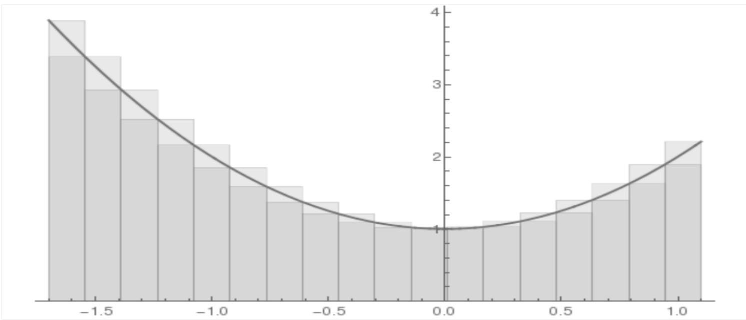
Analysis 1
(Einführung in die Analysis)



Andreas Leiser
https://www.andreasleiser.ch
mail@andreasleiser.ch

Version: 1.3
Last compiled on 2022/07/08, 12:00:13

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript dient zum Nachschlagen des Sto es, welchen ich in meinem Unterricht behandle. Grundlage dafür ist der Modulbeschrieb der FHNW, die Vorlesungsunterlagen und -notizen während meines eigenen Studiums und ein paar der hervorragenden Bücher zum Thema. Grundsätzlich erwarte ich nicht, dass Studierende des eana-Moduls weitere Literatur benötigen. Folgende Texte standen teilweise und in verschiedenem Umfang diesem Skript bzw. den Modulunterlagen Pate (in alphabetischer Reihenfolge): [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?].

Allerdings möchte ich hier auch warnen, denn einige der oben genannten Bücher gehen sehr viel weiter und tiefer und haben zusätzlich einen unterschiedlichen Blickwinkel (z.B. den eines Mathematikstudierenden). Bei Interesse nach Vertiefung oder weil es zwischendurch vielleicht hilfreich sein kann, ein Thema in einer etwas anderen Darstellung zu studieren, möchte ich deshalb als Nachschlageempfehlung oder Zweitlektüre zur Vorlesung obige Liste noch etwas einschränken auf die Auswahl (und als solches ist dies zu verstehen!):

- . [?]
- , [?]
- . [?]
- . [?]
- . [?]
- . [?]
- . [?]
- . [?]
- . [?],

es sei denn ein Studierender möchte sich explizit selber ein bisschen fordern oder seinen Horizont erweitern.

Weiter wollen wir uns auch einführend mit einem geeigneten Tool näher beschäftigen, welches Informatiker oft im Bereich Analysis verwenden. Da es sich hier häufig um Glaubensfragen und persönliche Präferenzen geht, möchte ich das nicht dogmatisch sehen: Aufgrund der aktuellen Popularität, der freien Verfügbarkeit und der Eignung – und da wir uns einfach für ein Tool entscheiden müssen – habe ich Python gewählt. Ich möchte die Studierenden aber auch ermuntern o en für andere Tools zu sein und schon frühzeitig eine gewisse Flexibilität zu erlangen. (Natürlich werden Sie schnell einmal Ihr “Lieblingstool” haben. Bleiben Sie trotzdem o en für andere Tools, es wird Ihr Vorteil sein.)

Im Text sind einige Anwendungsszenarien enthalten. Ich erhebe keinen Anspruch darauf, dass eine Methode in einer solchen Anwendung jeweils eine tatsächlich realisierbare und sinnvolle Methode ist. (Im Gegenteil: in vielen Fällen hat man bedeutend bessere und geeignetere Methoden zur Verfügung!) Diese “Anwendungsszenarien” dienen einfach der Illustration einer Idee und seiner Umsetzung und sollen den Sto etwas auflockern. Um die wirklich in der Praxis verwendeten Methoden, z.B. aus der Statistik, studieren zu können, brauchen wir zuerst noch mehr mathematische Grundlagen. Diese Methoden selbst werden Thema weiterer Module in Ihrem Studium sein.

Ich möchte hervorheben, dass ein intensives Beschäftigen mit den Beispielen und insbesondere mit den Aufgaben entscheidend für ein Erreichen der Lern- und Kompetenzziele ist. Die Aufgaben im Skript (wovon eine Auswahl jeweils auf den Übungsblätter sein wird) sind in drei Kategorien eingeteilt:

- Die Aufgaben ohne Markierung hinter der Nummer sind absolut essentiell und müssen beherrscht werden.
- Die Aufgaben mit einem # hinter der Nummer sind entweder etwas vertiefender oder beinhalten einen etwas anderen Aspekt.
- Die (wenigen) Sternaufgaben sind anspruchsvoller und können durchaus eine gewisse Herausforderung sein.

Ich habe mich auch von den Unterlagen meiner Kollegen Ivan Di Caro, Ralf Massjung, Martin Melchior, Thomas Petermann und Andreas Vogt inspirieren lassen, wofür ich mich herzlich bedanke. Im Weiteren bedanke ich mich bei den Studierenden für mehrere konstruktive Vorschläge und Feedbacks, welche zu Verbesserungen beigetragen haben. Und schliesslich möchte ich mich bei Norbert Hungerbühler bedanken, für die interessanten Gespräche über Analysis und über Mathematik-Didaktik. Für alle Fehler und Oddities in meinen Unterlagen übernehme ich aber die alleinige Verantwortung, “don’t blame my colleagues”!

Andreas Leiser
2022/07/08

Modul-Einführung

Kapitel 1

Die Rolle der Analysis in der Informatik

LERNZIELE:

LZ 1.1 Sie kennen ein paar wichtige Anwendungsgebiete der Analysis in der Informatik.

1.1 Analysis: eine kurze Vorschau

Analysis ist eines der grossen Teilgebiete der Mathematik und beschäftigt sich im wesentlichen mit den überabzählbaren Zahlenmengen, d.h., mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und in der "komplexen Analysis" den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Sie untersucht, wie sich Funktionen, Gleichungen usw. auf diesen Zahlenmengen verhalten und bildet die Grundlage für viele Anwendungen in den Naturwissenschaften, dem Ingenieurswesen, der Ökonomie und mehr. Ein herausragendes Charakteristikum der Analysis ist die Idee des Grenzwertes und Grenzwertprozesse treten an praktisch allen entscheidenden Stellen der Analysis auf. Der Grund ist klar: Die reellen Zahlen selbst bauen auf einem solchen Grenzwertprozess auf!

Für Informatiker gehört die Analysis nicht nur zur soliden Grundausbildung, die "man erwarten kann"[E.1] , sondern sie spielt auch – gerade sehr aktuell – eine wichtige Rolle in mehreren Anwendungsgebieten. Deshalb wollen wir in diesem Kapitel kurz ein bisschen die Rolle der Analysis in der Informatik und die Relevanz für Informatiker kennenlernen. Da wir dieses Bild selbstverständlich nur anreissen können (wir erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit), wollen wir das einfach anhand von ein paar Beispielen tun. Natürlich um Ihren Appetit auf die vielen spannenden Dinge anzuregen!

1.2 Beispiel: Machine Learning

Ein aktuelles sehr interessantes Thema für Informatiker ist "Machine Learning". (Natürlich können wir an dieser Stelle nicht wirklich viel dazu sagen, aber wir wollen einen kleinen Eindruck geben.)

Machine Learning (oder deutsch "maschinelles Lernen") hat zum Ziel, Computersysteme so zu bauen, dass sie die Fähigkeit haben, sich selbständig zu verbessern. Sie tun dies, indem sie aus neuen oder veränderten Gegebenheiten (aus neuen Daten) "lernen" können und zwar ohne dass das Computersystem – insbesondere die Software bzw. die Algorithmen – von Menschen verändert und angepasst werden müssen[E.2] . Die mathematische Theorie dahinter, welche implementiert werden muss, ist zu einem Grossteil in der Analysis zuhause und von einem Informatiker, welcher sich in diesem Bereich betätigen will, wird also zurecht zumindest Grundkenntnisse der Analysis erwartet. Auch wenn er später vielleicht in einem interdisziplinären Team mit Mathematikern, Physikern, etc. arbeitet. Wenn man nämlich über Themen wie z.B. "Mathematische Optimierung", "Regression", "Gradientenabstiegsverfahren","Bayessches Netz", "Künstliche Neuronale Netze (KNN)","Mannigfaltigkeitslernen", und vieles mehr ..., liest, dann sieht man sehr schnell, dass viele Methoden in der Sprache der Analysis formuliert sind. Auch dann, wenn man es in einem späteren Schritt und bei der Implementierung mit endlichen Daten und diskretisierten Algortihmen zu tun hat. (Zudem: schon um eine Diskretisierung zu verstehen, muss man auch das ("kontinuierliche") mathematische Objekt im $\mathbb{R}^n$ verstehen.)

Wo wird Machine Learning konkret eingesetzt? Ein paar Beispiele:

(a) In der Bilderkennung beim Entwicklung von Computersystemen, welche automatisch Bilder klassifizieren können:

- Bilder von Gewebe, welches möglicherweise Tumorzellen enthält,

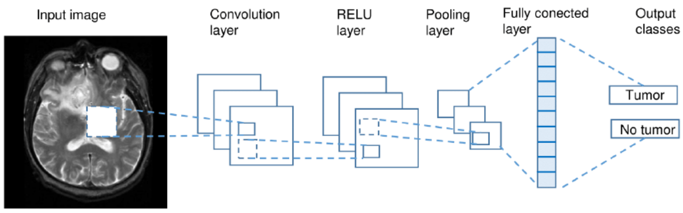


Abbildung 1.1 – Beispiel für die Tumorerkennung mittels Machine Learning. (Quelle: [**?**, Fig.2])

- automatische Texterkennung, insbesondere bei handschriftlichen Texten,

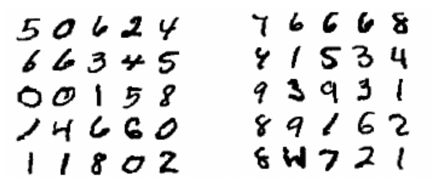


Abbildung 1.2 – Beispiel für die automatische Erkennung von handschriftlichen Ziffern mittels Machine Learning. (Quelle: [**?**, Fig.1])

- Bildwiederherstellung, Gesichtserkennung zur automatischen Identifizierung von Straftätern oder zur Personen-Authentifizierung im Sicherheitsbereich usw.,

Abbildung 1.3 – Beispiel für Bildwiederherstellung, Gesichtserkennung usw. mittels Machine Learning. (Quelle: [**?**, Fig.3-31])

(b) Spracherkennung,

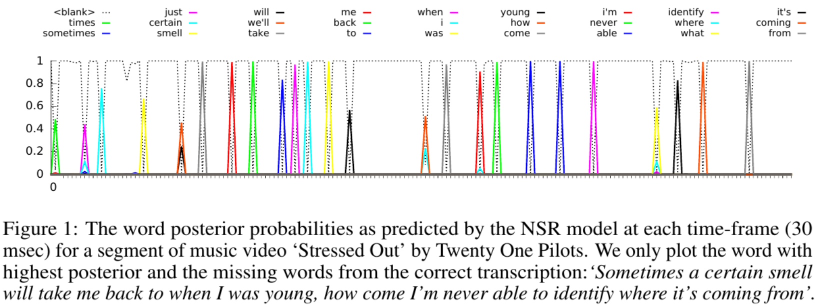


Abbildung 1.4 – Beispiel zur automatischen Spracherkennung mittels Machine Learning. (Quelle: [**?**, Fig.1])

(c) Steuerung von autonomen Systemen und in der Robotik

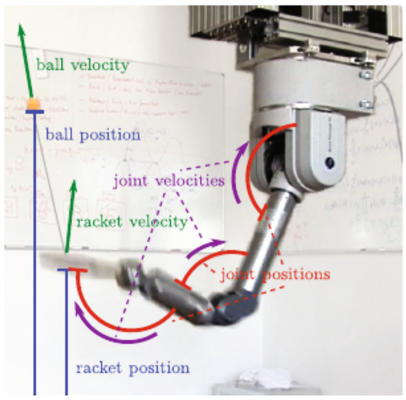


Abbildung 1.5 – Beispiel zur Steuerung in der Robotik mittels Machine Learning. (Quelle: [**?**, Fig.18.2])

(d) Weitere? Grenzen? Prognosesysteme für ökonomische Daten mittels Machine Learning?

Schon wenn man keine autonomen oder selbstlernenden Systeme bauen will, ist man als Informatiker sehr oft mit der Modellierung, Simulation oder der Steuerung von Systemen konfrontiert, welche mittels Methoden der Analysis beschrieben sind. Es gibt eine Vielzahl von spannenden Anwendungsgebieten, in welchen Sie sich als zukünftige/r Informatiker/in unter Umständen einbringen können und wo Analysiskenntnisse benötigt werden[E.3] . Hierzu zwei weitere Beispiele ganz kurz angerissen:

1.3 Beispiel: Simulation von realen Welten, Computergrafik

Beim Design und der Entwicklung von Computer-Spielen und der Simulation realer (technischer oder anderer) Systeme spielt Analysis eine fundamentale Rolle. Auch wenn Sie später vielleicht hierzu "nur" existierende Frameworks und Komponenten verwenden (die unter Umständen ziemlich fortgeschrittene Mathematik benutzen), eine Grundverständnis der Analysis wird sehr hilfreich sein. Und falls Sie mal selber solche Komponenten entwickeln, dürfen Sie noch weiter in das spannende Teilgebiet der Analysis eintauchen!

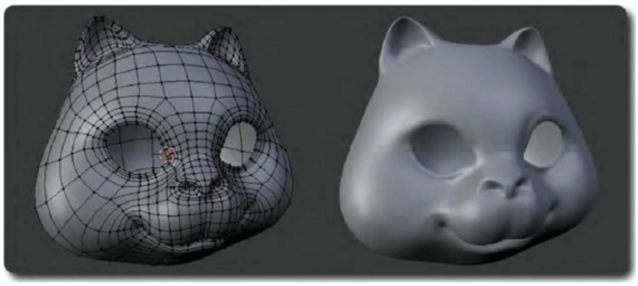


Abbildung 1.6 – Beispiel zum Einsatz von Analysis in der Spieleprogrammierung. (Quelle: [?, Fig.3-44])

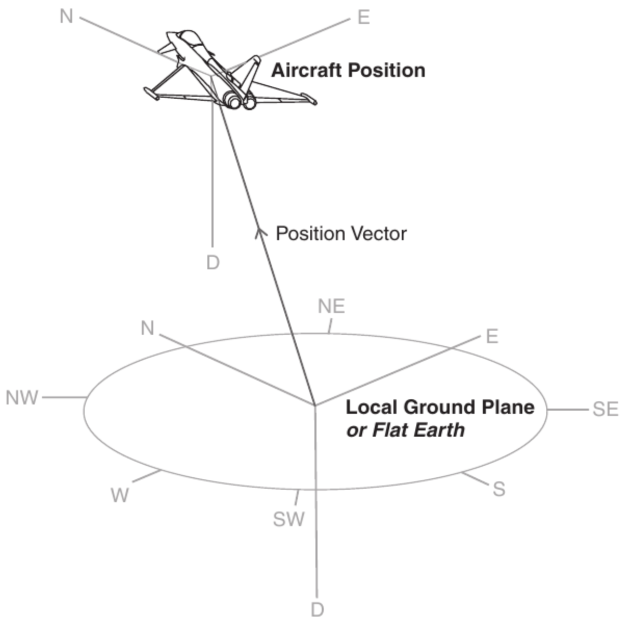


Abbildung 1.7 – Beispiel zum Einsatz von Analysis in der Simulation und Modellierung von realen Systemen. (Quelle: [?, Fig.2.3])

1.4 Beispiel: Implementierung von Business Intelligence Lösungen, Prognosen in der Ökonomie

Ein weiterer wichtiger Anwendungsbereich, in welchem sehr viel Analysis (und anderes mehr wie z.B. Statistik) steckt, ist der sogenannte “Business Intelligence”-Bereich und der Bereich der ökonomischen Prognosen. Als Informatiker/in in einem (wahrscheinlich) interdisziplinären Team, wird man auf Ihre Kenntnisse der Analysis zählen.

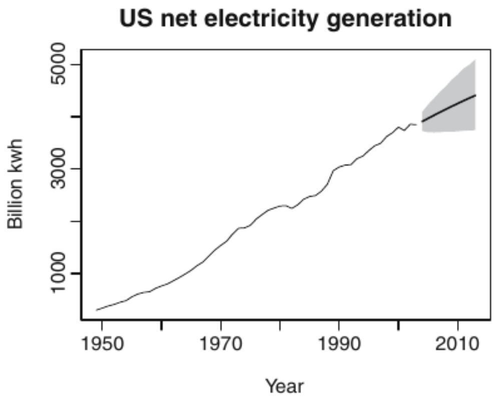


Abbildung 1.8 – Beispiel zum Einsatz von Analysis in der Betriebswirtschaft und Ökonomie. (Quelle: [**?**, Fig.2.1])

Beachten Sie: Auch wenn die “Zeitreihen” (Daten) meist diskreter Natur sind, ist die zugrundeliegende Theorie oft zum grossen Teil “kontinuierlich” und aus dem Bereich der mathematischen Analysis.

1.5 Beispiel: Analyse von Algorithmen

Wenn Informatiker Computer programmieren, dann implementieren sie Algorithmen. Wir wissen bereits, dass sich verschiedene Algorithmen, welche dasselbe Problem lösen bzgl. Speicherbedarf, Laufzeit, ... usw. sehr unterschiedlich verhalten können. Es ist durchaus möglich, dass der eine Algorithmus bei einer bestimmten Grösse des Problems unpraktikabel, ein anderer, e zienter Algorithmus, sehr wohl praktikabel ist.[E.4]

Obwohl die interessierenden Grössen wie Speicherplatz, Laufzeit (Rechenschritte), ... usw. diskrete und endliche Grössen sind, kann hierfür die Analysis manchmal Tools und Beweise von Sätzen liefern, siehe z.B. die Stichworte erzeugenden Funktion und Master-Theorem.[E.5] Allerdings sollte im Begri ”Analyse von Algorithmen” das Wort ”Analyse” nicht mit demjenigen im Namen des vorliegenden mathematischen Teilgebiets der ”Analysis” verwechselt werden: Die mathematische ”Analysis” untersucht kontinuierliche Grössen und Funktionen solcher, wohingegen die Analyse von Algorithmen als Teilgebiet der Informatik vor allem in der diskreten Mathematik zuhause ist.

Kapitel 2

Voraussetzungen, Grundbegriffe und eine kleine Einführung in Python

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

- LZ 2.1 Sie haben die wichtigsten Grundbegriffe und Voraussetzungen aufgefrischt.
- LZ 2.2 Sie haben sich die paar neuen Grundbegriffe und -kompetenzen erarbeitet.
- LZ 2.3 Sie können einfache Programme in Python erstellen und sind in der Lage ihr Wissen bei Bedarf auszubauen.

2.1 Wichtige vorausgesetzte Grundbegriffe und Kompetenzen

Grundvoraussetzung zum erfolgreichen Studium des eana-Moduls sind die Themen der Berufsmaturität (notwendig) und des Moduls mgli (Mathematische Grundlagen der Informatik, empfohlen). Weiter wird zwar auch empfohlen, dass Sie gleichzeitig das Modul lag (Lineare Algebra und Geometrie) besuchen. Hier werde ich aber keine Kenntnisse voraussetzen und allenfalls detaillierter auf die Grundlagen eingehen.

Es folgt nun eine knappe Darstellung einiger der zentralen Grundlagen, welche Sie kennen (und bei Bedarf nachschlagen oder au rischen) sollten.

- Sie sollten mit den Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (und ihren typischen Teilmengen) vertraut sein.
- Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$, nennen wir

  $$(\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$$

  ein o enes Intervall,

  $$(\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$$

  ein links-halbo enes Intervall,

  $$[\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$$

  ein rechts-halbo enes Intervall und

  $$[\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$$

  ein abgeschlossenes Intervall.
- Es gilt:

  $$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

  und die (ganze) Menge der reellen Zahlen ist sowohl ein o enes als auch ein abgeschlossenes Intervall.
  (Wir können aber nicht $[-\infty, \infty]$ schreiben, da das Unendlichkeitssymbol ∞ keine reelle Zahl ist!)
- a^x für eine reelle Zahl a nennen wir eine Potenz (von a mit x). Dabei nennen wir a die Basis und x den Exponenten. Ist der Exponent x eine natürliche Zahl, dann entspricht die Potenz der x-fachen Multiplikation von a, d.h.,

  $$a^x := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x\text{-mal}}.$$

  Ist der Exponent x eine ganze, aber negative Zahl, so entspricht dies dem Kehrwert, wobei die Basis nicht Null sein darf. D.h., es ist z.B.

  $$a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \qquad a \neq 0.$$

  Sie sollten aber auch mit Exponenten umgehen können, welche rationale Zahlen sind. Es gilt z.B. für $a > 0$

  $$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}, q > 0.$$
- Schliesslich sollten Sie auch die wichtigsten Potenzgesetze kennen wie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x,$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y} \qquad a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}.$$

- Der Logarithmus von y, $y \in \mathbb{R}, y > 0$, zur Basis $a \in \mathbb{R}, a \notin \{0, 1\}$, ist definiert durch

  $$x = \log_a(y) :\Longleftrightarrow a^x = y.$$

  D.h., es ist der Exponent, welcher zur Basis a gerade y ergibt. Dies ist also im Fall von positiver Basis eine Umkehrung der Potenzbildung. Erinnern Sie sich bitte auch an die entsprechenden Logarithmus-Gesetze und wie zwischen den verschiedenen Basen umgerechnet werden kann.

- Sie sollten wissen, wie man lineare und quadratische Gleichungen (Hinweis: ”Mitternachtsformel”), elementare Potenzgleichungen mit ganzzahligen und rationalen Exponenten, sowie elementare Exponential- und Logarithmusgleichungen löst.

