Sort$(A, 1, n)$
- I linie 3 finder vi midtpunktet mellem p og r

```
Merge-Sort(A, p, r)
1  if p ≥ r
2      return
3  q = ⌊(p + r)/2⌋
4  Merge-Sort(A, p, q)
5  Merge-Sort(A, q + 1, r)
6  Merge(A, p, q, r)
```

Merge sort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså Merge-Sort$(A, 1, n)$
- I linie 3 finder vi midtpunktet mellem p og r
- I linie 4 og 5 kalder vi rekursivt for den ene og anden halvdel af sekvensen

```
Merge-Sort(A, p, r)
1  if p ≥ r
2      return
3  q = ⌊(p + r)/2⌋
4  Merge-Sort(A, p, q)
5  Merge-Sort(A, q + 1, r)
6  Merge(A, p, q, r)
```

Merge sort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså Merge-Sort$(A, 1, n)$
- I linie 3 finder vi midtpunktet mellem p og r
- I linie 4 og 5 kalder vi rekursivt for den ene og anden halvdel af sekvensen
- I linie 5 kombinerer ('merger') vi de to halvdele sammen

```
Merge-Sort(A, p, r)
1  if p ≥ r
2        return
3  q = ⌊(p + r)/2⌋
4  Merge-Sort(A, p, q)
5  Merge-Sort(A, q + 1, r)
6  Merge(A, p, q, r)
```

Merge sort

Merge-operationen

Merge-operationen er et rædselsfuldt monster i CLRS. . . !

```
MERGE(A, p, q, r)
n_L = q − p + 1              // length of A[p : q]
n_R = r − q                  // length of A[q + 1 : r]
let L[0 : n_L − 1] and R[0 : n_R − 1] be new arrays
for i = 0 to n_L − 1         // copy A[p : q] into L[0 : n_L − 1]
    L[i] = A[p + i]
for j = 0 to n_R − 1         // copy A[q + 1 : r] into R[0 : n_R − 1]
    R[j] = A[q + j + 1]
i = 0                        // i indexes the smallest remaining element in L
j = 0                        // j indexes the smallest remaining element in R
k = p                        // k indexes the location in A to fill
// As long as each of the arrays L and R contains an unmerged element,
//      copy the smallest unmerged element back into A[p : r].
while i < n_L and j < n_R
    if L[i] ≤ R[j]
        A[k] = L[i]
        i = i + 1
    else A[k] = R[j]
        j = j + 1
    k = k + 1
// Having gone through one of L and R entirely, copy the
//      remainder of the other to the end of A[p : r].
while i < n_L
    A[k] = L[i]
    i = i + 1
    k = k + 1
while j < n_R
    A[k] = R[j]
    j = j + 1
    k = k + 1
```

Figure: Ew!!

Merge sort

Merge-operationen

En lidt mere venlig version kunne se sådan her ud:

```
Merge(A, p, q, r)
let B[0 : r − p] be a new array with 0-index
for i = 0 to r − p
    B[i] = A[i + p]
i = 0, j = (r − q)
for k = p to r
    if (i + p) > q
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    elseif (j + q) > r
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
    elseif B[j] < B[i]
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    else
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
```

Merge sort

Merge-operationen

Og her endda med forståelige navne:

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
    B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
    if (i + low) ≥ mid
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    elseif (j + low) ≥ high
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
    elseif B[j] < B[i]
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    else
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
```

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j
- Hvis j er forbi slutningen, tag næste element fra $B[0 : q - p]$ og inkrementer i

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
    B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
    if (i + low) ≥ mid
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    elseif (j + low) ≥ high
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
    elseif B[j] < B[i]
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    else
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
```

- Vi lader $low = p$, $mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j
- Hvis j er forbi slutningen, tag næste element fra $B[0 : q - p]$ og inkrementer i
- Hvis $B[j]$ er lavere end $B[i]$, sæt $A[k]$ til $B[j]$ og inkrementer j

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
    low = p, mid = q + 1, high = r + 1
    let B[0 : high − low] be
            a new array with 0-index
    for i = 0 to B.length
            B[i] = A[i + low]

    i = 0, j = (mid − low)
    for k = low to high
            if (i + low) ≥ mid
                    A[k] = B[j]
                    j = j + 1
            elseif (j + low) ≥ high
                    A[k] = B[i]
                    i = i + 1
            elseif B[j] < B[i]
                    A[k] = B[j]
                    j = j + 1
            else
                    A[k] = B[i]
                    i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j
- Hvis j er forbi slutningen, tag næste element fra $B[0 : q - p]$ og inkrementer i
- Hvis $B[j]$ er lavere end $B[i]$, sæt $A[k]$ til $B[j]$ og inkrementer j
- Ellers, sæt $A[k]$ til $B[i]$ og inkrementer i

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
    B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
    if (i + low) ≥ mid
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    elseif (j + low) ≥ high
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
    elseif B[j] < B[i]
        A[k] = B[j]
        j = j + 1
    else
        A[k] = B[i]
        i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j
- Hvis j er forbi slutningen, tag næste element fra $B[0 : q - p]$ og inkrementer i
- Hvis $B[j]$ er lavere end $B[i]$, sæt $A[k]$ til $B[j]$ og inkrementer j
- Ellers, sæt $A[k]$ til $B[i]$ og inkrementer i
- Vi har nu lagt elementerne fra B tilbage i A i sorteret rækkefølge!

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
  low = p, mid = q + 1, high = r + 1
  let B[0 : high − low] be
          a new array with 0-index
  for i = 0 to B.length
          B[i] = A[i + low]

  i = 0, j = (mid − low)
  for k = low to high
          if (i + low) ≥ mid
                  A[k] = B[j]
                  j = j + 1
          elseif (j + low) ≥ high
                  A[k] = B[i]
                  i = i + 1
          elseif B[j] < B[i]
                  A[k] = B[j]
                  j = j + 1
          else
                  A[k] = B[i]
                  i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j
- Hvis j er forbi slutningen, tag næste element fra $B[0 : q - p]$ og inkrementer i
- Hvis $B[j]$ er lavere end $B[i]$, sæt $A[k]$ til $B[j]$ og inkrementer j
- Ellers, sæt $A[k]$ til $B[i]$ og inkrementer i
- Vi har nu lagt elementerne fra B tilbage i A i sorteret rækkefølge!
- Forskellen fra CLRS er, at vi samler L og R i et enkelt array B

Merge sort

Merge-operationen

```
Merge(A, p, q, r)
low = p, mid = q + 1, high = r + 1
let B[0 : high − low] be
        a new array with 0-index
for i = 0 to B.length
        B[i] = A[i + low]

i = 0, j = (mid − low)
for k = low to high
        if (i + low) ≥ mid
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        elseif (j + low) ≥ high
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
        elseif B[j] < B[i]
                A[k] = B[j]
                j = j + 1
        else
                A[k] = B[i]
                i = i + 1
```

- Vi lader $low = p, mid = q + 1$ og $high = r + 1$
- Kopier $A[p : r]$ til $B[0 : r - p]$
- i og j peger på første og anden del af B
- k løber igennem alle indicies i $A[p : r]$
- Hvis i er forbi midten, tag næste element fra $B[j : r - p]$ og inkrementer j
- Hvis j er forbi slutningen, tag næste element fra $B[0 : q - p]$ og inkrementer i
- Hvis $B[j]$ er lavere end $B[i]$, sæt $A[k]$ til $B[j]$ og inkrementer j
- Ellers, sæt $A[k]$ til $B[i]$ og inkrementer i
- Vi har nu lagt elementerne fra B tilbage i A i sorteret rækkefølge!
- Forskellen fra CLRS er, at vi samler L og R i et enkelt array B
- . . . og at vi klarer resten i et enkelt loop (fremfor 3, eew!)

