Insertion sort & Asymptotisk notation

Algorithms and Datastructures, F25, Lecture 2

Andreas Holck Høeg-Petersen

Department of Computer Science
Aalborg University

January 28, 2025

Opdateringer

- Løsninger på exercises kommer på et eller andet tidspunkt
- Fra evaluering:
  - Grupper?
  - Andet?

Outline

Outline

Sorteringsproblemet

En klassiker

Input En sekvens A af n tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output En permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ af A således at $a'_1 \leq a'_2, \leq, \ldots, \leq a'_n$

Sorteringsproblemet

En klassiker

Input En sekvens A af n tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output En permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ af A således at $a'_1 \leq a'_2, \leq, \ldots, \leq a'_n$

- Tallene vi sorterer kalder vi også nøgler (*keys*)

AALBORG UNIVERSITET

Sorteringsproblemet

En klassiker

Input En sekvens A af n tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output En permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ af A således at $a'_1 \leq a'_2, \leq, \ldots, \leq a'_n$

- Tallene vi sorterer kalder vi også nøgler (*keys*)
  - Nøglerne er nogle gange forskellig fra den data, vi egentlig sorterer

Sorteringsproblemet

En klassiker

Input En sekvens A af n tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output En permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ af A således at $a'_1 \leq a'_2, \leq, \ldots, \leq a'_n$

- Tallene vi sorterer kalder vi også nøgler (*keys*)
  - Nøglerne er nogle gange forskellig fra den data, vi egentlig sorterer
  - F.eks. kunne vi sortere brugere (sattelit data) på baggrund af deres alder (nøgler)

Sorteringsproblemet

En klassiker

Input En sekvens A af n tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output En permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ af A således at $a'_1 \leq a'_2, \leq, \ldots, \leq a'_n$

- Tallene vi sorterer kalder vi også nøgler (*keys*)
  - Nøglerne er nogle gange forskellig fra den data, vi egentlig sorterer
  - F.eks. kunne vi sortere brugere (sattelit data) på baggrund af deres alder (nøgler)
- Sortering er tit et underproblem for mange andre problemer, der kan gøres nemmere ved først at sortere inputtet

Sorteringsproblemet

En klassiker

Input En sekvens A af n tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output En permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ af A således at $a'_1 \leq a'_2, \leq, \ldots, \leq a'_n$

- Tallene vi sorterer kalder vi også nøgler (*keys*)
  - Nøglerne er nogle gange forskellig fra den data, vi egentlig sorterer
  - F.eks. kunne vi sortere brugere (sattelit data) på baggrund af deres alder (nøgler)
- Sortering er tit et underproblem for mange andre problemer, der kan gøres nemmere ved først at sortere inputtet
- Der findes mange sorteringsalgoritmer: merge sort, quicksort, bubble sort, heapsort, cocktail shaker sort, etc...

AALBORG UNIVERSITET

Sorteringsproblemet

En klassiker

Name	Best	Average	Worst	Memory	Stable	Method	Other notes
In-place merge sort	—	—	$n \log^2 n$	1	Yes	Merging	Can be implemented as a stable sort based on stable in-place merging.[5]
Heapsort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	1	No	Selection	
Introsort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$\log n$	No	Partitioning & Selection	Used in several STL implementations.
Merge sort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	n	Yes	Merging	Highly parallelizable (up to $O(\log n)$ using the Three Hungarians' Algorithm).[6]
Tournament sort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	n[7]	No	Selection	Variation of Heapsort.
Tree sort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$ (balanced)	n	Yes	Insertion	When using a self-balancing binary search tree.
Block sort	n	$n \log n$	$n \log n$	1	Yes	Insertion & Merging	Combine a block-based $O(n)$ in-place merge algorithm[8] with a bottom-up merge sort.
Smoothsort	n	$n \log n$	$n \log n$	1	No	Selection	An adaptive variant of heapsort based upon the Leonardo sequence rather than a traditional binary heap.
Timsort	n	$n \log n$	$n \log n$	n	Yes	Insertion & Merging	Makes n-1 comparisons when the data is already sorted or reverse sorted.
Patience sorting	n	$n \log n$	$n \log n$	n	No	Insertion & Selection	Finds all the longest increasing subsequences in $O(n \log n)$.
Cubesort	n	$n \log n$	$n \log n$	n	Yes	Insertion	Makes n-1 comparisons when the data is already sorted or reverse sorted.
Quicksort	$n \log n$	$n \log n$	n^2	$\log n$	No	Partitioning	Quicksort is usually done in-place with $O(\log n)$ stack space.[9][10]
Library sort	$n \log n$	$n \log n$	n^2	n	No	Insertion	Similar to a gapped insertion sort. It requires randomly permuting the input to warrant with-high-probability time bounds, which makes it not stable.
Shellsort	$n \log n$	$n^{4/3}$	$n^{3/2}$	1	No	Insertion	Small code size.
Comb sort	$n \log n$	n^2	n^2	1	No	Exchanging	Faster than bubble sort on average.
Insertion sort	n	n^2	n^2	1	Yes	Insertion	$O(n + d)$, in the worst case over sequences that have d inversions.
Bubble sort	n	n^2	n^2	1	Yes	Exchanging	Tiny code size.
Cocktail shaker sort	n	n^2	n^2	1	Yes	Exchanging	A variant of Bubblesort which deals well with small values at end of list
Gnome sort	n	n^2	n^2	1	Yes	Exchanging	Tiny code size.
Odd–even sort	n	n^2	n^2	1	Yes	Exchanging	Can be run on parallel processors easily.
Simple pancake sort	n	n^2	n^2	1	No	Selection	A variant of selection sort that uses reversals, instead of just swapping the two items, after each selection scan.
Strand sort	n	n^2	n^2	n	Yes	Selection	
Selection sort	n^2	n^2	n^2	1	No	Selection	Stable with $O(n)$ extra space, when using linked lists, or when made as a variant of Insertion Sort instead of swapping the two items.[11]
Exchange sort	n^2	n^2	n^2	1	No	Exchanging	Tiny code size.
Cycle sort	n^2	n^2	n^2	1	No	Selection	In-place with theoretically optimal number of writes.