- Ebenso sollten Sie ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen lösen und die Lösungsmenge grafisch veranschaulichen und interpretieren können.

- Sie sollten wissen, was Funktionen (Abbildungen) sind und wie man sie darstellt. Insbesondere sollten Sie verstehen, wie man die diskreten Konzepten aus dem mgli-Modul auf reelle Funktionen ausdehnt. Reelle Funktionen (Abbildungen [E.6]) schreiben wir meist in der Form

  $$\begin{aligned} f : D &\to W \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

  wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen oder $\mathbb{R}$ selbst ist und ebenso $W \subseteq \mathbb{R}$. Das Symbol $f(x)$ nennen wir in diesem Zusammenhang den Funktionswert von f an der Stelle x, D den Definitionsbereich der Funktion f und W den Wertebereich . Die Menge aller Funktionswerte $f(D)$ nennen wir den Bildbereich (das Bild) von f . Der Graph**[E.7]** einer Funktion (Abbildung) ist die grafische Darstellung einer Funktion in einem Koordinatensystem mittels der Menge

  $$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

  $y = f(x)$ nennen wir die Funktionsgleichung der Funktion. Wenn Definitions- und Wertebereich klar sind, dann schreiben wir oft für eine Funktion abkürzend einfach nur

  $$f(x) := < \text{irgendein Term in x} >$$

  oder

  $$x \mapsto < \text{irgendein Term in x} > .$$

- Eine a n-lineare Funktion ist eine Funktion der Form[E.8]

  $$\begin{aligned} f : D &\to W \\ x &\mapsto f(x) := m \cdot x + q \end{aligned}$$

  für irgendwelche $m, q \in \mathbb{R}$. Sie hat also die Funktionsgleichung

  $$y = m \cdot x + q,$$

  eines Polynoms mit Grad höchstens 1 (siehe auch nachfolgend). Sie sollten wissen, wie der Graph einer a n-linearen Funktion aussieht, also z.B. dass er eine Gerade ist mit positiver Steigung, falls $m > 0$ ist, mit negativer Steigung, falls $m < 0$ ist und eine horizontale Gerade, falls $m = 0$. Sie sollten auch q als den x-Achsenabstand im Nullpunkt interpretieren können. Im Fall $m = 0$ sprechen wir auch von einer konstanten Funktion.

- Eine quadratische Funktion hat die Form

$$\begin{aligned} f &: D \to W \\ x &\mapsto f(x) := ax^2 + bx + c, \end{aligned}$$

für irgendwelche $a, b, c \in \mathbb{R}$. Im Fall von $a := 1$ sprechen wir auch von einer normierten quadratischen Funktion . Sie sollten wissen, wie der Graph einer quadratischen Funktion aussieht und wie man die Nullstellen berechnet (Hinweis: "Mitternachtsformel").

- Wir werden in diesem Modul einen Schritt weiter gehen und auch kubische Funktionen

$$\begin{aligned} f &: D \to W \\ x &\mapsto f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

betrachten (für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) und, von diesem Schritt ausgehend, ganz allgemein Polynomfunktion n-ten Grades, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f &: D \to W \\ x &\mapsto f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \end{aligned}$$

studieren und untersuchen. Beachten Sie, dass man den Funktionswert solcher Funktionen mittels dem Summenzeichen auch ganz kompakt als

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

darstellen kann und eine konstante Funktion eine Polynomfunktion 0-ten Grades, eine a n-lineare Funktion eine Polynomfunktion ersten Grades und eine quadratische Funktion eine Polynomfunktion 2.Grades, usw. ist.

- Polynomfunktionen mit Graden höher als 1, nennen wir nichtlineare Polynome (Polynomfunktionen) und diese gehören allgemeiner zu den nichtlineare Funktionen.

- Weitere wichtige nichtlineare Funktionen, die Sie teilweise bereits kennen könnten, sind:
  - die Signumsfunktion (Vorzeichenfunktion),
  - die Betragsfunktion,
  - die Potenz- und die Wurzelfunktion,
  - die Exponential- und die Logarithmusfunktion,
  - die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen:

    $$\sin, \cos, \tan, \cot,$$

    sowie

    $$\arcsin, \arccos, \arctan, \operatorname{arccot}.$$

  Diese werden wir genauer diskutieren und hier setze ich keine Vorkenntnisse voraus.

Eine Reihe von Aufgaben in der Übungsserie soll Ihnen die Möglichkeit geben, Ihre Kenntnisse aufzufrischen und Sie auf allfällige Lücken hinzuweisen.

2.2 Weitere Grundbegriffe und -kompetenzen

2.2.1 Lineare Ungleichungen

Das Ziel dieses Abschnittes ist, dass Sie danach lineare Ungleichungen umformen, lösen und grafisch darstellen können.

Im Modul mgli haben wir neben der am häufigsten verwendeten Gleichheitsrelation $=$ und ihrer Negation, der Ungleichheitsrelation $\neq$, auch noch die Ordnungsrelationen $<$ ("(echt) kleiner"), $\leq$ ("kleiner oder gleich"), $\geq$ ("grösser oder gleich"), $>$ ("(echt) grösser") kennengelernt. Analog zu Gleichungen nennen wir Ausdrücke in welchen solche Ordnungsrelationen $<, \leq, \geq, >$ vorkommen **Ungleichungen**. So besagt $3 < 5$ o ensichtlich den wahren Fakt, dass "3 grösser als 5" ist. Der Ausdruck $\frac{2}{3} \geq \frac{3}{4}$ ist eine andere Ungleichung, welche in diesem Fall eine falsche Aussage bedeutet. Nun erhält man in der Mathematik oft solche Ungleichungen (die dann meist wahr sind) und man möchte sie umformen, nach einer Variable auflösen oder sonstwie mit ihnen weiterarbeiten. Wir wollen hier die grundlegenden Fertigkeiten im Umgang mit linearen Ungleichungen (in Zahlbereichen, d.h., die Variablen stehen für Zahlen) lernen.

§2-1 Definition. (Ungleichung)

Eine **Ungleichung** ist eine Relation zwischen Variablen oder zwei mathematischen Ausdrücken x und y der Form

$$x \square y,$$

wobei $\square$ genau eines der Symbole $\neq, <, \leq, \geq, >$ ist.

- Für $x \neq y$ bedeutet die Relation x **ist nicht gleich** y (x **ist ungleich** y).
- Für $x < y$ bedeutet sie x **ist kleiner als** y.
- Für $x \leq y$ bedeutet sie x **ist kleiner oder gleich** y.
- Für $x \geq y$ bedeutet sie x **ist grösser oder gleich** y.
- Für $x > y$ bedeutet sie x **ist grösser als** y.

◇

§2-2 Beispiele.

1. Die Relation $1000 > 0$ bedeutet die (wahre) Aussage, dass die Zahl 1000 grösser Null ist. Auch $1000 \geq 0$ ist eine wahre Aussage, weil 1000 grösser *oder* gleich Null ist. ($0 > 0$ ist hingegen natürlich nicht wahr, $0 \geq 0$ aber schon.)
2. $-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{6}$ ist ebenfalls eine Ungleichung und ebenfalls wahr.
3. $-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{2}$ ist eine Ungleichung, welche falsch ist.
4. Wenn $x \in \mathbb{R}$ sein kann, dann ist die Ungleichung $2x \neq x$ falsch, da sie im Spezialfall von $x := 0$ richtig ist. (Für alle anderen reellen Zahlen x wäre sie allerdings richtig. Das Beispiel zeigt uns aber, dass es immer sehr wichtig ist, zu überlegen aus welcher Menge die Werte für die Variablen stammen können.)
5. Eine Ungleichung kann natürlich auch zwischen mehr als zwei Variablen formuliert werden. Z.B. bedeutet $x + y + z > 1$, dass die Summe der drei Variablen x, y, z immer grösser 1 ist.

6. Ungleichungen können natürlich auch (beliebig) komplizierterer Natur sein und unter Umständen noch weitere Parameter (aus vordefinierten Wertemengen) enthalten:

$$\frac{1}{a}x + 2^{by} \leq 0.$$

Hier werden die Parameter a und b aus einer ebenfalls spezifizierten Menge gewählt, dann aber fix gehalten und die x und y als Variablen betrachtet.

7. Denken Sie auch daran, je nach Situation können natürlich andere Symbole den Variablen entsprechen (das ist ja nur eine Frage der Wahl und somit des Kontexts). Wenn also $a > 0$ steht, meint man alle a aus einem Grundbereich, welche positiv sind. a ist hier also schon die Variable.

$\diamond$

Beachten Sie, dass z.B. $x \leq y$ dasselbe ist wie die Aussage ”x ist nicht grösser als y”. Ebenso ist z.B. ”$x > y$” äquivalent mit der Aussage ”x ist nicht kleiner und nicht gleich y” (siehe nachfolgende Eigenschaften). Ungleichungen haben weitere wichtige Eigenschaften, welche es uns insbesondere erlauben, diese ähnlich wie Gleichungen äquivalent umzuformen. Dies ist vor allem wichtig, wenn wir Ungleichungen (auf)lösen, d.h., eine Variable isolieren wollen.

§2-3 Definition. (Lösung einer Ungleichung)

Eine Ungleichung zu lösen (**nach einer Variable aufzulösen**), heisst die Variable durch erlaubte Äquivalenzumformungen isoliert auf eine Seite zu bringen. Die Menge aller Zahlen für welche die Ungleichung erfüllt ist, heisst **Lösungsmenge** der Ungleichung. $\diamond$

Äquivalente Ungleichungen haben dieselbe Lösungsmenge und mit Äquivalenzumformungnen können wir diese Lösungsmenge somit leicht bestimmen:

§2-4 Beispiel.

Wenn wir die Ungleichung

$$(*) \quad 3x + 5 > 6$$

haben, können wir sie z.B. folgendermassen ”nach x auflösen” (die Sätze dazu werden wir gleich kennenlernen):

$$\begin{aligned} 3x + 5 > 6 &\iff 3x > 1 && \text{(links und rechts des Ungleichheitszeichens mit 5 subtrahieren)} \\ &\iff x > \frac{1}{3} && \text{(links und rechts des Ungleichheitszeichens durch 3 dividieren)} \end{aligned}$$

D.h., die Ungleichung $3x + 5 > 6$ ist äquivalent mit $x > \frac{1}{3}$ und mit der zweiten Form haben wir die Lösung der Ungleichung $(*)$, d.h., diese ist gerade erfüllt für alle reellen Zahlen die grösser als $1/3$ sind. $\diamond$

§2-5 Definition. (Lineare Ungleichung)

Eine Ungleichung heisst genau dann **linear**, wenn sowohl die linke als auch die rechte Seite in den betre enden Variablen linear-a n sind. $\diamond$

§2-6 Beispiele.

1. $2a^2x \geq y$ ist eine lineare Ungleichung in den Variablen x und y.
2. $2a^2x \geq y$ ist hingegen eine nicht-lineare Ungleichung in der Variable a.
3. $3\cos(x) > 0$ ist eine nicht-lineare Ungleichung in x.
4. $3x + 4b \neq 2y - 16$ ist wieder eine lineare Ungleichung in den Variablen x und y.

$\diamond$

Im Unterschied zu Äquivalenzumformungen von Gleichungen müssen wir bei Ungleichungen im Fall von Multiplikation oder Division mit einem negativem Ausdruck den ”Richtungssinn” der Ungleichung umkehren! Das müssen wir uns unbedingt merken und dieser Fakt ist Bestandteil der folgenden Zusammenstellung von Eigenschaften:

§2-7 Satz. (Eigenschaften von Ungleichungen)
Seien im Folgenden $x, y, z \in \mathbb{R}$ mögliche (reelle) Variablen und $a, b, c, d, \ldots$ allenfalls zusätzliche festgehaltene Parameter.

(1) Negationen:

$$\begin{aligned} x \neq y &\iff \neg(x = y) \\ x \leq y &\iff \neg(x > y) \\ \neg(x \leq y) &\iff x > y \end{aligned}$$

(2) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \leq y \text{ und } y \leq z &\implies x \leq z \\ x \leq y \text{ und } y < z &\implies x < z \\ x < y \text{ und } y \leq z &\implies x < z \end{aligned}$$

(3) Additions- und Subtraktionsregeln: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff x + z \leq y + z \\ x \leq y &\iff x - z \leq y - z \end{aligned}$$

[E.9]

(4) Multiplikations- und Divisionsregeln:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ und $z > 0$:

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff xz \leq yz \\ x \leq y &\iff x/z \leq y/z \end{aligned}$$

Wichtig zu beachten sind folgende Regeln, welche wegen $z < 0$ das Ungleichheitszeichen umkehren.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ und $z < 0$:

$$x \leq y \iff xz \geq yz$$
$$x \leq y \iff x/z \geq y/z$$

[E.10] ⋄

Bemerkung. Die entsprechenden Regeln gelten auch, wenn man $\leq$ durch $<$ ersetzt.

Wenn mehrere Ungleichungen "in dieselbe Richtung" vorliegen und es die Variablen erlauben, dann können wir die Ungleichungen auch in kürzerer **Kettennotation** schreiben. Wenn also z.B. $2ax \leq y$ und $y < z$ gilt, schreiben wir auch

$$2ax \leq y < z.$$

Ungleichungen in zwei Variablen, sagen wir x und y, (und ohne weitere Parameter) lassen sich sehr einfach visualisieren (und dies hilft manchmal auch beim korrekten Lösen):

1. Man löst die zugehörige Gleichung, aufgefasst als Gleichung zwischen einer abhängigen Variablen (z.B. y) und einer unabhängigen Variablen (z.B. x), nach y auf und zeichnet den Graphen von $y = f(x)$ ein.

2. Man überlegt sich, welche Region aufgrund der Ungleichheit damit Lösungsmenge der Ungleichung ist.

§2-8 Beispiel.

Wir betrachten die Ungleichung $3x + y < 5$ und führen die eben genannten zwei Schritte durch:

1. Die zugehörige Gleichung $3x + y = 5$ löst sich nach y auf zu

$$3x + y = 5 \iff y = -3x + 5$$

was als Funktionsgraphen so aussieht:

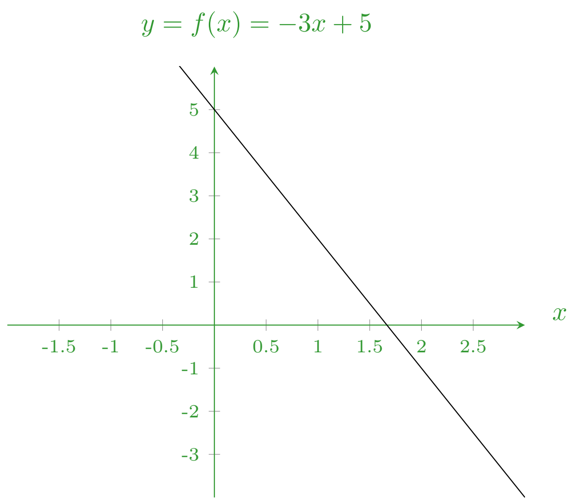


Abbildung 2.1 – Funktionsgraphen der zur Ungleichung $3x + y < 5$ zugehörigen Funktion $y = f(x) = -3x + 5$.

2. Weil z.B. der Punkt $(x, y) := (0, 0)$ die Ungleichung erfüllt, sehen wir sofort, dass die Region *unterhalb* des Funktionsgraphen die Lösungsmenge der *Ungleichung* ist. Zudem gehören die Punkte auf dem Funktionsgraphen gerade nicht zur Lösungsmenge, da wir eine echte Ungleichung $<$ haben.

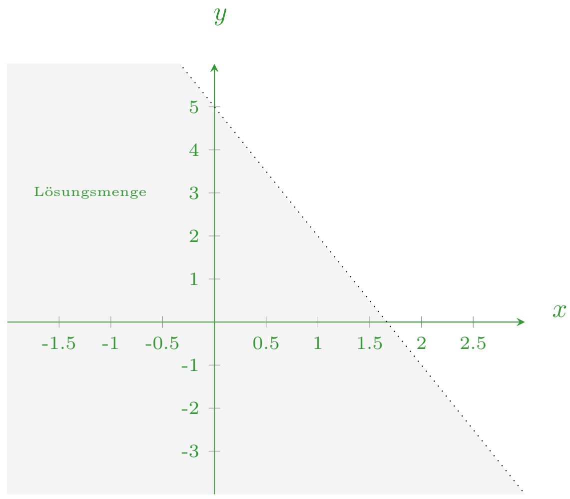


Abbildung 2.2 – Lösungsmenge der Ungleichung $3x + y < 5$.

◇

Ungleichungen treten häufig und an den verschiedensten Stellen von Anwendungen auf. So treten z.B. Systeme von Ungleichungen zum Lösen eines Problems in der "Linearen Optimierung" auf.
Wir wollen zum Schluss noch an drei Beispielen demonstrieren, wie man solche Ungleichungen löst bzw. äquivalent umformt. Eine gewisse Fertigkeit darin ist wesentlich beim Lernen von Analysis.

§2-9 Beispiele.

1. Welche Lösungsmenge hat die Ungleichung

$$\frac{x}{2} + 3 \leq 1 \qquad ?$$

Wir erhalten mit Satz §2-7 folgende Äquivalenz-Umformungskette:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 3 \leq 1 &\iff \frac{x}{2} \leq -2 && \mid -3 \text{ (Add./Subtr.-regel)} \\ &\iff x \leq -4 && \mid \cdot 2 \text{ (Mult./Div.-regel)} \end{aligned}$$

D.h., die Lösungsmenge dieser Ungleichung sind die reellen Zahlen kleiner gleich -4.

2. Sei für $a > 0$ die Ungleichung

$$-4ay + 3b^2x - 44 > 0$$

gegeben und wir wollen diese nach y auflösen. Wir erhalten wieder mit Satz §2-7:

$$\begin{aligned} -4ay + 3b^2x - 44 > 0 &\iff -4ay + 3b^2x > 44 && \mid +44 \text{ (Add./Subtr.-regel)} \\ &\iff -4ay > -3b^2x + 44 && \mid -3b^2x \text{ (Add./Subtr.-regel)} \end{aligned}$$

$$\iff y \underset{!}{<} \frac{-3b^2x + 44}{-4a} \qquad | : (-4a) \text{ (Mult./Div.-regel)}$$

also haben wir die Lösung (rechte Seite noch mit -1 kürzen)

$$y < \frac{3b^2x - 44}{4a}.$$

3. Sei nun $a < 0$ in der vorhergehenden Ungleichung

$$-4ay + 3b^2x - 44 > 0.$$

Was ändert sich damit, wenn wir wieder nach y auflösen?

Wir müssen in der dritten Äquivalenzumformung beachten, dass jetzt $-4a$ *positiv* ist (da nun a negativ ist und damit insgesamt $-4a$ positiv). Also wird dort das Ungleichheitszeichen nicht umgekehrt und wir haben

$$y > \frac{3b^2x - 44}{4a}.$$

◇

2.2.2 Grundfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz ein paar Fakten zu drei essentiellen Grundfunktionen festhalten.

Die Signumsfunktion (Vorzeichenfunktion)

§2-10 Definition. (Signumsfunktion (Vorzeichenfunktion))
Die Signumsfunktion oder Vorzeichenfunktion ist definiert durch

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

◇

Der Funktionsgraph sieht folgendermassen aus:

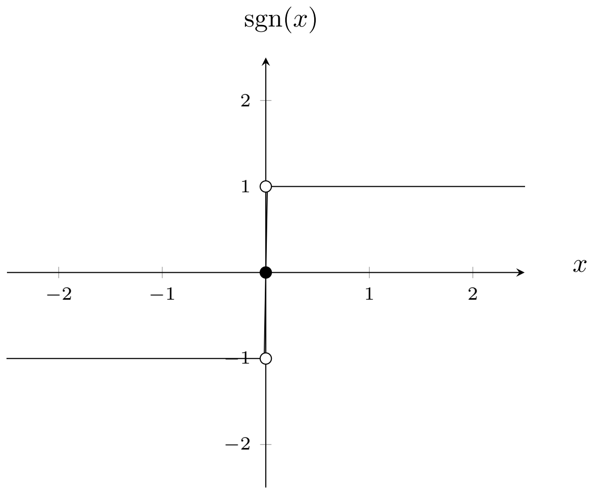


Abbildung 2.3 – Funktionsgraphen der Signumsfunktion (Vorzeichenfunktion) sgn.

Die Signumsfunktion hat also in $x := 0$ einen Sprung, ist für $x < 0$ konstant und zwar -1 und für $x > 0$ konstant und hier 1.

Die Betragsfunktion

§2-11 Definition. (Betragsfunktion)
Die Betragsfunktion ist definiert durch

$$\begin{aligned} |.| &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

◇

Die Betragsfunktion hat einen Funktionsgraphen mit folgender Form:

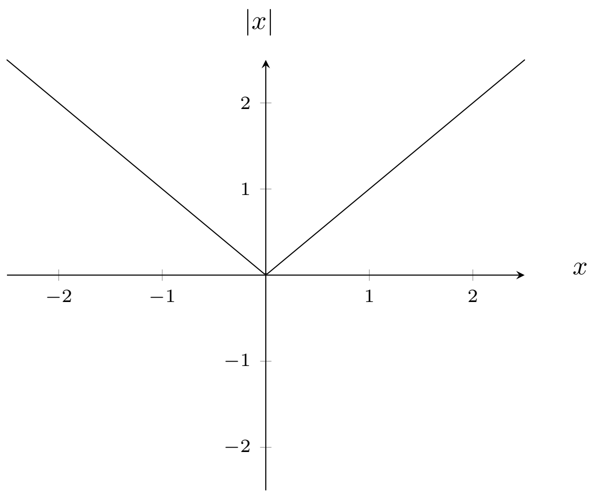


Abbildung 2.4 – Funktionsgraphen der Betragsfunktion $|.|$.