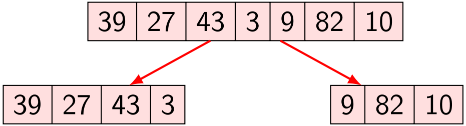
Merge sort

Example

39	27	43	3	9	82	10

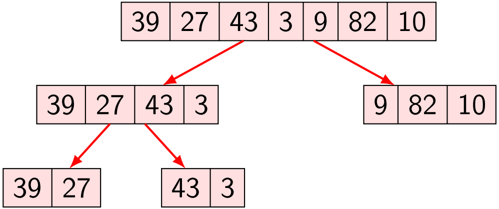
Merge sort

Example



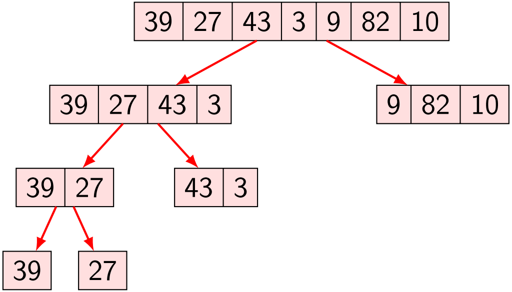
Merge sort

Example



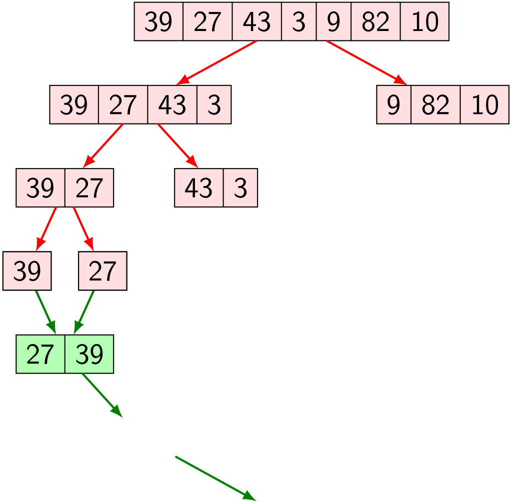
Merge sort

Example



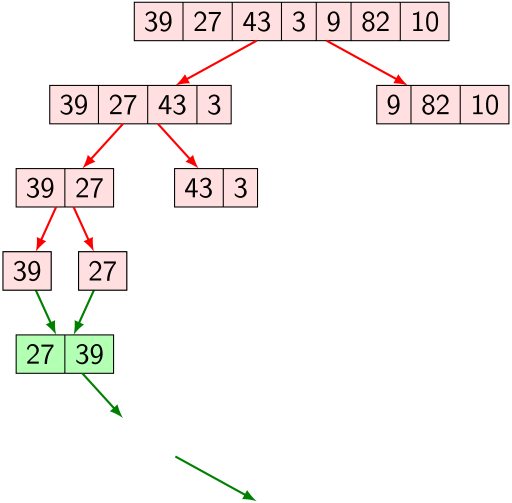
Merge sort

Example



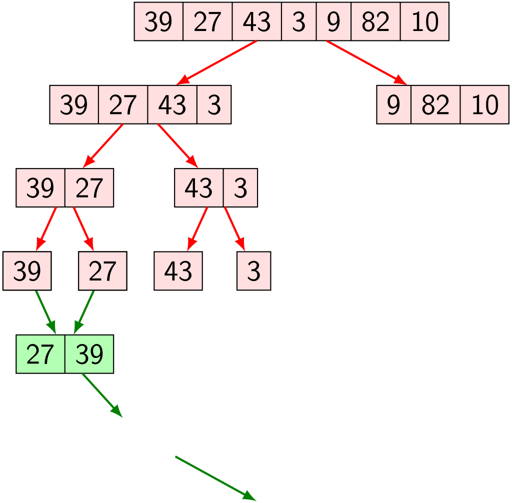
Merge sort

Example



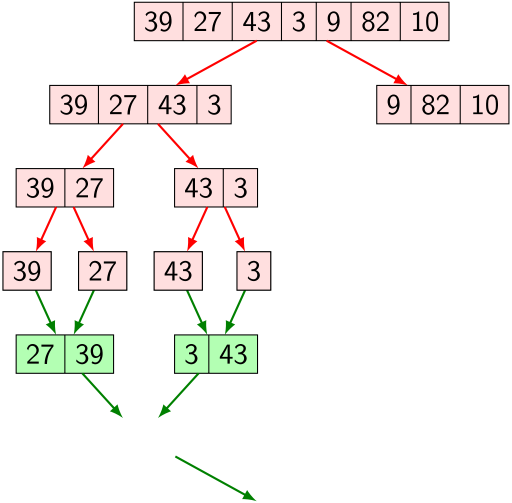
Merge sort

Example



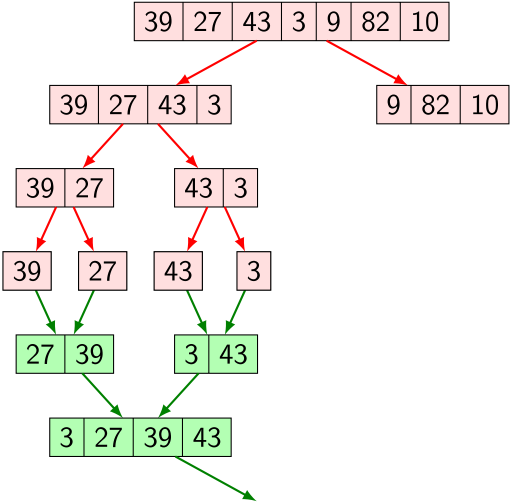
Merge sort

Example



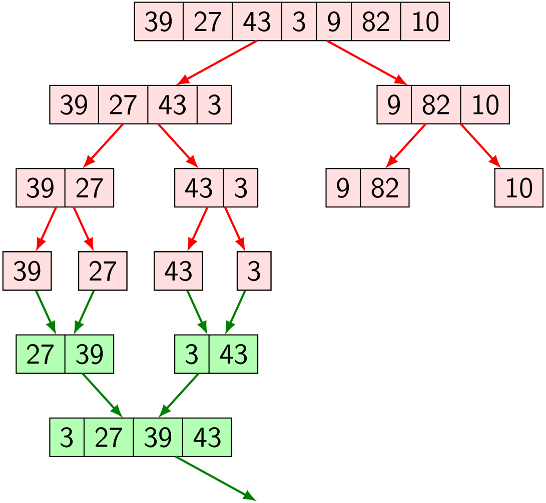
Merge sort

Example



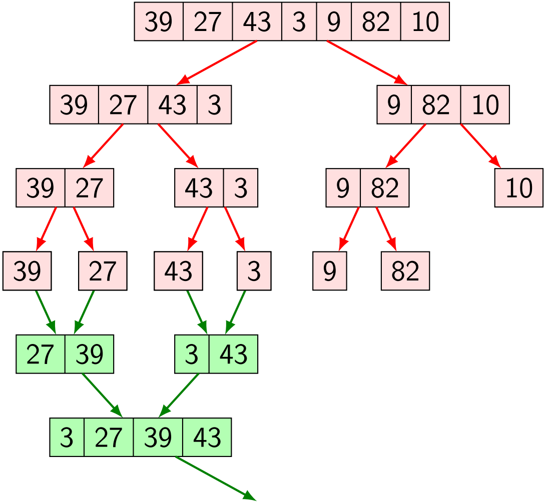
Merge sort

Example



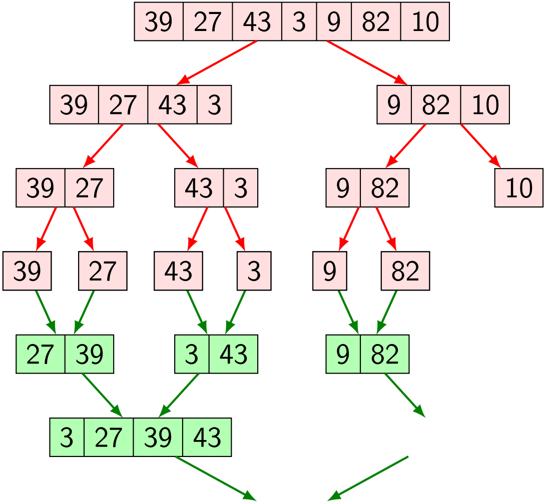
Merge sort

Example



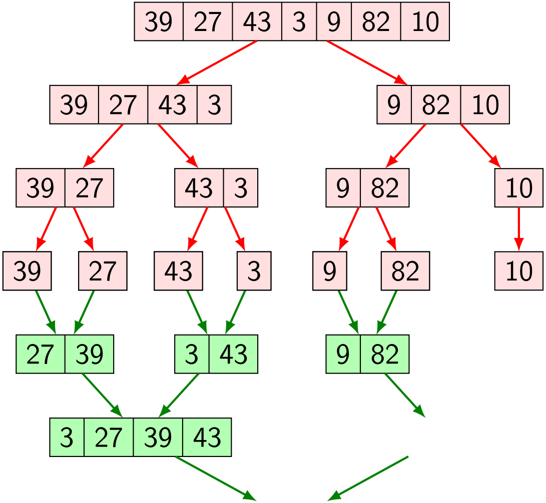
Merge sort

Example



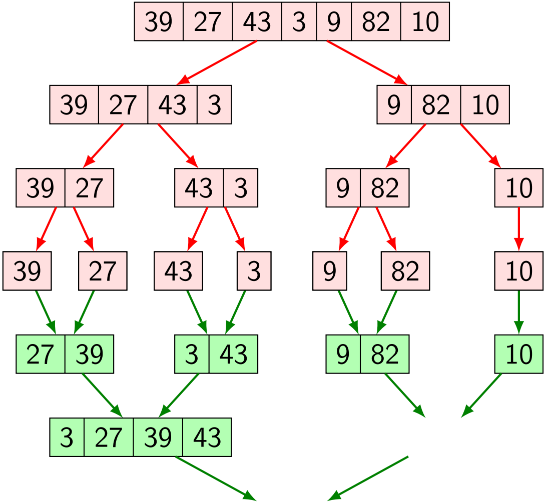
Merge sort

Example



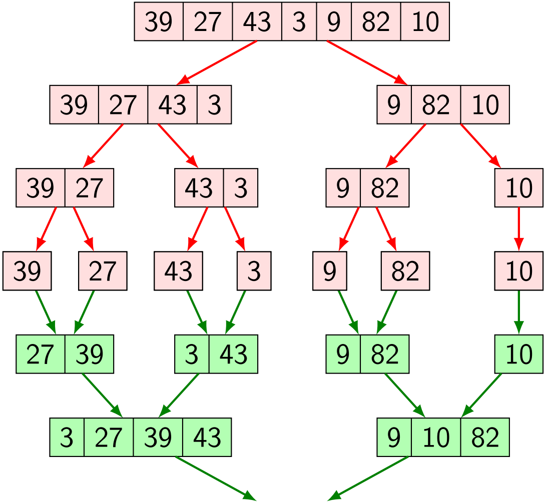
Merge sort

Example



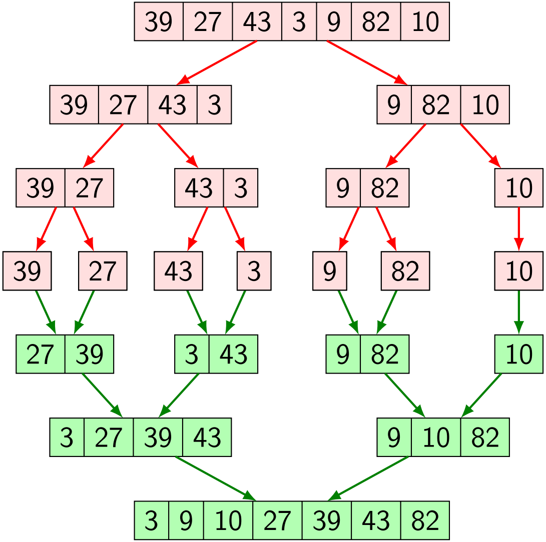
Merge sort

Example



Merge sort

Example



Merge sort

Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

Merge sort

Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

- Vi noterer os, at Merge operationen er $\Theta(n)$

Merge sort

Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

- Vi noterer os, at Merge operationen er $\Theta(n)$
- De to rekursitve kald halverer begge input-størrelsen,
  altså har vi to kald med $n/2$

Merge sort

Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

- Vi noterer os, at Merge operationen er $\Theta(n)$
- De to rekursitve kald halverer begge input-størrelsen, altså har vi to kald med $n/2$
- I base case, hvor $n \leq 1$ og inputtet er trivielt sorteret, er køretiden $\Theta(1)$ (konstant)

Merge sort

Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

- Vi noterer os, at Merge operationen er $\Theta(n)$
- De to rekursitve kald halverer begge input-størrelsen, altså har vi to kald med $n/2$
- I base case, hvor $n \leq 1$ og inputtet er trivielt sorteret, er køretiden $\Theta(1)$ (konstant)
- Vi har altså:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Merge sort

Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

- Vi noterer os, at Merge operationen er $\Theta(n)$
- De to rekursitve kald halverer begge input-størrelsen, altså har vi to kald med $n/2$
- I base case, hvor $n \leq 1$ og inputtet er trivielt sorteret, er køretiden $\Theta(1)$ (konstant)
- Vi har altså:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Spørgsmålet er så, hvor mange gange kan vi halvere n før, at vi når til base case?

