technische universität
dortmund

LS 2 /
Informatik

Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Infos zum Test

- Erster Test 4.6. (nicht wie bisher geplant 6.6.)

Teile & Herrsche

Teile & Herrsche (Divide & Conquer)

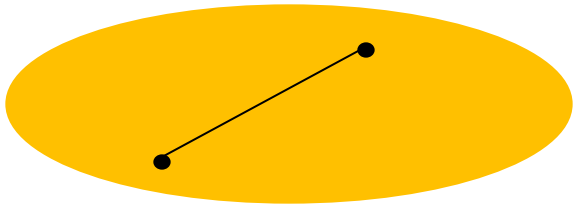
- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

Teile & Herrsche

Definition (konvex)

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn für alle Punkte $p,q \in M$ gilt, dass jeder Punkte auf der Strecke pq ebenfalls in M ist.
- Formal: Sind $p,q \in M$, dann ist für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $r = \lambda p + (1-\lambda) \cdot q$ ebenfalls in M.

Beispiel



Teile & Herrsche

Definition (konvex)

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn für alle Punkte $p,q \in M$ gilt, dass jeder Punkte auf der Strecke pq ebenfalls in M ist.
- Formal: Sind $p,q \in M$, dann ist für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $r = \lambda p + (1-\lambda) \cdot q$ ebenfalls in M.

Beispiel

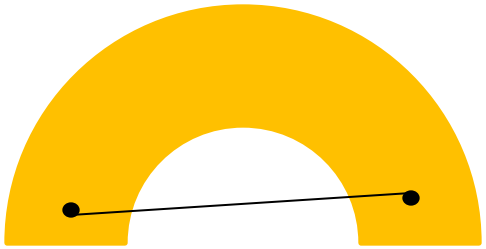
Die Menge ist konvex

Teile & Herrsche

Definition (konvex)

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn für alle Punkte $p,q \in M$ gilt, dass jeder Punkte auf der Strecke pq ebenfalls in M ist.
- Formal: Sind $p,q \in M$, dann ist für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $r = \lambda p + (1-\lambda) \cdot q$ ebenfalls in M.

Beispiel



Die Menge ist nicht konvex

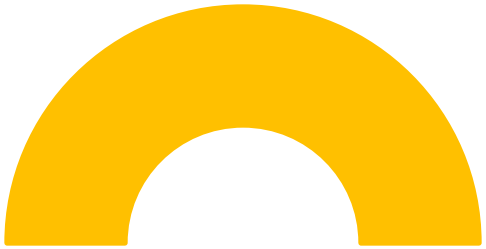
Teile & Herrsche

Definition (konvexe Hülle)

- Die konvexe Hülle einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die M enthalten.

- Intuitiv: Konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält

Beispiel



Teile & Herrsche

Definition (konvexe Hülle)

- Die konvexe Hülle einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die M enthalten.

- Intuitiv: Konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält

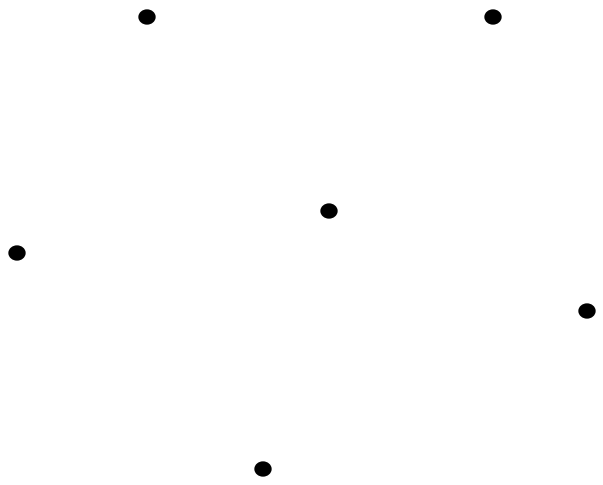
Beispiel

Die konvexe Hülle ist die Vereinigung
Der orangenen und der grünen Menge

Teile & Herrsche

Konvexe Hülle einer Punktmenge

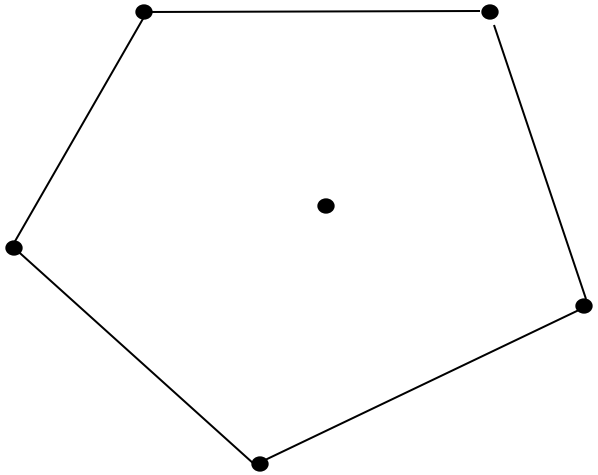
- Intuition: Punkte sind Nägel und die Hülle wird durch Gummiband um die Nägel eingeschlossen



Teile & Herrsche

Konvexe Hülle einer Punktmenge

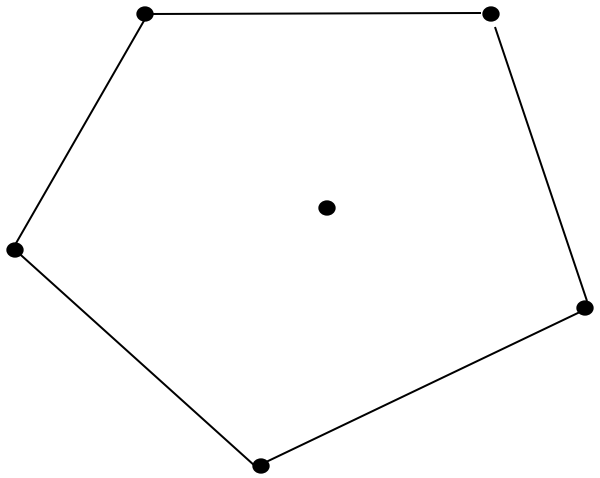
- Intuition: Punkte sind Nägel und die Hülle wird durch Gummiband um die Nägel eingeschlossen



Teile & Herrsche

Problem: Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge

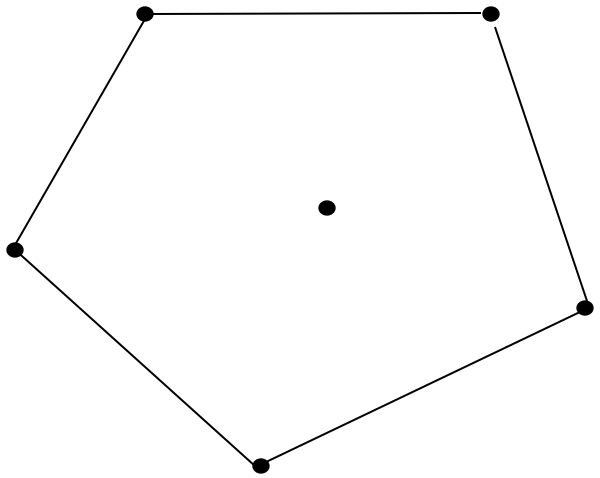
- Eingabe: Menge P von n Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$
- Ausgabe: Beschreibung der konvexen Hülle der Punktmenge



Teile & Herrsche

Problem: Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge

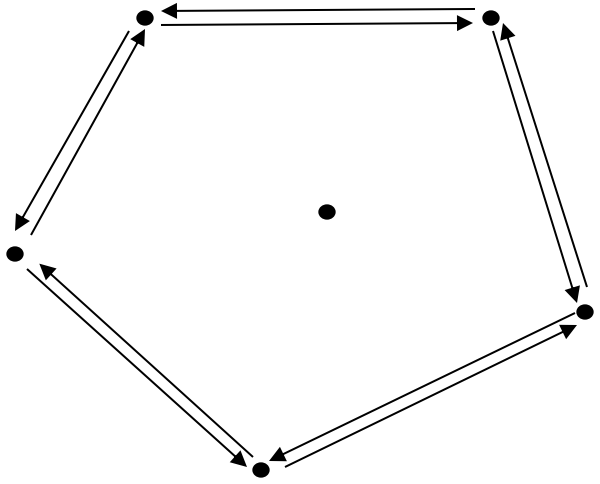
- Eingabe: Menge P von n Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$
- Ausgabe: Beschreibung der konvexen Hülle der Punktmenge



Teile & Herrsche

Darstellung der konvexen Hülle im Rechner

- Wir speichern den Rand der Hülle als doppelt verkettete Liste



Teile & Herrsche

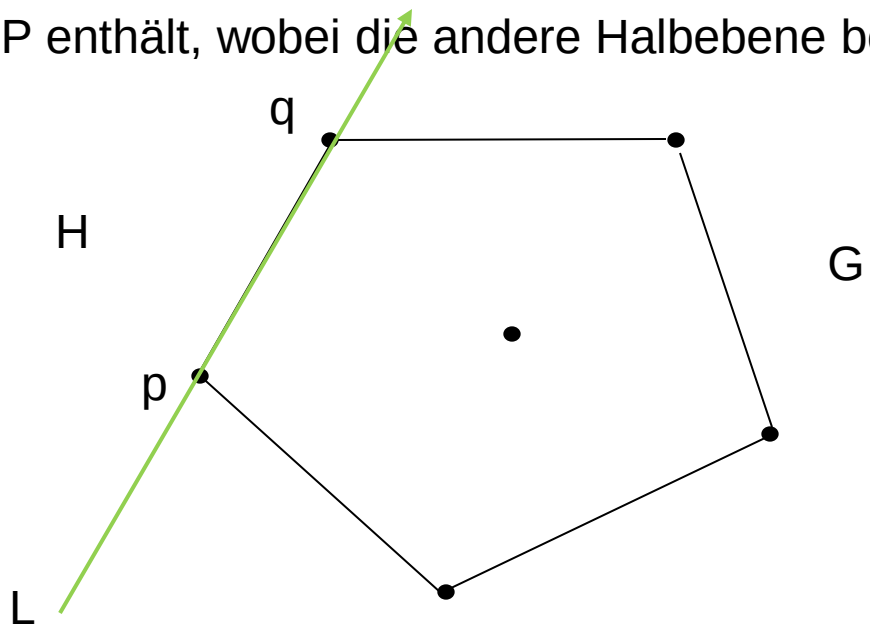
Allgemeine Lage

- Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass keine 3 Punkte auf einer Linie liegen und dass keine 2 Punkte dieselbe x-Koordinate haben.