§2-12 Satz. (Wichtige Eigenschaften der Betragsfunktion)

Seien im Folgenden $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(1) $|x| = \operatorname{sgn}(x)x$.

(2) Die Betragsfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ nichtnegativ.

(3) $|x| = 0 \iff x = 0$.

(4) $|xy| = |x|\,|y|$.

(5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ("Dreiecksungleichung")

(6) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ ("2. Dreiecksungleichung")

(7) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ ("Umgekehrte Dreiecksungleichung")

(8) $|-x| = |x|$.

(9) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für $y \neq 0$.

(10) $|x - y| = 0 \iff x = y$.

(11) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$. (Für $<$ analog)

(12) $|x| \geq y \iff (x \leq -y) \vee (x \geq y)$. (Für $>$ analog)

◇

Die Betragsfunktion ist eine nicht-lineare Funktion. Wie können wir Ungleichungen welche aber Ausdrücke mit ihr enthalten, trotzdem lösen? Folgende drei Dinge können dabei z.B. hilfreich sein:

1. Mithilfe einer Skizze des Funktionsgraphen können wir uns ein besseres Bild machen.
2. Mithilfe einer Vorzeichentabelle in welcher wir für alle Intervalle auf denen das Vorzeichen konstant ist, dieses Vorzeichen eintragen.
3. Mit weiteren Facts wie dem obenstehenden Satz ist es oft möglich, schliesslich Ungleichungen (und auch entsprechende Gleichungen!) mit Beträgen umzuformen bzw. zu lösen.

Damit kann man jetzt viel Nützliches, welches in der Analysis immer wieder vorkommt anstellen. Nur ein paar wenige, einfache Beispiele als Vorgeschmack:

§2-13 Beispiele.

1. Die Betragsfunktion dient z.B. dazu, den Abstand zwischen zwei Zahlen zu messen: Der Abstand der Zahlen 2 und 3 ist der Betrag $|2 - 3| = 1$ und natürlich gleich viel, wie der Abstand von 3 zu 2, d.h., $|3 - 2| = 1$.
2. Wir können somit auch gut alle Zahlen x, die z.B. höchstens den Abstand 2 von einer vorgegebenen Zahl a haben, ausdrücken als
$$|x - a| \leq 2.$$
Jetzt haben wir eine Ungleichung, welche die Betragsfunktion beinhaltet. Welche x lösen diese Ungleichung allgemein für ein a, d.h., welche x haben einen Abstand von höchstens 2 von a? Lösen wir die Ungleichung auf:
$$|x - a| \leq 2$$

$$\iff \quad -2 \leq x - a \leq 2 \qquad \text{(Satz §2-12 (11))}$$
$$\iff \quad a - 2 \leq x \leq a + 2 \qquad | + a \qquad \text{(Satz §2-7 (3))}$$

Letzteres ist nicht anderes als ein Ausdruck für ein Intervall. D.h.,

$$x \in \mathcal{L} := [a - 2, a + 2]$$

was grafisch so aussieht und absolut Sinn ergibt:

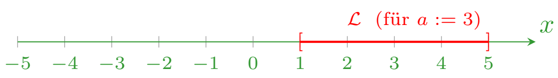


Abbildung 2.5 – Lösungsintervall im Fall von $a := 3$.

◇

Die Quadratwurzelfunktion

§2-14 Definition. (Quadratwurzelfunktion)
Die Quadratwurzelfunktion ist definiert durch

$$\begin{aligned} \sqrt{} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

◇

Der Funktionsgraph sieht so aus:

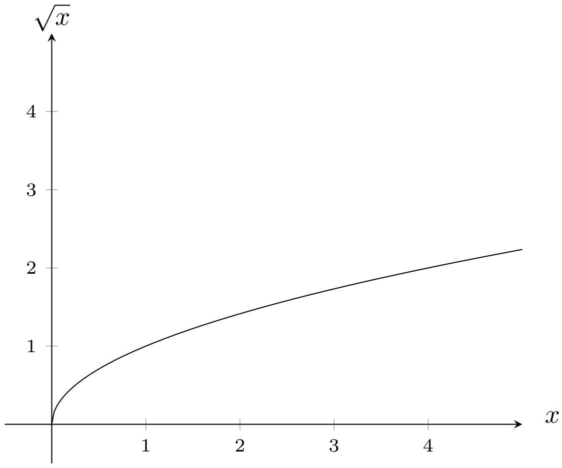


Abbildung 2.6 – Funktionsgraphen der Quadratwurzelfunktion $\sqrt{\,}$.

§2-15 Satz. (Wichtige Eigenschaften der Quadratwurzelfunktion)

(1) Der Funktionsgraph der Quadratwurzelfunktion steigt auf ihrem Definitionsbereich bei grösser werdendem x "stetig" und "monoton" an.

(2) Die Funktionswerte sind alle nicht-negativ und für $x \neq 0$ positiv.

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

(4) $\sqrt{\,}$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Umkehrfunktion der Quadratfunktion x^2. D.h., es gilt

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x.$$

◇

2.3 Essentielle Python Skills

Zur Unterstützung und zur beispielhaften praktischen Umsetzung von Modulinhalten in Software werden wir Python 3 verwenden (bei mir aktuell 3.7.6). Das eana-Modul ist aber kein Python-Programmierkurs! Die notwendigen Skills sind elementar und sollen selbständig erworben werden, wobei eine gewisse Unterstützung "on-the-fly" im Skript und auf den Übungsblättern erfolgen wird.

Es ist wichtig, dass Sie Python 3 auf Ihrem Rechner installiert haben und wissen, wie man in den interaktiven Shell-Modus gelangt und dort arbeitet. Weiter sollten Sie eine Quellcode-Datei erstellen und ausführen können. Dazu gibt es viele gute Bücher und Webseiten. Zudem werden wir hier das wichtigste gleich besprechen. Ein gutes einführendes Buch ist z.B.

,

welches bereits sehr über das herausgeht, was wir hier brauchen werden. Ich bin allerdings der Meinung, dass Sie nicht unbedingt ein Buch brauchen, falls Sie sich keines besorgen möchten. Die Webseite von Python

https://www.python.org

bietet eine Fülle von Wissen. Dies ist sicher die zentrale “Anlaufstelle” rund um das Thema Python. Ein gutes Einsteiger-Tutorial gibt es z.B. hier:

https://docs.python.org/3/tutorial/index.html

Code in der interaktiven Shell sind im Vorlesungsskript als “Code Listing” folgendermassen aufgeführt:

```
leisera@eana% python3
Python 3.5.4 (default, Oct 9 2017, 12:07:29)
[GCC 6.4.1 20170727 (Red Hat 6.4.1-1)] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> print('Hello world!')
Hello world!
>>>
```

Listing 2.1 – Python Code einer Sitzung mit der interaktiven Shell

Den Inhalt einer Quellcode-Datei wird im Vorlesungsskript so dargestellt (Beispiel einer kleinen hello.py Datei):

```
# Python 3 'Hello world' Programm, hello.py

print('Hello world!')
```

Listing 2.2 – Python Code in einer Quellcode-Datei

Eine solche Quellcode-Datei wird dann in der Shell des Betriebssystems (der “Kommandozeile”) mit

```
leisera@eana% python3 hello.py
Hello world!
leisera@eana%
```

Listing 2.3 – Ausführen eines Pythonprogramms von der Kommandozeile

ausgeführt und der Output erscheint entweder in der aufrufenden Shell (wie im Beispiel), in einem anderen Programm oder in einer Ausgabedatei.

Funktionen in einer eigenen Library können wir zum Beispiel so erstellen und benutzen (was die Wiederverwertbarkeit von Code verbessert):

```
# Fibonacci numbers module (simple, for demonstration purposes only)

def printFib(n):  # print Fibonacci series up to n
   a, b = 0, 1
   while a < n:
      print(a, end=' ')
      a, b = b, a+b
   print()

def getFib(n): # return Fibonacci series up to n as array
   result = []
```

```
    a, b = 0, 1
    while a < n:
        result.append(a)
        a, b = b, a+b
    return result
```

Listing 2.4 – Python-Funktionen in einer Library-Datei fibo.py erstellen

In einer Python-Session kann ich diese Funktionen nun zum Beispiel so benutzen:

```
leisera@eana% python3
>>> import fibo    # Pfadvariable/aktuellen Pfad setzen(!), damit fibo.py gefunden
    wird.
>>> fibo.printFib(5)
0 1 1 2 3
>>> fibo.getFib(5)
[0, 1, 1, 2, 3]
>>> 3+fibo.getFib(5)[3]   # Weiter benutzen und z.B. rechnen (array beginnt mit
    Index 0!)
5
```

Listing 2.5 – Python-Funktionen der Library-Datei fibo.py benutzen

Um den Library-Namen nicht immer vorherstellen zu müssen kann ich übrigens so importieren:

```
>>> from fibo import *
>>> getFib(6)
[0, 1, 1, 2, 3, 5]
```

Listing 2.6 – Importvariante für Python-Library

Schliesslich möchte ich noch auf die frei verfügbare Python-Distribution Anaconda (**https://www.anaconda.com/**) und damit u.a. der Möglichkeit, sogenannte Jupyter Notebooks (**https://jupyter.org/**) zu benutzen, hinweisen. Wenn Sie sich näher für Python interessieren, werden Sie wahrscheinlich früher oder später damit arbeiten wollen.

Teil I

Konvergenz und Stetigkeit

Kapitel 3

Einführung

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 3.1 Sie kennen die Definitionsarten und Darstellungen von Zahlenfolgen und können sie anhand von einfachen Beispielen erklären.

LZ 3.2 Sie haben ein Grundverständnis dafür, weshalb und wie man die verschiedenen Arten benutzt.

Das Thema Zahlenfolgen haben wir ein erstes Mal im Modul “Mathematische Grundlagen für Informatik (mgli)” thematisiert. Allerdings handelte es sich dort im Wesentlichen um Folgen von ganzen Zahlen im Zusammenhang mit ersten einfachen Rekursionen. Folgenelemente, die rationale oder reelle Zahlen waren, hatten wir nur einmal gestreift und dabei sogar ein sehr wichtiges Phänomen – das der “Konvergenz” – ganz ausser Betracht gelassen. Jetzt wollen wir unseren Blickwinkel etwas verändern und vor allem solche Folgen betrachten, deren Elemente beliebige reelle Zahlen sein können. Solche “reellen Folgen” sind auch im Hinblick auf das neue Phänomen der “Konvergenz” sehr interessant. Mehr noch, es zeigt sich, dass dieses Phänomen sehr eng mit den reellen Zahlen selbst verbunden ist. Ein Fakt, den wir im Folgenden öfters streifen werden.

Doch zuerst, wollen wir den Begri einer reellen Zahlenfolge[E.11] näher kennenlernen. Wir lernen zwei verschiedene Arten kennen, wie wir eine reelle Zahlenfolge definieren können und dazu noch zwei weitere Darstellungsarten.

3.1 Zwei Arten eine reelle Zahlenfolge zu definieren

§3-1 Definition. ((Reelle) Zahlenfolge; funktionale und explizite Definition bzw. Darstellung)

Eine *reelle Zahlenfolge* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n := f(n) \end{aligned}$$

welche wir dann abgekürzt als

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (x_n)_{n=0}^{\infty} \text{ oder auch nur } (x_n)$$

schreiben. Für jedes konkrete n nennen wir x_n dann ein *Folgenglied* und n den *Index* dieses Folgengliedes.
Diese Definition wollen wir auch die *funktionale Definition* bzw. *funktionale Darstellung* einer reellen Zahlenfolge nennen. Benutzen wir sogar nur x_n, so sprechen wir auch von der *expliziten Definition* bzw. *expliziten Darstellung*. (Die explizite Darstellung ist also nichts anderes als der Funktionsausdruck der betre enden funktionalen Definition, ev. noch in Klammern geschrieben.) $x_n := f(n)$ wird auch *expliziter Ausdruck* genannt. ⋄

Manche schreiben übrigens eine Zahlenfolge auch in geschweiften Klammern, also z.B. $\{x_n\}$. Wir werden aber die runden Klammern benutzen. Somit haben wir also eine Zahlenfolge als eine Abbildung (Funktion) definiert. Schauen wir uns nun ein paar Beispiele von reellen Zahlenfolgen an.

§3-2 Beispiele.

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n := \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

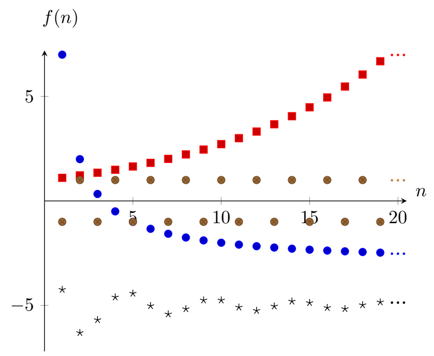


Abbildung 3.1 – Beispiele von reellen Zahlenfolgen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

definiert eine reelle Zahlenfolge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{1}{2}n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

mit den ersten Folgenglieder in aufzählender Darstellung gegeben durch

$$\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots\right).$$

D.h., es ist z.B. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, bzw. $x_5 = \frac{5}{2}$ usw..

2. Die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n := -\frac{1}{(n+1)^2}$$

definiert eine reelle Zahlenfolge mit

$$\left(-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \ldots\right).$$

3. Die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n := (-1)^n$$

definiert eine reelle Zahlenfolge mit

$$(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots).$$

Diese Abbildung ist genauer sogar eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Ihre Folgenglieder sind also alle *ganze Zahlen*.

4. Die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n := 5$$

definiert die (konstante) Zahlenfolge mit

$$(5, 5, 5, 5, 5, \ldots).$$

Diese Abbildung ist genauer eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ihre Folgenglieder sind (trivialerweise) “alles” *natürliche Zahlen*.

5. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n := n \end{aligned}$$

ist die Zahlenfolge, welche gerade einer “Aufzählung” aller natürlichen Zahlen inkl. der Null entspricht:

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, ...) .$$

Damit ist auch diese Abbildung genauer eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ihre Folgenglieder sind alles *natürliche Zahlen*.

6. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n := \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

definiert die reelle Zahlenfolge mit

$$\begin{aligned} &\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right), \cos(2\pi), \cos\left(\frac{12\pi}{5}\right), \ldots\right) \\ &= \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \ldots\right) \\ &\approx (1, 0.309017, -0.809017, -0.809017, 0.309017, 1, 0.309017, \ldots) . \end{aligned}$$

◇

§3-3 Beispiel.

In den Beispielen auf S.33 sind die expliziten Darstellungen der jeweiligen Zahlenfolgen also einfach

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5)_{n\in\mathbb{N}}$,
5. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$,
6. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

◇

Eine wichtige Unterscheidung machen wir zur rekursiven Form einer Zahlenfolge:

§3-4 Definition. (Rekursive Definition (oder auch Darstellung) k-ter Ordnung einer reellen Zahlenfolge)

Wir sprechen von der **rekursiven Definition (oder Darstellung) k-ter Ordnung** einer Zahlenfolge, wenn sie folgendermassen definiert ist:

1. Alle Glieder von $n = 0$ bis $n = k - 1$ (also alle Glieder mit $n \leq k - 1$) sind

durch Anfangswerte

$$x_0 := a_0 \in \mathbb{R},$$
$$\vdots$$
$$x_{k-1} := a_{k-1} \in \mathbb{R},$$

vorgegeben,

2. Es ist ein allgemeiner Ausdruck

$$x_n := f(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-k}), \qquad \forall n \geq k,$$

vorgegeben, wie im Fall $n \geq k$ das n-te Glied x_n aus den k vorhergehenden Gliedern $x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}$ berechnet wird.

◇

§3-5 Beispiele.

1. Die rekursiv definierte Zahlenfolge 1-ter Ordnung

$$\begin{aligned} x_0 &:= 0, \\ x_n &:= x_{n-1} + 1, \qquad \forall n > 0, \end{aligned}$$

ist nichts anderes als die rekursive Darstellung der Folge, welche die natürlichen Zahlen aufzählt.

2. Wie Sie eventuell bereits wissen, ist die berühmte **Fibonacci-Folge**, die Folge welche rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_0 &:= 0, \\ x_1 &:= 1, \\ x_n &:= x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad \forall n > 1, \end{aligned}$$

definiert ist. Sie ist eine rekursive Folge 2. Ordnung.

3. Für $K \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}_{>0}$, ist die sogenannte **logistische Gleichung** rekursiv definiert als die Folge

$$\begin{aligned} x_0 &:= a \in \mathbb{N}, \\ x_n &:= r x_{n-1} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{K}\right), \qquad \forall n > 0. \end{aligned}$$

◇

3.2 Zwei weitere unvollständige Arten eine reelle Zahlenfolge darzustellen

Die beiden vorhergehenden Definitionsarten für eine reellen Zahlenfolge sind natürlich insbesondere "Darstellungsarten" einer solchen Zahlenfolge. Zwei weitere nützliche Darstellungen wollen wir jetzt auch noch einführen. Diese sind aber unvollständig und sind deshalb wirklich nur "Darstellungsarten" und keine exakten, eindeutigen Definitionen. Die erste Art tritt häufig auf, wenn wir von der Anwendungsseite her durch "Daten" auf eine Zahlenfolge geführt werden (siehe auch 3.3).

§3-6 Definition. (Aufzählende Darstellung einer (reellen) Zahlenfolge)

Wir können eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch ansatzweise aufzählend darstellen, d.h. in der Form

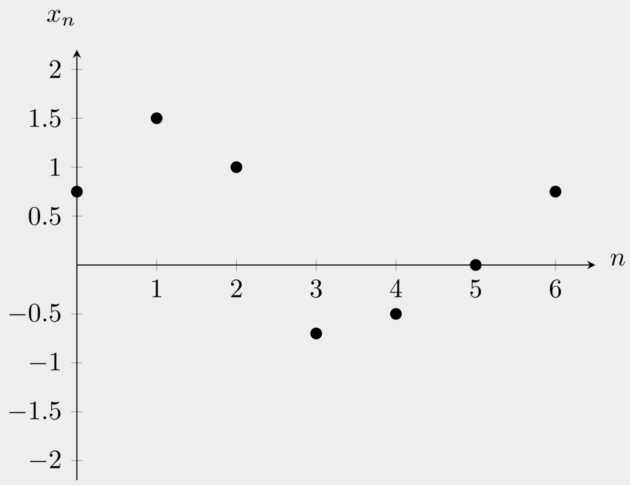
$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

also erstes Folgenglied gefolgt vom zweiten Folgenglied, gefolgt vom dritten Folgenglied ... usw.. Dies ist aber immer eine unvollständige Darstellung, weil die Menge $\mathbb{N}$ (also der Folgenglieder) ja unendlich ist. ◇

Die zweite Art eine Zahlenfolge (unvollständig) darzustellen ist grafischer Natur:

§3-7 Definition. (Grafische Darstellung einer (reellen) Zahlenfolge)

Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stellen wir (unvollständig) grafisch dar, indem wir zwei zueinander rechtwinklig stehende Koordinatenachsen zeichnen, wobei die x-Achse (horizontal) die n's darstellt (d.h., die Indizes) und in Richtung der y-Achse (vertikal) die Werte x_n der Folgenglieder aufgetragen werden.



◇

Da diese Darstellungsarten unvollständig sind, können wir sie nur als solche verwenden und nicht als Definition. Wir werden uns in den Aufgaben ein paar Beispiele für diese zwei Darstellungsarten erarbeiten.

3.3 Wieso gibt es diese verschiedenen Arten von Definitionen und Darstellungen?

Je nach Situation kann die eine oder andere Darstellungs- oder Definitionsart von Zahlenfolgen nützlicher sein. Oder je nach Situation kommt man vielleicht zuerst auf die eine Art und will dann eine der anderen Formen ermitteln.

Häufig erhält man zuerst reelle Zahlenfolgen in der rekursiven oder (unvollständig als empirische Daten) in der aufzählenden Form[E.12] . Um mit ihr rechnen zu können oder z.B.

möglichst einfach den n-ten Wert zu berechnen, ist die Darstellung als Abbildung bzw. die explizite Form am nützlichsten. Oder man will ein "Modell" erstellen, um zu verstehen, wie sich die ganze Zahlenfolge verhält, also auch für grössere, noch unbekannte n. Auch möchte man vielleicht zuerst einmal das Verhalten bzw. die Eigenschaft einer Zahlenfolge besser verstehen. Dann hilft es oft, sie (bzw. ein Teilbereich von ihr) grafisch darzustellen.