Merge sort

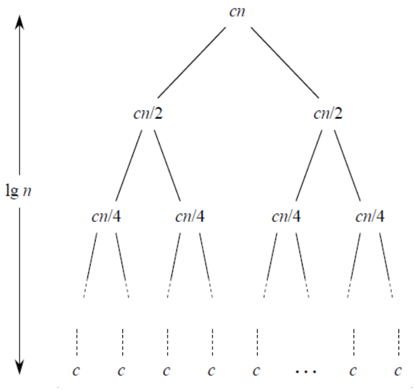
Intuitiv analyse

I næste del af forelæsningen lærer vi om et mere generelt trick til at analysere køretid for rekursive algoritmer, men til en start ser vi på en intuitiv måde at gå til analysen på.

- Vi noterer os, at Merge operationen er $\Theta(n)$
- De to rekursitve kald halverer begge input-størrelsen, altså har vi to kald med $n/2$
- I base case, hvor $n \leq 1$ og inputtet er trivielt sorteret, er køretiden $\Theta(1)$ (konstant)
- Vi har altså:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

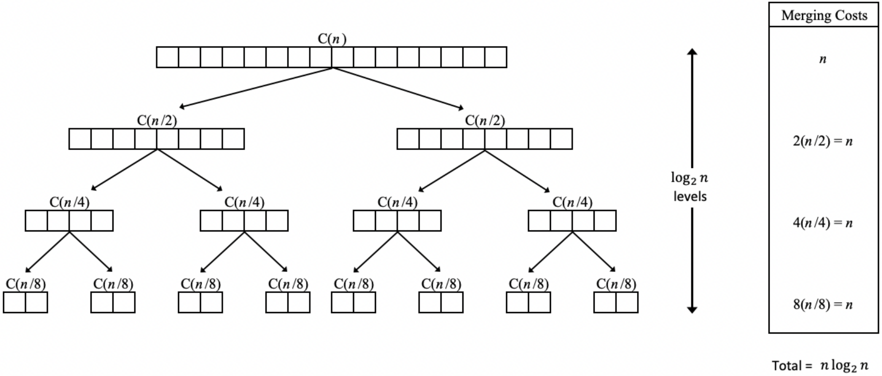
- Spørgsmålet er så, hvor mange gange kan vi halvere n før, at vi når til base case?
- Dette er faktisk selve definitionen på base-2 logaritmen, $\log_2$!



Merge sort

Intuitiv analyse

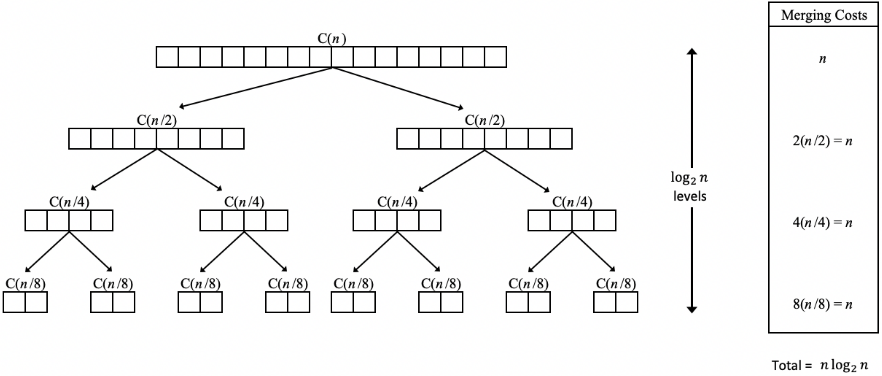
På hvert 'niveau' i træet — som der er $\log_2 n$ af — skal vi samlet set foretage $\Theta(n)$ operationer. F.eks., når vi er på niveau 2, har vi halveret n to gange, så vi har 4 lister af størrelse $n/(2*2) = n/4$, og tydeligvis er $4(n/4) = n$.



Merge sort

Intuitiv analyse

På hvert 'niveau' i træet — som der er $\log_2 n$ af — skal vi samlet set foretage $\Theta(n)$ operationer. F.eks., når vi er på niveau 2, har vi halveret n to gange, så vi har 4 lister af størrelse $n/(2 * 2) = n/4$, og tydeligvis er $4(n/4) = n$.



Dermed kan vi sige, at køretiden for Merge-Sort er $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$!

Vi renser lige hovedet. . .

. . . inden vi går til næste algoritme!

Outline

Quicksort

Endnu en klassiker

Quicksort er en anden meget populær sorteringsalgoritme, der ligeledes følger divide-and-conquer-metoden. I worst-case er dens køretid $\Theta(n^2)$, men i praksis er den typisk hurtigere end de fleste andre alternativer — og med en simpel modifikation, kan man (næsten) sikre sig, at køretiden er $\Theta(n \log n)$. Derudover er dens pladsforbrug mindre end for merge sort, og implementationen er noget simplere.

Quicksort
Divide-and-conquer

De tre dele af divide-and-conquer-metoden for quicksort er:

De tre dele af divide-and-conquer-metoden for quicksort er:

Divide Vælg et pivot element p, og del input sekvensen op i en 'lav' del og en 'høj' del således, alt i den lave del er mindre end p og alt i den høje er større end eller lig med p. Indsæt p, så den skiller de to.

Quicksort

Divide-and-conquer

De tre dele af divide-and-conquer-metoden for quicksort er:

Divide Vælg et pivot element p, og del input sekvensen op i en 'lav' del og en 'høj' del således, alt i den lave del er mindre end p og alt i den høje er større end eller lig med p. Indsæt p, så den skiller de to.

Conquer Kald quicksort rekursivt på de to halvdele.

AALBORG UNIVERSITET

De tre dele af divide-and-conquer-metoden for quicksort er:

Divide Vælg et pivot element p, og del input sekvensen op i en ‘lav’ del og en ‘høj’ del således, alt i den lave del er mindre end p og alt i den høje er større end eller lig med p. Indsæt p, så den skiller de to.