Teile & Herrsche

Beobachtung

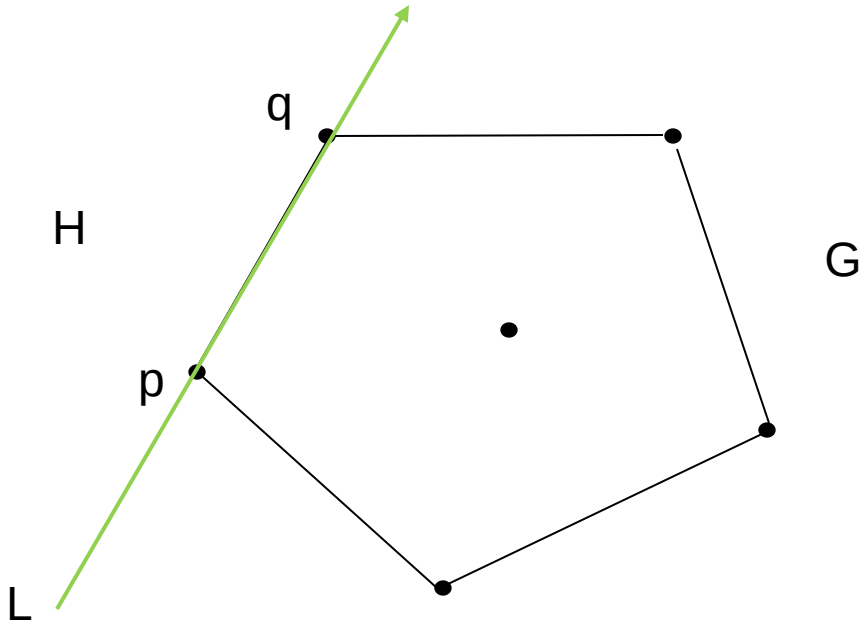
- Sei P eine Punktmenge in der Ebene. Eine Stecke pq mit p,q∈P liegt auf dem Rand der konvexen Hülle, genau dann wenn die gerichtete Linie L durch p und q die Ebene in die (offenen) Halbebenen H und G partitioniert, so dass eine Halbebene H von L keinen Punkt aus P enthält und G∪L alle Punkte aus P enthält, wobei die andere Halbebene bezeichnet.



Teile & Herrsche

Beobachtung

- Für jede Strecke pq auf der konvexen Hülle ist entweder für die gerichtete Gerade durch p und q oder durch q und p (also andersrum gerichtet) der Halbraum H auf der linken Seite der Geraden leer und G∪L enthält alle Punkte.



Teile & Herrsche

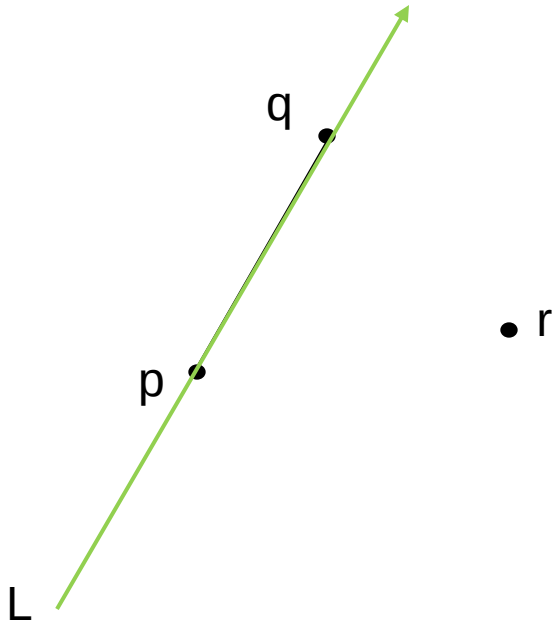
SimpleConvexHull(P)

1. **for each** $(p,q) \in P \times P$ **do**
2. valid $\leftarrow$ true
3. **for all** $r \in P-\{p,q\}$ **do**
4. **if** r liegt links von der gerichteten Linie durch p und q **then** valid $\leftarrow$ false
5. **if** valid= true **then** füge die gerichtete Kante pq zu E hinzu
6. Aus der Menge E konstruiere eine doppelt verkettete Liste der Eckknoten der konvexen Hülle

Teile & Herrsche

Geometrische Primitive

- Grundlegende geometrische Funktionen, die von einer konstanten Anzahl von Objekten abhängen, können in konstanter Zeit berechnet werden
- Z.B.: Liegt r links von der gerichteten Linie durch p und q



Teile & Herrsche

Schritt 6 des Algorithmus

- Entferne eine beliebige Kante pq aus E
- Wähle q als ersten Knoten der Liste
- Es muss eine gerichtete Kante geben, die von q ausgeht
- Diese führt zum nächsten Knoten r
- Füge r in die Liste als Nachfolger von q ein
- Auf diese Weise können wir Schritt für Schritt den Rand der Hülle als (doppelt verkettete) Liste konstruieren

Teile & Herrsche

SimpleConvexHull(P)

1. **for each** $(p,q) \in P \times P$ **do**
2. valid $\leftarrow$ true
3. **for all** $r \in P-\{p,q\}$ **do**
4. **if** r liegt links von der gerichteten Linie durch p und q **then** valid $\leftarrow$ false
5. **if** valid= true **then** füge die gerichtete Kante pq zu E hinzu
6. Aus der Menge E konstruiere eine doppelt verkettete Liste der Eckknoten der konvexen Hülle

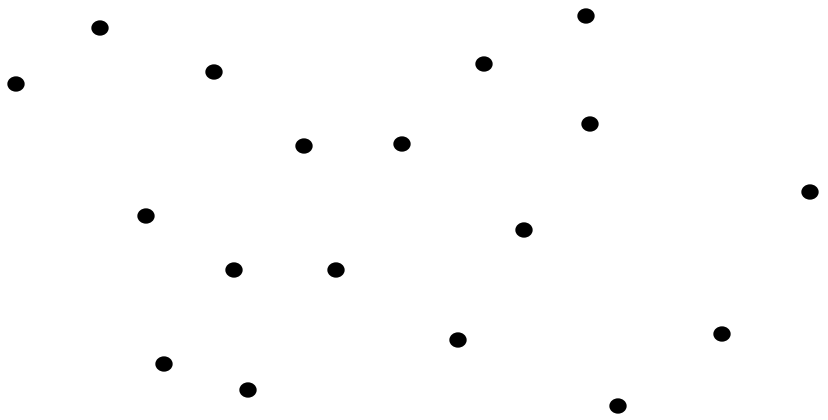
Laufzeit des Algorithm

- $O(n^3)$

Teile & Herrsche

Grundidee

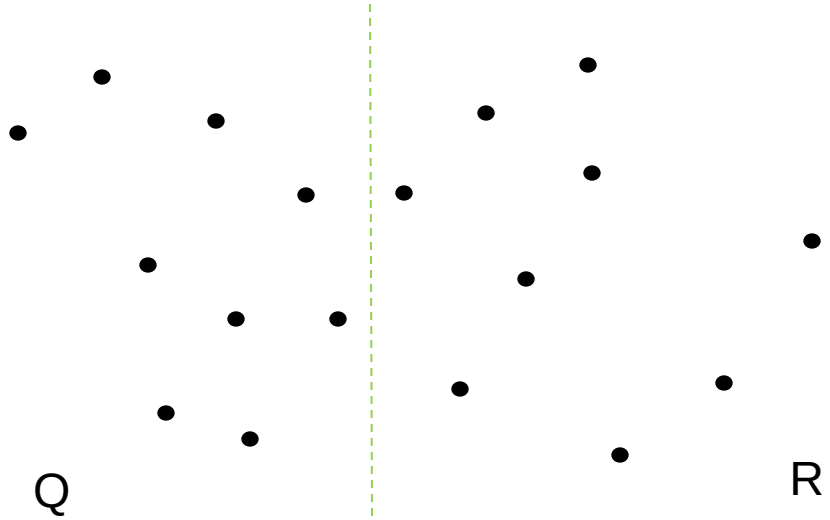
- Sortiere Punkte nach x-Koordinate
- Teile in zwei Hälften Q und R
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



Teile & Herrsche

Grundidee

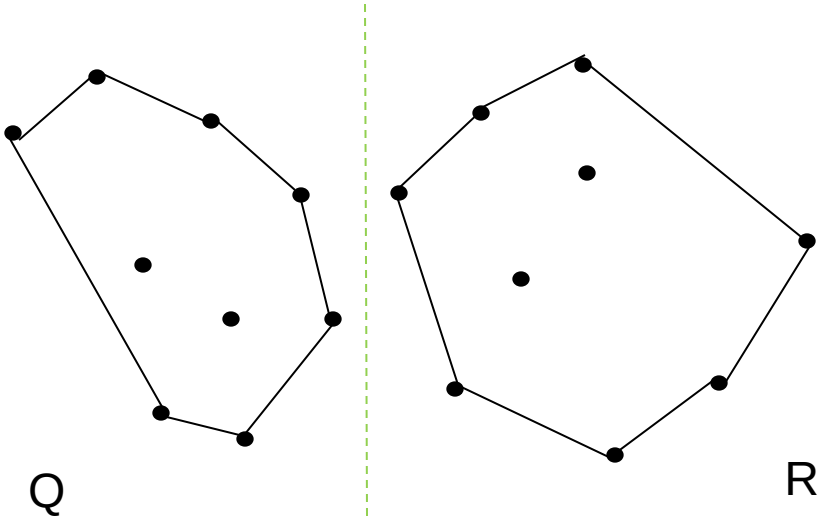
- Sortiere Punkte nach x-Koordinate
- Teile in zwei Hälften Q und R
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



