Von ungenauer Sprache in der Mathematik und nur vermeintlich erstaunlichen Phänomenen

Zusatzmaterial und Hintergründe zum Modul

"Mathematische Grundlagen der Informatik" (mgli)

Andreas Leiser
FHNW
andreas.leiser@fhnw.ch

23. Oktober 2020

(Updated: 4. März 2021)

1 Das Problem der verfestigten Ungenauigkeit in der Mathematik

Die Mathematik (basierend auf der Logik) erhebt den grossen und zweifellos ehrbaren Anspruch Dinge völlig exakt und unzweideutig beschreiben zu können. Dies gelingt ihr sicher sehr oft und hat dazu geführt, dass man mit Mathematik Dinge beschreiben und analysieren kann, die ohne sie schlicht nicht möglich wären. Deshalb hat sie auch in der modernen Welt, in Wissenschaft und Technik eine so grundlegende und zweifellos sehr wichtige Rolle.

Sie ist auch ein mächtiges Werkzeug, um Dinge und Phänomene zu entdecken, die auf den ersten Blick überraschend sind oder sogar völlig anders, als man dies "intuitiv" erwartet hätte. Solche Phänomene sind sehr spannend und sicher auch Grund für die Wichtigkeit und die Faszination von Mathematik.

Leider gibt es aber auch "Phänomene" und "Errungenschaften" in der Mathematik, welche gar keine Entdeckung der Mathematik sind, sondern welche entstehen, weil die Mathematik ohne ihren eigenen Anspruch an Exaktheit, Unzweideutigkeit und "Wahrheit" angewendet wurde. Man könnte jetzt meinen, dies seien Fälle, wo ein Anfänger oder eine Anfängerin etwas noch nicht richtig verstanden hat und deshalb einen (leicht zu korrigierenden) Fehler gemacht hat. Wie jeder Lernende (also wir alle bis zu unserem Tod) weiss, kommt das sehr oft vor und ist Teil des Lernprozesses. Problematisch wird es aber dann, wenn sich solche Fehler, Ungenauigkeiten und Unüberlegtheiten in einem Fachgebiet einnisten, unkorrigiert bleiben und schliesslich als Grundlage zum Aufbau von neuem Wissen benutzt werden. Leider trifft man diesen Sachverhalt gerade auch in der Mathematik erstaunlicherweise häufiger und vor allem hartnäckiger an, als uns lieb sein kann. Und vor allem gefährdet dies sehr grundlegend den eigenen Anspruch der Mathematik und den Anspruch, welcher Mathematiker und Mathematikerinnen sich selbst und anderen gegenüber erheben. Ein Auslöser dafür ist zum Beispiel, wenn die *Sprache* selbst, nicht genügend genau analysiert und/oder benutzt wird. Das heisst, wenn man gerade die Ungenauigkeit der Alltagssprache – dem Anspruch der Mathematik entsprechend – mit der exakten Sprache der Mathematik ausmerzen will, ... und dies dabei nicht genau genug tut.

Wir wollen dies kurz an einem sehr einfachen Beispiel studieren und sehen, wie auf diese Weise, und völlig zu Unrecht und irreführend, ein mathematisches "Phänomen" entstehen kann, obwohl es nur auf einer verfestigten, leider im Wissensgebäude der Mathematik nicht mehr ausmerzbaren, Ungenauigkeit im Sprachgebrauch *auf Seiten der Mathematik (!)* basiert.

2 Die Monotonie von Folgen und Funktionen

Das Beispiel stammt aus meinem Unterricht und zeigt sehr schön, wie gerade exakt denkende Studierende, ein Verständnisproblem entwickeln können, *weil etwas in der Mathematik ungenau eingeführt und dann nicht korrigiert wurde.* Mathematik-Dozierende gehen eben manchmal fälschlicherweise davon aus, dass "schwächere" Studierende etwas (noch) nicht ganz verstehen, weil sie noch nicht präzise genug nachdenken können. Das kann aber manchmal eine völlig falsche und sogar anmassende Fehleinschätzung sein und muss – ich sage es mal etwas grob – den Leichen im Keller der Mathematik (bzw. der Unaufmerksamkeit und vielleicht sogar dem fehlenden Verständnis des Dozierenden) angelastet werden.