§3-8 Beispiel. (Rekursiv gegebene Zahlenfolge)

Angenommen Sie wissen aus Ihrer Anwendung, dass eine zu untersuchende Folge bei $x_0 = 2$ beginnt und das n-te Folgenglied durch $x_n = \frac{3}{2}n^3 + 2x_{n-1}$ aus einem vorhergehenden Folgenglied x_{n-1} bestimmt ist. Dann haben Sie es mit einer Folge zu tun, welche rekursiv als

$$\begin{aligned} x_0 &:= 2, \\ x_n &:= \frac{3}{2}n^3 + 2x_{n-1}, \end{aligned}$$

definiert ist. ◇

§3-9 Beispiel. (Funktional/explizit gegebene Zahlenfolge)

Wenn Sie im vorherigen Beispiel nun wissen möchten, wie das 182-te Folgenglied lautet, dann ist es sehr hilfreich zu wissen, dass obige rekursiv gegebene Folge die funktionale bzw. explizite Darstellung[E.13]

$$x_n = -\frac{3n^3}{2} - 9n^2 - 27n + 41 \cdot 2^n - 39$$

hat. Denn damit lässt sich jetzt relativ schnell und einfach das n-te Folgenglied – auch für sehr grosse n – berechnen (ohne 182 rekursive "Aufrufe" bzw. Schritte auszuführen):

$$x_{182} = 251329268702005772770768912452650706113473216038101410943.$$

Die funktionale bzw. explizite Darstellung bringt aber noch mehr. Sie können sich nämlich "ein Bild" über das prinzipielle Verhalten dieser Folge machen, ohne die Funktion zu zeichnen, was ja immer unvollständig und nur für begrenzte n möglich ist. Insbesondere können Sie z.B. aus der expliziten Darstellung relativ rasch erkennen, dass die Folge sich für n gegen unendlich letzlich wie 2^n verhält, also exponentiell schnell anwächst und beliebig gross wird. ◇

§3-10 Beispiel. (Rekursiv gegebene Zahlenfolge)

Eine sehr schöne Beschreibung des klassischen Beispiels einer Anwendung findet sich in [?, S.194]. Wir wollen dies hier näher studieren:

Anwendung. Exponentielles Wachstum

Oft kann man bei der Modellbildung aus theoretischen Überlegungen eine rekursive Folge eines zu untersuchenden Phänomens bilden. Dabei ist das Vorgehen im Prinzip analog, egal ob wir es zum Beispiel mit einem physikalischen, einem biologischen, einem chemischen, einem technischen oder einem wirtschaftlichen Phänomen zu tun haben. Besonders interessant sind dabei allgemein Wachstumsphänomene, welche wir ganz allgemein auch als **Wachstumsprozesse** bezeichnen.

Der erste solche Wachstumsprozess ist das sogenannte **exponentielle Wachstum**. Auf diesen Prozess kommen wir durch folgende Überlegungen:

- Angenommen wir haben irgendeine Menge von Elementen. Diese Menge wollen wir **Population** bzw. genauer **Anfangspopulation** nennen und ihre Grösse mit u_0 bezeichnen. D.h., die Populationsgrösse zum Zeitpunkt $t := 0$ ist u_0. Bei der Population selbst kann es sich dabei z.B. um eine Panther-Population in der Wildnis, um eine Bakterien-Kolonie in einer Petrischale, um die Konzentration einer chemischen Substanz in einer Lösung oder um einen Kontostand auf einer Bank handeln.

- Wir betrachten nun eine Anzahl Zeitschritte

$$t_n := n\Delta t$$

  für $n \in \mathbb{N}$, wobei Δt die Grösse der Zeitschritte sei (z.B. $\Delta t := 1\mu s$ oder $\Delta t := 1h$, usw.).

- Die Veränderung der Populationsgrösse, kurz geschrieben $u_n := u_{t_n}$, im Zeitverlauf, startend bei u_0 im Zeitpunkt t_0 kann nun quantitativ auf viele verschiedene Arten erfolgen. Eine (einfache) Möglichkeit ist, dass die Population in jedem Zeitschritt Δt proportional zur Grösse am Anfang des Zeitschritts und der Länge des Zeitschritts wächst. Mathematisch heisst dies, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_{n-1}}_{\substack{\text{Population zu Beginn}\\ \text{des Zeitschritts}}} + \underbrace{k\Delta t u_{n-1}}_{\substack{\text{Zunahme in Abh.}\\ \text{von } \Delta t \text{ und } u_{n-1}}} \\ &= (1 + k\Delta t)u_{n-1} \end{aligned}$$

  für ein $k \in \mathbb{R}_{>0}$, die **Proportionalitätskonstante** oder auch **Wachstumskonstante** genannt, gilt.

- Zu beachten ist, dass in diesem Modell also die Zunahme von einem Faktor k abhängt, welcher insbesondere nicht vom Zeitpunkt t oder von der Grösse u_{n-1} der Population abhängt. Er ist immer konstant. Die Zunahme selbst hängt aber sehr wohl von der Länge des Zeitschrittes und der Grösse der momentanen Population ab.

- In mgli haben wir gelernt, solche rekursiven Zahlenfolgen in explizite Folgen umzuwandeln. Obige Rekursionsgleichung ist vom Typ her eine homogene lineare Rekursionsgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koe zienten, welche die explizite Formel

$$u(n) = (1 + k\Delta t)^n u_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

  hat. Diese Funktion ist o ensichtlich eine "Exponentialfunktion" (später dazu mehr!), welche als Basis $1 + k\Delta t$, die Variable n im Exponenten und einen konstanten Faktor u_0 hat.

- Plotten wir diese Funktion für ein paar Wachstumskonstanten $k \in \mathbb{R}_{>0}$, so sehen wir sehr gut, dass diese Funktion, und damit die Populationsgrösse, unbeschränkt wächst [E.14], je länger wir die Zeit laufen lassen:

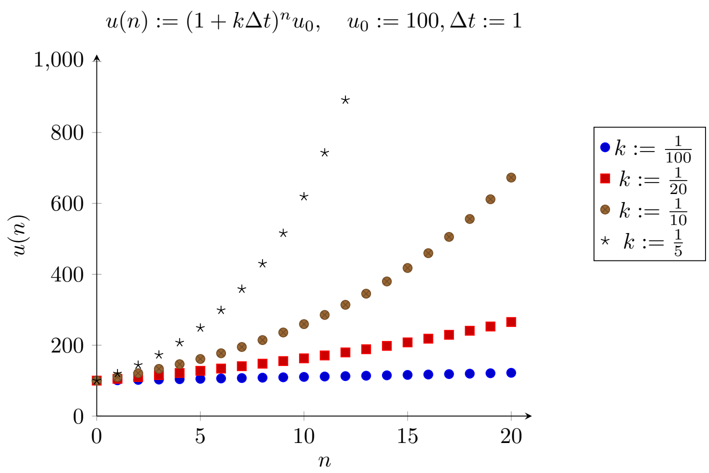


Abbildung 3.2 – Beispiele für exponentielles Wachstum im Modell $u(n) = (1 + k\Delta t)^n u_0$ für mehrere Wachstumskonstanten k und für $u_0 := 100, \Delta t := 1$.

- Anmerkung: Wählt man im Modell statt positiver Wachstumskonstanten k negative, also $k \in \mathbb{R}_{<0}$, so erhält man ein entsprechendes Modell für **exponentielle Zerfallsprozesse**. Ein Beispiel hierfür sind die radioaktiven Zerfallsprozesse in Atomkernen.

Anwendung. Logistisches Wachstum

Ein Wachstumsprozess kann aber auch nach anderen Gesetzmässigkeiten verlaufen. Eine weitere Möglichkeit führt auf das sogenannte **logistische Wachstum**. Unter welchen Umständen ist dies ein korrektes Wachstumsmodell?

- Wir betrachten wieder eine Anfangspopulation der Grösse u_0 und eine Anzahl Zeitschritte

$$t_n := n\Delta t$$

  für $n \in \mathbb{N}$, mit Zeitschritten der Grösse Δt.

- Die Annahme, die wir beim Modell des exponentiellen Wachstums gemacht haben, ist in der Realität kaum exakt zutre end: Ein Wachstumsprozess kann praktisch nie ohne Einschränkung ablaufen. Viele Prozesse brauchen Energie. Und Energie ist nicht unbeschränkt verfügbar. Andere Prozesse brauchen Materie und auch diese ist nur beschränkt verfügbar. Wiederum andere Prozesse brauchen Raum, so dass oft dieser ein beschränkender Faktor ist.

- Nehmen wir an, dass aufgrund solcher natürlicher Grenzen die Populationsentwicklung u_n einen Wert U nicht überschreiten kann. Man spricht bei U oft auch von der **Gesamtkapazität** oder der **Tragfähigkeit** eines Systems. Dann können wir dies folgendermassen in ein Modell einbinden, welches wir dann das Modell des **logistischen Wachstums** nennen:
  Für

$$u_0 < U$$

  (eine vernünftige Annahme aufgrund der Definition von U) wird sich der Term des Zuwachses für spätere u_n immer mehr abbremsen, bis er Null wird. D.h.,

$$U - u_{n-1} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

  und dies können wir als Faktor hinter den Zuwachsterm stellen (quasi als "Bremse"):

$$u_n = u_{n-1} + k\Delta t u_{n-1}(U - u_{n-1}).$$

- Anders gesagt, muss also

$$\begin{aligned} \text{I. Konvergenz gegen } U: &\quad u_n \to U, \text{ für } n \to \infty \\ \text{II. Beschränktheit durch } U: &\quad 0 < u_n \le U, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{III. Monotonie:} &\quad u_{n-1} \le u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

  gelten.
- Diese Bremse in unserem Modell wirkt nur, wenn die Wachstumskonstante k nicht zu gross ist (quasi nicht allzu viel "Gas gibt", weil sonst hebt sie die Bremse auf). Man kann zeigen, dass die Bedingungen I.-III. erfüllt sind, wenn man $k\Delta t U \le 1$ wählt.
- Wenn wir für ein paar Parameter den Plot zeichnen, dann sehen die Zahlenfolgen dieser Rekursion zum Beispiel so aus:

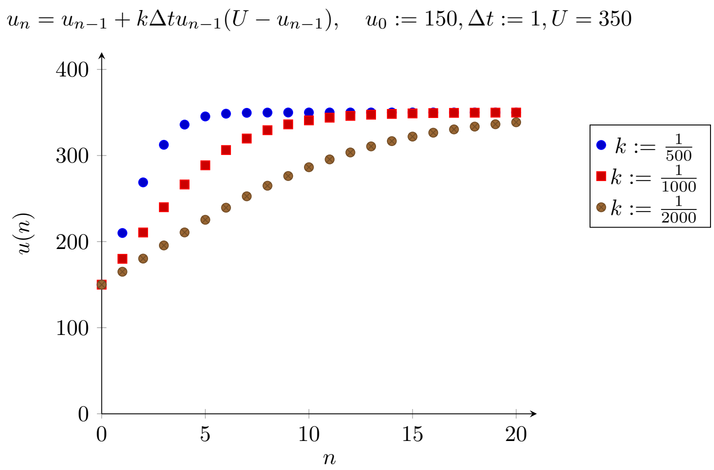


Abbildung 3.3 – Beispiele für logistisches Wachstum im Modell mit der rekursiven Gleichung $u_n = u_{n-1} + k\Delta t u_{n-1}(U - u_{n-1})$ für mehrere Wachstumskonstanten k und für $u_0 := 150, \Delta t := 1$ und Tragfähigkeit $U := 350$.

  Wir sehen, wir haben jetzt nicht mehr unbeschränktes Wachstum, sondern die Kurve nähert sich immer mehr der maximalen Tragfähigkeit an.
- Anmerkung: Würden wir bei einer Population von $u_0 := 1$ starten, ergäbe sich für diesen ganzen Bereich die typische "Sigmoid-Kurve" (siehe später).

◇

Kapitel 4

Eigenschaften und der Begriff des Grenzwerts von Zahlenfolgen

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 4.1 Sie kennen die grundlegenden Eigenschaften Monotonie und Beschränktheit von Zahlenfolgen und können sie anhand einfacher Beispiele erklären.

LZ 4.2 Sie verstehen die Begri e Konvergenz, Grenzwert und Divergenz und können sie anhand einfacher Beispiele erklären.

LZ 4.3 Sie wissen, was eine Nullfolge ist.

LZ 4.4 Sie haben ein Grundverständnis für die Bedeutung der Begri e in Anwendungen.

4.1 Monotonie

§4-1 Definition. (Monotonie einer Zahlenfolge)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **streng monoton steigend (wachsend)**, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}.$$

(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **streng monoton fallend**, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}.$$

(3) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **monoton steigend (wachsend)**, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}.$$

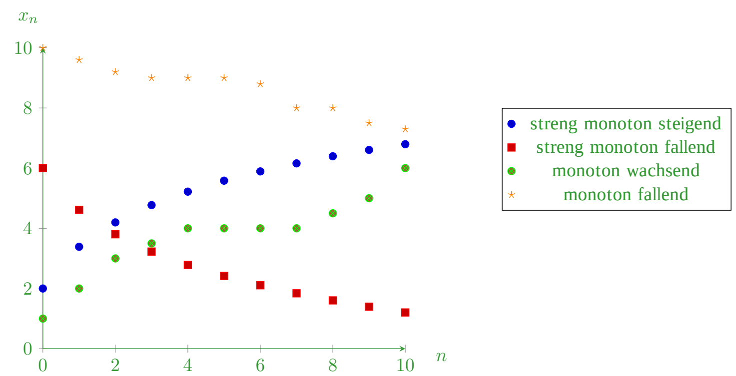
(4) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **monoton fallend**, wenn

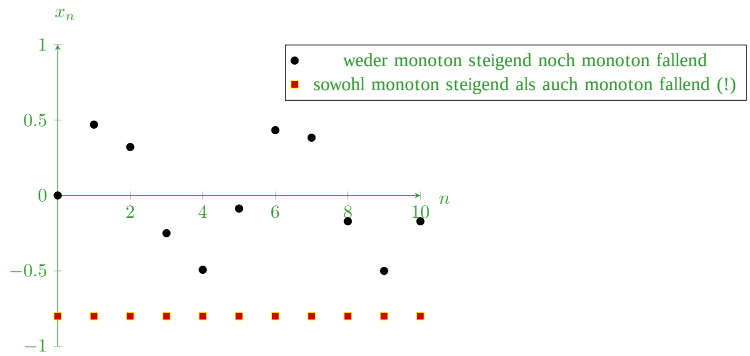
$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}.$$

(5) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **monoton**, wenn sie entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

◇

§4-2 Beispiel. (Monotonie von Zahlenfolgen)





◇

Da ein Plot einer (unendlichen) Zahlenfolge bekanntlich unvollständig ist, kann man aus ihm nie mit Sicherheit eine Monotonie-Aussage schliessen. Wir müssen dies also streng aufgrund der Definition der Folge begründen!

§4-3 Beispiele.

1. Die rekursiv gegebene Folge mit

$$x_0 = 3$$
$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}$$

ist streng monoton wachsend.

Begründung:

In jeden Schritt n wird zu einem Folgenglied x_{n-1} jeweils eine positive Zahl (nämlich $\frac{1}{2}$) addiert. Somit liegt jede Zahl x_n auf dem reellen Zahlenstrahl *rechts* von x_{n-1}. D.h., $x_{n-1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Zahlenfolge per Definition tatsächlich streng monoton wachsend.

2. Die explizit gegebene Folge

$$x_n = f(n) := (n-6)^2$$

kann nicht monoton sein (weder steigend noch fallend).

Begründung:

Denn wir haben z.B.

$$36 = x_0 > x_1 = 25,$$

also ist die Folge hier fallend. Jedoch ist

$$0 = x_6 < x_7 = 1,$$

d.h., hier steigt sie. Damit ist sie nicht monoton.

◇

4.2 Beschränktheit

§4-4 Definition. (Beschränktheit einer Zahlenfolge)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst (von/nach) oben beschränkt, wenn

$$\exists\, b \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq b.$$

Ein solches b wird obere Schranke der Folge genannt.

(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst (von/nach) unten beschränkt, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq a.$$

a wird untere Schranke der Folge genannt.

(3) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **beschränkt**, wenn sie (von/nach) oben beschränkt und (von/nach) unten beschränkt ist. D.h. also, wenn Sie eine obere und eine untere Schranke besitzt.

◇

Bemerkungen.

- Beachten Sie, dass eine Folge monoton ist, wenn sie monoton steigend oder monoton fallend ist, jedoch ist sie beschränkt, wenn sie von oben und von unten beschränkt ist!
- Beachten Sie bei den Schranken auch folgende zwei Dinge:
  - Die obere oder untere Schranke ist nicht eindeutig!
    Insbesondere ist natürlich bei einer von oben beschränkten Folge auch jede grössere Zahl $b' > b$ selbst eine obere Schranke und bei einer von unten beschränkten Folge jede kleinere Zahl $a' < a$ auch eine untere Schranke.
  - Eine obere oder untere Schranke kann selbst Folgenglied sein, muss aber nicht!

Zur Illustration wollen wir nun ein paar Beispiele von Folgen auf ihre Beschränktheit untersuchen:

§4-5 Beispiele.

1. Sei

$$x_0 = 3$$
$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}$$

die erste Folge aus dem Beispiel auf S. 46 gegeben. Diese Folge ist unbeschränkt, da sie nach oben nicht beschränkt ist.

Begründung:

Zwar ist o ensichtlich $a = 3$ eine untere Schranke. Die Folge startet ja mit $x_0 = 3$ und danach wird jeweils eine positive Zahl $\frac{1}{2}$ addiert. Aber letzteres führt auch dazu, dass damit in jedem zweiten Folgenglied die nächstgrössere natürliche Zahl entsteht. Und diese können ja beliebig gross werden. Also kann es nach oben keine Schranke geben.

2. Sei

$$x_n = f(n) := (n-6)^2$$

die zweite Folge aus dem Beispiel auf S. 46 gegeben. Auch diese Folge ist unbeschränkt.

Begründung:

Die Folgenglieder sind immer positiv, weil ja immer quadriert wird. Die Basis $(n-6)$ der Potenz $(n-6)^2$ hat einen kleinsten Betrag – nämlich 0 – für $n = 6$. Also haben wir eine untere Schranke mit $a = 0$. Aber weil die Basis in der Potenz jede natürliche Zahl annehmen kann (diese sind ja nur auf der Zahlengerade “um 6 nach links” verschoben), wachsen auch deren Quadrate – d.h., die Folgenglieder – beliebig. Wir haben also eine nach oben unbeschränkte Folge und damit ist die Folge insgesamt nicht beschränkt.

3. Sei nun die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch
$$x_n := \frac{n}{n+1}.$$
Diese Folge ist beschränkt.

Begründung:

Dann ist $b = 1$ eine obere Schranke der Folge $(x_n)_{n\in N}$, da der Nenner ja immer grösser als der Zähler ist (für jedes $n \in \mathbb{N}$). Natürlich ist damit auch jede grössere Zahl $b > 1$, also z.B. $b = \frac{3}{2}$ oder $b = 4$ eine obere Schranke.
Da alle x_n positiv sind (n und $n + 1$ sind ja natürliche Zahlen und der Quotient zweier natürlichen und damit positiven Zahlen ist immer positiv), ist die Folge auch durch $a = 0$ von unten beschränkt. Die Folge ist also nach Definition beschränkt.

4. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_n := 2^n$$
ist nach unten beschränkt, aber nach oben unbeschränkt. Damit ist sie insgesamt nicht beschränkt.

Begründung:

Jedes Folgenglied wird ja mit dem vorherigen mit 2 multipliziert und startet mit $2^0 = 1$. Damit ist $a = 1$ eine untere Schranke (sogar die grösste untere Schranke).
Kann es eine obere Schranke b geben, d.h., kann es ein $b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ geben, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq b$ ist? Nein! Denn angenommen es gäbe so ein $b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, dann hiesse das aufgrund der Definition von x_n ja, dass es eine natürliche Zahl m gäbe, so dass $2^n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}, n > m$. Dies können wir aber folgendermassen äquivalent umformen:
$$\begin{aligned} 2^n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}, n > m &\iff \log_2(2^n) \leq \log_2(b), \forall n \in \mathbb{N}, n > m \\ &\iff n \log_2(2) \leq \log_2(b), \forall n \in \mathbb{N}, n > m \\ &\iff n \leq \log_2(b), \forall n \in \mathbb{N}, n > m. \end{aligned}$$
Letzteres ist aber ein Widerspruch, denn $\log_2(b)$ ist eine konstante reelle Zahl. Und wir wissen, dass die natürlichen Zahlen beliebig gross werden können, d.h., es kann kein $m \in \mathbb{N}$ geben, so dass alle $n > m$ kleiner als die Konstante sind. Also kann es keine obere Schranke b geben. (Unser Argument hier war ein klassischer “Widerspruchsbeweis”.)

◇

Anwendung.

Sie sind Systemadministrator/in einer kritischen Serverinfrastruktur. Sie wissen, dass Sie bei einer Gesamtlast von $l = 3$ Sofortmassnahmen ergreifen müssen, um einem möglichen Ausfall der kritischen Infrastruktur vorzubeugen. Plötzlich bemerken Sie einen Anstieg der Last vom Durchschnittswert auf einen Wert von $l = 1.25$, kurze Zeit später auf $l = 1.75$. Aufgrund theoretischer Überlegungen und von gewissen Modell-Parametern haben Sie ein Lastmodell zur Verfügung, welches
$$l_n = l(n) = 2 - \frac{3}{4(n+1)}$$
für den Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ nach Systemstart lautet. Müssen Sie sich Sorgen machen (und allenfalls Vorkehrungen für die Sofortmassnahmen tre en)?

Die Antwort ist: Nein! Solange sich die Parameter nicht ändern und damit ein anderes Modell benötigt würde, ist dieser Anstieg noch im “grünen Bereich”. Denn aufgrund des Modells erkennen wir, dass die Folge $(l_n)_{n\in N}$ eine obere Schranke von $b = 2$ hat. (Es wird ja von 2 ein positiver Bruch kleiner 1 subtrahiert.)

4.3 Konvergenz, Divergenz, Grenzwert

Wir kommen nun zu den drei wichtigsten Begri en im Zusammenhang mit Zahlenfolgen: der "Konvergenz" bzw. "Divergenz" einer Folge und – im Fall der Konvergenz – dem "Grenzwert" der Folge.

§4-6 Definition. (Konvergenz einer Zahlenfolge; Grenzwert)
Wir sagen eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bzw. ist konvergent gegen den Grenzwert oder den Limes[E.15] c, wenn

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ (|x_n - c| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_\varepsilon).$$

Symbolisch schreiben wir dies so:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

(gesprochen " der Grenzwert von x_n für n gegen unendlich ist c"), oder auch

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

(gesprochen "x_n strebt (konvergiert) gegen c für n gegen Unendlich"). ◇

Diese Definition ist jetzt erst einmal etwas gar kryptisch und wir wollen sie noch genauer verstehen. Es lohnt sich, dass wir uns dafür etwas Zeit nehmen und deshalb werden wir diese Definition im Unterricht ausführlich besprechen. Wir werden sehen, dass sie gar nicht schwer ist und sogar Sinn macht!