Teile & Herrsche

Grundidee

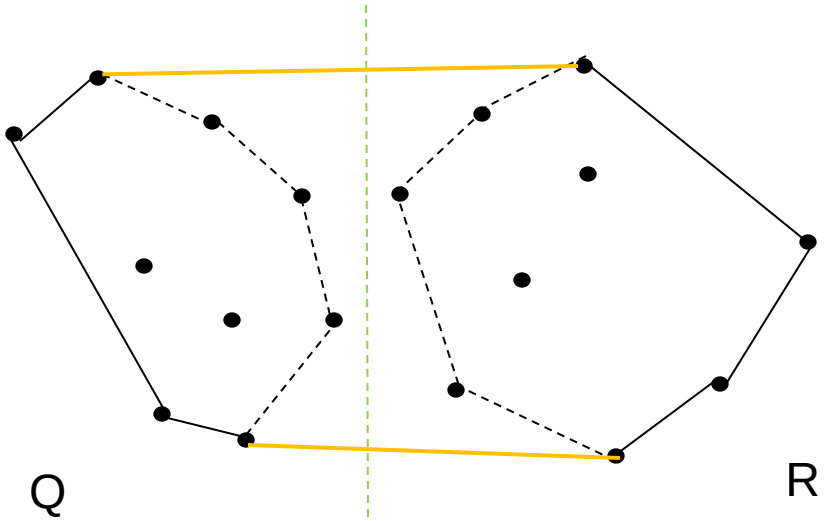
- Sortiere Punkte nach x-Koordinate
- Teile in zwei Hälften Q und R
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



Teile & Herrsche

Grundidee

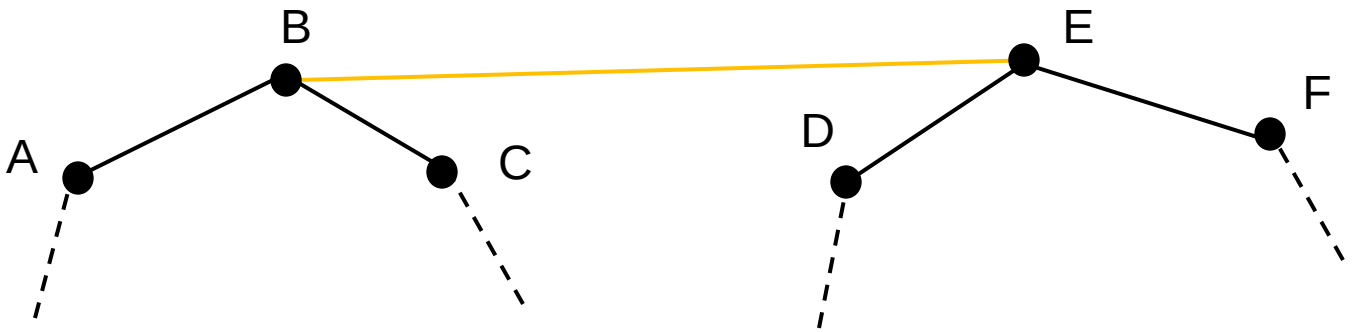
- Sortiere Punkte nach x-Koordinate
- Teile in zwei Hälften Q und R
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



Teile & Herrsche

Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F
- Winkel ABE ist größer als 180 Grad
- Winkel BEF ist größer als 180 Grad
- Winkel im Uhrzeigersinn



Teile & Herrsche

Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C

Beweis

- Die einzige andere Sortierung ist A, C, E
- Dann liegen A und C auf unterschiedlichen Seiten der Linie durch B und E
- Somit kann BE nicht zum Rand der konvexen Hülle gehören

Teile & Herrsche

Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F

Beweis

- Analog

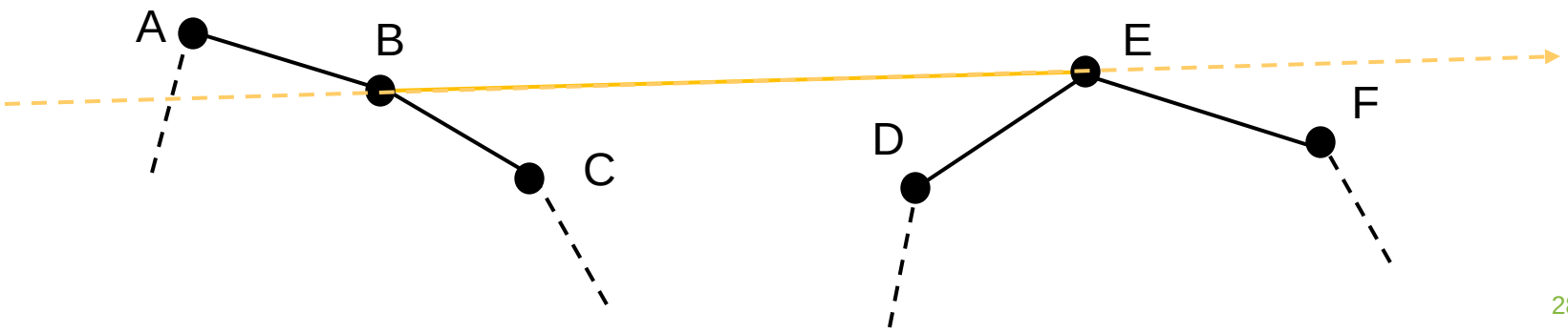
Teile & Herrsche

Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

- Winkel ABE ist größer als 180 Grad

Beweis

- Ist der Winkel nicht größer als 180 Grad, so ist er aufgrund der allgemeinen Lage kleiner als 180 Grad
- Dann liegt A aber links der gerichteten Linie durch B und E und somit liegt BE nicht auf dem Rand der konvexen Hülle



Teile & Herrsche

Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

- Winkel ABE ist größer als 180 Grad
- Winkel BEF ist größer als 180 Grad

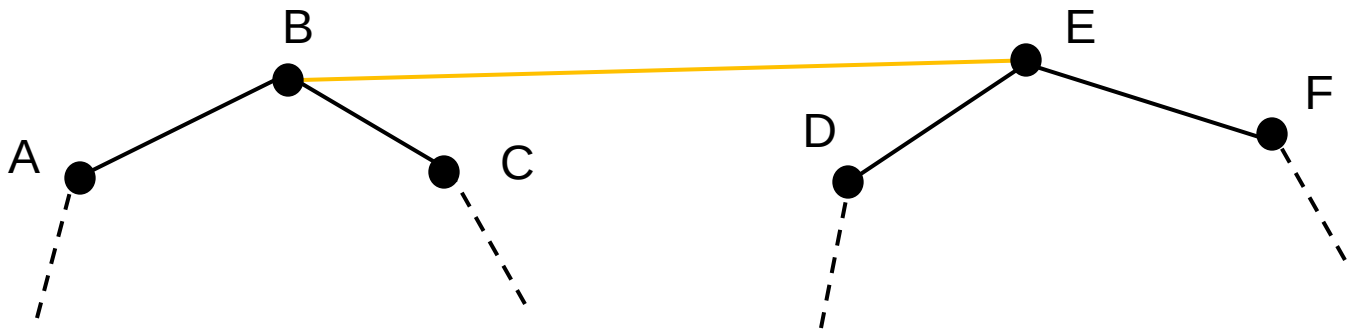
Beweis

- Analog

Teile & Herrsche

Hinreichende Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

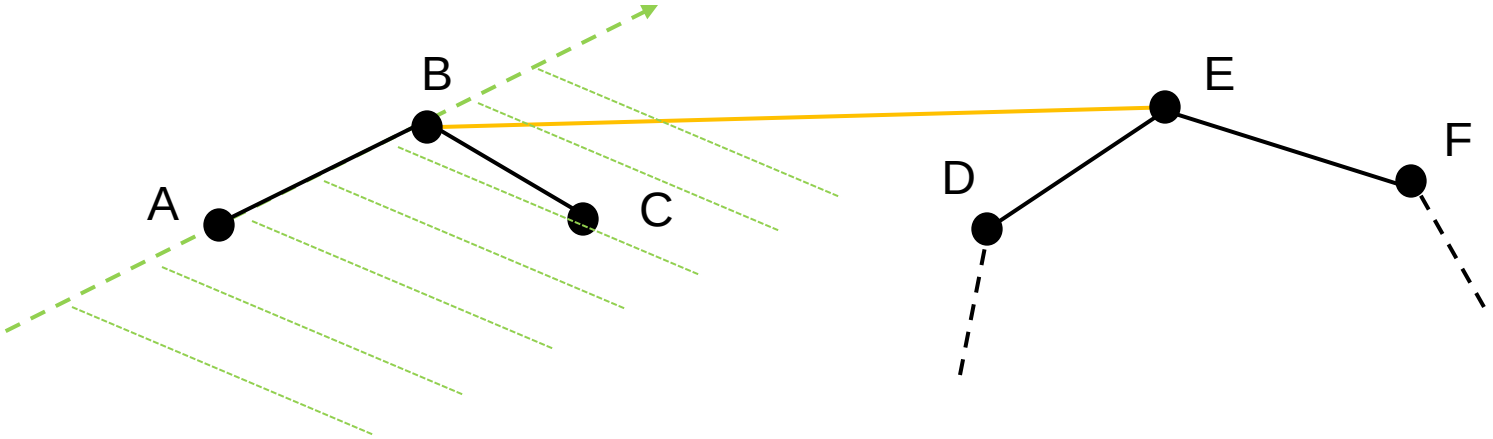
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F
- Winkel ABE ist größer als 180 Grad
- Winkel BEF ist größer als 180 Grad



Teile & Herrsche

Beweis

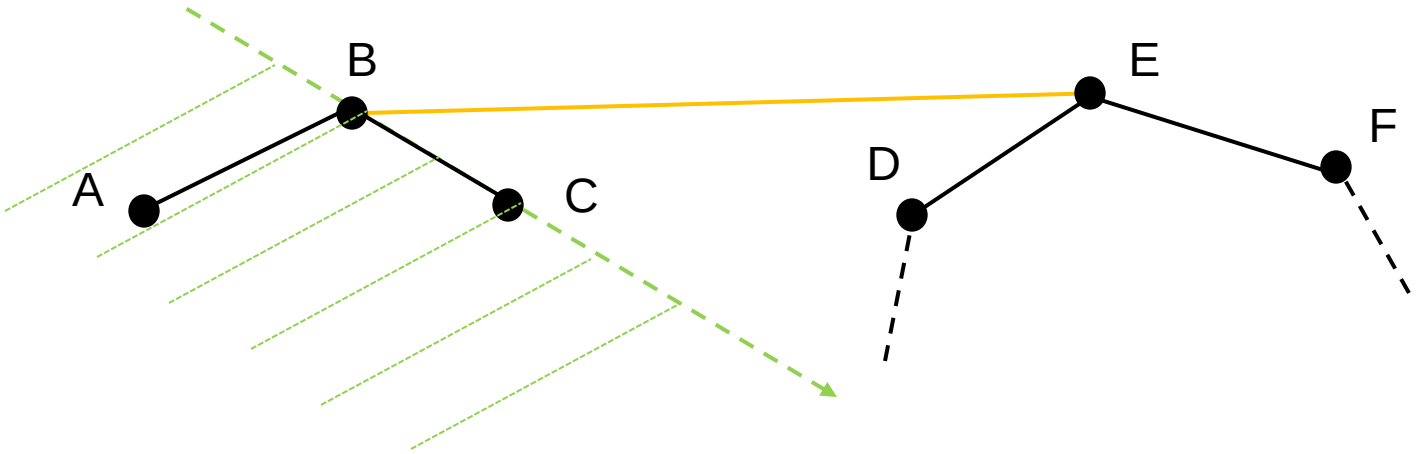
- Da AB auf dem Rand der konvexen Hülle von Q liegt, liegen alle Punkte von Q links der Linie durch A und B.