Conquer Kald quicksort rekursivt på de to halvdele.

Combine Her behøver vi ikke gøre noget, for når vi når til bunds i rekursionen, så er begge sub-arrays sorterede.

Quicksort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$

```
QuickSort(A, p, r)
if p < r
    q = Partition(A, p, r)
    QuickSort(A, p, q − 1)
    QuickSort(A, q + 1, r)
```

Quicksort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså QuickSort$(A, 1, n)$

QuickSort(A, p, r)

```
if p < r
    q = Partition(A, p, r)
    QuickSort(A, p, q − 1)
    QuickSort(A, q + 1, r)
```

Quicksort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså QuickSort$(A, 1, n)$
- I linie 2 kalder vi proceduren Partition, som deler A i to og returnerer indexet på pivot-elementet

```
QuickSort(A, p, r)
1  if p < r
2      q = Partition(A, p, r)
3      QuickSort(A, p, q − 1)
4      QuickSort(A, q + 1, r)
```

Quicksort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså QuickSort$(A, 1, n)$
- I linie 2 kalder vi proceduren Partition, som deler A i to og returnerer indexet på pivot-elementet
- I linie 3 og 4 kalder vi rekursivt for den ene og anden del af sekvensen

```
QuickSort(A, p, r)
1  if p < r
2       q = Partition(A, p, r)
3       QuickSort(A, p, q − 1)
4       QuickSort(A, q + 1, r)
```

Quicksort

Pseudo-kode del 1

- Input: en sekvens $A[1:n]$ og to indicies p, r hvor $1 \leq p \leq r \leq n$
- Ved første kald er $p = 1$ og $r = n$, altså QuickSort$(A, 1, n)$
- I linie 2 kalder vi proceduren Partition, som deler A i to og returnerer indexet på pivot-elementet
- I linie 3 og 4 kalder vi rekursivt for den ene og anden del af sekvensen
- Og så behøver vi ikke gøre mere!

```
QuickSort(A, p, r)
1  if p < r
2      q = Partition(A, p, r)
3      QuickSort(A, p, q − 1)
4      QuickSort(A, q + 1, r)
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$

```
Partition(A, p, r)
x = A[r]
i = p - 1
for j = p to r - 1
    if A[j] ≤ x
        i = i + 1
        exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$
- i er det sidste index i den lave del, j er det første index i den høje del

```
Partition(A, p, r)
x = A[r]
i = p - 1
for j = p to r - 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$
- i er det sidste index i den lave del, j er det første index i den høje del
- Vi løber igennem alle elementer, bortset fra pivot-elementet

Partition(A, p, r)

$x = A[r]$
$i = p - 1$
for $j = p$ **to** $r - 1$
    if $A[j] \leq x$
        $i = i + 1$
        exchange $A[i]$ with $A[j]$
exhange $A[i + 1]$ with x
return $i + 1$

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$
- i er det sidste index i den lave del, j er det første index i den høje del
- Vi løber igennem alle elementer, bortset fra pivot-elementet
- I linie 4 tjekker vi, om $A[j]$ hører til i den lave del (er mindre end x)

Partition(A, p, r)

```
1  x = A[r]
2  i = p − 1
3  for j = p to r − 1
4      if A[j] ≤ x
5          i = i + 1
6          exchange A[i] with A[j]
7  exhange A[i + 1] with x
8  return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$
- i er det sidste index i den lave del, j er det første index i den høje del
- Vi løber igennem alle elementer, bortset fra pivot-elementet
- I linie 4 tjekker vi, om $A[j]$ hører til i den lave del (er mindre end x)
- I linie 5 ‘gør vi plads’ i den lave ende ved at inkrementere i (bemærk at på dette tidspunkt er $A[i] > x$)

```
Partition(A, p, r)
1  x = A[r]
2  i = p − 1
3  for j = p to r − 1
4      if A[j] ≤ x
5          i = i + 1
6          exchange A[i] with A[j]
7  exhange A[i + 1] with x
8  return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$
- i er det sidste index i den lave del, j er det første index i den høje del
- Vi løber igennem alle elementer, bortset fra pivot-elementet
- I linie 4 tjekker vi, om $A[j]$ hører til i den lave del (er mindre end x)
- I linie 5 'gør vi plads' i den lave ende ved at inkrementere i (bemærk at på dette tidspunkt er $A[i] > x$)
- I linie 6 bytter vi $A[j]$ (som er mindre end x) ud med $A[i]$ (som er højere end x)

```
Partition(A, p, r)
1  x = A[r]
2  i = p − 1
3  for j = p to r − 1
4        if A[j] ≤ x
5              i = i + 1
6              exchange A[i] with A[j]
7  exhange A[i + 1] with x
8  return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

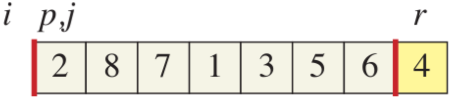
- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r]$
- i er det sidste index i den lave del, j er det første index i den høje del
- Vi løber igennem alle elementer, bortset fra pivot-elementet
- I linie 4 tjekker vi, om $A[j]$ hører til i den lave del (er mindre end x)
- I linie 5 'gør vi plads' i den lave ende ved at inkrementere i (bemærk at på dette tidspunkt er $A[i] > x$)
- I linie 6 bytter vi $A[j]$ (som er mindre end x) ud med $A[i]$ (som er højere end x)
- Efter loopet flytter vi x til den første plads i den høje del, $A[i+1]$ — dermed er alt i $A[p:i] \leq x$ og alt i $A[i+2:r] \geq x$

```
Partition(A, p, r)
1  x = A[r]
2  i = p − 1
3  for j = p to r − 1
4        if A[j] ≤ x
5              i = i + 1
6              exchange A[i] with A[j]
7  exhange A[i + 1] with x
8  return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 0$ og $j = 1$
- Vi sammenligner $A[j] = 2$ med pivot-elementet og ser, at det er mindre, så vi inkrementerer i og bytter $A[i]$ med $A[j]$ (men da $i = j = 1$ sker der ingenting lige nu). Når loopet fortsætter, inkrementeres j

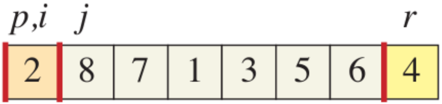



```
Partition(A, p, r)
    x = A[r]
    i = p − 1
    for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
            i = i + 1
            exchange A[i] with A[j]
    exhange A[i + 1] with x
    return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 1$ og $j = 2$
- Vi sammenligner $A[j] = 8$ med 4 og ser, at det er større, så vi gør intet andet end at inkrementere j



