Soluzione al II parziale di Analisi di Programmi (a.a. 2008/09)

Andrea Simonetto*
(simonett@cs.unibo.it)

27 maggio 2009

*Università degli Studi di Bologna

Si consideri il linguaggio:

$$E \ ::= \ n \mid E \texttt{+} E \mid \texttt{ln}\, E$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ sono gli interi, `+` è la somma tra interi e `ln` è la funzione logaritmo in base 10 arrotondata all'intero per eccesso.

Esercizio 1. Definire la semantica astratta dei segni (dopo aver definito il dominio concreto, il dominio astratto e la semantica concreta); sia $\ln^{\mathcal{A}}$ la versione astratta di `ln`.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A} \arrow[dd, shift right, "\gamma"'] \\
E \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "\eta"'] & \\
& \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \arrow[uu, shift right, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

- $(\mathscr{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ formano un reticolo completo (dove $\subseteq$ è la relazione di inclusione insiemistica);
- $(\mathcal{A}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}})$ formano un reticolo completo così definito:

$$\begin{tikzcd}
& \top \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
+ \arrow[dr, dash] & 0 \arrow[d, dash] & - \arrow[dl, dash] \\
& \bot &
\end{tikzcd}$$

- Semantica concreta

$$\eta \quad : \quad E \to \mathscr{P}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}
\eta(n) &\triangleq \{n\} \\
\eta(E_1 \texttt{+} E_2) &\triangleq \eta(E_1) +^{\mathcal{C}} \eta(E_2) \triangleq \{x + y \mid x \in \eta(E_1), y \in \eta(E_2)\} \\
\eta(\texttt{ln} E) &\triangleq \ln^{\mathcal{C}}(\eta(E)) \triangleq \{\lceil \log_{10}(x) \rceil \mid x \in \eta(E)\}
\end{aligned}$$

- Semantica astratta

$$
\begin{aligned}
\sigma \quad &: \quad E \to \mathcal{A} \\[1em]
\sigma(n) \quad &\triangleq \quad \begin{cases} + & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ - & \text{altrimenti} \end{cases} \\
\sigma(E_1\texttt{+}E_2) \quad &\triangleq \quad \sigma(E_1) +^{\mathcal{A}} \sigma(E_2) \\
\sigma(\texttt{ln}E) \quad &\triangleq \quad \ln^{\mathcal{A}}(\sigma(E)) \triangleq \begin{cases} \top & \text{se } \sigma(E) = + \text{ oppure } \sigma(E) = \top \\ \bot & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
$$

e dove $a +^{\mathcal{A}} b$ è definito come segue:

$a \backslash b$	$+$	0	$-$	$\top$	$\bot$
$+$	$+$	$+$	$\top$	$\top$	$\bot$
0	$+$	0	$-$	$\top$	$\bot$
$-$	$\top$	$-$	$-$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

- Concretizzazione

$$
\gamma \quad : \quad \mathcal{A} \to \mathscr{P}(\mathbb{Z})
$$

$$
\gamma(a) \quad \triangleq \quad \begin{cases} \mathbb{Z}_{>0} & \text{se } a = + \\ \mathbb{Z}_{<0} & \text{se } a = - \\ \{0\} & \text{se } a = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } a = \top \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Osserviamo che la concretizzazione è monotona, poichè mappa il *top* ed il *bottom* di $\mathcal{A}$ rispettivamente in $\mathbb{Z}$ e $\emptyset$, che sono il più grande ed il più piccolo elemento di $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ e tutti gli altri elementi non sono in relazione tra loro.

Osserviamo inoltre che la concretizzazione è iniettiva: infatti elementi diversi del dominio sono sempre mappati in elementi distinti del codominio.

Esercizio 2. Dimostrare che il dominio concreto e astratto formano un'inserzione di Galois.

La funzione di astrazione definita da:

$$\begin{aligned} \alpha &: \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{A} \\ \alpha(c) &\triangleq \bigsqcap \{a \in \mathcal{A} \mid c \subseteq \gamma(a)\} \end{aligned}$$

è monotona, per monotonia del glb. Proseguiamo osservando che:

(i) $(\mathcal{A}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}})$ e $(\mathscr{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ sono reticoli completi;

(ii) α e γ sono monotone;

(iii) $\forall a \in \mathcal{A} \,.\, a = \alpha(\gamma(a))$. Infatti:

a	$\gamma(a)$	$\alpha(\gamma(a))$
$+$	$\mathbb{Z}_{>0}$	$+$
0	$\{0\}$	0
$-$	$\mathbb{Z}_{<0}$	$-$
$\top$	$\mathbb{Z}$	$\top$
$\bot$	$\emptyset$	$\bot$

(iv) $\forall c \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \,.\, c \subseteq \gamma(\alpha(c))$. Infatti:

- $c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad c \subseteq \gamma(\bot) = \emptyset$
- $c \subseteq \mathbb{Z}_{>0} \land c \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad c \subseteq \gamma(+) = \mathbb{Z}_{>0}$
- $c = \{0\} \quad \Rightarrow \quad c \subseteq \gamma(0) = \{0\}$
- $c \subseteq \mathbb{Z}_{<0} \land c \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad c \subseteq \gamma(-) = \mathbb{Z}_{<0}$
- in tutti gli altri casi $\Rightarrow \quad c \subseteq \gamma(\top) = \mathbb{Z}$

Da questi fatti concludiamo che il dominio concreto e astratto con le funzioni α e γ formano un'inserzione di Galois. $\square$

Esercizio 3. Definire e dimostrare la correttezza locale di $\ln^{\mathcal{A}}$.

$$\forall a \in \mathcal{A} \qquad \ln^{\mathcal{C}}(\gamma(a)) \subseteq \gamma(\ln^{\mathcal{A}}(a))$$

Dimostrazione. Per casi su a:

- $a \equiv + \Rightarrow \ln^{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}_{>0}) = \mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{Z} = \gamma(\top)$
- $a \equiv 0 \Rightarrow \ln^{\mathcal{C}}(\{0\}) = \emptyset \subseteq \emptyset = \gamma(\bot)$
- $a \equiv - \Rightarrow \ln^{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}_{<0}) = \emptyset \subseteq \emptyset = \gamma(\bot)$
- $a \equiv \top \Rightarrow \ln^{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{Z} = \gamma(\top)$
- $a \equiv \bot \Rightarrow \ln^{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset \subseteq \emptyset = \gamma(\bot)$

$\square$