Bei diesem einfachen Beispiel geht es um den Begriff der Monotonie. Dieser Begriff wird ja sowohl für Funktionen als auch analog für Folgen definiert (welche als Funktionen auf den natürlichen Zahlen identifiziert werden können). Im Fall von reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man dies standardmässig folgendermassen:

§**1 Definition** (Monotoniebegriffe)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

1.) **monoton steigend** (manchmal auch **schwach monoton steigend**), genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2), \tag{1}$$

2.) **streng monoton steigend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2), \tag{2}$$

3.) **monoton fallend** (manchmal auch **schwach monoton fallend**), genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2), \tag{3}$$

4.) **streng monoton fallend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2). \tag{4}$$

So weit, so gut. Denkt man zumindest bzw. hat man offensichtlich mal vor langer Zeit gedacht und es dann dabei belassen. Mehr noch, es wird folgendes Ergebnis als einfaches Standard-Phänomen zitiert oder sogar gefeiert, welches zeigen soll, wie die "exakte Definition" (haha!) eines Begriffes und wie die Exaktheit der Mathematik gewisse unintuitive Entdeckungen ermöglichen:

§**2 Satz** (Vermeintliches "Phänomen": Monotonie einer konstanten Funktion)**.** *Eine konstante Funktion ist sowohl monoton steigend wie auch monoton fallend.*

Natürlich folgt dies tatsächlich direkt aus 1) und 3) in der Definition §1. Das ist sicher korrekt geschlossen und daran gibt es nichts auszusetzen.

Das Problem ist aber, dass man sinnvollerweise – ich meine hier im Sinn exakter Sprache sowohl umgangssprachlich *als auch in der Mathematik* – die Defintion §1 anders formulieren muss. Denn vielleicht erscheint einem die Definition auf den ersten Blick noch einigermassen exakt und sinnvoll. Hingegen zeigt eben schon die erste einfache Folgerung daraus, Satz §2, dass die Definition §1 *nicht exakt genug* gewählt wurde. Dann erstaunt es ja auch nicht, dass daraus ein "Fake"-Phänomen entsteht. Was ist der Grund? Der Grund ist, dass wir "monoton steigend" so definiert haben, dass eine konstante Funktion dann eine monoton steigende Funktion ist. (Und für "monoton fallend" tun wir es analog.) Dies ist aber sicher zumindest eine "nicht sorgfältig genug" gewählte Definition und die Quelle des Übels!

Man hört dann leider oft, dass man dank der Mathematik mit einer exakten Definition den erstaunlichen Sachverhalt zu Tage befördern konnte, dass eine konstante Funktion sowohl monoton steigend wie auch monoton fallend "sei". Das ist natürlich völliger Quatsch, weil wir – wie wir ja aus der Logik wissen – aus einer falschen Prämisse irgendwas folgern können und uns dies dann logisch als wahre Folgerung *erscheint*. Wer aber würde schon absichtlich falsche

Prämissen (Voraussetzungen) wählen, um so zu vermeintlich neuem Wissen zu gelangen?! Und in unserem Fall sehen wir sehr leicht, dass wir mit der Definition §1 sprachlich eine falsche Prämisse angenommen haben. Denn was wir exakt meinen und was demensprechend eine exakte Definition ist (und wir müssen in der Mathematik schon von exakt definierten Grundbegriffen ausgehen, sonst dürfen wir nicht daraus abgeleitetes exaktes Wissen erwarten!), ist folgende Definition:

§**3 Definition** (Monotoniebegriffe Version 2)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

1.) **monoton nicht fallend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2), \tag{5}$$

2.) **streng monoton steigend** (oder besser einfach nur **monoton steigend**), genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2), \tag{6}$$