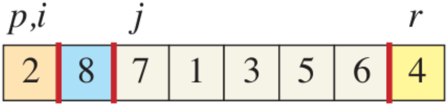
Partition(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p − 1
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 1$ og $j = 3$
- Igen, vi ser $A[j] = 7$ er større end 4 og inkrementerer blot j



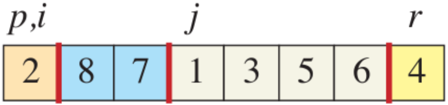
Partition(A, p, r)

$x = A[r]$
$i = p - 1$
for $j = p$ **to** $r - 1$
    if $A[j] \leq x$
        $i = i + 1$
        exchange $A[i]$ with $A[j]$
exhange $A[i + 1]$ with x
return $i + 1$

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 1$ og $j = 4$
- Nu ser vi $A[j] = 1$ som er mindre end vores pivot-element, så vi inkrementerer i og bytter plads på $A[i]$ og $A[j]$ inden j inkrementeres



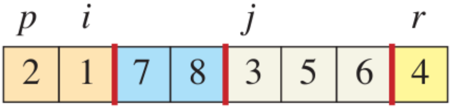
Partition(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p − 1
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 2$ og $j = 5$
- $A[j] = 3$ er mindre end 4, så vi øger i med 1 og bytter 7 og 3 (altså $A[3]$ og $A[5]$)



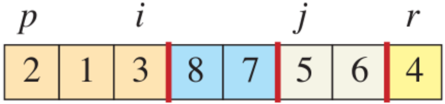
Partition(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p − 1
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 3$ og $j = 6$
- For $j = 6$ er $A[j] = 5$, hvilket er større end 4, så loopet kan fortsætte

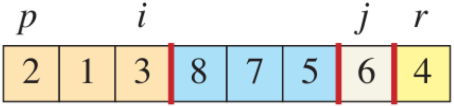



```
Partition(A, p, r)
x = A[r]
i = p − 1
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 3$ og $j = 7$
- ...og igen, 6 er større end 4, så vi gør ikke noget



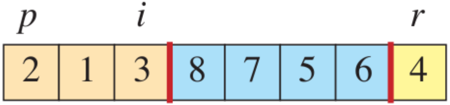
Partition(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p − 1
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 3$ og $j = 8$
- Til sidst bytter vi $A[i+1] = 8$ med vores pivot-element, og dermed er alt i $A[p:i]$ mindre end (eller lig med) 4, mens alt i $A[i+2:r]$ er større end 4

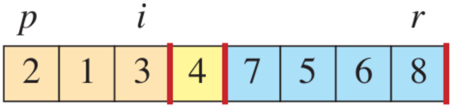



```
Partition(A, p, r)
x = A[r]
i = p - 1
for j = p to r - 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Pseudo-kode del 2

- Vælg pivot-elementet x til at være det sidste i sekvensen, $A[r] = 4$
- Vi har $i = 3$ og $j = 8$
- Bum! Nu kan vi returnere indexet på pivot-elementet og gentage proceduren rekursivt for de to sub-arrays




```
Partition(A, p, r)
x = A[r]
i = p − 1
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
                i = i + 1
                exchange A[i] with A[j]
exhange A[i + 1] with x
return i + 1
```

Quicksort

Kompleksitet

Quicksort er meget afhængig af, hvordan inputtet ser ud:

Quicksort

Kompleksitet

Quicksort er meget afhængig af, hvordan inputtet ser ud:

Worst case Hvert rekursivt kald laver et enkelt nyt sub-problem af størrelse $n - 1 \rightarrow \Theta(n^2)$

Quicksort

Kompleksitet

Quicksort er meget afhængig af, hvordan inputtet ser ud:

- **Worst case** Hvert rekursivt kald laver et enkelt nyt sub-problem af størrelse $n-1 \to \Theta(n^2)$
- **Best case** Hvert rekursivt kald laver 2 nye sub-problemer af størrelse $n/2 \to \Theta(n \log n)$

Quicksort
Kompleksitet

Quicksort er meget afhængig af, hvordan inputtet ser ud:

Worst case Hvert rekursivt kald laver et enkelt nyt sub-problem af størrelse $n - 1 \rightarrow \Theta(n^2)$

Best case Hvert rekursivt kald laver 2 nye sub-problemer af størrelse $n/2 \rightarrow \Theta(n \log n)$

Average case Hvis det rekursive kald skifter mellem at producere 'gode' og 'dårlige' split, så vil de 'dårlige' split blive absorberet af de 'gode', og dybden af rekursionen vil fortsat være bundet af $O(\log n) \rightarrow$ dermed har det kun en effekt på den skjulte konstant med kompleksiteten fortsætter med at være $\Theta(n \log n)$

Quicksort
Kompleksitet

Quicksort er meget afhængig af, hvordan inputtet ser ud:

Worst case Hvert rekursivt kald laver et enkelt nyt sub-problem af størrelse $n-1 \rightarrow \Theta(n^2)$

Best case Hvert rekursivt kald laver 2 nye sub-problemer af størrelse $n/2 \rightarrow \Theta(n \log n)$

Average case Hvis det rekursive kald skifter mellem at producere 'gode' og 'dårlige' split, så vil de 'dårlige' split blive absorberet af de 'gode', og dybden af rekursionen vil fortsat være bundet af $O(\log n) \rightarrow$ dermed har det kun en effekt på den skjulte konstant med kompleksiteten fortsætter med at være $\Theta(n \log n)$

Hvordan kan vi sikre os ikke at ramme worst-case?

Quicksort

Kompleksitet

Quicksort er meget afhængig af, hvordan inputtet ser ud:

Worst case Hvert rekursivt kald laver et enkelt nyt sub-problem af størrelse $n - 1 \rightarrow \Theta(n^2)$

Best case Hvert rekursivt kald laver 2 nye sub-problemer af størrelse $n/2 \rightarrow \Theta(n \log n)$

Average case Hvis det rekursive kald skifter mellem at producere 'gode' og 'dårlige' split, så vil de 'dårlige' split blive absorberet af de 'gode', og dybden af rekursionen vil fortsat være bundet af $O(\log n) \rightarrow$ dermed har det kun en effekt på den skjulte konstant med kompleksiteten fortsætter med at være $\Theta(n \log n)$

Hvordan kan vi sikre os ikke at ramme worst-case? Randomization!

Randomized-Partition(A, p, r)

1 $i = \text{Random}(p, r)$
2 exchange $A[i]$ and $A[r]$
3 **return** Partition(A, p, r)

Outline

Exercises!

Yay!