Figure: Screenshot fra Wikipedia

Insertion sort

Vores første sorteringsalgoritme!

- Vi starter med at kigge på Insertion sort
- Simple sorteringsalgoritme, effektiv for små værdier af n
  - Hvad mener jeg med n?
  - Også effektiv for næsten sorterede sekvenser!
- Kan ligne sortering af kort:
  - Start med en tom hånd, kortbunken ligger på bordet
  - Tag et kort af gangen fra bunken
  - Søg i hånden til vi finder den korrekte position (fra højre til venstre)
  - Indsæt kortet på denne position

Insertion-Sort

Pseudo-kode

Insertion-Sort(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    // Insert A[i] into the sorted sequence A[1 : i − 1]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Pseudo-kode

- Algoritmen tager et array $A[1:n]$ som input
- Vedligeholder to sub-arrays
  - $A[1:i-1]$ er 'kortene på hånden' (altid sorteret)
  - $A[i:n]$ er 'kortene på bordet'

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Pseudo-kode

- Algoritmen gør 3 ting i hver iteration:
  - Find det element *key*, der skal placeres korrekt (i 'hånden')
  - Gør plads i det sorterede sub-array ('hånden') ved at flytte større elementer en plads bagud
  - Indsæt *key* på sin plads

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Pseudo-kode

- Algoritmen gør 3 ting i hver iteration:
  - Find det element *key*, der skal placeres korrekt (i 'hånden')
  - Gør plads i det sorterede sub-array ('hånden') ved at flytte større elementer en plads bagud
  - Indsæt *key* på sin plads

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Pseudo-kode

- Algoritmen gør 3 ting i hver iteration:
  - Find det element *key*, der skal placeres korrekt (i ‘hånden’)
  - Gør plads i det sorterede sub-array (‘hånden’) ved at flytte større elementer en plads bagud
  - Indsæt *key* på sin plads

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Pseudo-kode

- Algoritmen gør 3 ting i hver iteration:
  - Find det element *key*, der skal placeres korrekt (i ‘hånden’)
  - Gør plads i det sorterede sub-array (‘hånden’) ved at flytte større elementer en plads bagud
  - Indsæt *key* på sin plads

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Eksempel

Insertion sort

Eksempel

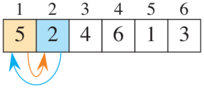


Figure: Insertion sort example on input $[5, 2, 4, 6, 1, 3]$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Eksempel

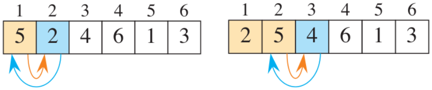


Figure: Insertion sort example on input $[5, 2, 4, 6, 1, 3]$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Eksempel

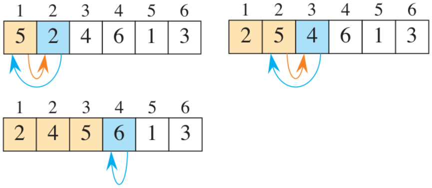


Figure: Insertion sort example on input $[5, 2, 4, 6, 1, 3]$

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

AALBORG UNIVERSITET

Insertion sort

Eksempel

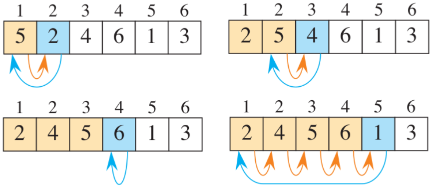


Figure: Insertion sort example on input $[5, 2, 4, 6, 1, 3]$

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Eksempel

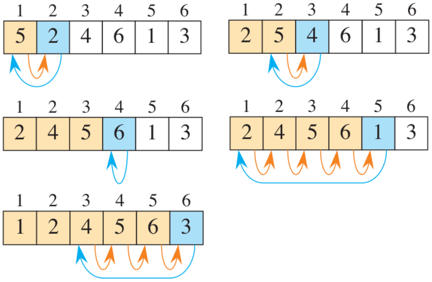


Figure: Insertion sort example on input $[5, 2, 4, 6, 1, 3]$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

Eksempel

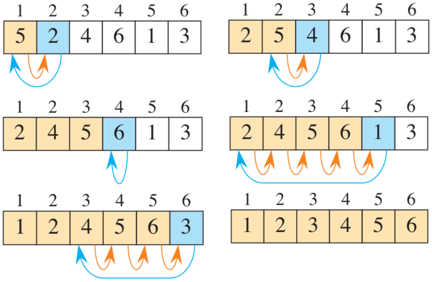
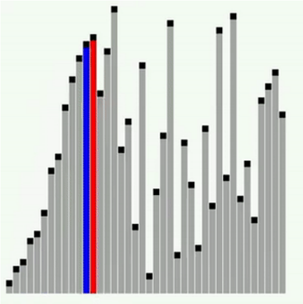


Figure: Insertion sort example on input $[5, 2, 4, 6, 1, 3]$

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Insertion sort

GIF!



