

Soluzione al II parziale di Analisi di
Programmi
(a.a. 2008/09)

Andrea Simonetto*
(simonett@cs.unibo.it)

27 maggio 2009

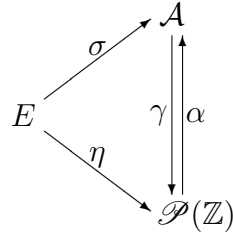
*Università degli Studi di Bologna

Si consideri il linguaggio:

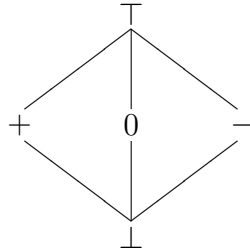
$$E ::= n \mid E + E \mid \text{ln } E$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ sono gli interi, $+$ è la somma tra interi e ln è la funzione logaritmo in base 10 arrotondata all'intero per eccesso.

Esercizio 1. Definire la semantica astratta dei segni (dopo aver definito il dominio concreto, il dominio astratto e la semantica concreta); sia $\text{ln}^{\mathcal{A}}$ la versione astratta di ln .



- $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ formano un reticolo completo (dove \subseteq è la relazione di inclusione insiemistica);
- $(\mathcal{A}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}})$ formano un reticolo completo così definito:



- Semantica concreta

$$\eta : E \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \eta(n) &\triangleq \{n\} \\ \eta(E_1 + E_2) &\triangleq \eta(E_1) +^c \eta(E_2) \triangleq \{x + y \mid x \in \eta(E_1), y \in \eta(E_2)\} \\ \eta(\text{ln } E) &\triangleq \text{ln}^c(\eta(E)) \triangleq \{\lceil \log_{10}(x) \rceil \mid x \in \eta(E)\} \end{aligned}$$

- Semantica astratta

$$\sigma \quad : \quad E \rightarrow \mathcal{A}$$

$$\sigma(n) \triangleq \begin{cases} + & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ - & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sigma(E_1 + E_2) \triangleq \sigma(E_1) +^{\mathcal{A}} \sigma(E_2)$$

$$\sigma(\text{ln} E) \triangleq \text{ln}^{\mathcal{A}}(\sigma(E)) \triangleq \begin{cases} \top & \text{se } \sigma(E) = + \text{ oppure } \sigma(E) = \top \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dove $a +^{\mathcal{A}} b$ è definito come segue:

$a \backslash b$	+	0	-	\top	\perp
+	+	+	\top	\top	\perp
0	+	0	-	\top	\perp
-	\top	-	-	\top	\perp
\top	\top	\top	\top	\top	\perp
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp

- Concretizzazione

$$\gamma \quad : \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$$

$$\gamma(a) \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z}_{>0} & \text{se } a = + \\ \mathbb{Z}_{<0} & \text{se } a = - \\ \{0\} & \text{se } a = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } a = \top \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che la concretizzazione è monotona, poichè mappa il *top* ed il *bottom* di \mathcal{A} rispettivamente in \mathbb{Z} e \emptyset , che sono il più grande ed il più piccolo elemento di $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ e tutti gli altri elementi non sono in relazione tra loro.

Osserviamo inoltre che la concretizzazione è iniettiva: infatti elementi diversi del dominio sono sempre mappati in elementi distinti del codominio.

Esercizio 2. Dimostrare che il dominio concreto e astratto formano un'inserzione di Galois.

La funzione di astrazione definita da:

$$\begin{aligned}\alpha & : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A} \\ \alpha(c) & \triangleq \bigsqcap \{a \in \mathcal{A} \mid c \subseteq \gamma(a)\}\end{aligned}$$

è monotona, per monotonia del glb. Proseguiamo osservando che:

- (i) $(\mathcal{A}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}})$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ sono reticoli completi;
- (ii) α e γ sono monotone;
- (iii) $\forall a \in \mathcal{A} . a = \alpha(\gamma(a))$. Infatti:

a	$\gamma(a)$	$\alpha(\gamma(a))$
$+$	$\mathbb{Z}_{>0}$	$+$
0	$\{0\}$	0
$-$	$\mathbb{Z}_{<0}$	$-$
\top	\mathbb{Z}	\top
\perp	\emptyset	\perp

- (iv) $\forall c \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) . c \subseteq \gamma(\alpha(c))$. Infatti:

- $c = \emptyset \Rightarrow c \subseteq \gamma(\perp) = \emptyset$
- $c \subseteq \mathbb{Z}_{>0} \wedge c \neq \emptyset \Rightarrow c \subseteq \gamma(+) = \mathbb{Z}_{>0}$
- $c = \{0\} \Rightarrow c \subseteq \gamma(0) = \{0\}$
- $c \subseteq \mathbb{Z}_{<0} \wedge c \neq \emptyset \Rightarrow c \subseteq \gamma(-) = \mathbb{Z}_{<0}$
- in tutti gli altri casi $\Rightarrow c \subseteq \gamma(\top) = \mathbb{Z}$

Da questi fatti concludiamo che il dominio concreto e astratto con le funzioni α e γ formano un'inserzione di Galois. \square

Esercizio 3. Definire e dimostrare la correttezza locale di \ln^A .

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad \ln^c(\gamma(a)) \subseteq \gamma(\ln^A(a))$$

Dimostrazione. Per casi su a :

- $a \equiv + \Rightarrow \ln^c(\mathbb{Z}_{>0}) = \mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{Z} = \gamma(\top)$
- $a \equiv 0 \Rightarrow \ln^c(\{0\}) = \emptyset \subseteq \emptyset = \gamma(\perp)$
- $a \equiv - \Rightarrow \ln^c(\mathbb{Z}_{<0}) = \emptyset \subseteq \emptyset = \gamma(\perp)$
- $a \equiv \top \Rightarrow \ln^c(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{Z} = \gamma(\top)$
- $a \equiv \perp \Rightarrow \ln^c(\emptyset) = \emptyset \subseteq \emptyset = \gamma(\perp)$

□