Outline

Analyse af rekursioner

3 metoder

Vi har set et par eksempler på divide-and-conquer-algoritmer, og hvordan de bruger rekursion til at løse deres opgave. Rekursioner kan godt være tricky at analysere og forstå, hvorfor der findes en række metoder til at gå til dem mere eller mindre formelt:

Analyse af rekursioner

3 metoder

Vi har set et par eksempler på divide-and-conquer-algoritmer, og hvordan de bruger rekursion til at løse deres opgave. Rekursioner kan godt være tricky at analysere og forstå, hvorfor der findes en række metoder til at gå til dem mere eller mindre formelt:

The substitution method I denne starter vi med et kvalificeret gæt, og så bruger vi matematisk induktion til at vise, at vi har ret. Kan være den nemmeste metode, men kræver lidt erfaring.

Analyse af rekursioner

3 metoder

Vi har set et par eksempler på divide-and-conquer-algoritmer, og hvordan de bruger rekursion til at løse deres opgave. Rekursioner kan godt være tricky at analysere og forstå, hvorfor der findes en række metoder til at gå til dem mere eller mindre formelt:

The substitution method
: I denne starter vi med et kvalificeret gæt, og så bruger vi matematisk induktion til at vise, at vi har ret. Kan være den nemmeste metode, men kræver lidt erfaring.

The recursion-tree method
: Vi kan tegne det træ, der fremkommer af rekursionen og bruge det visuelle til at understøtte vores forståelse af, hvad der sker. Altid en god øvelse!

Analyse af rekursioner

3 metoder

Vi har set et par eksempler på divide-and-conquer-algoritmer, og hvordan de bruger rekursion til at løse deres opgave. Rekursioner kan godt være tricky at analysere og forstå, hvorfor der findes en række metoder til at gå til dem mere eller mindre formelt:

The substitution method I denne starter vi med et kvalificeret gæt, og så bruger vi matematisk induktion til at vise, at vi har ret. Kan være den nemmeste metode, men kræver lidt erfaring.

The recursion-tree method Vi kan tegne det træ, der fremkommer af rekursionen og bruge det visuelle til at understøtte vores forståelse af, hvad der sker. Altid en god øvelse!

The Master Method For rekursioner, der kan skrives op på formen

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

er dette den letteste og sikreste måde at garantere kompleksiteten af algoritmen. Og det er den metode, vi kigger nærmere ind i nu!

Master method

Introduktion

The master method giver os et værktøj, der kan løse rekursioner af formen

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

hvilket ofte er den form, som divide-and-conquer giver.

- a og b er konstanter, og vi kræver, at $a \geq 1$, $b > 1$
- Vi kalder $f(n)$ the driving function, og kræver blot at den er en asymptotisk positiv funktion (dvs. ikke-negativ for alle tilpas store værdier af n)
- Med det kan vi benytte master teoremet!

Master theorem

Oh boy!

Theorem (Master theorem)

Let $a > 0$ *and* $b > 1$ *be constants, and let* $f(n)$ *be a driving function that is defined and nonnegative on all sufficiently large reals. Define the recurrence* $T(n)$ *on* $n \in \mathbb{N}$ *by*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

where $aT(n/b)$ *actually means* $a'T(\lfloor n/b \rfloor) + a''T(\lceil n/b \rceil)$ *for some constants* $a' \geq 0$ *and* $a'' \geq 0$ *satisfying* $a = a' + a''$*. Then the asymptotic behavior of* $T(n)$ *can be characterized as follows:*

Master theorem

Oh boy!

Theorem (Master theorem)

Let $a > 0$ and $b > 1$ be constants, and let $f(n)$ be a driving function that is defined and nonnegative on all sufficiently large reals. Define the recurrence $T(n)$ on $n \in \mathbb{N}$ by

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

where $aT(n/b)$ actually means $a'T(\lfloor n/b \rfloor) + a''T(\lceil n/b \rceil)$ for some constants $a' \geq 0$ and $a'' \geq 0$ satisfying $a = a' + a''$. Then the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

1. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*

Master theorem

Oh boy!

Theorem (Master theorem)

Let $a > 0$ and $b > 1$ be constants, and let $f(n)$ be a driving function that is defined and nonnegative on all sufficiently large reals. Define the recurrence $T(n)$ on $n \in \mathbb{N}$ by

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

where $aT(n/b)$ actually means $a'T(\lfloor n/b \rfloor) + a''T(\lceil n/b \rceil)$ for some constants $a' \geq 0$ and $a'' \geq 0$ satisfying $a = a' + a''$. Then the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

1. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*
2. *If there exists a constant $k \geq 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$*

Master theorem

Oh boy!

Theorem (Master theorem)

Let $a > 0$ and $b > 1$ be constants, and let $f(n)$ be a driving function that is defined and nonnegative on all sufficiently large reals. Define the recurrence $T(n)$ on $n \in \mathbb{N}$ by

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

where $aT(n/b)$ actually means $a'T(\lfloor n/b \rfloor) + a''T(\lceil n/b \rceil)$ for some constants $a' \geq 0$ and $a'' \geq 0$ satisfying $a = a' + a''$. Then the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

1. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*
2. *If there exists a constant $k \geq 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$*
3. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + e})$ and if $f(n)$ aditionally satisfies the regularity condition $af(n/b) \leq cf(n)$ for some constant $c < 1$ and all sufficiently large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$*

Master theorem

Lets break it down

Theorem (Master theorem (simplified))

For a recurrence of the form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

$f(n)$ kaldes en driving function og $n^{\log_b a}$ kaldes en watershed function. Vi sammenligner disse på følgende måder:

Master theorem

Lets break it down

Theorem (Master theorem (simplified))

For a recurrence of the form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

1. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*

$f(n)$ kaldes en driving function og $n^{\log_b a}$ kaldes en watershed function. Vi sammenligner disse på følgende måder:

Case 1 $f(n)$ er asymptotisk mindre (jf. O) end $n^{\log_b a}$ med en faktor af n^{ϵ} (eftersom $n^{\log_b a - \epsilon} = \frac{n^{\log_b a}}{n^{\epsilon}}$) — i så fald er rekursionen $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Master theorem

Lets break it down

Theorem (Master theorem (simplified))

For a recurrence of the form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

1. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*
2. *If there exists a constant $k \geq 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$*

$f(n)$ kaldes en driving function og $n^{\log_b a}$ kaldes en watershed function. Vi sammenligner disse på følgende måder:

Case 2 $f(n)$ er asymptotisk ækvivalent (jf. Θ) med $n^{\log_b a} \lg^k n$ for $k \geq 0$ — i så fald er rekursionen $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$

- Generelt kan $k = 0$ antages, hvormed udtrykket bliver noget simplere!