Als erstes können wir uns das so vorstellen:

> Wenn wir in der Folge immer weiter "nach rechts gehen" (d.h., Folgenglieder für immer grössere n betrachten), dann "nähern" sich die Folgenglieder immer mehr dem Wert c an. Und zwar so, dass für jede noch so kleine Abweichung $\varepsilon > 0$ von c, wir immer einen genügend grossen Folgenindex (N_ε) finden können, ab welchem die Folge nie mehr eine grössere Abweichung als dieses ε hat.

Wir können auch sagen, dass die Ungleichung $|x_n - c| < \varepsilon$ für jedes noch so kleine "Abweichungs-ε"

"für fast alle n"

gilt. Mit "für fast alle" (abgekürzt "für f.a.") meinen wir immer für alle bis auf endlich viele Ausnahmen.

§4-7 Satz.

Ist eine Zahlenfolge konvergent, so ist ihr Grenzwert (Limes) eindeutig. ◇

§4-8 Definition. (Divergenz einer Zahlenfolge[E.16])

Wir sagen eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bzw. sie ist divergent einfach genau dann, wenn sie nicht konvergiert (d.h., wenn sie keinen (eindeutigen) Grenzwert hat). ◇

Wir werden im nächsten Kapitel weitere Methoden zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens und eines möglichen Grenzwertes kennenlernen. Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir vorerst einmal erste einfache Beispiele kennenlernen und noch zwei Aspekte studieren.

§4-9 Beispiele.

1. Die Zahlenfolge mit $x_n := 1/n$ konvergiert und zwar gegen den Grenzwert 0, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Begründung:

Wir können uns dies folgendermassen überlegen.

- Als erstes vermuten wir anhand einer Skizze, dass die Folge konvergiert und zwar gegen den Grenzwert $c = 0$.
- Angenommen wir haben ein beliebiges $\varepsilon := \frac{1}{k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben[E.17] Dann wählen wir

$$N_\varepsilon := k + 1$$

und erhalten für den vermuteten Grenzwert $c = 0$ und für alle $n \geq N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n} - c\right| &= \left|\frac{1}{n} - 0\right| \\
&= \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\
&= \frac{1}{k+1} && \text{(aufgrund der Wahl unseres } N_\varepsilon\text{)} \\
&< \frac{1}{k} \\
&= \varepsilon && \text{(unsere beliebige Vorgabe des } \varepsilon\text{)}
\end{aligned}$$

Mit dieser Ungleichungskette haben wir also die definierende Bedingung für Konvergenz gegen $c = 0$ gezeigt! (Siehe Def. §4-6)

Überlegen Sie sich dies genau: Unsere vorgängige Argumentation hat nämlich gerade gezeigt, dass es für ein beliebiges ε immer ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|\underbrace{x_n}_{=1/n} - \underbrace{c}_{=0}| < \varepsilon$ gilt, wann immer $n \geq N_\varepsilon$ ist.

2. Auch die Zahlenfolge mit $x_n := 2 + \frac{1}{n}$ konvergiert. Der Grenzwert ist gegeben als

$$\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2.$$

Begründung:

Das folgt relativ direkt aus dem vorigen Beispiel. Die Folge hier ist ja nur eine um zwei Einheiten nach oben $(+2)$ verschobene Folge. Jedes Folgenglied ist einfach um 2 grösser. Also konvergiert auch diese Folge und damit natürlich gegen den Grenzwert $c = 2$.

3. Die Zahlenfolge mit $x_n := n$ konvergiert nicht, d.h., sie ist divergent.

Begründung: Dies ist, wie öfters in der Mathematik, intuitiv klar und hier stimmt es sogar... . Aber wie können wir uns präziser überzeugen, dass unsere Intuition richtig ist?

Wir haben bei den Beispielen zur Beschränktheit von Zahlenfolgen auf S.47 gesehen, dass die Folge $x_n := 2n$ *nach oben unbeschränkt* ist. Mit der gleichen Überlegung ist damit auch $x_n := n$ nach oben unbeschränkt. Zudem wächst sie mit zunehmendem n, d.h., sie ist monoton wachsend und jedes nächste Folgenglied ist grösser als das vorhergehende. Also wächst die Folge mit zunehmendem n über jede reelle Zahl hinaus, d.h., keine reelle Zahl kann ihr Grenzwert sein! Damit ist klar, wieso die Folge divergiert.

4. Auch die Zahlenfolge mit $x_n := (-1)^n$ ist divergent.

Begründung: Dies sehen wir recht einfach. Für jedes gerade n ist das Folgenglied 1 und für jedes ungerade Folgenglied n ist das Folgenglied -1. Die Folge wechselt also unendlich oft immer zwischen 1 und -1 und konvergiert nie gegen eine reelle Zahl. (Auch nicht gegen 1 oder -1, weil ja immer wieder ein nächstes Folgenglied mit dem umgekehrten Vorzeichen folgt.)

◇

Das Phänomen im dritten Beispiel, dass wir aus der Unbeschränktheit und der Monotonie auf Divergenz folgern können, gilt allgemein:

§4-10 Satz.

Eine monotone unbeschränkte Folge divergiert. ◇

Eine Art Umkehrung dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel als wichtiges Konvergenzkriterium ("Monotoniekriterium") kennenlernen, nämlich dass monotone und beschränkte Folgen immer konvergieren. Jetzt aber noch abschliessend für dieses Kapitel ein wichtiger Aspekt und ein paar fundamentale Begri e:

§4-11 Satz.

Eine ganzzahlige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h., mit $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$) ist konvergent genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > m$ alle Folgenelemente konstant sind. Und dieses a_m ist der Grenzwert der Folge.

(Formal: $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m : a_n = a_m$.) ◇

Die Konvergenz einer ganzzahligen Folge ist also relativ leicht zu bestimmen und ist ein "sehr übersichtliches Phänomen". Wir sagen auch, dass die Bestimmung der Konvergenz einer ganzzahligen Folge trivial ist.

4.4 Häufungspunkte

Es gibt bei Zahlenfolgen noch einen weiteren wichtigen E ekt, welcher demjenigen eines Grenzwertes ähnlich, aber doch unterscheidlich ist. Hierfür brauchen wir zuerst noch folgenden ebenfalls sehr zentralen Begri der Analysis:

§4-12 Definition. ((O ene) Umgebung einer reellen Zahl (bzw. eines Punktes) $a \in \mathbb{R}$; (o ene) ε-Umgebung)

Eine (o ene) Umgebung einer reellen Zahl a ist eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ für welche es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a - y| < \varepsilon \implies y \in U$$

In diesem Fall sprechen wir dann für ein konkretes $\varepsilon > 0$ auch von einer (o enen) ε-Umgebung U_ε von a. Geschrieben wird dies oft auch unter Nennung des spezifischen Punktes a als $U(a)$ bzw. $U_\varepsilon(a)$. ◇

Damit lässt sich jetzt dieser, wie gesagt dem Grenzwert ähnlichen Begri , definieren:

§4-13 Definition. (Häufungspunkt einer Zahlenfolge)

Eine reelle Zahl $h \in \mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt (oder Häufungswert) der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder Umgebung von h unendlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen. ◇

Folgendes wird manchmal übersehen, wenn die Begri e Häufungspunkt und Grenzwert nicht sorgfältig auseinander gehalten werden:

§4-14 Satz. (Existenz eines Häufungspunkt bedeutet nicht notwendig Konvergenz)

Es gibt divergente Folgen mit Häufungspunkten. ◇

§4-15 Beispiel.

Das einfachste Beispiel hierzu ist wahrscheinlich die Folge mit

$$x_n := (-1)^n$$

Hier sind o ensichtlich 1 und -1 Häufungspunkte. Und diese Folge ist ja divergent. ◇

4.5 Weitere fundamentale Eigenschaften

Gewisse spezielle Typen von Folgen haben eigene Namen:

§4-16 Definition. (Weitere fundamentale Eigenschaften und Begri e)

1. Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welche gegen 0 konvergiert (also konvergent ist und den Grenzwert 0 hat), nennen wir eine **Nullfolge**.
2. Eine Folge für welche es ein $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (die **Periode** der Folge genannt) gibt, so dass
$$x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
nennen wir eine **periodische** oder auch **p-periodische Folge**.
3. Eine Folge mit abwechselnd positiven und negativen Folgenglieder nennen wir eine **alternierende Folge**.

◇

Beachten Sie, dass periodische, nicht-konstante Folgen nicht konvergent sind, denn ihre Periode ist dann $p > 1$ und jeder Punkt aus $\{x_n, ..., x_{n+p-1}\}$ – also mehr als einer – sind Häufungspunkte. Weiter kann eine alternierende Folge konvergent oder divergent sein.

§4-17 Beispiele.

1. Die Folge im 1. Beispiel in den Beispielen auf S. 50 ist also eine Nullfolge.
2. Die Folge im 4. Beispiel dort ist o ensichtlich alternierend.
3. Die Folge mit
$$x_n := \cos\left(\frac{2\pi n}{p}\right)$$
für ein $p \in \mathbb{N}$ ist eine periodische Folge mit Periode p.

◇

Kapitel 5

Rechenregeln und Konvergenzkriterien

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 5.1 Sie kennen die Rechenregeln für Grenzwerte und können sie in einfachen Beispielen erklären und anwenden.

LZ 5.2 Sie wissen, was eine Teilfolge einer Zahlenfolge ist, was eine Umordnung und ein Häufungspunkt ist. Sie können diese Begri e anhand einfacher Beispiele erklären.

LZ 5.3 Sie können mithilfe der Konvergenzkriterien und der besprochenen Sätzen Konvergenzuntersuchungen in der Art der Beispiele und Übungsaufgaben durchführen.

In diesem Kapitel geht es nun vor allem darum, dass wir in verschiedenen konkreten Fällen fähig sind, die Konvergenz und den möglichen Grenzwert zu bestimmen. Dazu lernen wir ein paar fundamentale Tools kennen, welche uns bei dieser Aufgabe sehr behilflich sein werden.

5.1 FOKUS: “Rechnen” mit Funktionen und Folgen

Das Folgende wird einigen von Ihnen klar und bekannt sein, anderen nicht. Deshalb möchte ich auf diesen sehr wichtigen Aspekt zuerst kurz den Fokus legen.

Erinnern Sie sich bitte, dass wir Operationen zwischen reellen Funktionen definieren können: Ein wichtiger Aspekt und ein sehr mächtiges Mittel in der “höheren Mathematik” ist ja gerade, dass wir nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit anderen Objekten wie Funktionen, Folgen, Mengen, ... usw. “rechnen” können. Das heisst, dass auch zwischen diesen Objekten arithmetische Operationen definiert werden können. Wir sprechen dann übrigens allgemeiner von “algebraischen Operationen”.

Wenn wir sagen, dass wir “zwei Funktionen addieren” oder die “Summe zweier Funktionen” betrachten”, dann meinen wir, dass wir die neue Funktion betrachten, welche die Funktionswerte der beiden zu addierenden Funktionen hat! Formal also:

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen. Dann wird die Addition von f und g symbolisiert mit $f + g$ und definiert als die neue Funktion

$$\begin{aligned} f + g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x). \end{aligned}$$

D.h., diese neue Funktion $f + g$ (auch die Summe der Funktionen f und g genannt), ordnet gerade jedem x die Summe der Funktionswerte von f und von g, also $f(x) + g(x)$, zu.

Ein kleines Beispiel: Für $f(x) := 3x^2$ und $g(x) := \cos(x)$ ist die Summe $(f + g)(x) = 3x^2 + \cos(x)$.

Genau auf diese Weise definieren wir auch weitere algebraische Operationen zwischen reellen Funktionen (oder “Abbildungen”). Es sind einfach die neuen Funktionen, welche die Di erenz, das Produkt, den Quotienten, ... usw. der Operanden (= jetzt Funktionen) zuordnen:

$$\begin{aligned} \lambda f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x), \end{aligned}$$

(”skalare” Multiplikation von Funktionen mit $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f - g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f - g)(x) := f(x) - g(x), \end{aligned}$$

(Differenz/Subtraktion von Funktionen)

$$\begin{aligned} f \cdot g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

(Produkt/Multiplikation von Funktionen)

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

(Quotient/Division von Funktionen)

Falls Ihnen das nicht (mehr ganz) klar ist, machen Sie sich ein paar eigene Beispiele zu diesen Operationen.

Dieses Prinzip ist in der Mathematik tatsächlich äusserst weit verbreitet: In der Linearen Algebra werden auch (algebraische) Operationen zwischen "Matrizen" und "Vektoren" betrachtet, in der Graphentheorie zwischen "Graphen", und noch an vielen anderen Stellen. Auch der Betrag einer reellen Funktion wird zudem als die Funktion definiert, welche gerade jedem Argument x den Betrag des Funktionswertes zuordnet:

$$\begin{aligned} |f| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

für eine beliebige reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Da Folgen ja spezielle reelle Funktionen sind, nämlich $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ für $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, übertragen sich diese Operationen zwischen Funktionen automatisch auch auf Operationen zwischen Folgen. Kaum überraschend haben wir also auch algebraische Operationen zwischen Folgen. Und diese sind damit ebenso einfach definiert, wie bei Funktionen: Das skalare Vielfache, die Summe, die Di erenz, ... usw. zweier Folgen ist das skalare Vielfache, die Summe, die Di erenz, ... usw. der Folgenglieder. Formal also:

§5-1 Definition. (Algebraische Operationen zwischen reellen Folgen)
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beliebige (Konvergenz nicht vorausgesetzt!) reelle Folgen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir:

(1) "Skalare" Multiplikation einer Folge mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(2) Addition/Summe zweier Folgen:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(3) Subtraktion/Di erenz zweier Folgen:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(4) Multiplikation/Produkt zweier Folgen:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(5) Division/Quotient zweier Folgen: Für $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} := \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(D.h., die Operationen sind einfach "gliedweise" definiert.) ◇

Ist z.B. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (2n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $3(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3 \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oder, ist z.B. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n^3)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2 + n^3)_{n\in\mathbb{N}}$. Usw.

Übrigens ist – als Beispiel einer nicht-algebraischen Operation – auch definiert:

§5-2 Definition. (Betrag einer reellen Folge)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige (Konvergenz nicht vorausgesetzt!) reelle Folge.

Der **Betrag der Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert als

$$|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}| := (|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(D.h., der Betrag ist ebenfalls einfach ”gliedweise” definiert.) ◇

Ein paar Beispiele zum Rechnen mit reellen Funktionen:

§5-3 Beispiele.

1. Sei $f(x) := 3x^2$ und $\lambda := \frac{1}{3}$.

   Dann ist das skalare Produkt λf von f gerade die Funktion

   $$(\lambda f)(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

2. Seien $f(x) := 3x^2$ und $g(x) := 6x^2 - 4x$.

   Dann ist die Summe $f + g$ gerade die Funktion

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 + 6x^2 - 4x = 9x^2 - 4x.$$

3. Seien wieder $f(x) := 3x^2$ und $g(x) := 6x^2 - 4x$.

   Dann ist das Produkt fg gerade die Funktion

   $$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x^2(6x^2 - 4x) = 18x^4 - 12x^3.$$

4. Seien $f(x) := x^3 + x$ und $g(x) := x^2 + 1$. Insbesondere ist also $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, d.h., wir können durch g dividieren.

   Die Division f/g ist die Funktion

   $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x.$$

5. Sei $f(x) := -x^2$.

   Der Betrag von f ist die Funktion

   $$|f|(x) = |f(x)| = |-x^2| = x^2.$$

◇

Auch noch ein paar Beispiele zum Rechnen mit reellen Zahlenfolgen:

§5-4 Beispiele.

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (6n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lambda := \frac{1}{3}$.

   Dann ist das skalare Produkt $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerade die Folge

   $$\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{3}\cdot 6n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (3n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (6n^2-4n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Dann ist die Summe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerade die Folge

   $$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (3n^2+6n^2-4n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (9n^2-4n)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

3. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (8n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n-4)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Dann ist das Produkt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerade die Folge

   $$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= ((8n^2+1)(n-4))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (8n^3-32n^2+n-4)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

4. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n^3-n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere ist also $y_n \neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, d.h., wir können durch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dividieren.

   Die Division $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}/(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge

   $$\frac{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{n^3-n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, die alternierende Folge mit 1 und -1.

   Der Betrag von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist damit Folge

   $$|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}| = (|x_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}.$$

◇

5.2 Rechenregeln für Grenzwerte

§5-5 Satz. (Rechenregeln für Grenzwerte und erste Konvergenzkriterien)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen. Dann gilt:

(1) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge (also $c = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$) und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge[E.18], so ist auch die Folge $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. D.h.,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = 0.$$

(2) Die folgenden Operationen verhalten sich bei konvergenten Folgen ganz einfach: (Seien abkürzend die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = d$.)

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty}(\lambda\cdot x_n) = \lambda\cdot\lim_{n\to\infty} x_n \qquad (=\lambda\cdot c),$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n), \qquad (= c + d),$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) - \lim_{n\to\infty}(y_n) \qquad (= c - d),$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(y_n) \qquad (= c \cdot d),$$
$$\lim_{n\to\infty}|x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| \qquad (= |c|),$$
$$\forall p \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} {x_n}^p = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^p \qquad (= c^p).$$

(3) Bei der Division bzw. bei Quotienten müssen wir für eine analoge Rechenregel die “Division durch Null” ausschliessen. Sei also $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = d \neq 0$, d.h., keine Nullfolge und seien (bis auf endlich viele Ausnahmen) die $y_n \neq 0$. Dann gilt ebenso:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad (= \frac{c}{d}).$$

(4) Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen

$$x_n \leq y_n,$$

so gilt auch für die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n \qquad (\text{d.h., } c \leq d).$$

⋄

Die Regeln (2) und (3) kann man zusammenfassen in folgender wichtiger

Merkregel:

”Konvergente Folgen und Grenzwerte lassen sich mit einer konstanten reellen Zahl multiplizieren und miteinander addieren, subtrahieren, multiplizieren, potenzieren und, wenn keine Division durch Null entsteht, auch dividieren. Zudem überträgt sich der Betrag auch auf den Grenzwert.”

Beachten Sie, dass wir mit diesen Rechenregeln erste sogenannte Konvergenzkriterien haben, mit welchen wir die Konvergenz und den Grenzwert von Folgen bestimmen können. Dazu zwei Beispiele, wie das geht:

§5-6 Beispiele.

1. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass die Folge mit $2 + \frac{1}{n}$ gegen 2 strebt. Wenn wir jetzt z.B. die Folge

$$x_n := 5(2 + \frac{1}{n})$$

auf Konvergenz untersuchen wollen, dann ist das mit der ersten Gleichung der zweiten Rechenregel oben sehr leicht. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und für den Grenzwert haben wir

$$\lim_{n\to\infty} 5(2 + \frac{1}{n}) = 5 \cdot \lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 5 \cdot 2 = 10.$$

2. Wir sehen relativ schnell, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_n := \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2\pi n}{11}\right)$$
eine Nullfolge ist. Warum? Weil die Cosinusfunktion auf $[-1,1]$ beschränkt und $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist. Wir können also Satz §5-5 (1) anwenden.

◇

§5-7 Definition. (Teilfolge)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Jede Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Weise entsteht, dass man der Reihe nach unendlich viele Glieder herauspickt, heisst Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◇

Bemerkung. Formal und exakt können wir das so definieren:
Eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad y_n = x_{\varphi(n)}.$$

§5-8 Beispiele.

1. Die Folge $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge der Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen, nämlich gerade die Folge der geraden natürlichen Zahlen.

   (Die streng monoton wachsende Abbildung φ ist hier o ensichtlich gerade $\varphi(n) := 2n$.)
2. Ebenso ist die Folge $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zwar die Teilfolge der ungerade natürlichen Zahlen. (Die streng monoton wachsende Abbildung φ ist hier also $\varphi(n) := 2n+1$.)
3. Die Folge $(\frac{1}{n^2})$ ist eine Teilfolge der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. (Hier lautet die streng monoton wachsende Abbildung $\varphi(n) := n^2$.)

◇

§5-9 Definition. (Umordnung einer Zahlenfolge)

Eine Zahlenfolge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ welche aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch reine Umordnung der Folgenglieder entsteht, nennen wir eine Umordnung von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◇

Bemerkung. Auch dies können wir formal und exakt definieren:
Eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Umordnung der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn es eine Bijektion $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad y_n = x_{\varphi(n)}.$$

§5-10 Beispiel.

Durch die Bijektion

$$\varphi(n) := \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \text{ gerade oder Null ist,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wird auf jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung defininert, für welche

$$\forall n \in N : \quad y_n = x_{\varphi(n)}$$

gilt. Die Umordnung, welche so entsteht, ist einfach die Folge in welcher in jedem aufeinanderfolgenden Paar die Folgenglieder vertauscht sind. ◇

Wie wir bei den noch folgenden Konvergenzkriterien sehen werden, ändert sich weder das Konvergenzverhalten noch der Grenzwert bei Teilfolgen und Umordnungen von konvergenten Folgen.

5.3 Grundlegende Konvergenzkriterien

Wir kommen zum Schluss noch zu ein paar grundlegenden Konvergenzkriterien. Zusammen mit der Definition für Konvergenz und den Rechenregeln lässt sich damit in vielen Fällen schon die Konvergenz einer Folge untersuchen und ihr Grenzwert bestimmen.

§5-11 Satz. (Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen)

(1) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge (d.h., $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) und gilt für eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bis auf endlich viele Ausnahmen, dass $|y_n| \leq \lambda |x_n|$ für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge (d.h., $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

(2) "Sandwich-Theorem": Konvergieren beide Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen (dasselbe!) $c \in \mathbb{R}$ und gilt bis auf endlich viele Ausnahmen

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

für eine weitere Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent und hat auch den Grenzwert c.