Outline

Loop invarianter

Introduktion

Når vi ser på algoritmer skal vi gerne kunne argumentere for, at algoritmen faktisk virker — og endnu bedre, vi skal gerne kunne bevise det! En type korrekthedsbevis er ved hjælp af loop invarianter.

- En invariant er en egenskab, der *ikke* varierer; altså altid er sand

AALBORG UNIVERSITET

Loop invarianter

Introduktion

Når vi ser på algoritmer skal vi gerne kunne argumentere for, at algoritmen faktisk virker — og endnu bedre, vi skal gerne kunne bevise det! En type korrekthedsbevis er ved hjælp af loop invarianter.

- En invariant er en egenskab, der *ikke* varierer; altså altid er sand
- Vi leder efter en egenskab, der relaterer sig til algoritmens opgave

Loop invarianter

Introduktion

Når vi ser på algoritmer skal vi gerne kunne argumentere for, at algoritmen faktisk virker — og endnu bedre, vi skal gerne kunne bevise det! En type korrekthedsbevis er ved hjælp af loop invarianter.

- En invariant er en egenskab, der *ikke* varierer; altså altid er sand
- Vi leder efter en egenskab, der relaterer sig til algoritmens opgave
- Vi vil så gerne vise, at

Loop invarianter

Introduktion

Når vi ser på algoritmer skal vi gerne kunne argumentere for, at algoritmen faktisk virker — og endnu bedre, vi skal gerne kunne bevise det! En type korrekthedsbevis er ved hjælp af loop invarianter.

- En invariant er en egenskab, der *ikke* varierer; altså altid er sand
- Vi leder efter en egenskab, der relaterer sig til algoritmens opgave
- Vi vil så gerne vise, at
  - Invarianten er sand når vi starter den første iteration (initialization)

Loop invarianter

Introduktion

Når vi ser på algoritmer skal vi gerne kunne argumentere for, at algoritmen faktisk virker — og endnu bedre, vi skal gerne kunne bevise det! En type korrekthedsbevis er ved hjælp af loop invarianter.

- En invariant er en egenskab, der *ikke* varierer; altså altid er sand
- Vi leder efter en egenskab, der relaterer sig til algoritmens opgave
- Vi vil så gerne vise, at
  - Invarianten er sand når vi starter den første iteration (initialization)
  - Hvis den er sand, når en iteration starter, er den også sand, når iterationen slutter (maintenance)

AALBORG UNIVERSITET

Loop invarianter

Introduktion

Når vi ser på algoritmer skal vi gerne kunne argumentere for, at algoritmen faktisk virker — og endnu bedre, vi skal gerne kunne bevise det! En type korrekthedsbevis er ved hjælp af loop invarianter.

- En invariant er en egenskab, der *ikke* varierer; altså altid er sand
- Vi leder efter en egenskab, der relaterer sig til algoritmens opgave
- Vi vil så gerne vise, at
  - Invarianten er sand når vi starter den første iteration (initialization)
  - Hvis den er sand, når en iteration starter, er den også sand, når iterationen slutter (maintenance)
  - Loopet terminerer på et tidspunkt, og invariantens egenskab kan nu bruges til at vise algoritmens korrekthed

AALBORG UNIVERSITET

Loop invarianter

Insertion sort

Loop invarianter

Insertion sort

Initialization

- Før den første iteration er $i = 2$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Initialization

- Før den første iteration er $i = 2$
- Sub-arrayet $A[1:i-1]$ består kun af et element $A[1]$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1:i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1:i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Initialization

- Før den første iteration er $i = 2$
- Sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ består kun af et element $A[1]$
- Dette element er det samme, som oprindeligt var i $A[1]$ (for vi har ikke ændret noget)

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i - 1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Initialization

- Før den første iteration er $i = 2$
- Sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ består kun af et element $A[1]$
- Dette element er det samme, som oprindeligt var i $A[1]$ (for vi har ikke ændret noget)
- Et array med kun 1 element er per definition sorteret

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i - 1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Maintenance

- While-løkken flytter et element fra $A[i]$ til dets korrekte plads i $A[1:i]$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1:i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1:i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Maintenance

- While-løkken flytter et element fra $A[i]$ til dets korrekte plads i $A[1:i]$
- Sub-arrayet indeholder nu stadig de oprindelige elementer fra $A[1:i]$, stadig i sorteret orden

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1:i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1:i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Maintenance

- While-løkken flytter et element fra $A[i]$ til dets korrekte plads i $A[1:i]$
- Sub-arrayet indeholder nu stadig de oprindelige elementer fra $A[1:i]$, stadig i sorteret orden
- Når vi inkrementerer i opretholdes loop-invarianten

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1:i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1:i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Maintenance

- While-løkken flytter et element fra $A[i]$ til dets korrekte plads i $A[1:i]$
- Sub-arrayet indeholder nu stadig de oprindelige elementer fra $A[1:i]$, stadig i sorteret orden
- Når vi inkrementerer i opretholdes loop-invarianten
- NB: I teorien burde vi have lavet samme øvelse for while-løkken selv, men...