Teile & Herrsche

Beweis

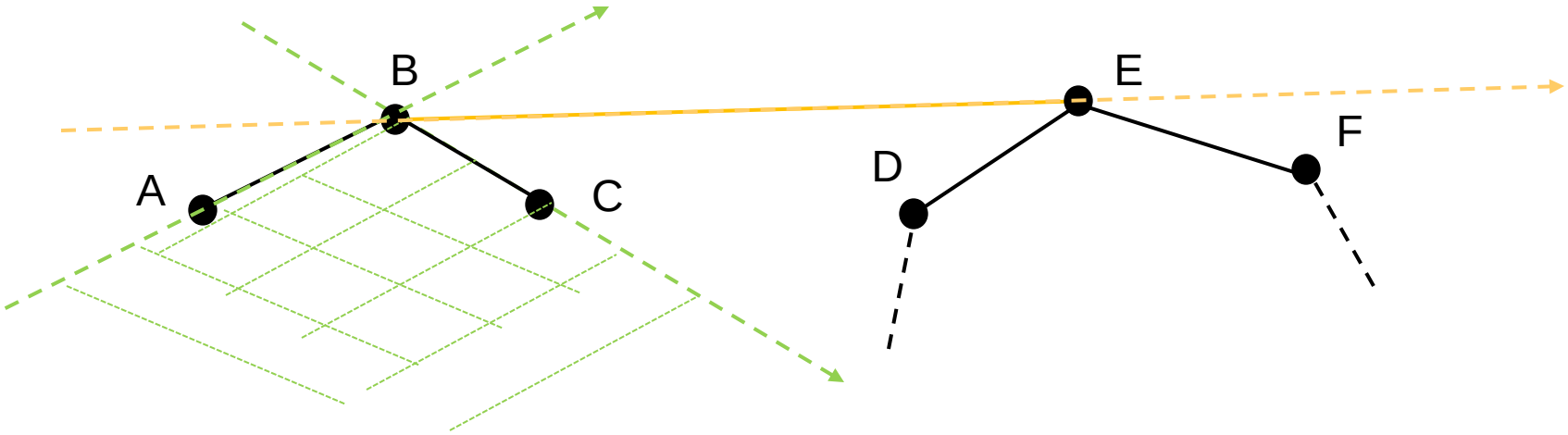
- Da AB auf dem Rand der konvexen Hülle von Q liegt, liegen alle Punkte von Q links der Linie durch A und B. Gleiches gilt für die Punkte B und C.



Teile & Herrsche

Beweis

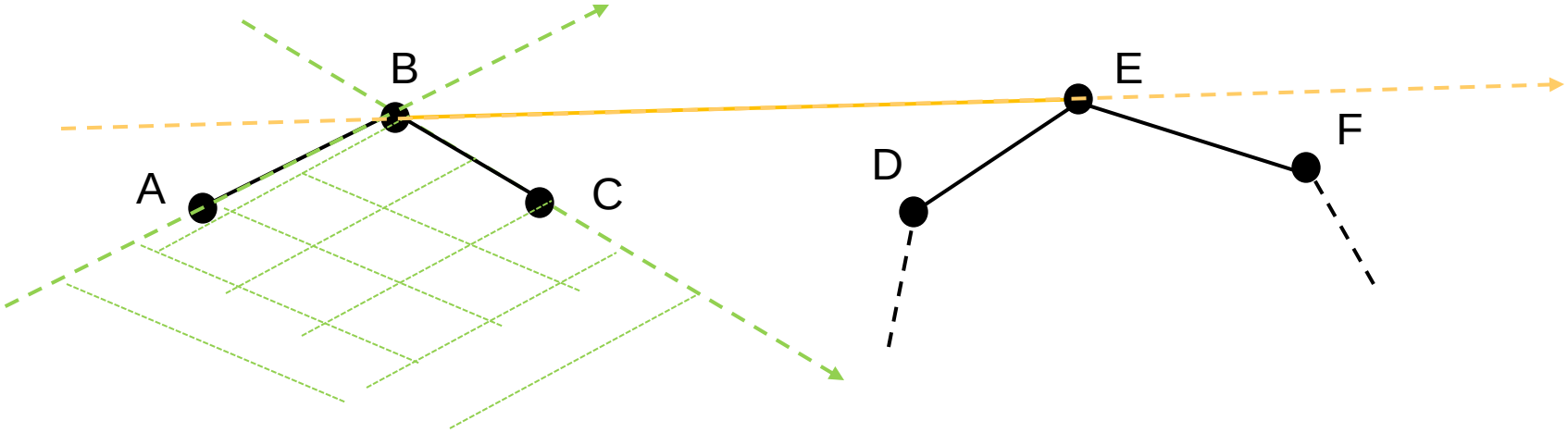
- Da AB auf dem Rand der konvexen Hülle von Q liegt, liegen alle Punkte von Q links der Linie durch A und B. Gleiches gilt für die Punkte B und C.
- Damit liegen alle Punkte aus Q rechts der gerichteten Linie durch B und E



Teile & Herrsche

Beweis

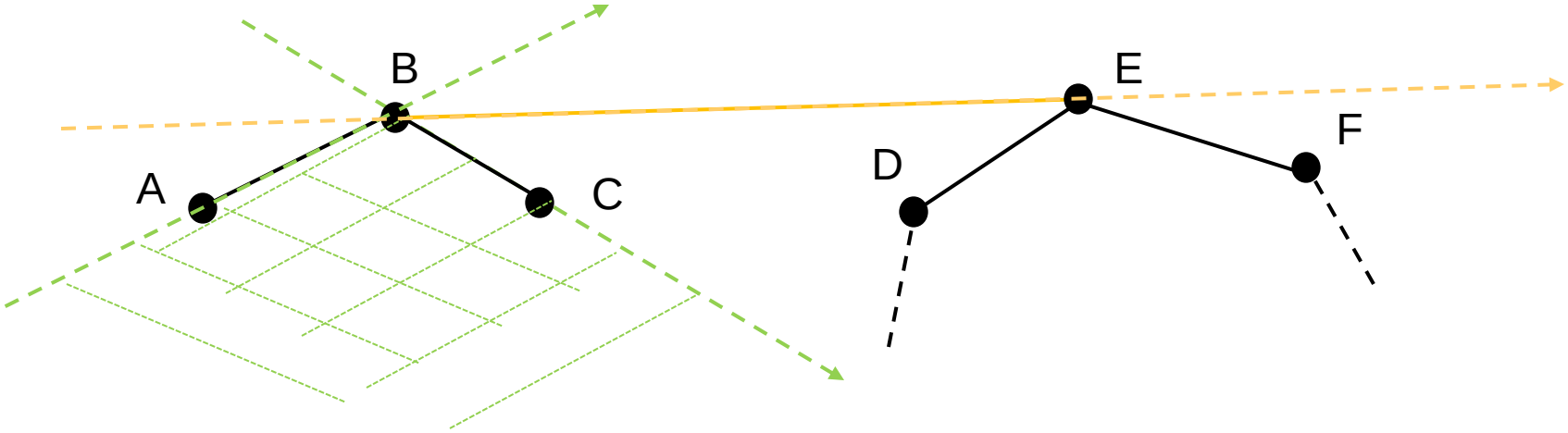
- Da AB auf dem Rand der konvexen Hülle von Q liegt, liegen alle Punkte von Q links der Linie durch A und B. Gleiches gilt für die Punkte B und C.
- Damit liegen alle Punkte aus Q rechts der gerichteten Linie durch B und E
- Analog zeigt man für R, dass alle Punkte rechts der Linie durch B und E liegen



Teile & Herrsche

Beweis

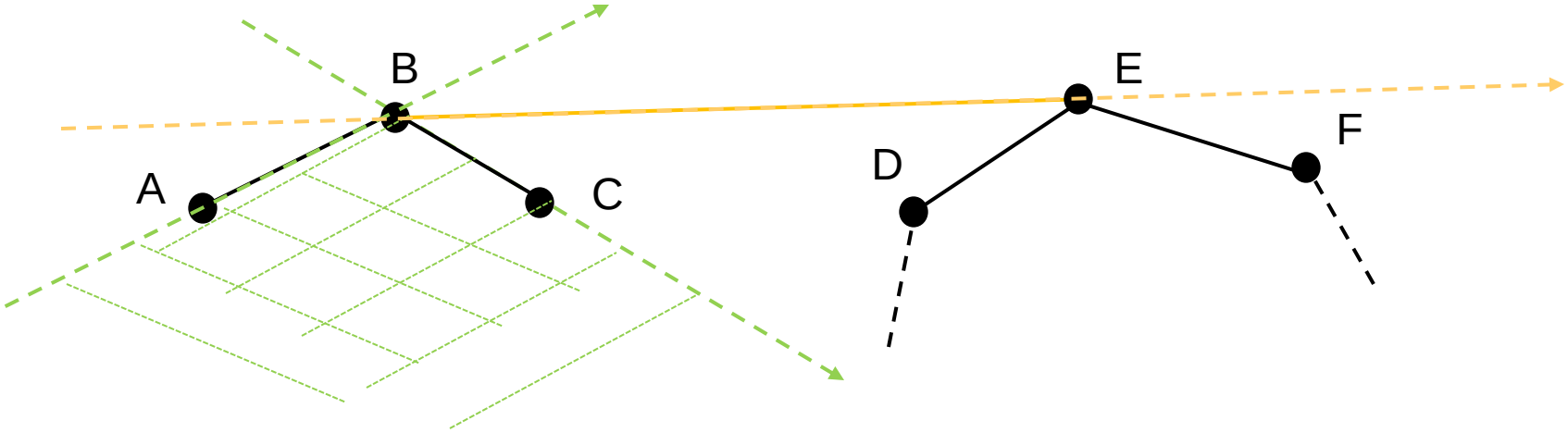
- Da AB auf dem Rand der konvexen Hülle von Q liegt, liegen alle Punkte von Q links der Linie durch A und B. Gleiches gilt für die Punkte B und C.
- Damit liegen alle Punkte aus Q rechts der gerichteten Linie durch B und E
- Analog zeigt man für R, dass alle Punkte rechts der Linie durch B und E liegen
- Damit liegt BE auf dem Rand der konvexen Hülle