(3) Umordnung, Teilfolge und endliche Abänderung von konvergenter Folgen ändert das Konvergenzverhalten und den Grenzwert nicht.

(4) "Monotoniekriterium": Eine beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

(5) "Konvergenzkriterium von Cauchy":
Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; |x_n - x_m| < \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N_\varepsilon .$$

◇

Vergleichen Sie das Cauchy-Konvergenzkriterium mit der Definition einer konvergenten Folge. Einer der Vorteile des Cauchy-Kriteriums ist, dass wir für den Grenzwert nicht schon eine Vermutung haben müssen um die Konvergenz zu zeigen! Das kann manchmal sehr hilfreich sein. Beachten Sie, dass gewisse Konvergenzkriterien es uns erlauben, die Konvergenz und den Grenzwert einer Folge mithilfe der Konvergenz und des Grenzwertes einer bereits bekannten Folge zu zeigen bzw. zu untersuchen. Dasselbe Vorgehen funktioniert übrigens auch um allenfalls die Divergenz zu zeigen. Zur Demonstration dieses Verfahrens und obiger Sätze wieder ein paar Beispiele:

§5-12 Beispiele.

1. Wir wissen bereits, dass $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, d.h., dass $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Da $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt, dass

$$\frac{1}{n^k}\leq\frac{1}{n}$$

ist und weil sowieso alle Folgenglieder nicht-negativ sind, haben wir mit dem ersten Kriterium, dass $\forall k\in\mathbb{N}$ die Folge $(\frac{1}{n^k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und ebenfalls eine Nullfolge ist. D.h., wir merken uns:

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0.$$

<u>Anm.:</u> Das Interessante hier ist übrigens noch, dass diese Folgen umso "schneller" gegen Null streben, je grösser $k\in\mathbb{N}$ ist. Sie können sich das mit Python anhand ein paar verschiedenen $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ sehr schön veranschaulichen.

2. Wir wollen das Sandwich-Theorem benutzen, um die Konvergenz der Folge mit

$$x_n:=\frac{(-1)^n}{n!}$$

zu untersuchen. Zur Erinnerung: $n!$ ist rekursiv definiert als

$$\begin{aligned}0!&:=1\\ n!&:=n\cdot(n-1)!,\qquad\forall n\in\mathbb{N},n>0\end{aligned}$$

und ist die sogenannte **Fakultät von** n (oder n**-te Fakultät**).

- Als erstes überlegen wir uns, dass die Folge $\frac{1}{2^n}$ eine Nullfolge ist, also $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ ist. Dies sehen wir aber schnell, denn für alle $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist

$$0<\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{n}$$

und da die Folge $\frac{1}{n}$ Nullfolge ist, muss es nach der letzten Regel in Satz §5-5 auch $\frac{1}{2^n}$ sein, also

$$(*)\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

Und mit der ersten Gleichung in der zweiten Regel desselben Satzes heisst dies, dass auch $\frac{-1}{2^n}$ eine Nullfolge ist, d.h., dass auch

$$(**)\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2^n}=0.$$

- Weiter setzen wir als bekannt voraus, dass die Fakultät schneller wächst als 2^n. Es gilt genauer ja

$$(***)\qquad\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,..,3\}:2^n<n!$$

- Mit diesen Vorbereitungen können wir nun die Konvergenz unserer Folge ermitteln. Mit (***) haben wir einerseits

$$\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n!} \geq \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, .., 3\}$$

(die zweite Ungleichung ist zusätzlich eine leicht einzusehende Tatsache) und andererseits ebenso

$$(-1)2^n > (-1)n!$$

was äquivalent ist mit

$$\frac{-1}{2^n} < \frac{-1}{n!} \leq \frac{(-1)^n}{n!}$$

(die zweite Ungleichung wieder ein leicht einzusehender E ekt des Vorzeichens). Damit haben wir gezeigt, dass insgesamt

$$\frac{-1}{2^n} \leq \frac{(-1)^n}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$$

gilt. (Beachten Sie: in der Mitte steht unsere zu untersuchende Folge!). In dieser letzten Ungleichung steht aber gerade die Bedingung des Sandwich-Theorems für unsere Folge, denn (*) und (**) haben ja gerade gezeigt, dass die linke und die rechte Folge Nullfolgen sind. Also ist nach dem Sandwich-Theorem auch unsere Folge konvergent und hat denselben Grenzwert, ist also auch eine Nullfolge. D.h.:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0.$$

3. Mit dem Monotoniekriterium sehen wir z.B. sofort ein, dass die Folge mit

$$x_n := \frac{1}{n}$$

konvergiert. Denn sie ist beschränkt (mit oberer Schranke 1 und unterer Schranke 0) und sie ist monoton fallend, weil $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n + 1$, also $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, was gerade der Definition einer monoton fallenden Folge entspricht. Also folgt mit dem Monotoniekriterium, dass die Folge konvergiert.

◇

Das "gute" an den Rechenregeln ist, dass sie sich auch nacheinander, in Kombination mit den Konvergenzkriterien und auf bereits bewiesene Konvergenzeigenschaften von Teilausdrücken anwenden lassen. Damit können auch (geeignete) Folgen mit komplizierteren Ausdrücke relativ bequem auf Konvergenz untersucht werden. Oft kann die Folge dabei zuerst noch durch Äquivalenzumformungen in eine geeignete Form gebracht werden.

§5-13 Beispiel.

Angenommen wir fragen uns

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^7 + 3n^6 - 4n^4 - 18n^3 + n^2 - n + 5}{n^7 + 7n^3 - 8n^2 + 3n - 2} = \quad ?$$

falls dieser Grenzwert existiert (d.h., falls die Folge konvergiert).

Bei Folgen welche in dieser Form vorliegen (verschiedene Potenzen der Variable n in Zähler und Nenner), ist es oft erfolgversprechend, zuerst Zähler und Nenner durch die höchste Potenz n^k zu dividieren (hier also durch n^7)[E.19] . Das führt dazu, dass wir gleich reihenweise das Ergebnis aus Beispiel 1 anwenden können und so viele Terme aufgrund der Rechenregeln “zu Null” werden. Der Ausdruck wird sich so oft stark vereinfachen. Anhand unseres Beispiels sieht das so aus (ich schreibe dies absichtlich hier ganz ausführlich hin):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^7+3n^6-4n^4-18n^3+n^2-n+5}{n^7+7n^3-8n^2+3n-2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^7+3n^6-4n^4-18n^3+n^2-n+5}{n^7+7n^3-8n^2+3n-2}\cdot\frac{\frac{1}{n^7}}{\frac{1}{n^7}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4n^7+3n^6-4n^4-18n^3+n^2-n+5}{n^7}}{\frac{n^7+7n^3-8n^2+3n-2}{n^7}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}-\frac{18}{n^4}+\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^6}+\frac{5}{n^7}}{1+\frac{7}{n^4}-\frac{8}{n^5}+\frac{3}{n^6}-\frac{2}{n^7}}\right)\\
&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}-\frac{18}{n^4}+\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^6}+\frac{5}{n^7}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n^4}-\frac{8}{n^5}+\frac{3}{n^6}-\frac{2}{n^7}\right)}\\
&\qquad\text{(Divisionsregel in Satz §5-5)}\\
&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{18}{n^4}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^6}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^7}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^4}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^5}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^6}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^7}\right)}\\
&\qquad\text{(Summen und Differenzregel in Satz §5-5)}\\
&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4}{\lim\limits_{n\to\infty}1}\\
&\qquad\text{(Bsp. 1 10-mal angewendet, diese Grenzwerte sind alle Null (!))}\\
&=\frac{4}{1}=4.\qquad\text{(Triviale Konvergenz der konstanten Folgen.)}
\end{aligned}$$

Da wir an allen Stellen Terme von konvergierenden Folgen verwendet haben, konvergiert also die Ausgangsfolge und ihr Grenzwert ist wie ermittelt 4. ◇

Kapitel 6

Python-Miniprojekt: Das Heron-Verfahren

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 6.1 Sie kennen das Heron-Verfahren als einfache Anwendung von Zahlenfolgen in der Informatik.

LZ 6.2 Sie können das Heron-Verfahren mit Python implementieren. Dabei geht es vor allem darum, dass Sie sich daran gewöhnen können, Python “für mathematische Dinge” zu nutzen.

6.1 Das Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren[E.20] ist eines der ältesten Verfahren des Quadratwurzelziehens für eine positive reelle Zahl[E.21] . Es ist auch unter dem Namen “babylonisches Wurzelziehen” bekannt. Es beruht auf einer rekursiven Formel und eignet sich deshalb ganz gut für ein erstes kleines Python-Projekt. Später in diesem Modul, wenn wir uns auch mit der Di e-rentialrechnung beschäftigt haben, werden wir dieses Verfahren auch als ein Beispiel des Newton-Verfahrens (siehe Kapitel 15) einordnen können, welches ein ganz wichtiges nummerisches Verfahren darstellt.

§6-1 Definition. (Heron-Verfahren)

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl.

Das Heron-Verfahren (oder babylonisches Wurzelziehungsverfahren) zur Berechnung von $\sqrt{a}$ ist definiert als die Rekursion[E.22]

$$\begin{aligned} x_0 &:= a, \\ x_n &:= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad \forall n > 0. \end{aligned}$$

◇

Das Heron-Verfahren liefert also in jedem Rekursionsschritt eine Näherung (Approximation) der Wurzel $\sqrt{a}$. Das schreiben wir übrigens auch so: $x_n \approx \sqrt{a}$. Damit symbolisieren wir, dass es keine Gleichheit ist, weil die linke Seite nicht exakt der rechten entspricht. Bei solchen numerischen Verfahren interessiert man sich immer auch für drei wesentliche Dinge:

(1) Für welche Verfahrensparameter (hier der Anfangswert, viele Verfahren haben aber noch andere “einstellbare” Parameter) und welche Inputvariablen konvergiert das Verfahren?

(2) Wie gross ist der Fehler im n-ten Schritt? Mit anderen Worten: Wenn ich im Schritt n aufhöre, wie gross ist der Fehler in Bezug auf das exakte Ergebnis?

(3) Wie schnell konvergiert das Verfahren, d.h., wieviele Schritte muss ich rechnen, um eine bestimmte Genauigkeit der Näherung bezüglich des exakten Ergebnisses zu erlangen?

Wir wollen hier auf diese Fragen nicht grundsätzlich und im Detail eingehen, aber für unsere Zwecke die Antworten zu allen drei Fragen noch in einem Satz festhalten:

§6-2 Satz. (Konvergenz des Heron-Verfahrens)

Für das Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, gilt:

(1) Das Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ gegen $\sqrt{a}$ und funktioniert für jedes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(2) Der Fehler des Heron-Verfahrens im n-ten Schritt hat folgende Schranke:[E.23]

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2x_{n-1}}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_n}\right)^2.$$

(3) Das Verfahren konvergiert quadratisch, d.h.,

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq c|x_n - \sqrt{a}|^2$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$. (So ein Verfahren wird i.A. für die Praxis als "ziemlich gut" angesehen.[E.24])

◇

[E.25]

Wir werden auf das Thema in einem etwas allgemeineren Rahmen beim Newton-Verfahren (Kap.15) nochmals zurückkommen. Vertieft werden solche Themen in der Numerischen Mathematik und bei der Analyse von Algorithmen studiert.

Kapitel 7

Unendliche Reihen

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 7.1 Sie verstehen, was unendliche (Zahlen-) Reihen und ihre Reihenwerte sind und verstehen ihren Zusammenhang zu Zahlenfolgen. Sie können die Begri e geometrisch interpretieren und anhand einfacher Beispiele erklären.

LZ 7.2 Sie kennen erste Rechenregeln und können diese an einfachen Beispielen erklären und anwenden.

LZ 7.3 Sie kennen die arithmetische, die geometrische, die harmonische und die binomiale Reihe und können deren Konvergenzverhalten erklären.

LZ 7.4 Sie verstehen die besprochene Anwendung von konvergenten Reihen.

7.1 Der Begriff einer unendlichen Reihe

Reihen haben eine grosse Bedeutung gerade auch (aber nicht nur!) in der, der Informatik nahestehenden, numerischen Analysis. Deshalb wollen wir in diesem Kapitel die ersten Schritte in diesem für Informatiker wichtigen Thema machen.

Für das folgende Kapitel sollten Sie sicher im Umgang mit dem Summenzeichen $\sum$ sein. “Unendliche Reihen” – oder auch nur “Reihen” genannt – sind eine spezielle Art von Folgen, in denen die Folgenglieder aus endlichen Summen bestehen[E.26] . In unvollständiger aufzählender Form ist z.B. eine Folge der Form

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1,\ \ 1+\frac{1}{2},\ \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\ \ ...)$$

eine Reihe. Beachten Sie, dass die einzelnen Folgenglieder die Form einer Summe haben. (Das erste Folgenglied 1 ist einfach eine triviale Summe mit nur einem Summand.) Bei Reihen schreibt man oft einfach s_n anstelle von x_n für das n-te Folgenglied, um anzudeuten, dass diese Folgenglieder eben jeweils Summen sind. Dafür benutzt man dann x_k für den k-ten Summanden in der Summe. Ausgerechnet würde obige Folge natürlich die Form

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, ...)$$

haben. Aber wir haben ja bereits gesehen, dass das Wissen wie eine Folge gebildet wird (sozusagen das “Bildungsgesetz der Folge”) eine viel wichtigere Information über eine Folge ist, als “nur” die ausgerechneten Folgenglieder zu kennen. Deshalb ist es entscheidend, dass wir wissen, dass ich mit obiger Folge von Summen im Beispiel gerade die Folge

$$\begin{aligned}(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := \Bigg(&\frac{1}{2^0},\ \ \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1},\ \ \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2},\\ &\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3},\ \ \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ \ ...\Bigg)\end{aligned}$$

gemeint habe, welche wir später als eine “geometrische Reihe” kennenlernen werden. Und darin sehen wir gerade auch die Nützlichkeit des Summenzeichens $\sum$: Weil die Summen, welche die Folgenglieder definieren, beliebig lang werden können, ist es viel einfacher diese mithilfe des Summenzeichens zu schreiben:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{2^k},\ \ \sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2^k},\ \ \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{2^k},\ \ \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2^k},\ \ ...\right)$$

Überzeugen Sie sich bitte davon, dass diese Schreibweise tatsächlich dasselbe bedeutet! Jetzt wächst die Notation für die einzelnen Folgenglieder für wachsende n nicht mehr an, das Summenzeichen ist wirklich etwas extrem Praktisches. Wir sehen auch, dass wir die Definition für das allgemeine n-te Folgenglied ganz einfach mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

angeben können. Damit die folgende Definition des Begri s einer Reihe klar ist, beachten Sie noch, dass in obigem Beispiel die Summanden-Ausdrücke des Summenzeichens selbst auch als eine Folge, hier nämlich die Folge $(\frac{1}{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$, aufgefasst werden können.

§7-1 Definition. ((Unendliche Zahlen-) Reihe; Konvergenz, Divergenz von Reihen; Reihenwert)

(1) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nennen wir dann

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$$

die n-te Partialsumme[E.27] der Folge.

(2) Die (unendliche Zahlen-) Reihe bzgl. dieser Folge ist nun definiert als das Symbol

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k := (s_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

d.h., als die Folge der Partialsummen. Konvergiert diese Folge, d.h., es gibt ein $S \in \mathbb{R}$ mit

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)$$

so nennen wir diesen Grenzwert S oder auch das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ selbst, den Reihenwert oder die Summe der Reihe und wir sagen die Reihe konvergiert oder sie sei konvergent. Sonst sagen wir die Reihe sei divergent oder sie divergiere.

(3) Im Zusammenhang mit einer Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$, werden die $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ dann auch die Partialsummen der Reihe und die x_k Reihenglieder genannt.

◇

In Definition §7-1 (2) muss unbedingt beachtet werden, dass das Symbol

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

sowohl für die Reihe, also die Folge von Partialsummen (welche ja zuerst einmal nicht zu konvergieren braucht), als auch im Fall der Konvergenz für den Reihenwert, also den Grenzwert der Partialsummen-Folge bzw. der Reihe, benutzt wird. Diese Doppelbedeutung des Symbols für eine Reihe muss man sich merken, denn sie wird sehr oft verwendet. Wir wollen jetzt ein paar fundamentale Reihen als Beispiele einführen:

§7-2 Beispiele.

1. Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \qquad a, q \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

werden **geometrische Reihen mit Startwert** a **und Quotienten** q genannt. Die zugehörige Folge $(aq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird **geometrische Folge** genannt.

Bem.: Setzen wir in der geometrischen Reihe $a := 1$ und $q := \frac{1}{2}$, dann erhalten wir gerade die Reihe des einführenden Beispiels oben. Diese ist also eine spezielle geometrische Reihe.

2. Reihen der Form
$$\sum_{n=0}^{\infty} a + nd, \qquad \text{für } a, d \in \mathbb{R},$$
werden **arithmetische Reihen mit Startwert** a **und Differenz** d genannt. Die zugehörige Folge $(a + nd)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **arithmetische Folge**[E.28] .

3. Reihen der Form
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N},$$
werden **(allgemeine) harmonische Reihen** oder auch p-**Reihen** genannt. Die zugehörige Folge $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ heisst **(allgemeine) harmonische Folge**.

4. Reihen der Form
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \qquad m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$
werden **Binomialreihen** genannt. Dabei ist $\binom{m}{n}$ der sogennante **Binomialkoeffizient**, welcher mittels Fakultäten als
$$\binom{m}{n} := \frac{m!}{(m-n)!n!}$$
definiert ist. Die zugehörige Folge $\left(\binom{m}{n}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst damit **Binomialfolge**.

5. Jede reelle Zahl x lässt sich bekanntlich als **(Komma) Bruch bzgl. einer festgelegten Basis** β darstellen (allerdings ev. unendlich und sogar unperiodisch). Wir nennen das auch eine **Basisdarstellung einer reellen Zahl** und dies ist eine Reihe
$$\operatorname{sgn}(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_{m-n}\beta^{m-n},$$
wobei
   - $\rightsquigarrow$ $\operatorname{sgn}(x) \in \{-1, 0, 1\}$ das **Vorzeichen** von x bezeichnet,
   - $\rightsquigarrow$ $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ die sogenannte **Basis** ist,
   - $\rightsquigarrow$ $a_{m-n} \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$ die einzelnen **Ziffern** sind, und
   - $\rightsquigarrow$ $m + 1 \in \mathbb{N}$ ist. (Dies gibt die Stellenanzahl vor dem Komma an.)

   (Potenzen mit Koe zienten 0 und "unendlich viele Nullen nach dem Komma" werden in der Reihe weggelassen.)

   Wichtige Speziallfälle:

   - Im Fall der Basis $\beta := 10$ sprechen wir dann bekanntlich von der **Dezimalbruch-Darstellung**.

     §7-3 Beispiel.
$$(-1)(4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2})$$
$$= -402.31 = \underbrace{(-402.31)_{10}}_{\text{(Explizite Basis-Schreibweise)}}.$$

$\diamond$

- Für $\beta := 2$ sprechen wir von der **Binärdarstellung**.

§7-4 Beispiel.

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3})\\&= (11000.101)_2 = (24.625)_{10}.\end{aligned}$$

◇

- Für $\beta := 16$ sprechen wir von der **Hexadezimaldarstellung** mit den üblicherweise benutzten sechzehn Symbole
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}.$$

§7-5 Beispiel.

$$\begin{aligned}&1 \cdot 16^3 + 15 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} + 12 \cdot 16^{-2} + 9 \cdot 16^{-3}\\&= (1E36.4C9)_{16} \approx (7734.2991)_{10}.\end{aligned}$$

◇

◇

§7-6 Satz. (Konvergenzverhalten obiger fundamentaler Reihen)

(1) Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ mit Reihenwert
$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$
und divergiert für $|q| \geq 1$.

(2) Die arithmetische Reihe konvergiert nur im trivialen Fall, dass die zugehörige Folge, die Folge $(0, 0, 0, ...)$ ist. D.h. also, dass in der Reihe alle Reihenglieder Null ist. Sonst ist die Reihe divergent.

(3) Die allgemeine harmonische Reihe (p-Reihe) konvergiert für $p > 1$ mit Reihenwerte, welche z.T. interessante Beziehungen zu mathematischen Konstanten haben (siehe unten “Anwendung”). Die Reihe divergiert jedoch für $p \in \{0, 1\}$[E.29] .

(4) Die Binomialreihe konvergiert[E.30] für $|x| \leq 1$ mit Reihenwert
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = (1 + x)^m$$
und divergiert für $|x| > 1$.

(5) Für jede Basis $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ konvergiert bekanntlich jede Reihe einer Basisdarstellung gegen genau eine reelle Zahl, wobei bei einigen Fällen (gewisse rationale Zahlen, insbesondere alle ganzen Zahlen) die Reihe abbrechen kann. D.h., alle folgenden Reihenglieder sind dann Null.

◇

Anwendung.

Gewisse mathematische Konstanten lassen sich als Reihen schreiben. Dies hat den Vorteil, dass man sie mittels dieser Reihen relativ einfach für eine gewünschte Genauigkeit berechnen kann. Auch zur weiteren Untersuchung solcher Konstanten sind ihre Reihendarstellungen oft praktisch.

Ein paar Reihendarstellungen von Konstanten:

- Kreiszahl π:
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$
oder
$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
- Eulersche Zahl e:
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$
- Natürlicher Logarithmus von 2:
$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ebenso lassen sich wichtige Funktionen als Reihen darstellen bzw. mittels solchen definieren (wir werden noch näher auf diese Funktionen zurückkommen):

§7-7 Beispiele.