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1:i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1:i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Termination

- For-løkken stopper når i er større end n. Da i starter ved 2 og inkrementeres i hver iteration, vil løkken terminere når $i = n + 1$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i-1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i-1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Termination

- For-løkken stopper når i er større end n. Da i starter ved 2 og inkrementeres i hver iteration, vil løkken terminere når $i = n + 1$
- Indsætter vi $n + 1$ i loop-invarianten får vi $A[1 : (n + 1) - 1] = A[1 : n]$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i - 1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Termination

- For-løkken stopper når i er større end n. Da i starter ved 2 og inkrementeres i hver iteration, vil løkken terminere når $i = n + 1$
- Indsætter vi $n + 1$ i loop-invarianten får vi $A[1 : (n + 1) - 1] = A[1 : n]$
- Altså får vi, at $A[1 : n]$ indeholder alle de oprindelige elementer, men nu i sorteret rækkefølge

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i - 1]$ men i sorteret rækkefølge.

Loop invarianter

Insertion sort

Termination

- For-løkken stopper når i er større end n. Da i starter ved 2 og inkrementeres i hver iteration, vil løkken terminere når $i = n + 1$
- Indsætter vi $n + 1$ i loop-invarianten får vi $A[1 : (n + 1) - 1] = A[1 : n]$
- Altså får vi, at $A[1 : n]$ indeholder alle de oprindelige elementer, men nu i sorteret rækkefølge
- Eftersom $A[1 : n]$ er hele arrayet, kan vi konkludere, at A er sorteret og algoritmen er korrekt

Insertion-Sort(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Loop invariant

Ved begyndelse af hver iteration af for-løkken består sub-arrayet $A[1 : i - 1]$ af de oprindelige elementer i $A[1 : i - 1]$ men i sorteret rækkefølge.

Outline

Exercises!

Yay!

Outline

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A) tid × antal gange

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$key = A[i]$	
$j = i - 1$	
while $j > 0$ and $A[j] > key$	
$A[j+1] = A[j]$	
$j = j - 1$	
$A[j+1] = key$	

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

tid $\times$ antal gange

$c_1 \times n$

$c_2 \times n - 1$

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	
$A[j+1] = A[j]$	
$j = j - 1$	
$A[j+1] = key$	

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

tid $\times$ antal gange

$c_1 \times n$

$c_2 \times n - 1$

$c_3 \times n - 1$

$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} t_i$

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} t_i$
$A[j+1] = A[j]$	$c_5 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$j = j - 1$	
$A[j+1] = key$	

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} t_i$
$A[j+1] = A[j]$	$c_5 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$j = j - 1$	$c_6 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$A[j+1] = key$	

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$\quad key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$\quad j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
$\quad$ **while** $j > 0$ and $A[j] > key$	$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} t_i$
$\quad\quad A[j+1] = A[j]$	$c_5 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$\quad\quad j = j - 1$	$c_6 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$\quad A[j+1] = key$	$c_7 \times n - 1$

Tidskompleksitet

Recap

Vi så i sidste uge, hvordan vi i lidt grove træk kan angive køretiden på en algoritme. Lad os prøve på INSERTION-SORT! Vi siger, at while-løkken kører t_i gange for en eller anden værdi af i:

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} t_i$
$A[j+1] = A[j]$	$c_5 \times \sum_{i=2}^{n}(t_i - 1)$
$j = j - 1$	$c_6 \times \sum_{i=2}^{n}(t_i - 1)$
$A[j+1] = key$	$c_7 \times n - 1$

Hmm... Hvad er best case? Hvad er worst case?

Tidskompleksitet

Recap

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

tid $\times$ antal gange

$c_1 \times n$

$c_2 \times n - 1$

$c_3 \times n - 1$

$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} t_i$

$c_5 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$

$c_6 \times \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$

$c_7 \times n - 1$

Tidskompleksitet

Recap

Best case A er allerede sorteret, og vi kommer aldrig ind i while-løkken $\Rightarrow t_i = 0$ for alle $i = 2 \dots n$

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$\quad key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$\quad j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
$\quad$ **while** $j > 0$ and $A[j] > key$	$c_4 \times n - 1$
$\quad\quad A[j+1] = A[j]$	$c_5 \times 0$
$\quad\quad j = j - 1$	$c_6 \times 0$
$\quad A[j+1] = key$	$c_7 \times n - 1$

Tidskompleksitet

Recap

Best case A er allerede sorteret, og vi kommer aldrig ind i while-løkken $\Rightarrow t_i = 0$ for alle $i = 2 \dots n$

Worst case A er omvendt sorteret, og vi skal helt i bund hver gang $\Rightarrow t_i = i$ for alle $i = 2 \dots n$

INSERTION-SORT(A)	tid $\times$ antal gange
for $i = 2$ **to** n	$c_1 \times n$
$key = A[i]$	$c_2 \times n - 1$
$j = i - 1$	$c_3 \times n - 1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	$c_4 \times \sum_{i=2}^{n} i$
$A[j+1] = A[j]$	$c_5 \times \sum_{i=2}^{n} (i - 1)$
$j = j - 1$	$c_6 \times \sum_{i=2}^{n} (i - 1)$
$A[j+1] = key$	$c_7 \times n - 1$