3.) **monoton nicht steigend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2), \tag{7}$$

4.) **streng monoton fallend** (oder besser einfach nur **monoton fallend**), genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2). \tag{8}$$

Dies ist jetzt sowohl umgangsprachlich wie auch zum Beispiel bzgl. der logischen Negation[1] die exakte *und korrekte, sinnvolle* Definition. Und dann ergibt sich auch kein daraus abgeleitetes "Fake"-Phänomen mehr und wir haben überhaupt keine vermeintlich tiefere Erkenntnis zu Tage gefördert. Im Gegenteil, nun ist es richtigerweise eine *Trivialität*:

§**4 Satz** (Entmystifiziertes Monotonieverhalten der konstanten Funktion)**.** *Eine konstante Funktion ist sowohl monoton nicht steigend wie auch monoton nicht fallend.*

[1] Man beachte, dass dann die *logische Verneinung* von zum Beispiel "monoton nicht fallend" – also von "*nicht* monoton nicht fallend" – per Definition die folgende ist:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$$

D.h., die Verneinung ist dann nicht etwa, dass die Funktion monoton fallend oder Ähnliches sei!

Leider hat sich aber die Definition §1 historisch (über viele Jahrzehnte!) verfestigt und ist nicht mehr so einfach wegzukriegen. D.h., aufgrund der gewählten Definition hat man dann als logischer Fakt dieses "Pseudo-Phänomen" von Satz §2, welches eigentlich völlig unnötig ist.

Und als Dozent stellt sich eine schwierige und fast unlösbare Aufgabe: Will ich das uralte, verfestigte, aber nicht gut durchdachte "Wissen" korrigieren und den Studierenden damit das "ganz korrekte" lehren? Damit riskiere ich aber ziemlich sicher eine grössere Verwirrung und sie werden von einem Begriff ausgehen, welcher niemand so nutzt und den sie weder in den Köpfen noch in den Büchern so finden werden. Dies würde zu inkompatiblen mathematischen Begriffen und zu inkompatiblem Wissen selbst führen. Und man wüsste schnell nicht einmal mehr, wann was gilt. Ein kleiner Kompromiss wäre dann wohl diese Definition:

§**5 Definition** (Monotoniebegriffe Version 3)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

1.) **monoton nicht fallend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2), \tag{9}$$

2.) **streng monoton steigend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2), \tag{10}$$

3.) **monoton nicht steigend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2), \tag{11}$$

4.) **streng monoton fallend**, genau dann wenn

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2). \tag{12}$$

So umgeht man zumindest das Chaos, welches entstehen würde, wenn man den Begriff monoton steigend und monoton fallend unterschiedlich verwenden würde. Und die missverständliche Definition einer nur "monoton steigenden" oder nur "monoton fallenden" Funktion hätte man trotzdem eliminiert. Nur, wenn ich explizit immer von "streng" monoton wachsend oder fallend spreche, dann impliziert das wiederum, dass es auch was "nicht streng" monoton wachsendes oder fallendes gibt, und wir riskieren wieder den Salat vom Anfang zu haben ...

Was lernen wir grundsätzlich daraus? Nehmen wir zumindest das Folgende mit:

Exakte und sinnvolle Definitionen sind in der Mathematik äusserst wichtig! Sie können sonst grundlegende Ursache für spätere Schwierigkeiten in der Theorie sein und leicht zu unnötigen "Missverständnissen" führen. Missverständnisse, welche die Mathematik eigentlich gerade durch ihre Präzision verhindern will.

Und, wie im Beispiel gesehen, sollte Mathematik Begriffe ganz sicher nicht missverständlicher oder weniger exakt definieren als die Umgangssprache!

Dieser Text war ein Versuch, etwas Klarheit zu verschaffen und den Finger tief in den wunden Punkt zu stecken. Wenn man aber gerade neu diese Themen lernt, dann ist das meistens nicht sehr hilfreich und kann extrem verwirren. Deshalb: lesen und nachdenken auf eigene Gefahr!