1. Sinusfunktion:
$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1,1], \\ x \mapsto \sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$
2. Cosinusfunktion:
$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1,1], \\ x \mapsto \cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

3. Exponentialfunktion:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},$$
$$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4. Funktion des natürlichen Logarithmus ("natürliche Logarithmusfunktion"):

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \ln(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

◇

7.2 Rechenregeln für unendliche Reihen

Da Reihen nichts anderes als Folgen (von Partialsummen) sind, erhalten wir gewisse Rechenregeln direkt aus den Rechenregeln für konvergierende Folgen. Z.B. gilt:

§7-8 Satz. (Rechenregeln für konvergierende Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ zwei konvergente Reihen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante reelle Zahl. Dann gilt:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ konvergiert und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)$ konvergiert und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot x_n)$ konvergiert und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

◇

D.h., also:

Merkregel:

”Konvergente Reihen lassen sich gliedweise addieren, subtrahieren und mit einer Konstanten reellen Zahl multiplizieren.”

Allerdings muss man aufpassen: nicht alle Rechenregeln für Folgen gelten analog bei Reihen! So ist etwa bei der Regel mit Produkten eine Einschränkung des Konvergenzbegri s zu sogenannt “absolut konvergenten Reihen” notwendig. Dies führt dann auf das sogenannte “Cauchy-Produkt” von zwei “absolut konvergenten Reihen”. Wir wollen dies aber in diesem Modul aus Zeitgründen nicht vertiefen. Auch wollen wir hier nur noch erwähnen, dass es auch für Reihen ebenso Konvergenzkriterien gibt, mit denen man in gewissen Fällen die Konvergenz untersuchen und den Reihenwert bestimmen kann. Es sei auch gesagt, dass dies nur in Einzelfällen “leicht” geht. Solche Untersuchungen können mathematisch sozusagen “beliebig schwierig” werden.

Noch zwei Beispiele, wie man mit den Rechenregeln für konvergente Reihen und dem Wissen einzelner Reihenwerte auf weitere, ev. kompliziertere Reihenwerte schliessen kann:

§7-9 Beispiele.

1. Seien die beiden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{1-n}$ gegeben.

   Da die beiden Reihen konvergieren und der erste Reihenwert $\frac{2}{e-1}$ und der zweite $\frac{e}{e-1}$ ist, erhalten wir als Summe der beiden Reihen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{e^n}+e^{1-n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{1-n}\\ &= \frac{2}{e-1}+\frac{e}{e-1}\\ &= \frac{e+2}{e-1}.\end{aligned}$$

2. Seien die beiden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ gegeben.

   Diese Reihen konvergieren ebenfalls und der erste Reihenwert ist $\frac{\pi^2}{6}$ und der zweite 3. Wir erhalten als Di erenz der beiden Reihen also

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{3}{2^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}\\ &= \frac{\pi^2}{6}-3.\end{aligned}$$

◇

Kapitel 8

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 8.1 Sie verstehen, was der linksseitige, rechtsseitige und beidseitige Grenzwert einer reellen Funktion ist und können dies anhand einfacher Beispiele erklären.

LZ 8.2 Sie verstehen den Begri der einseitigen und beidseitigen Stetigkeit und können einfache reelle Funktionen auf Stetigkeit mithilfe der Rechenregeln und Stetigkeitskriterien untersuchen.

8.1 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwerte spielen in der Analysis eine (bzw. wahrscheinlich die) herausragende Rolle. Nicht nur bei Folgen und Reihen, auch bei reellen Funktionen – also Funktionen des Typs $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für eine Teilmenge D der reellen Zahlen – ist dieser Begri zentral. Zum Beispiel, wird er uns ermöglichen, im nächsten Teil II den wichtigen Begri einer Ableitung einer reellen Funktion zu definieren, welcher wiederum wichtige Aussagen über die Natur und das "Verhalten" einer Funktion ermöglicht. Deshalb wollen wir in diesem Kapitel nun den Begri des Grenzwerts einer solchen reellen Funktion kennenlernen[E.31]. Zum Verständnis dieses Kapitels (und auch der nachfolgenden Teilen) ist es wesentlich, dass Sie sich an die grundlegenden Dinge im Zusammenhang mit den reellen Zahlen und reellen Funktionen erinnern und diese beherrschen. Frischen Sie sich diese Kenntnisse notfalls unbedingt wieder auf.

Wir starten mit der Grundidee und wollen uns als erstes Folgendes fragen:

Wie kann man mathematisch exakt fassen, "ob und wie sich bei einer Funktion der Funktionswert einem Wert nähert, wenn sich das Argument x einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ beliebig annähert"?

Da diese Frage auch interessant ist, wenn wir das Argument x gegen positiv unendlich ($+\infty$ oder einfach ∞) oder negativ unendlich ($-\infty$) streben lassen, wollen wir den Konvergenzbegri von Folgen noch etwas ausdehnen:

§8-1 Definition. (Bestimmte Divergenz einer Zahlenfolge, uneigentliche Konvergenz und Grenzwerte $\{-\infty, \infty\}$)

(1) Ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber ihre Folgenglieder wachsen unbeschränkt für $n \to \infty$, dann sagen wir die Folge sei **bestimmt divergent** und habe den **Grenzwert** ∞ ($+\infty$). Symbolisch:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

(2) Ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber ihre Folgenglieder fallen unbeschränkt für $n \to \infty$, dann sagen wir die Folge sei **bestimmt divergent** und habe den **Grenzwert** $-\infty$. Symbolisch:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

(3) Die Symbole $-\infty$ und ∞ ($+\infty$) nennen wir in diesem Zusammenhang auch **uneigentliche Grenzwerte** und diese bestimmte Divergenz auch **uneigentliche Konvergenz**.

◇

§8-2 Beispiele.

1. Die Zahlenfolge (x_n) mit

$$x_n := n^3$$

ist also uneigentlich konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2. Ebenso ist die Zahlenfolge (x_n) mit

$$x_n := (-n)^3$$

uneigentlich konvergent, jetzt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

◇

Die Beantwortung der oben formulierten Frage führt nun auf folgende Definition:

§8-3 Definition. (Links- und rechtsseitige Konvergenz einer reellen Funktion; links- und rechtseitiger Grenzwert)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(1) Konvergiert für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D, x_n < a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, dann sagen wir, dass die Funktion in a **linksseitig konvergiert** und nennen den Wert

$$f(a^-) := \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

den **linksseitigen Grenzwert** von f an der Stelle a.

(2) Konvergiert für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D, x_n > a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, dann sagen wir, dass die Funktion in a **rechtsseitig konvergiert** und nennen den Wert

$$f(a^+) := \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

den **rechtsseitigen Grenzwert** von f an der Stelle a.

◇

Beachten Sie, dass wir wegen $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ also uneigentliche Konvergenz zugelassen haben! Beachten Sie auch, dass links- und rechtsseitige Grenzwerte bei reellen Funktionen natürlich nicht gleich sein müssen. Studieren Sie dazu auch die nachfolgenden Beispiele.

§8-4 Beispiele.

1. Betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

welche wir die **Signumsfunktion (Vorzeichenfunktion)** nennen (siehe Abb.8.1).

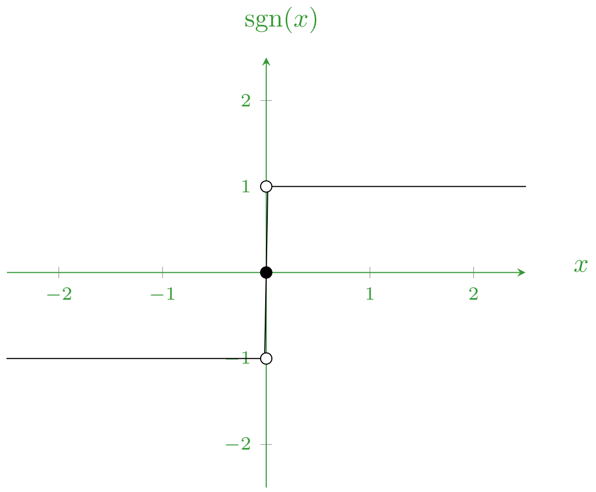


Abbildung 8.1 – Signumsfunktion (Vorzeichenfunktion) mit verschiedenem links- und rechtsseitigen Grenzwert in $x := 0$.

Diese Funktion hat o ensichtlich in $x := 0$ den linksseitigen Grenzwert -1, aber den rechtsseitigen Grenzwert 1.

2. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}, & -1 \leq x < 0, \\ \text{undef.}, & x = 0 \text{ und } x < -1, \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}, & x > 0, \end{cases}$$

(siehe Abb.8.2) hat an der undefinierten Stelle $x := 0$ denselben rechtsseitigen wie auch linksseitigen Grenzwert, nämlich 2. In $x := -1$ existiert nur ein rechtsseitiger Grenzwert 1, weil die Funktion für $x < -1$ nicht definiert ist.

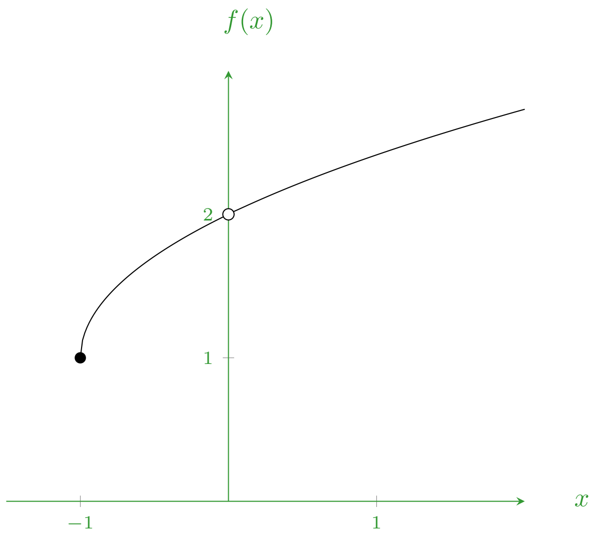


Abbildung 8.2 – Funktion mit gleichem links- und rechtsseitigen Grenzwert an undefinierter Stelle $x := 0$. In $x := -1$ existiert nur ein rechtsseitiger Grenzwert, weil die Funktion für $x < -1$ nicht definiert ist.

3. Eine Funktion wie

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := x^2 \end{aligned}$$

(siehe Abb.8.3) hat an *jeder* Stelle x denselben rechtsseitigen wie auch linksseitigen Grenzwert, nämlich gerade $f(x)$.

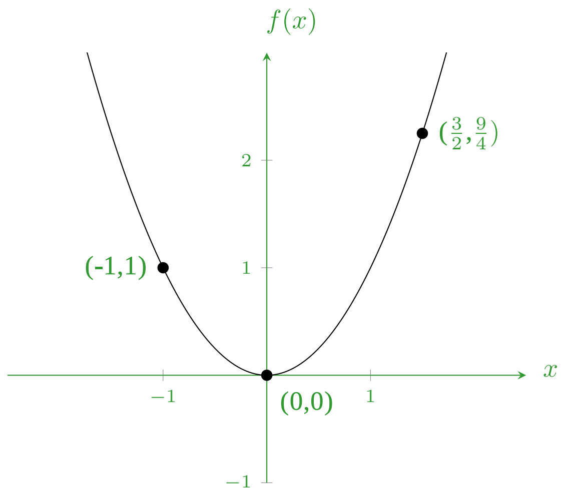


Abbildung 8.3 – Bei Funktionen wie $f(x) := x^2$ ist an *jeder* Stelle der links- und der rechtsseitige Grenzwert gleich (nämlich $f(x)$). Drei Beispiele eingezeichnet für $x_1 := -1, x_2 := 0, x_3 := \frac{3}{2}$.

◇

§8-5 Definition. (Grenzwert einer Funktion an einer Stelle a)

Stimmen bei einer Funktion f in einer Stelle a der linksseitige mit dem rechtsseitigen Grenzwert überein, d.h., gilt

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

dann sprechen wir auch vom **beidseitigen Grenzwert** oder auch nur vom **Grenzwert** von f in a und schreiben dann einfach

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

◇

Der eigentliche Grenzwert einer Funktion an einer Stelle a braucht auch gar nicht zu existieren, z.B. weil die Funkton dort unbeschränkt ist und die Funktionswerte immer weiter betragsmässig anwachsen, je näher sich x der Stelle a nähert. In einem solchen Fall sprechen wir dann auch von einem links-/rechts-/beidseitigen Grenzwert in ∞ (positiv unendlich) bzw. in $-\infty$ (negativ unendlich) und schreiben dies im beidseitigen Fall als

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

bzw.

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

und für einseitige Grenzwerte entsprechend. Wir sagen dann auch, die Funktion habe in a eine vertikale Asymptote (oder auch einen Pol) und zeichnen dies im Funktionsgraphen manchmal als gestrichelte vertikale Linie ein (siehe das zweite Beispiel nachfolgend). Mehr noch, eine Funktion kann an einer Stelle a auch einen beidseitigen Grenzwert haben (d.h., links- und rechtseitiger Grenzwert existieren und sind gleich), aber die Funktion selbst ist an dieser Stelle nicht definiert, d.h., es gibt kein $f(a)$, oder sie hat dort einen anderen Funktionswert $f(a)$ als der Grenzwert!

§8-6 Beispiele.

1. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{1}{x} \end{aligned}$$

hat in $x = 0$ weder einen rechtsseitigen, noch einen linksseitigen (eigentlichen) Grenzwert. Sie strebt linksseitig gegen negativ unendlich (d.h., hat dort den uneigentlichen Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$) und rechtsseitig gegen positiv unendlich (d.h., hat dort den uneigentlichen Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \infty$).

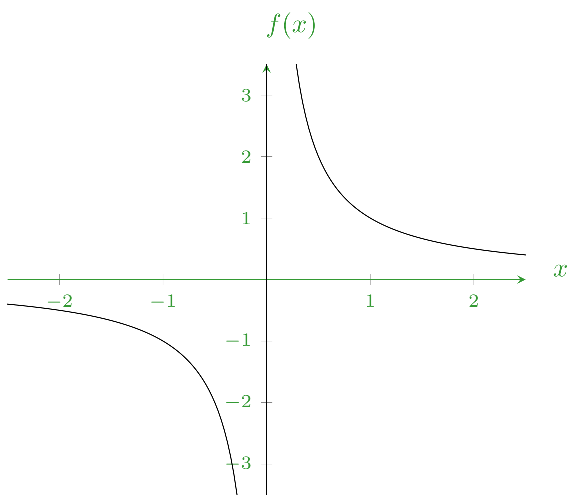


Abbildung 8.4 – $f(x) := \frac{1}{x}$ hat in $x := 0$ weder einen links- noch einen rechtsseitigen eigentlichen Grenzwert. Sondern strebt dort gegen negativ bzw. positiv unendlich.

2. Die Tangens-Funktion

$$\tan : \mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x$$

ist eine Funktion, welche sogar an unendlich vielen Stellen, nämlich den Definitionslücken $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, weder einen links- noch einen rechtsseitigen *eigentlichen* Grenzwert hat. Die linksseitigen *uneigentlichen* Grenzwerte sind jeweils ∞ und die rechtsseitigen *uneigentlichen* Grenzwerte $-\infty$.

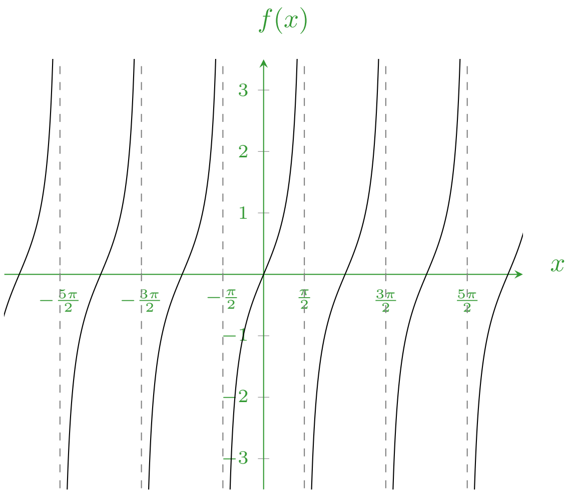


Abbildung 8.5 – Tangens-Funktion mit unendlich vielen Stellen, wo weder ein links- noch ein rechtsseitiger *eigentlicher* Grenzwert existiert.

◇

Nun wollen wir als Nächstes die Grenzwerte von drei grundlegende Typen von Funktionen festhalten:

§8-7 Satz. (Drei grundlegende Grenzwerte)

Es gilt für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

(1) Grenzwert einer konstante Funktion b:

$$\lim_{x \to a} b = b.$$

(2) Grenzwert der Identitätsfunktion x:

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

(3) Grenzwert der n-ten Potenz x^n:

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n.$$

◇

Dann gelten folgende Rechenregeln, welche auch wieder benutzt werden können, um aus Grenzwerten schon bekannter Funktionen (wie z.B. im vorhergehenden Satz) weitere zu ermitteln.

§8-8 Satz. (Rechenregeln für (beidseitige) Grenzwerte von reellen Funktionen)

Seien $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, welche in einem Punkt $a \in D$ einen (beidseitigen) Grenzwert haben. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

D.h., die Grenzwerte können addiert oder subtrahiert werden um den Grenzwert der Summe oder der Di erenz der beiden Funktionen an der Stelle a zu erhalten.

(2) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

D.h., der Grenzwert der Multiplikation der Funktion mit einer reellen Konstanten c ergibt das c-fache des Grenzwertes.

(3) $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

D.h., der Grenzwert des Produkts zweier Funktionen ist das Produkt ihrer Grenzwerte.

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$,
wobei zusätzlich $g(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ sei. (Damit die ensprechenden Quotienten immer defininert sind.)

D.h., der Grenzwert des Quotienten zweier Funktionen ist dann auch der Quotient ihrer Grenzwerte.

(5) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x))^c = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^c$.

D.h., der Grenzwert einer (sogar reellen) Potenz einer Funktion ergibt die Potenz des Grenzwertes.

◇

§8-9 Beispiel.

Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 2}(4x^2 + 3) = ?$$

berechnen und tun dies zu Demonstrationszwecken sehr detailliert. Die Lösung finden wir leicht mittels der beiden vorhergehenden Sätzen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(4x^2+3) &= \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3 && \text{(Satz §8-8 (1))}\\
&= \underbrace{4\lim_{x\to 2} x^2}_{\text{(Satz §8-8 (2))}} + \underbrace{3}_{\text{(Satz §8-7 (1))}}\\
&= 4 \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2}_{\text{(Satz §8-8 (5))}} + 3\\
&= 4 \cdot \underbrace{2^2}_{\text{(Satz §8-7(2))}} + 3\\
&= 19.
\end{aligned}$$

◇

Schliesslich sind auch noch folgende Konvergenzssätze fundamental:

§8-10 Satz. (Konvergenzsätze für Funktionen)

Seien $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, welche in einem Punkt $a \in D$ einen (beidseitigen) Grenzwert haben.

(1) Ist $f(x) \leq g(x)$ in D, dann folgt daraus, dass $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ für alle $a \in D$ gilt, falls diese Grenzwerte existieren.

(2) Funktionsverknüpfung und Konvergenz:

Sei $b := \lim_{x \to a} f(x)$. Für jede Funktion $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to a} (h \circ f)(x) = \lim_{x \to a} h(f(x)) = \lim_{x \to b} h(x),$$

falls auch dieser Grenzwert existiert (also falls h auch für x gegen b konvergiert).

(3) Es gibt auch hier ein Sandwich Theorem:

Gilt zusätzlich für eine weitere Funktion $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{und gilt} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x),$$

dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to a} h(x)$ und er ist gleich den beiden anderen.

◇

8.2 Das Problem unbestimmter Ausdrücke

Es gibt Funktionen, bei denen wir an gewissen Stellen nicht ohne Weiteres den Grenzwert berechnen können. Ein einfaches Beispiel:

§8-11 Beispiel.

Wir betrachten die Funktion $f(x) := \frac{x}{2^x}$ und fragen uns, welchen Grenzwert diese Funktion für $x \to \infty$ hat. Mit der Quotientenregel Satz §8-8 (4) erhalten wir

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \to \infty} x}{\lim_{x \to \infty} 2^x} = \underbrace{\frac{\infty}{\infty}}_{(*)}.$$

◇

Es stellt sich o ensichtlich in $(*)$ ein Problem ein: Ein Bruch dessen Zähler und dessen Nenner je unendlich gross sind, ist nicht sinnvoll bestimmt. Oder wegen $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^x} = 0$, können wir auch sagen, dass das Produkt "$\infty \cdot 0$" von etwas unendlich Grossem mit etwas, das unendlich klein ist, nicht sinvoll bestimmt ist.

Was machen wir damit? Heisst dies, dass dieser Grenzwert nicht existiert? Und wenn doch, wie lautet er?

Nachdem wir in Kap.13 gebrochen-rationale Funktionen und weitere der sogenannten elementaren Funktionen kennengelernt haben (wo dieses Problem häufiger auftritt), werden wir in Kap.14 unter dem Stichwort Regel von Bernoulli-de l'Hôpital sehen, in welchen Fällen – und dann wie – wir diese Grenzwerte ermitteln können.

8.3 Stetigkeit von Funktionen

Die Existenz von Grenzwerten sagt viel über die “Kontrolliertheit” des Verhaltens einer Funktion aus. Ein besonders kontrolliertes Verhalten zeigen Funktionen die stetig sind. (Wir werden noch andere solche Eigenschaften ”kontrollierten Verhaltens von Funktionen kennenlernen.) Deshalb sind stetige Funktionen sehr wichtige Typen.

§8-12 Definition. (Einseitige und beidseitige Stetigkeit einer reellen Funktion an einer Stelle a)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Sei $a \in D$.

(1) Hat f in a einen linksseitigen Grenzwert und gilt

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \underset{\substack{\text{Schreib-} \\ \text{weise}}}{=} f(a^-)$$

dann sagen wir, f sei in a **linksseitig stetig**.