Tidskompleksitet

Recap

Best case A er allerede sorteret, og vi kommer aldrig ind i while-løkken $\Rightarrow t_i = 0$ for alle $i = 2 \dots n$

Worst case A er omvendt sorteret, og vi skal helt i bund hver gang $\Rightarrow t_i = i$ for alle $i = 2 \dots n$

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

tid $\times$ antal gange

$c_1 \times n$

$c_2 \times n-1$

$c_3 \times n-1$

$c_4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 1$

$c_5 \times \frac{n(n-1)}{2}$

$c_6 \times \frac{n(n-1)}{2}$

$c_7 \times n-1$

AALBORG UNIVERSITET

Tidskompleksitet

Recap

Og husk, vi er primært interesseret i worst case. Men det efterlader os så med...

$$
\begin{aligned}
T(N) = & c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
& + c_5\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7(n-1)
\end{aligned}
$$

AALBORG UNIVERSITET

Tidskompleksitet

Recap

Og husk, vi er primært interessert i worst case. Men det efterlader os så med...

$$
\begin{aligned}
T(N) =& c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&+ c_5\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7(n-1) \\
=& \left(\frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2}\right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + c_7\right) n \\
&- (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)
\end{aligned}
$$

Tidskompleksitet

Recap

Og husk, vi er primært interessert i worst case. Men det efterlader os så med...

$$
\begin{aligned}
T(N) = & c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
& + c_5\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7(n-1) \\
= & \left(\frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2}\right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + c_7\right) n \\
& - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7) \\
= & an^2 + bn + c
\end{aligned}
$$

Asymptotisk analyse

Order of growth

Det leder os videre til en ny måde at tale om kompleksitet på, nemlig i termer af order of growth.

- Den eksakte køretid er sjældent særligt relevant — vi vil hellere abstrahere
- For små inputs er køretiden også irrelevant (computere er hurtige!)
- For store inputs er konstanter og små termer irrelevante — det essentielle er, hvordan køretiden udvikler sig som en funktion af n
- Vi studerer derfor asymptotisk køretid
  - Hvordan vokser køretiden, når inputtet bliver større?

Asymptotisk notation

Big-Oh, Big-Omega, Big-Theta

Målet med asymptotisk analyse er forenkle udtrykket for køretiden ved at abstrahere irrelevante og svært forudsigelige faktorer væk og istedet fange 'essensen' af $T(n)$ — nemlig den dominerende term, når n går mod ∞.

Asymptotisk notation

Big-Oh, Big-Omega, Big-Theta

Målet med asymptotisk analyse er forenkle udtrykket for køretiden ved at abstrahere irrelevante og svært forudsigelige faktorer væk og istedet fange 'essensen' af $T(n)$ — nemlig den dominerende term, når n går mod ∞.

Vi har 3 notationer, vi bruger:

Big-Oh, O	Asymptotisk upper bound
Big-Omega, Ω	Asymptotisk lower bound
Big-Theta, Θ	Asymptotisk thight bound

Både O, Ω og Θ definerer sæt af funktioner, som en funktion for tidskompleksiteten kan høre til.

Asymptotisk notation

Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ for alle } n \ge n_0\}$$

Asymptotisk notation

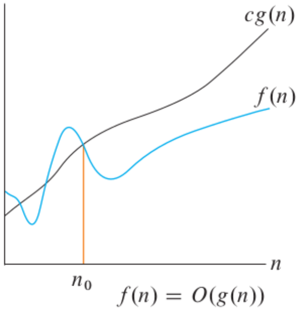
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$



ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

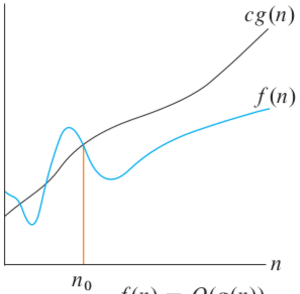
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk langsommere end $g(n)$



$f(n) = O(g(n))$

ALBORG
NIVERSITET

Asymptotisk notation

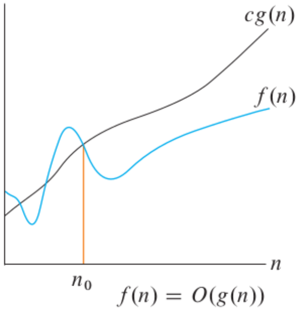
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk langsommere end $g(n)$
- Eksempler:



ALBORG
NIVERSITET

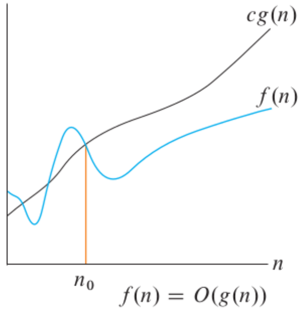
Asymptotisk notation
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \\ \text{sådan at } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ for alle } n \ge n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk langsommere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^3)$



Asymptotisk notation

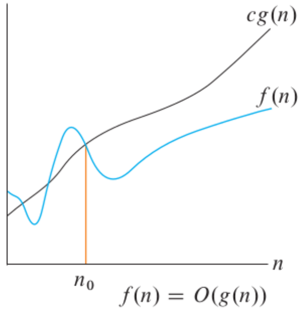
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk langsommere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^3)$
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^4)$