Teile & Herrsche

Beweis

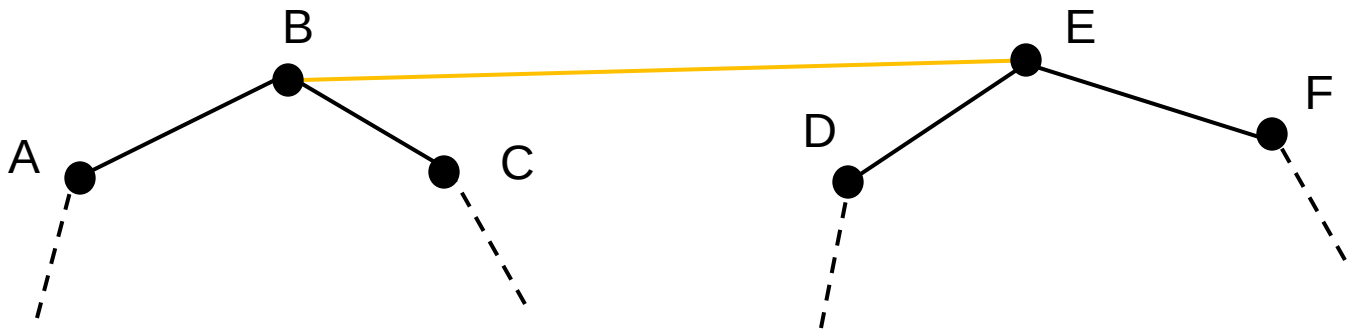
- Da AB auf dem Rand der konvexen Hülle von Q liegt, liegen alle Punkte von Q links der Linie durch A und B. Gleiches gilt für die Punkte B und C.
- Damit liegen alle Punkte aus Q rechts der gerichteten Linie durch B und E
- Analog zeigt man für R, dass alle Punkte rechts der Linie durch B und E liegen
- Damit liegt BE auf dem Rand der konvexen Hülle



Teile & Herrsche

Notwendige und Hinreichende Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke

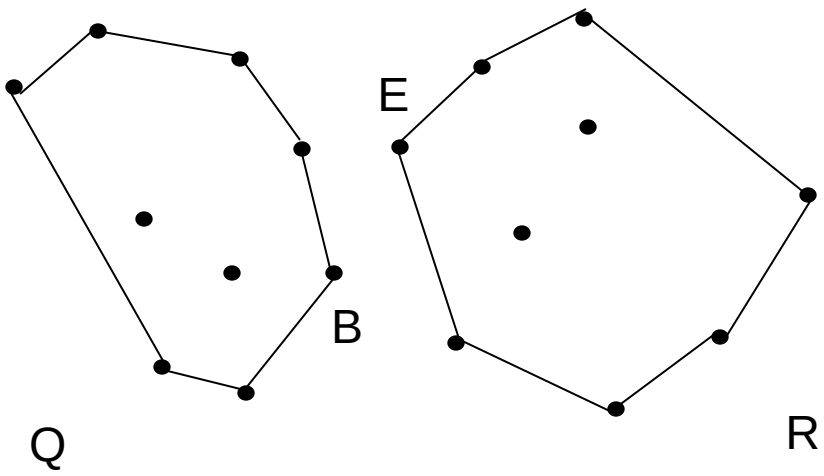
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F
- Winkel ABE ist größer als 180 Grad
- Winkel BEF ist größer als 180 Grad



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

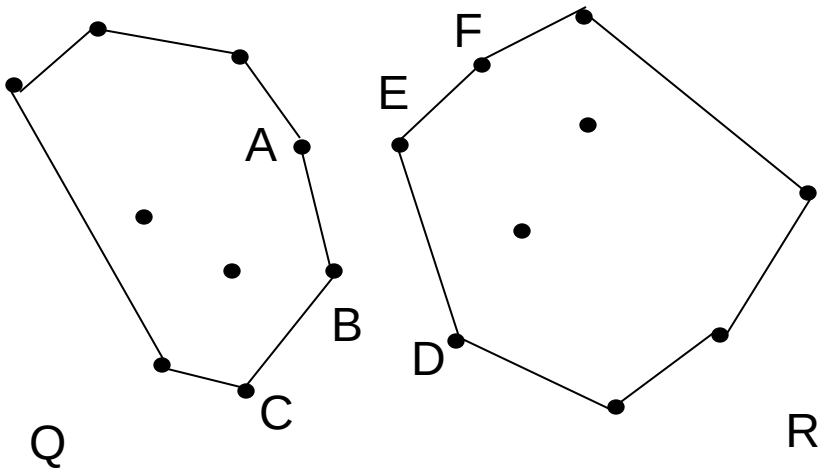
- Sei B der rechteste Knoten von Q und E der linkeste Knoten von R



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

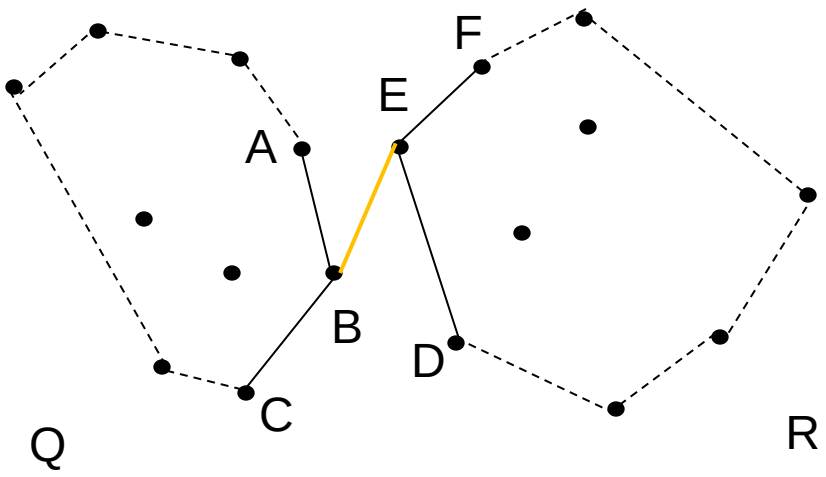
- Sei B der rechteste Knoten von Q und E der linkeste Knoten von R
- Sei A der Vorgänger und C der Nachfolger von B im Uhrzeigersinn
- Sei D der Vorgänger und F der Nachfolger von E im Uhrzeigersinn



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

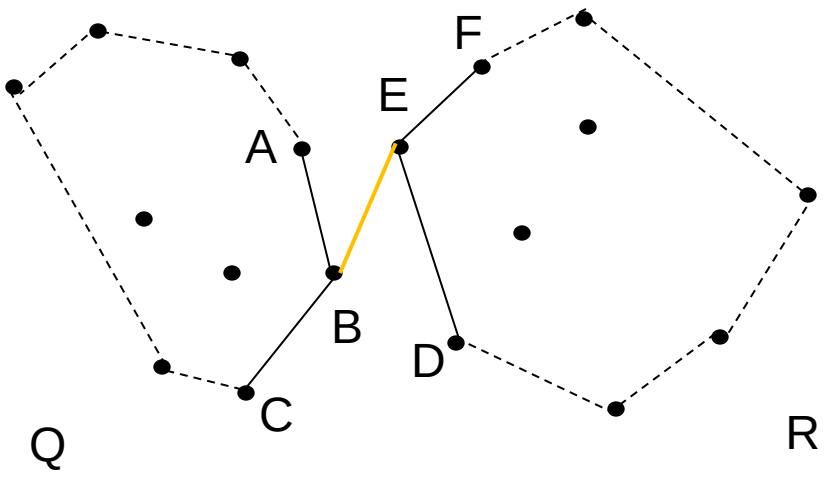
- Sei B der rechteste Knoten von Q und E der linkeste Knoten von R
- Sei A der Vorgänger und C der Nachfolger von B im Uhrzeigersinn
- Sei D der Vorgänger und F der Nachfolger von E im Uhrzeigersinn



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

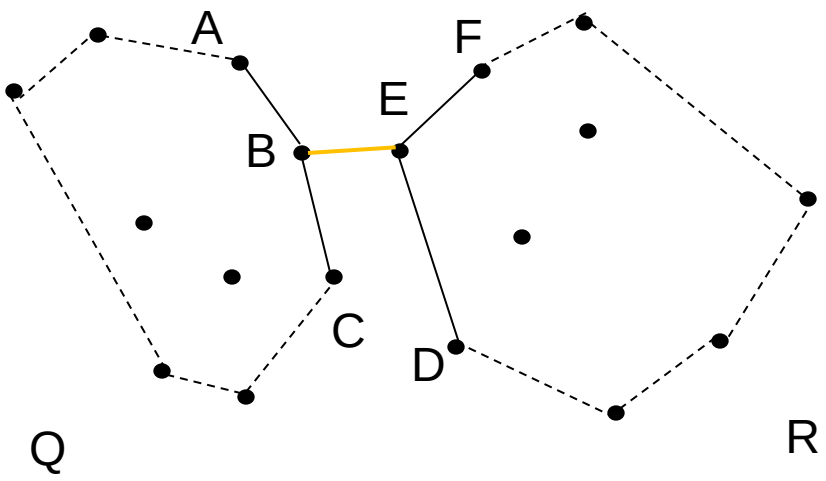
- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Wenn Winkel ABE < 180 Grad, dann setze B=A und definiere A als den Vorgänger von B und C als den Nachfolger