Master theorem

Lets break it down

Theorem (Master theorem (simplified))

For a recurrence of the form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, the asymptotic behavior of $T(n)$ can be characterized as follows:

1. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*
2. *If there exists a constant $k \geq 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$*
3. *If there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ and if $f(n)$ aditionally satisfies the regularity condition $af(n/b) \leq cf(n)$ for some constant $c < 1$ and all sufficiently large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$*

$f(n)$ kaldes en driving function og $n^{\log_b a}$ kaldes en watershed function. Vi sammenligner disse på følgende måder:

Case 3 $f(n)$ er asymptotisk større (jf. Ω) end $n^{\log_b a}$ med en faktor n^{ϵ} (igen, $n^{\log_b a+\epsilon} = n^{\log_b a} * n^{\epsilon}$) og lidt ekstra holder — i så fald er rekursionen $T(n) = \Theta(f(n))$

- Regularitetsbetingelsen holder for det meste, og I behøver ikke hænge jer i den

Master theorem

Hvordan bruges det?

Følg denne opskrift:

1. Identificer om rekursionen har formen $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
2. Gør udtrykket $n^{\log_b a}$ simplere ved at indsætte a og b
3. Undersøg hvilket af de 3 cases, der holder, altså
   - $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n^{\log_b a}/n^{\epsilon})$, hvor $\epsilon > 0$
   - $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$, for $k >= 0$
   - $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) = \Omega(n^{\log_b a} * n^{\epsilon})$, hvor $\epsilon > 0$
4. Konklusionen kan stadig se lidt kompliceret ud, så reducer yderligere

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = \qquad b = \qquad f(n) =$$

$$n^{\log_b a} =$$

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = \qquad f(n) =$$
$$n^{\log_b a} =$$

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) =$$

$$n^{\log_b a} =$$

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$

$$n^{\log_b a} =$$

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$
$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

Nu tjekker vi så, om vi kan få det til at passe på nogle af teoremets cases:

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$
$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

Nu tjekker vi så, om vi kan få det til at passe på nogle af teoremets cases:

- Er $f(n) = O(n^{1-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$
$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

Nu tjekker vi så, om vi kan få det til at passe på nogle af teoremets cases:

- Er $f(n) = O(n^{1-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
- Er $f(n) = \Theta(n^1 \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$
$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

Nu tjekker vi så, om vi kan få det til at passe på nogle af teoremets cases:

- Er $f(n) = O(n^{1-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
- Er $f(n) = \Theta(n^1 \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?
  - Ja! For $k = 0$ har vi $\Theta(n^1 \lg^0 n) = \Theta(n) = f(n)$.

Master theorem

Eksempel

Vi identificerede tidligere, at vi kunne skrive Merge-Sorts køretid op som rekursionen $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

$$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

Nu tjekker vi så, om vi kan få det til at passe på nogle af teoremets cases:

- Er $f(n) = O(n^{1-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
- Er $f(n) = \Theta(n^1 \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?
  - Ja! For $k = 0$ har vi $\Theta(n^1 \lg^0 n) = \Theta(n) = f(n)$.
  - Dette er case 2 i teoremet, som fortæller os at $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n$, hvilket for $a = 2$, $b = 2$ og $k = 0$ giver at $T(n) = \Theta(n \lg n)$

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = \quad$, $b = \quad$ og $f(n) =$

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) =$

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) = n \lg n$

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Og så tjekker vi cases:

1. Er $f(n) = O(n^{0.792-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Og så tjekker vi cases:

1. Er $f(n) = O(n^{0.792-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
   - Nej, for $n^{0.792} < n$, hvilket stadig må gælde, hvis vi fratrækker en positiv konstant i eksponenten, og da $f(n) = n \lg n \geq n$ kan $n^{0.792-\epsilon}$ altså ikke være et upper bound.

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3,\ b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Og så tjekker vi cases:

1. Er $f(n) = O(n^{0.792-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
   - Nej, for $n^{0.792} < n$, hvilket stadig må gælde, hvis vi fratrækker en positiv konstant i eksponenten, og da $f(n) = n \lg n \geq n$ kan $n^{0.792-\epsilon}$ altså ikke være et upper bound.
2. Er $f(n) = \Theta(n^{0.792} \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Og så tjekker vi cases:

1. Er $f(n) = O(n^{0.792-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
   - Nej, for $n^{0.792} < n$, hvilket stadig må gælde, hvis vi fratrækker en positiv konstant i eksponenten, og da $f(n) = n \lg n \geq n$ kan $n^{0.792-\epsilon}$ altså ikke være et upper bound.
2. Er $f(n) = \Theta(n^{0.792} \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?
   - Nej, for hvis $k <= 1$ vokser $n^{0.792} \lg^k n$ for langsomt, og hvis $k > 1$ vokser det for hurtigt

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3$, $b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Og så tjekker vi cases:

1. Er $f(n) = O(n^{0.792-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
   - Nej, for $n^{0.792} < n$, hvilket stadig må gælde, hvis vi fratrækker en positiv konstant i eksponenten, og da $f(n) = n \lg n \geq n$ kan $n^{0.792-\epsilon}$ altså ikke være et upper bound.
2. Er $f(n) = \Theta(n^{0.792} \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?
   - Nej, for hvis $k <= 1$ vokser $n^{0.792} \lg^k n$ for langsomt, og hvis $k > 1$ vokser det for hurtigt
3. Er $f(n) = \Omega(n^{0.792+\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?

Master theorem

Endnu et eksempel

Vi prøver endnu et eksempel

- Vi har $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- Dermed har vi $a = 3,\ b = 4$ og $f(n) = n \lg n$
- Vi indsætter og forenkler: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.792}$ (ish)

Og så tjekker vi cases:

1. Er $f(n) = O(n^{0.792-\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
   - Nej, for $n^{0.792} < n$, hvilket stadig må gælde, hvis vi fratrækker en positiv konstant i eksponenten, og da $f(n) = n \lg n \geq n$ kan $n^{0.792-\epsilon}$ altså ikke være et upper bound.
2. Er $f(n) = \Theta(n^{0.792} \lg^k n)$ for nogen $k >= 0$?
   - Nej, for hvis $k <= 1$ vokser $n^{0.792} \lg^k n$ for langsomt, og hvis $k > 1$ vokser det for hurtigt
3. Er $f(n) = \Omega(n^{0.792+\epsilon})$ for nogen $\epsilon > 0$?
   - Ja! n^x er et lower bound for $n \lg n$, så længe x er mindre end 1. Dvs., at denne case holder for alle $\epsilon < 0.2$ (ish)
   - Case 3 giver os at $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \lg n)$

Dagens temaer

Opsummering

- Introduktion til divide-and-conquer paradigmet
  - Del problemet op i mindre sub-problemer
  - Løs sub-problemerne når de er trivielle
  - Kombiner løsningerne til en samlet løsning
- Merge sort og Quicksort
  - Merge sort er garanteret at køre i $\Theta(n \log n)$
  - Quicksort kører i worst case i $\Theta(n^2)$ men kan nemt sikres en forventet køretid i $\Theta(n \log n)$
- Rekursioner og master theorem
  - En generisk metode til at identificere køretider for rekursioner på formen $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

Tak for i dag!

Flere exercises..

Den bedste måde ikke at snyde sig selv på er lave exercises!