Asymptotisk notation

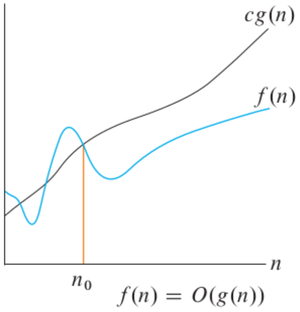
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk langsommere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^3)$
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^4)$
  - $T(n) = 2^n + 41n^27 = O(2^n)$



Asymptotisk notation

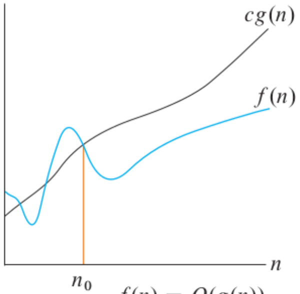
Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = O(g(n))$ hvis $T(n) \in O(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk langsommere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^3)$
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = O(n^4)$
  - $T(n) = 2^n + 41n^27 = O(2^n)$
  - $T(n) = 100 = O(1)$



$f(n) = O(g(n))$

ALBORG
NIVERSITET

Asymptotisk notation

Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

Eksempel:

Asymptotisk notation

Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

Eksempel:

- Vi vil vise, at funktionen $f(n) = n^2 + 1000n + 500 = O(n^2)$

Asymptotisk notation

Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

Eksempel:

- Vi vil vise, at funktionen $f(n) = n^2 + 1000n + 500 = O(n^2)$
- Vi skal dermed finde c og n_0 således, at $n^2 + 1000n + 500 \leq cn^2$ for all $n \geq n_0$

Asymptotisk notation

Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \\ \text{sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

Eksempel:

- Vi vil vise, at funktionen $f(n) = n^2 + 1000n + 500 = O(n^2)$
- Vi skal dermed finde c og n_0 således, at $n^2 + 1000n + 500 \leq cn^2$ for all $n \geq n_0$
- Vi dividerer begge sider med n^2, hvilket giver $1 + 1000/n + 500/n^2 \leq c$

Asymptotisk notation

Big-Oh

Definition (Big-Oh, O)

For en given funktion $g(n)$ er $O(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \\ \text{sådan at } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

Eksempel:

- Vi vil vise, at funktionen $f(n) = n^2 + 1000n + 500 = O(n^2)$
- Vi skal dermed finde c og n_0 således, at $n^2 + 1000n + 500 \leq cn^2$ for all $n \geq n_0$
- Vi dividerer begge sider med n^2, hvilket giver $1 + 1000/n + 500/n^2 \leq c$
- Her skulle det være nemt at se, at jo større n_0, jo mindre et c kan vi klare os med — f.eks. ved $n_0 = 2$ bliver venstresiden af uligheden 629, og vi kan vælge et hvilket som helst $c \geq 629$. Hvis vi vælger $n_0 = 100$ kan vi vælge et $c \geq 11.05$

Asymptotisk notation

Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Omega(g(n)) = \{ f(n) :\ & \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \\ & \text{sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0 \}\end{aligned}$$

AALBORG UNIVERSITET

Asymptotisk notation

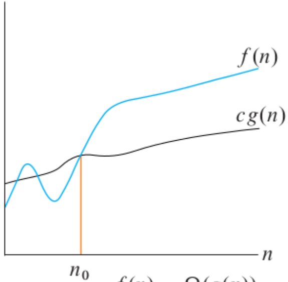
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$



$f(n) = \Omega(g(n))$

Asymptotisk notation

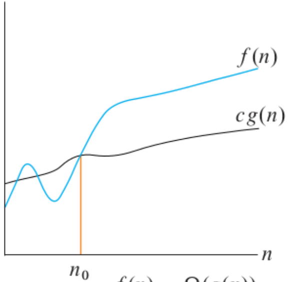
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk hurtigere end $g(n)$



$f(n) = \Omega(g(n))$

ALBORG
NIVERSITET

Asymptotisk notation

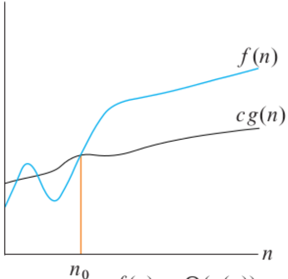
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk hurtigere end $g(n)$
- Eksempler:



$f(n) = \Omega(g(n))$

Asymptotisk notation

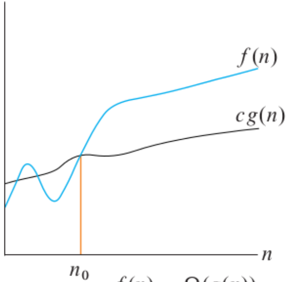
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \\ \text{sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk hurtigere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n^3)$



$f(n) = \Omega(g(n))$

ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

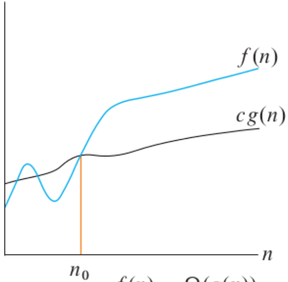
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk hurtigere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n^3)$
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n)$