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

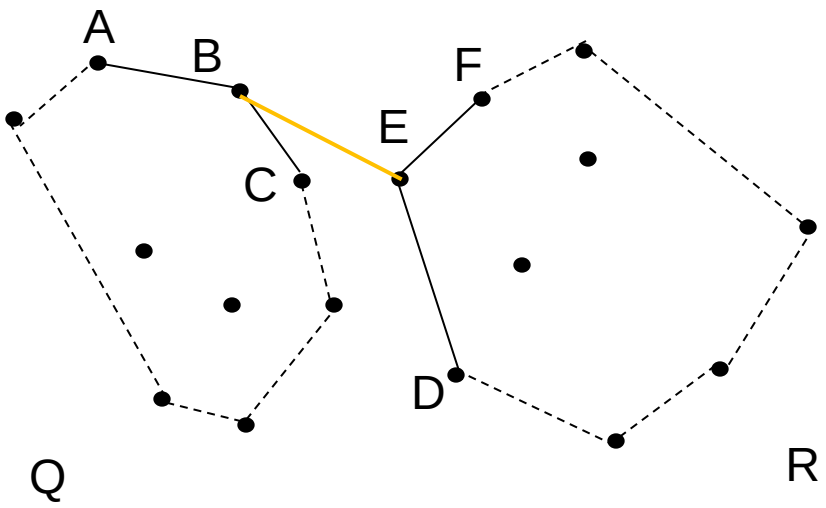
- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Wenn Winkel ABE < 180 Grad, dann setze B=A und definiere A als den Vorgänger von B und C als den Nachfolger



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

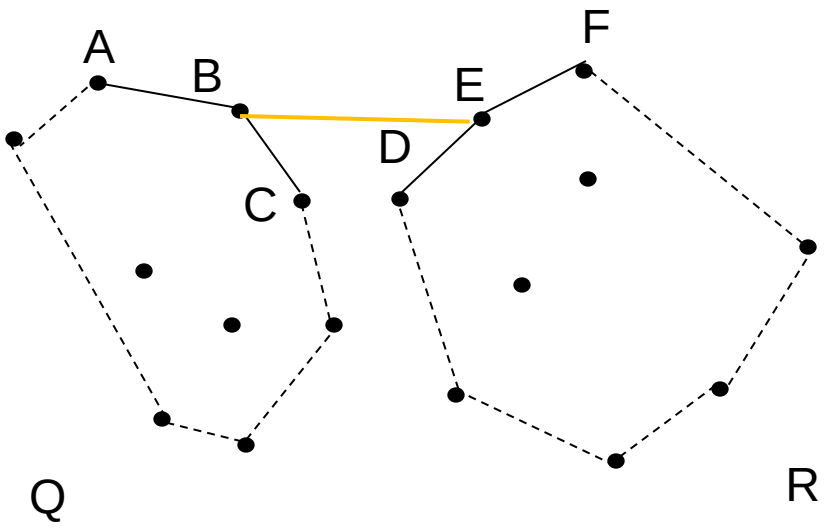
- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Wenn Winkel ABE < 180 Grad, dann setze B=A und definiere A als den Vorgänger von B und C als den Nachfolger



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

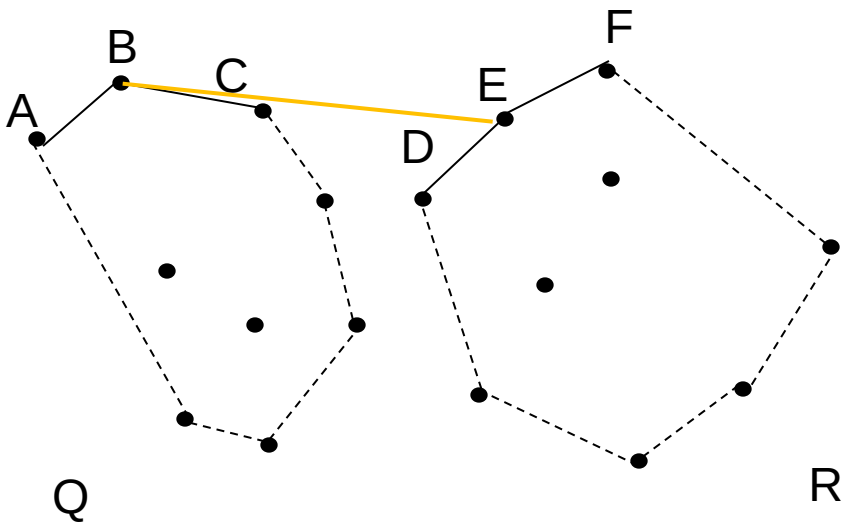
- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Wenn Winkel BEF < 180 Grad, dann setze E=F und definiere D als den Vorgänger von E und F als den Nachfolger



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

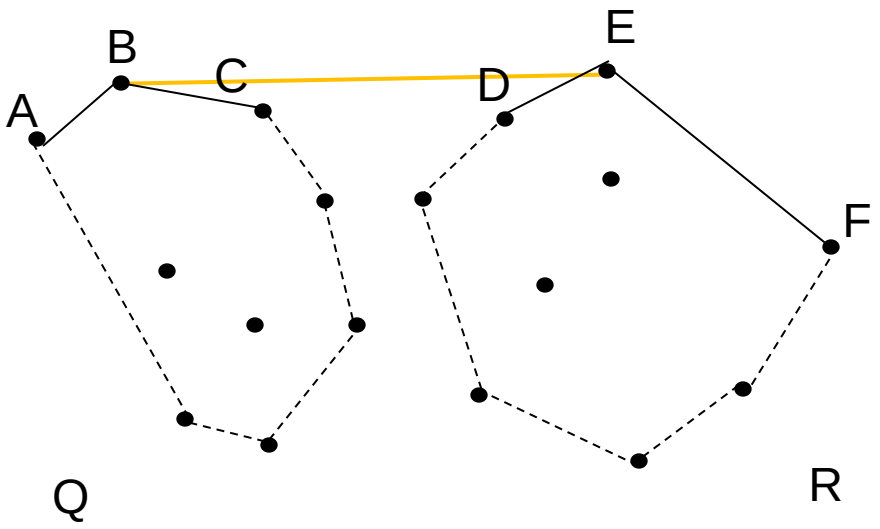
- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Wenn Winkel ABE < 180 Grad, dann setze B=A und definiere A als den Vorgänger von B und C als den Nachfolger



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

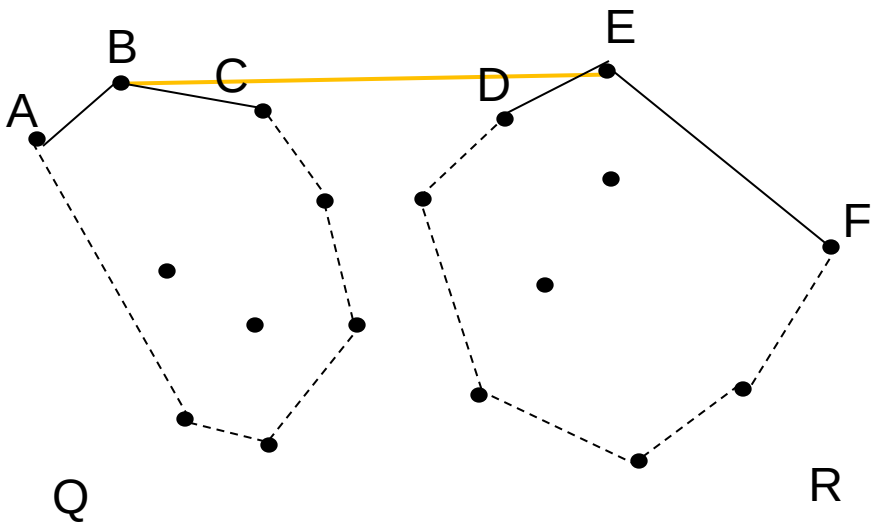
- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Wenn Winkel BEF < 180 Grad, dann setze E=F und definiere D als den Vorgänger von E und F als den Nachfolger



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

- Beobachtung: Sortierung um B ist A, E, C und Sortierung um E ist D, B, F
- Beide Winkel > 180 Grad => hinreichende Bedingung erfüllt



Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

1. Sei B rechtester Punkt von Q; A Vorgänger von B und C Nachfolger von B im Uhrzeigersinn
2. Sei E linkester Punkt von R; D Vorgänger von E und F Nachfolger von E im Uhrzeigersinn
3. **while** hinreichende Bedingung nicht erfüllt **do**
4. **if** Winkel ABE<180 **then** B← A; A←Vorgänger von B; C←Nachfolger von B
5. **if** Winkel BEF<180 **then** E← F; D←Vorgänger von E; F←Nachfolger von E
6. **return** BE

Teile & Herrsche

Suchen der oberen Strecke

1. Sei B rechtester Punkt von Q; A Vorgänger von B und C Nachfolger von B im Uhrzeigersinn
2. Sei E linkester Punkt von R; D Vorgänger von E und F Nachfolger von E im Uhrzeigersinn
3. **while** hinreichende Bedingung nicht erfüllt **do**
4. **if** Winkel ABE<180 **then** B← A; A←Vorgänger von B; C←Nachfolger von B
5. **if** Winkel BEF<180 **then** E← F; D←Vorgänger von E; F←Nachfolger von E
6. **return** BE

Laufzeit

- O(n), da maximal jeder Knoten in der while-Schleife einmal B sein kann

Teile & Herrsche

Lemma 12

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F

Beweis

- Zu Beginn der **while**-Schleife ist B rechtester Knoten von Q. Da E rechts von B liegt, bleibt nur die Sortierung A,E,C um B. Analog für E.