$f(n) = \Omega(g(n))$

Asymptotisk notation

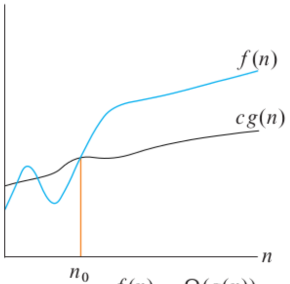
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk hurtigere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n^3)$
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n)$
  - $T(n) = 2^n + 41n^{27} = \Omega(2^n)$



$f(n) = \Omega(g(n))$

Asymptotisk notation

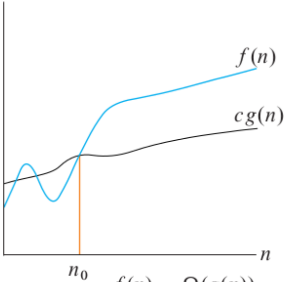
Big-Omega

Definition (Big-Omega, Ω)

For en given funktion $g(n)$ er $\Omega(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c \text{ og } n_0 \text{ sådan at } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Vi skriver $T(n) = \Omega(g(n))$ hvis $T(n) \in \Omega(g(n))$
- Intuition: $T(n)$ vokser asymptotisk hurtigere end $g(n)$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n^3)$
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Omega(n)$
  - $T(n) = 2^n + 41n^{27} = \Omega(2^n)$
  - $T(n) = 100 = \Omega(1)$



$f(n) = \Omega(g(n))$

ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{ & f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ & \text{sådan at } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for alle } n \geq n_0 \}\end{aligned}$$

Asymptotisk notation

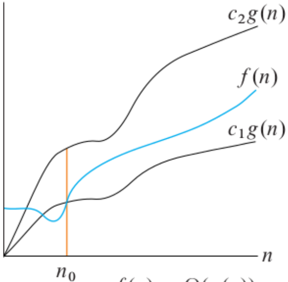
Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ \text{sådan at } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}$$

- Intuition: $g(n)$ er et asymptotisk tight bound for $T(n)$



$f(n) = \Theta(g(n))$

ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

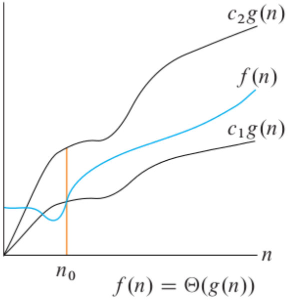
Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{f(n) : &\text{ der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ &\text{sådan at } 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \text{ for alle } n \ge n_0\}\end{aligned}$$

- Intuition: $g(n)$ er et asymptotisk tight bound for $T(n)$
- Theorem: for to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ har vi at $f(n) = \Theta(g(n))$ hvis og kun hvis $f(n) = \Omega(g(n))$ og $f(n) = O(g(n))$



ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

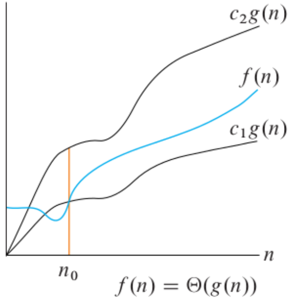
Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{f(n) :\ & \text{der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ & \text{sådan at } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}\end{aligned}$$

- Intuition: $g(n)$ er et asymptotisk tight bound for $T(n)$
- Theorem: for to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ har vi at $f(n) = \Theta(g(n))$ hvis og kun hvis $f(n) = \Omega(g(n))$ og $f(n) = O(g(n))$
- Eksempler:



ALBORG
NIVERSITET

Asymptotisk notation

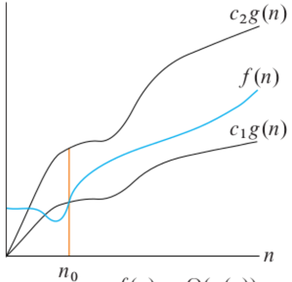
Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{f(n) : & \text{ der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ & \text{ sådan at } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for alle } n \geq n_0\}\end{aligned}$$

- Intuition: $g(n)$ er et asymptotisk tight bound for $T(n)$
- Theorem: for to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ har vi at $f(n) = \Theta(g(n))$ hvis og kun hvis $f(n) = \Omega(g(n))$ og $f(n) = O(g(n))$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Theta(n^3)$



$f(n) = \Theta(g(n))$

ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

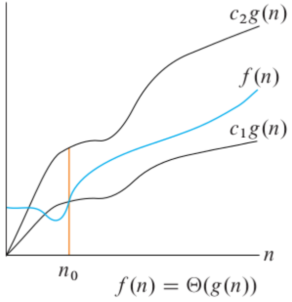
Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{ & f(n) : \text{der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ & \text{sådan at } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for alle } n \geq n_0 \}\end{aligned}$$

- Intuition: $g(n)$ er et asymptotisk tight bound for $T(n)$
- Theorem: for to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ har vi at $f(n) = \Theta(g(n))$ hvis og kun hvis $f(n) = \Omega(g(n))$ og $f(n) = O(g(n))$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Theta(n^3)$
  - $T(n) = 2^n + 41n^{27} = \Theta(2^n)$



ALBORG NIVERSITET

Asymptotisk notation

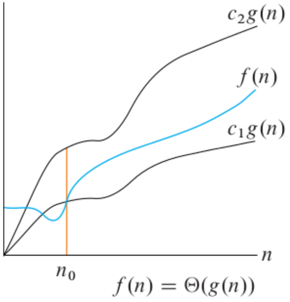
Big-Theta

Definition (Big-Theta, Θ)

For en given funktion $g(n)$ er $\Theta(g(n))$ det sæt af funktioner, således at

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{ f(n) :\ & \text{der eksisterer positive konstanter } c_1, c_2 \text{ og } n_0 \\ & \text{sådan at } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for alle } n \geq n_0 \}\end{aligned}$$

- Intuition: $g(n)$ er et asymptotisk tight bound for $T(n)$
- Theorem: for to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ har vi at $f(n) = \Theta(g(n))$ hvis og kun hvis $f(n) = \Omega(g(n))$ og $f(n) = O(g(n))$
- Eksempler:
  - $T(n) = 23n^3 + 1000n = \Theta(n^3)$
  - $T(n) = 2^n + 41n^{27} = \Theta(2^n)$
  - $T(n) = 100 = \Theta(1)$



ALBORG
NIVERSITET

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde (‘ingeniørmetoden’) til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer
  - $T(n) = n^3 + 1000n^2 - n \log n + 13n = \Theta(n^3)$

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer
  - $T(n) = n^3 + 1000n^2 - n \log n + 13n = \Theta(n^3)$
- Hvordan identificerer man mindre termer?

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer
  - $T(n) = n^3 + 1000n^2 - n \log n + 13n = \Theta(n^3)$
- Hvordan identificerer man mindre termer?
  - $c < \log n < n < n \log n < n^a < b^n < n!$

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer
  - $T(n) = n^3 + 1000n^2 - n \log n + 13n = \Theta(n^3)$
- Hvordan identificerer man mindre termer?
  - $c < \log n < n < n \log n < n^a < b^n < n!$
  - Konstant, logaritmisk, log linear, polynomial, eksponentiel, fakultet

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer
  - $T(n) = n^3 + 1000n^2 - n \log n + 13n = \Theta(n^3)$
- Hvordan identificerer man mindre termer?
  - $c < \log n < n < n \log n < n^a < b^n < n!$
  - Konstant, logaritmisk, log linear, polynomial, eksponentiel, fakultet

Asymptotisk notation

Tips og tricks

Denne nemme måde ('ingeniørmetoden') til at bruge asymptotisk notation:

- Ignorer indledende konstanter
  - $T(n) = 1000n^2 = \Theta(n^2)$
- Ignorer mindre termer
  - $T(n) = n^3 + 1000n^2 - n \log n + 13n = \Theta(n^3)$
- Hvordan identificerer man mindre termer?
  - $c < \log n < n < n \log n < n^a < b^n < n!$
  - Konstant, logaritmisk, log linear, polynomial, eksponentiel, fakultet

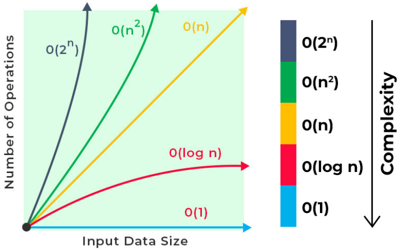


Figure: Source: https://www.geeksforgeeks.org/what-is-logarithmic-time-complexity

Asymptotisk analyse

Insertion sort

Vi slutter, hvor vi startede — med Insertion-Sort. Nu da vi kender til asymptotisk analyse og notation, kan vi så gribe vores analyse lidt lettere an?

$\textsc{Insertion-Sort}(A)$

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i - 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j - 1
    A[j + 1] = key
```

Asymptotisk analyse

Insertion sort

Vi slutter, hvor vi startede — med Insertion-Sort. Nu da vi kender til asymptotisk analyse og notation, kan vi så gribe vores analyse lidt lettere an?

INSERTION-SORT(A)

```
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

- Vi ser, at hele algoritmen er pakket ind i en for-løkke, der kører $\Theta(n)$ gange

Asymptotisk analyse

Insertion sort

Vi slutter, hvor vi startede — med Insertion-Sort. Nu da vi kender til asymptotisk analyse og notation, kan vi så gribe vores analyse lidt lettere an?

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

- Vi ser, at hele algoritmen er pakket ind i en for-løkke, der kører $\Theta(n)$ gange
- Vi ser, at der i for-løkken er en while-løkke, der i worst case selv kører $\Theta(n)$ gange

Asymptotisk analyse

Insertion sort

Vi slutter, hvor vi startede — med Insertion-Sort. Nu da vi kender til asymptotisk analyse og notation, kan vi så gribe vores analyse lidt lettere an?

```
INSERTION-SORT(A)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```

- Vi ser, at hele algoritmen er pakket ind i en for-løkke, der kører $\Theta(n)$ gange
- Vi ser, at der i for-løkken er en while-løkke, der i worst case selv kører $\Theta(n)$ gange
- Resten af linierne er konstanter, altså har vi $T(n) = \Theta(n) \cdot \Theta(n) = \Theta(n^2)$

Dagens temaer

Opsummering

- Vi har mødt vores første sorteringsalgoritme — Insertion-Sort!
  - Simpel at implementere og forstå
  - God til næsten sorterede sekvenser
  - Den asymptotiske worst case køretid er kvadratisk
- Loop invarianter og korrekthed
  - Initialization, maintenance og termination
- Asymptotisk analyse og notation
  - O, Ω, Θ

Tak for i dag!

Flere exercises..

Den bedste måde ikke at snyde sig selv på er lave exercises!