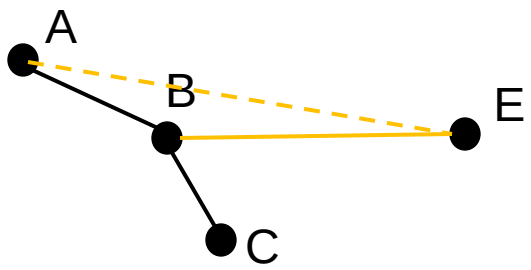
Teile & Herrsche

Lemma 12

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F

Beweis

- Ist während des Verlaufes der while-Schleife der Winkel ABE < 180 Grad, so bleibt die Sortierung auf der linken Seite nach dem Umbenennen der Knoten erhalten, da der Winkel ABE < 180 Grad ist



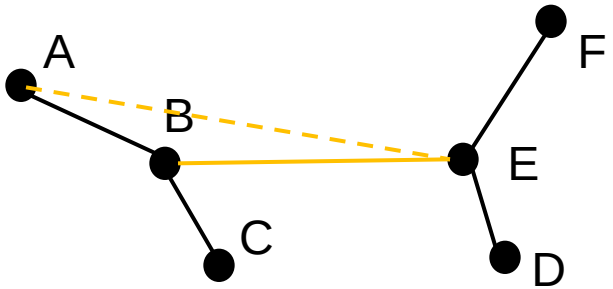
Teile & Herrsche

Lemma 12

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F

Beweis

- Auf der rechten Seite bleibt die Sortierung ebenfalls erhalten. Wäre dies nicht der Fall, so müsste F zwischen den Strahlen von E durch A und B liegen. Dann ist F links von E. Dies kann aber nur passieren, wenn E bereits der rechteste Knoten der rechten Hülle.



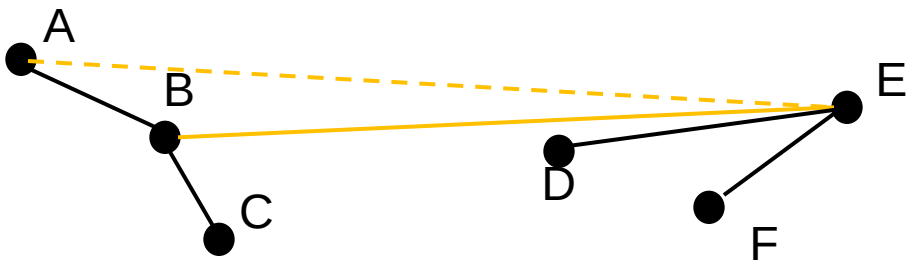
Teile & Herrsche

Lemma 12

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F

Beweis

- Dies kann aber nur passieren, wenn E bereits der rechteste Knoten der rechten Hülle. Dann liegt EF unterhalb von ED (aufgrund der konvexen Hülle Eigenschaften), ED unterhalb von EB (Invariante) und EB unterhalb von EA (da der Winkel EBA kleiner als 180 Grad war).



Teile & Herrsche

Lemma 12

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um B ist A, E, C
- Sortierung im Uhrzeigersinn um E ist D, B, F

Beweis

- Der Fall Winkel BEF < 180 Grad ist symmetrisch. Somit bleibt die Invariante erhalten.

Teile & Herrsche

Lemma 13

- Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt O(n) Zeit.

Beweis

- Die Suche nach der oberen und der unteren Kante ist symmetrisch. Die Laufzeit ist O(n) wie bereits gezeigt. Es bleibt die Korrektheit zu zeigen.

Teile & Herrsche

Lemma 13

- Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt O(n) Zeit.

Beweis

- Die Suche nach der oberen und der unteren Kante ist symmetrisch. Die Laufzeit ist O(n) wie bereits gezeigt. Es bleibt die Korrektheit zu zeigen.
- Nach Lemma 12 hält der Algorithmus die lokale Sortierung als Invariante aufrecht. Terminiert die Schleife, so sind die Winkel ABE und BEF beide > 180 Grad und somit ist die hinreichende Bedingung erfüllt. Damit ist die zurückgegebene Kante die gesuchte Kante der konvexen Hülle.

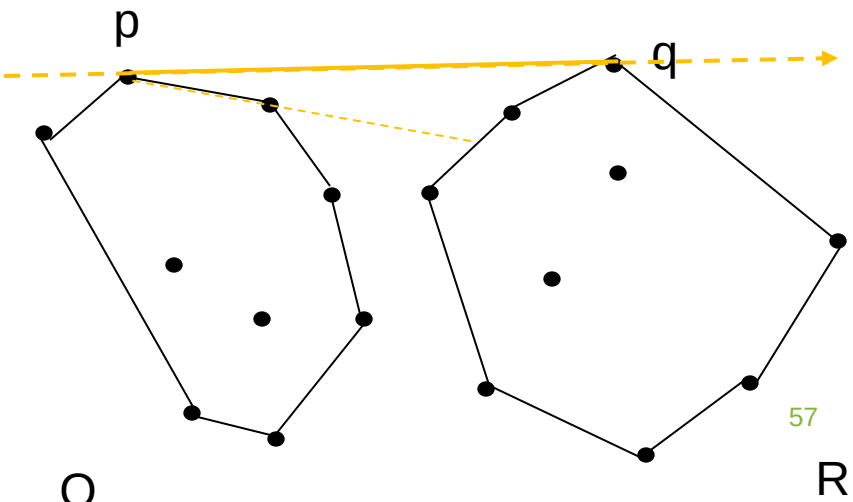
Teile & Herrsche

Lemma 13

- Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt O(n) Zeit.

Beweis

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu pq die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.



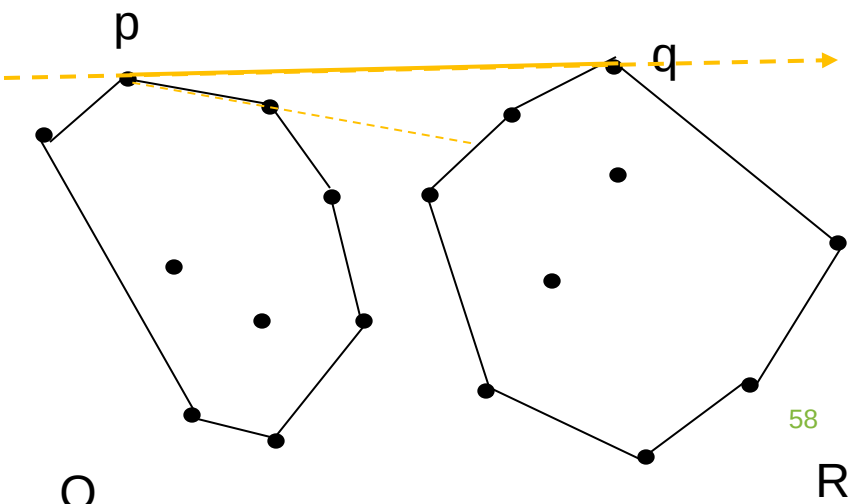
Teile & Herrsche

Lemma 13

- Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt O(n) Zeit.

Beweis

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu pq die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.
- Sei o.b.d.A. p der erste Knoten von p und q, der vom Algorithmus untersucht wird (d.h. B wird auf p gesetzt).



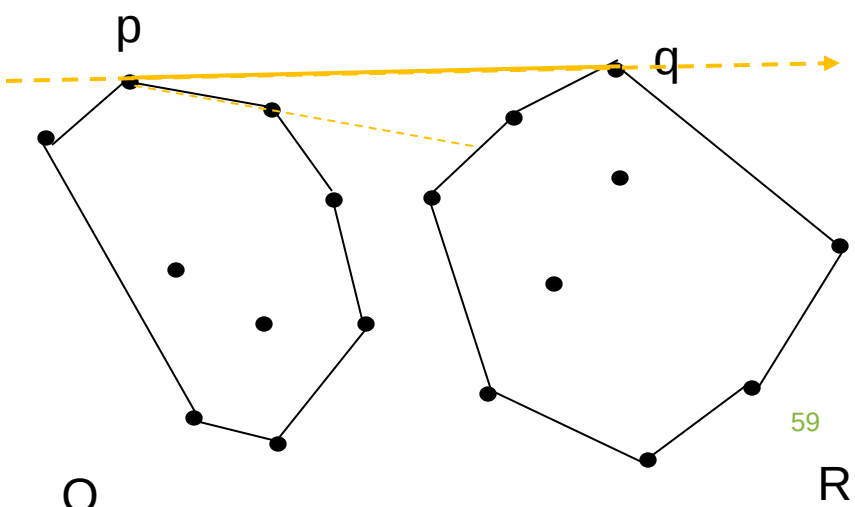
Teile & Herrsche

Lemma 13

- Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt O(n) Zeit.

Beweis

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu pq die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.
- Sei o.b.d.A. p der erste Knoten von p und q, der vom Algorithmus untersucht wird (d.h. B wird auf p gesetzt).
- Dann ist für jeden Knoten E aus R, der die Invariante erfüllt, der Winkel ABE größer 180 Grad, da alle Knoten aus R links der gerichteten Geraden durch p und q liegen



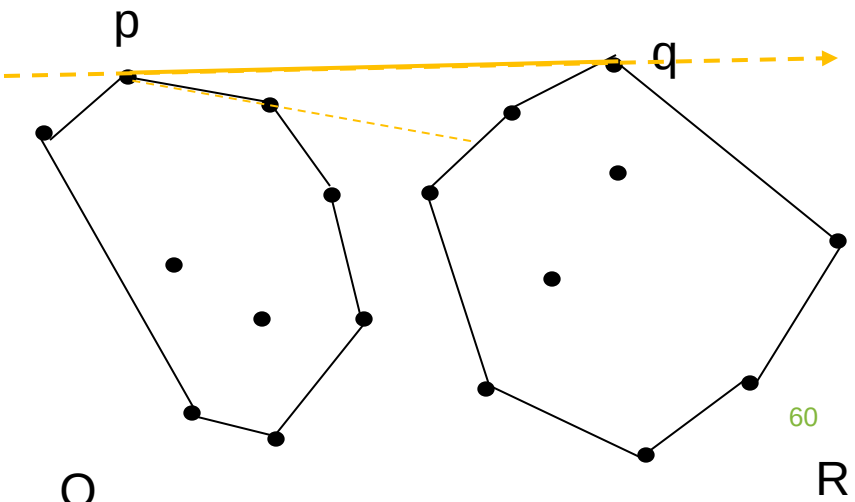
Teile & Herrsche

Lemma 13

- Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt O(n) Zeit.

Beweis

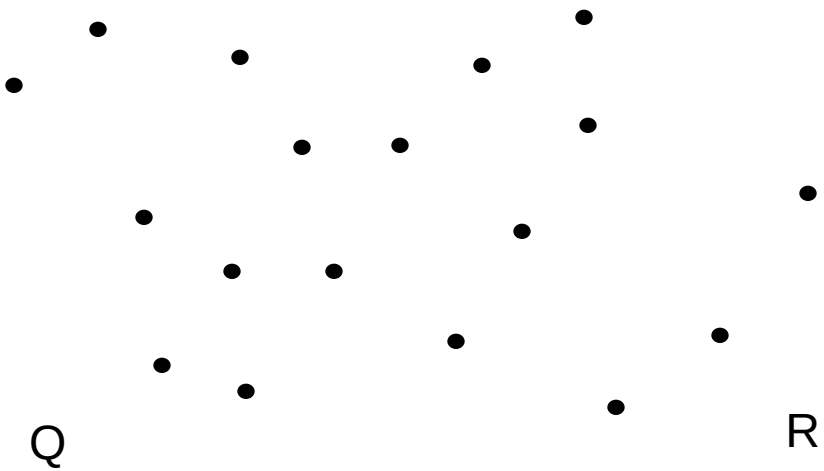
- Damit bleiben die Knoten A,B,C unverändert, bis der Algorithmus auch q gefunden hat und die Schleife terminiert.



Teile & Herrsche

Der konvexe Hülle Algorithmus

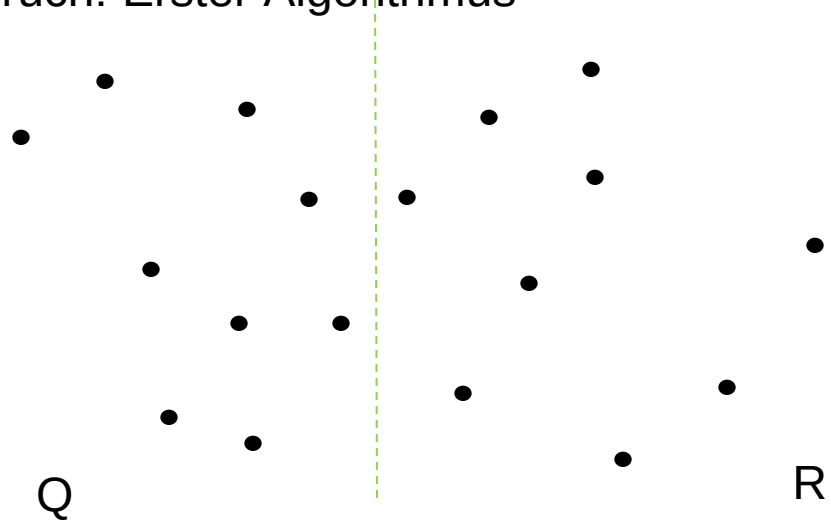
- Teile Punktmenge die Mengen Q und R der n/2 Punkte mit den kleinsten bzw. größten x-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



Teile & Herrsche

Der konvexe Hülle Algorithmus

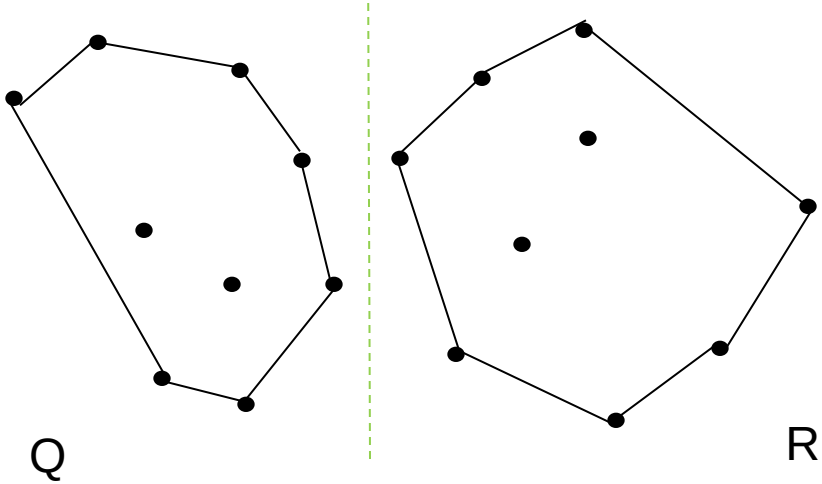
- Teile Punktmenge die Mengen Q und R der n/2 Punkte mit den kleinsten bzw. größten x-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



Teile & Herrsche

Der konvexe Hülle Algorithmus

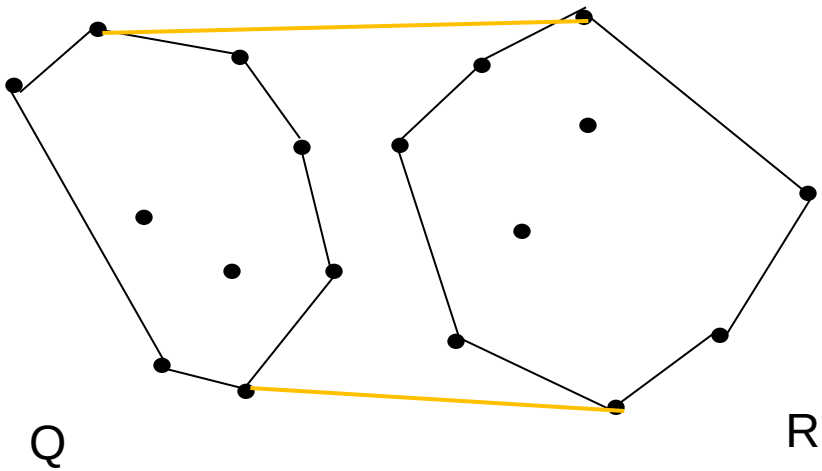
- Teile Punktmenge die Mengen Q und R der n/2 Punkte mit den kleinsten bzw. größten x-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



Teile & Herrsche

Der konvexe Hülle Algorithmus

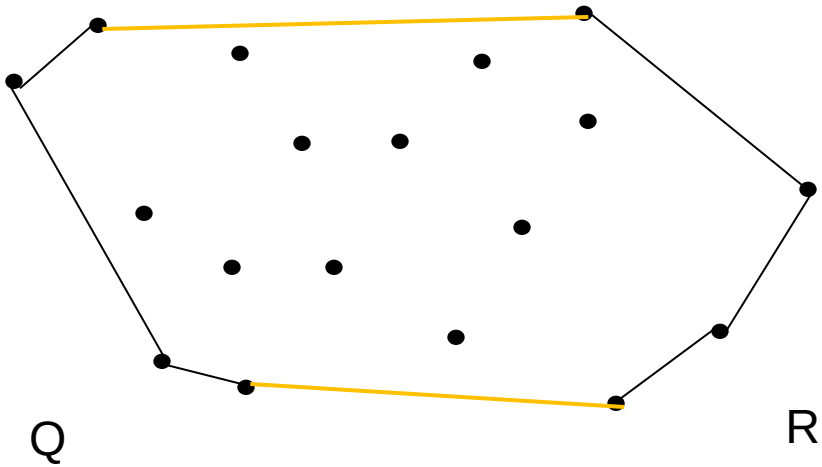
- Teile Punktmenge die Mengen Q und R der n/2 Punkte mit den kleinsten bzw. größten x-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



Teile & Herrsche

Der konvexe Hülle Algorithmus

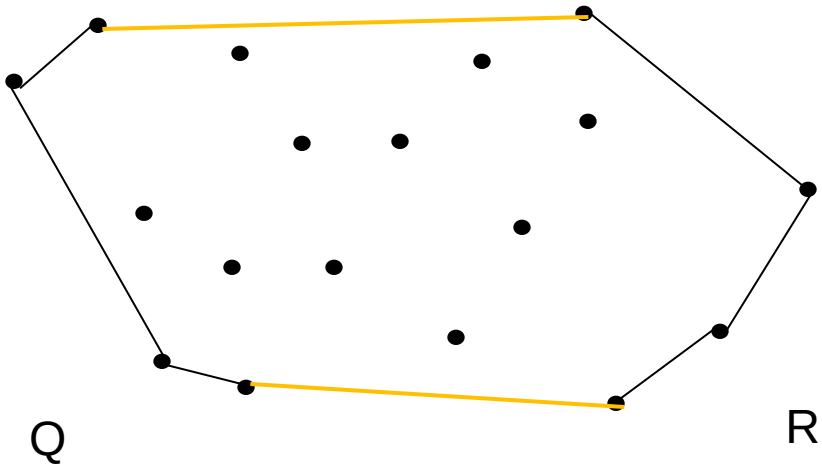
- Teile Punktmenge die Mengen Q und R der n/2 Punkte mit den kleinsten bzw. größten x-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



Teile & Herrsche

Der konvexe Hülle Algorithmus

- Teile Punktmenge die Mengen Q und R der n/2 Punkte mit den kleinsten bzw. größten x-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



Teile & Herrsche

Satz 14

- Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in O(n log n) Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

Beweis

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in O(n) Zeit.

Teile & Herrsche

Satz 14

- Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in O(n log n) Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

Beweis

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in O(n) Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach x-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt O(n log n) Zeit.

Teile & Herrsche

Satz 14

- Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in O(n log n) Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

Beweis

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in O(n) Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach x-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt O(n log n) Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2\,T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$

Teile & Herrsche

Satz 14

- Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in O(n log n) Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

Beweis

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in O(n) Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach x-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt O(n log n) Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2\,T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$
- Wie beim Mergesort ergibt dies Laufzeit O(n log n)

Teile & Herrsche

Satz 14

- Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in O(n log n) Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

Beweis

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in O(n) Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach x-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt O(n log n) Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2\,T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$
- Wie beim Mergesort ergibt dies Laufzeit O(n log n)
- Also ist die gesamte Laufzeit O(n log n)

Teile & Herrsche

Satz 14

- Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in O(n log n) Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

Beweis

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in O(n) Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach x-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt O(n log n) Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2\,T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$
- Wie beim Mergesort ergibt dies Laufzeit O(n log n)
- Also ist die gesamte Laufzeit O(n log n)