(2) Hat f in a einen rechtsseitigen Grenzwert und gilt

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \qquad \underset{\substack{\text{Schreib-} \\ \text{weise}}}{=} f(a^+)$$

dann sagen wir, f sei in a **rechtsseitig stetig**.

(3) Eine Funktion, welche in a sowohl links- als auch rechtsseitig stetig ist, nennen wir eine in a **stetige Funktion** oder eine in a **beidseitig stetige Funktion**.

(4) Ist f in jedem $a \in D$ stetig, so sagen wir einfach f sei eine **stetige Funktion**.

◇

Stellen an denen eine Funktion nicht stetig ist, werden auch **Unstetigkeitsstellen** genannt. Diese lassen sich im Wesentlichen in folgende Arten einteilen:

- **Behebbare Unstetigkeitsstellen**: Durch eine Umdefinierung der Funktion an einer solchen Stelle a, kann die Funktion dort stetig gemacht werden.

- **Pole**: Dies sind Stellen, an denen die Funktionswerte betragsmässig gegen unendlich streben. Im Funktionsgraphen haben diese Funktionen dort eine vertikale Asymptote und diese Unstetigkeitsstellen sind nicht behebbar. (Bsp.: Die beiden Beispiele auf S.87)

- **Endlicher Sprung**: Stellen an welchen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren, aber nicht gleich sind. Diese Unstetigkeiten sind ebenfalls nicht behebbar. (Bsp.: Die ersten nachfolgenden beiden Beispiele.)

§8-13 Beispiele.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x > \frac{1}{2} \\ -x^2 + 2x + 1, & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$:

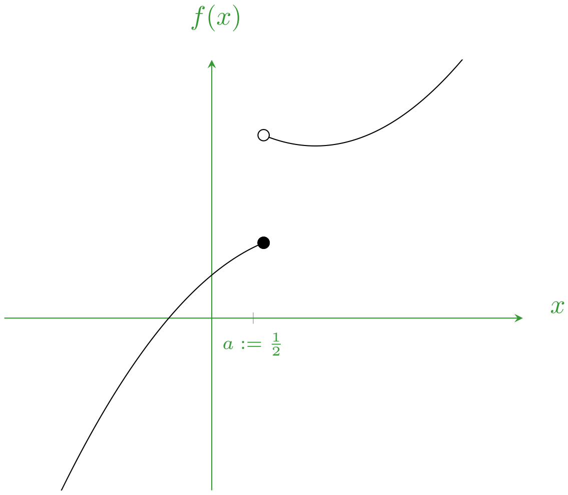


Abbildung 8.6 – Beispiel einer Funktion, welche im Punkt a linksseitig stetig, aber nicht rechtsseitig stetig ist.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \geq \frac{1}{2} \\ -x^2 + 2x + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$:

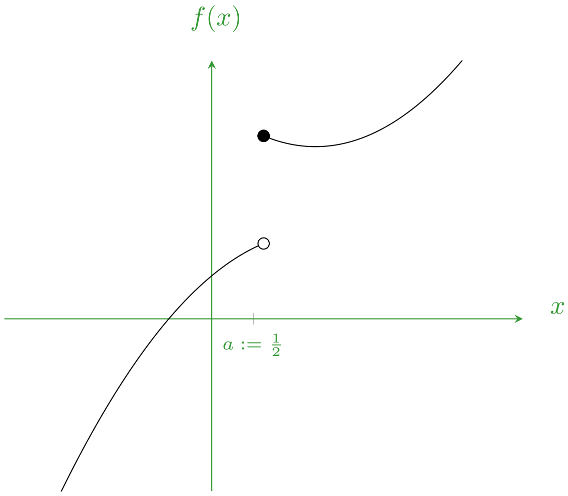


Abbildung 8.7 – Beispiel einer Funktion, welche im Punkt a rechtsseitig stetig, aber nicht linksseitig stetig ist.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x > \frac{1}{2} \\ 3, & x = \frac{1}{2} \\ -x^2 + 2x + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$:

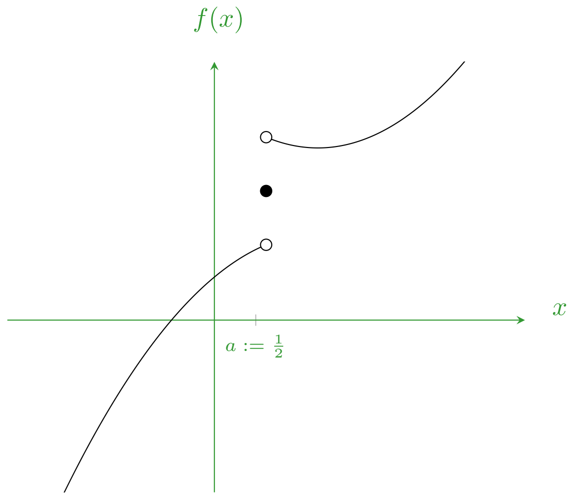


Abbildung 8.8 – Beispiel einer Funktion, welche im Punkt a weder linksseitig, noch rechtsseitig stetig ist.

4. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 + 2, & x > 0 \\ -(x^2 + 2), & x < 0 \end{cases}$:

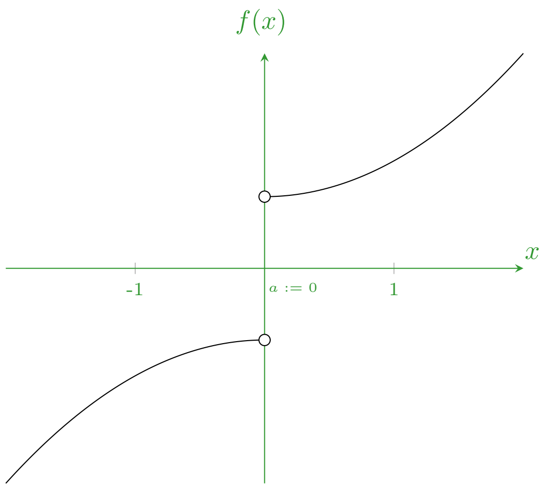


Abbildung 8.9 – Beispiel einer Funktion, welche im Punkt a weder linksseitig, noch rechtsseitig stetig ist und dort sogar undefiniert ist.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := 2x^3 - 12x^2 - 22x - 10$:

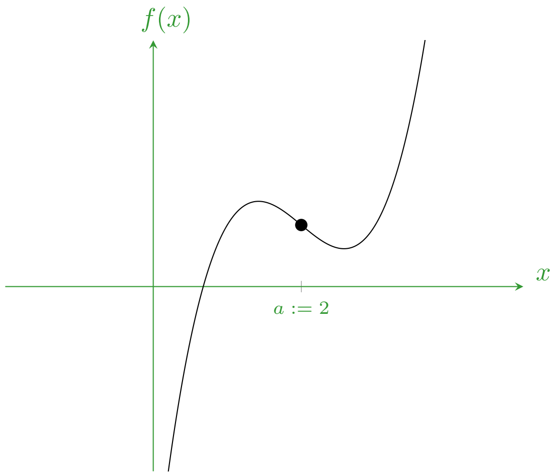


Abbildung 8.10 – Beispiel einer Funktion, welche z.B. im Punkt a (und überall sonst auch) beidseitig stetig ist.

◇

An dieser Stelle ein Wort der Warnung ...

Man könnte irrtümlicherweise meinen, dass das Phänomen der Stetigkeit durch reine ”Anschaulichkeit” ganz einfach erledigt werden kann. (Und ”dass Mathematiker wieder alles viel zu kompliziert machen” ... ;-)). Dem ist aber überhaupt nicht so. Ganz im Gegenteil!

§8-14 Beispiel.

Sind folgende Funktionen überall stetig?

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &\quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

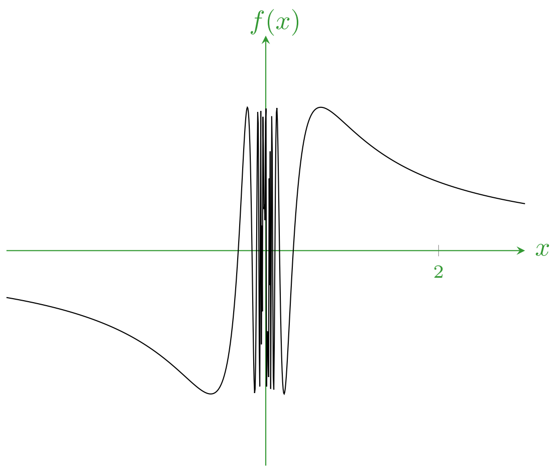


Abbildung 8.11 – Beispiel einer Funktion, für welche die Stetigkeit zu beurteilen schwierig ist.

(Antwort: nein)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} x(2x\sin(1/x) - \cos(1/x)), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

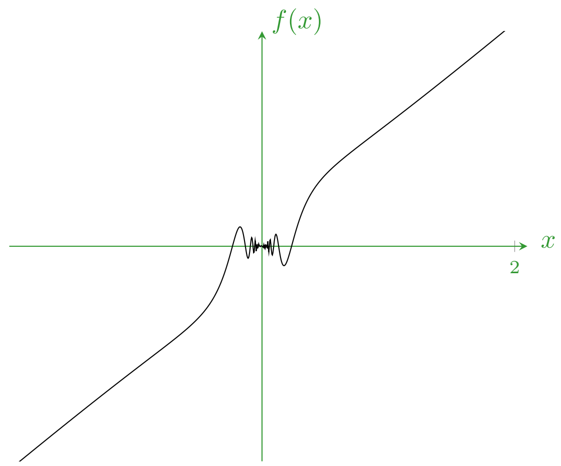


Abbildung 8.12 – Beispiel einer Funktion, für welche die Stetigkeit zu beurteilen schwierig ist.

(Antwort: ja)

◇

Und übrigens: Es gibt noch viel verrücktere Dinge! Mathematik ist eben nicht WYSIWYG, sondern WYPIWYG (nicht "what you see is what you get", sondern "what you prove is what you get").

Die (beidseitige) Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt $a \in D$ des Definitionsbereichs lässt sich ähnlich wie bei der Konvergenz auch durch ein sogenanntes ε-δ-Kriterium exakt beschreiben (man nimmt dieses Kriterium oft sogar als Definition für die Stetigkeit):

§8-15 Satz. (**ε-δ-Kriterium für Stetigkeit**)
Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

◇

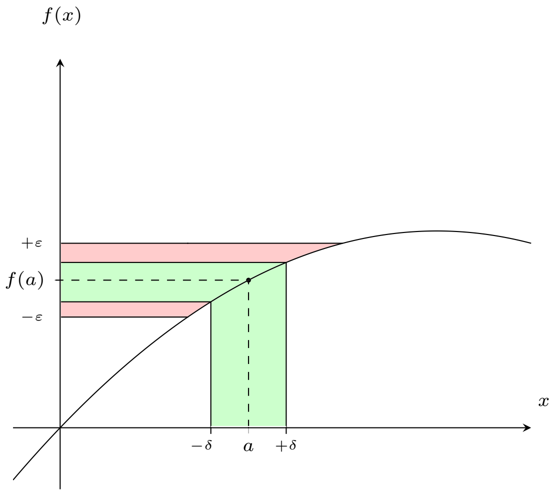


Abbildung 8.13 – Die ε-δ-Bedingung an einer Stetigkeitsstelle a für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$.

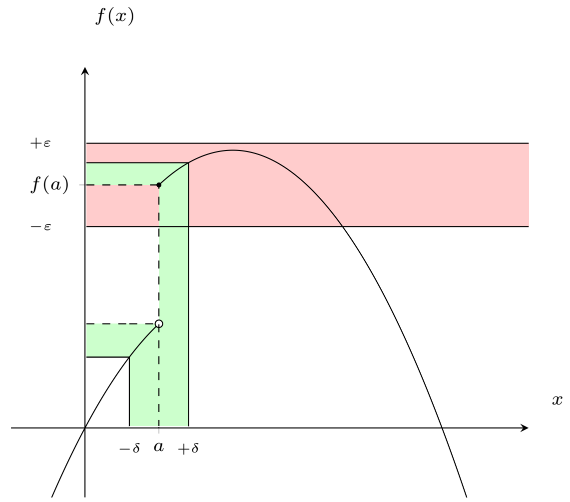


Abbildung 8.14 – Die ε-δ-Bedingung an einer Unstetigkeitsstelle a für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$.

Wenn eine Funktion übrigens nicht nur in einem Punkt, sondern in allen Punkten einer Teilmenge $E \subset D$ ihres Definitionsbereiches stetig ist, dann sagt man auch, sie sei **stetig auf** E.

§8-16 Satz. (Rechenregeln stetiger Funktionen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt a von D. Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:

(1) $c \cdot f$ ist stetig in a.

(2) $f \pm g$ sind stetig in a.

(3) $f \cdot g$ ist stetig in a.

(4) Wenn $g(a) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.

Wir merken uns also:

Merkregel:
Die skalare Multiplikation einer in a stetigen Funktion mit einer reellen Zahl, sowie die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier in a stetiger Funktionen liefern wieder eine in a stetige Funktion.

◇

Die folgenden Klassen stetiger Funktionen ergeben sich unter anderem aus dem vorhergehenden Satz:

§8-17 Satz. (Klassen stetiger Funktionen)

(1) Die Betragsfunktion $|.|$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

(2) Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(3) Rationale Funktionen – also Brüche zweier Polynomfunktionen – sind an allen Stellen, in denen sie definiert sind, stetig.

(4) Die allgemeine Potenzfunktion $f(x) := ax^q$, für $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}$, ist auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig.

(5) $\cos, \sin$ und $\exp$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. $\ln$ ist auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ stetig und $\tan$ und $\cot$ sind auf ihren Definitionsbereichen ebenfalls stetig.

◇

Wegen der oft gewünschten "Kontrollierbarkeit" von Funktionen an bestimmten Stellen ist es also wichtig, zu wissen, ob eine Funktion stetig ist oder nicht. Dies zu bestimmen ist unter Umständen nicht einfach, aber mit den eben genannten Rechenregeln, der Definition und dem nun folgenden Kompositionskriterium ist es für viele in der Praxis vorkommende Funktionen möglich. (Es gibt natürlich noch weitere Eigenschaften und Kriterien, welche hilfreich sein können.)

§8-18 Satz. (Komposition mit stetiger Funktion)

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche in einem Punkt a von D stetig ist. Sei $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

Gilt nun, dass $f(a) \in E$ ist und dass g stetig in $f(a)$ ist, dann folgt dass die Komposition $g \circ f$ in a stetig ist. ◇

Mit obigen Sätzen sieht man leicht folgende Beispiele:

§8-19 Beispiele.

1. $f(x) := \frac{x^2+2}{\cos(x)}$ ist stetig auf dem Definitionsbereich.
2. $f(x) := \sqrt{x^2+1}$ ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.
3. $f(x) := \frac{x}{\cos(x)}$ ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.
4. Die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x)$ ist nicht stetig auf ihrem Definitionsbereich, da sie in 0 nicht stetig ist.

◇

8.4 Stetige Fortsetzbarkeit und die Behebung von Unstetigkeitsstellen

Wenn wir uns die Beispiele Abb.8.6 - 8.9 anschauen, dann sehen wir, dass in keinem dieser Fälle in der betre enden Stelle a die Funktion so umdefiniert werden kann, dass sie einerseits in a stetig wird und andererseits in allen anderen Stellen den ursprünglichen Funktionswert beibehält. Es gibt aber im Wesentlichen zwei Fälle, wo dies möglich ist und es ist manchmal wichtig, so eine neue, "stetig fortgesetzte Funktion" zu definieren bzw. zu betrachten. In welchen zwei Fällen ist dies möglich? O ensichtlich in Situationen, wie in den zwei folgenden Beispielen:

§8-20 Beispiele.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := -x^3 + 6x^2 - 11x + 8$:

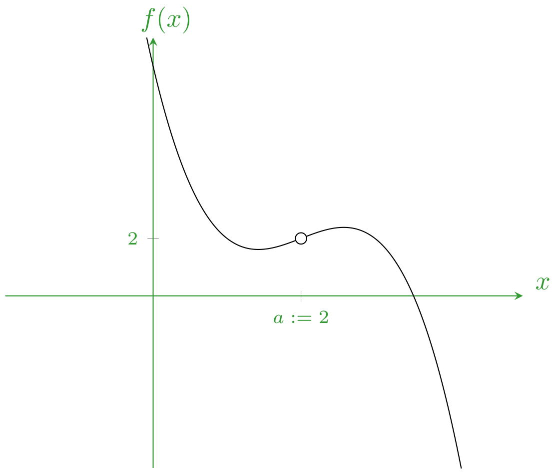


Abbildung 8.15 – Beispiel einer Funktion, welche den Definintionsbereich $D := \mathbb{R} \setminus \{2\}$ hat, aber im Punkt a offensichtlich geeignet "stetig fortgesetzt" (erweitert und stetig gemacht) werden kann.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} -x^3 + 6x^2 - 11x + 8, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$:

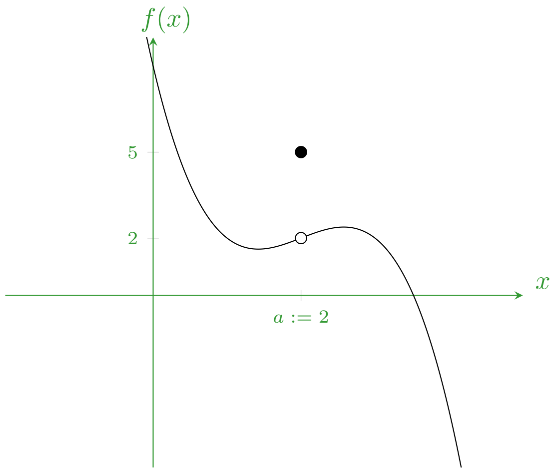


Abbildung 8.16 – Beispiel einer Funktion, welche in a definiert, aber nicht stetig ist und deren Unstetigkeit dort aber offensichtlich geeignet "behebbar" ist (d.h., dort stetig gemacht werden kann).

◇

Wir fassen dieses Ergebnis in einem Satz und zugehöriger Definition zusammen:

§8-21 **Satz und Definition.**

Sei $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Ist f in $a \in \mathbb{R}$ nicht definiert, d.h., $a \notin D_f$ und gilt

$$-\infty < \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) < \infty$$

(d.h., existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert in a und sind gleich), dann nennen wir f in a **stetig fortsetzbar** und die Funktion

$$\widetilde{f} : D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \widetilde{f}(x) := \begin{cases} \lim_{x \to a} f(x), & x = a \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

die **stetige Fortsetzung** von f in a.

(2) Ist $a \in D_f$ und gilt

$$-\infty < \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) < \infty$$

(d.h., existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert in a und sind gleich), jedoch ist

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x),$$

so nennen wir a eine **behebbare Unstetigkeitsstelle** von f bzw. f f in a **behebbar stetig.**

Die Funktion

$$\begin{aligned} \widetilde{f} &: D_f \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \widetilde{f}(x) := \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x), & x = a \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ist dann die in a **stetig-behobene Funktion** von f.

◇

§8-22 Beispiele.

1. Hat die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases}$$

eine Unstetigkeitsstelle? Wenn ja, lässt sich diese beheben?

Wir wissen, dass x^2 und $-2x+3$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, also ist die Funktion f an allen Stellen $x < 1$ und $x > 1$ stetig und wir müssen nur die Stelle $x = 1$ untersuchen. Wir haben z.B.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1 \neq 2 = f(1),$$

also ist die Funktion in $x = 1$ sicher nicht stetig. Da aber

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (-2x+3) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x),$$

(d.h., links- und rechtsseitiger Grenzwert sind gleich in $x = 1$) gilt, ist diese Unstetigkeitsstelle behebbar. Wenn wir also

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases}$$

definieren, haben wir eine auf ganz $\mathbb{R}$ (und insbesondere auch in $x = 1$) stetige Funktion, welche die in 1 stetig-behobene Funktion von f ist.

2. Die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

ist in $x = 0$ wegen $f(0) = \frac{1}{0}$ undefiniert und sonst überall stetig. Lässt sie sich in a stetig fortsetzen? Wir haben

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \neq \infty = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x),$$

d.h., links- und rechtsseitiger Grenzwert sind in 0 nicht gleich und wir können damit diese Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig fortsetzen.

3. Die Funktion

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

hat den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ist also in $x = 1$ nicht definiert. Sonst ist sie überall stetig. Lässt sie sich in a stetig fortsetzen? Wir haben

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x+1 \\ &= 2 \\ &= \ldots = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x),\end{aligned}$$

d.h., links- und rechtsseitiger Grenzwert sind in 0 gleich und wir können diese Funktion an der Stelle $x = 1$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

stetig fortsetzen.

◇

Teil II

Differentialrechnung

Kapitel 9

Einführung und Motivierung

LERNZIELE:

LZ 9.1 Sie verstehen ein paar wichtige Grundfragen, die man mit der Di erential- und Integralrechnung lösen will.

Nach diesen hauptsächlich vorbereitenden – aber nicht weniger wichtigen (!) – Themen kommen wir nun mit den Teilen II und III zu den beiden zentralen Themen der (elementaren) Analysis: Die sogenannte Di erential- und Integralrechnung in einer (reellen) Variablen[E.32] .

Worum geht es ganz generell bei der Di erential- und Integralrechnung?

Die wohl grundlegendste Idee in der Di erentialrechnung ist der Begri der "momentanen Änderungsrate" einer Funktion an einer Stelle x ihres Definitionsbereichs und damit verbunden der Begri der Ableitung einer Funktion an dieser Stelle. Dies ist einerseits eine sehr wichtige Eigenschaft zur Charakterisierung einer gegebenen Funktion und andererseits ist es eine sehr zentrale Idee bei der mathematischen Modellbildung in zahlreichen Anwendungsgebieten: Denn hier kann man oft momentane Änderungsraten experimentell messen oder irgendwie empirisch[E.33] ermitteln. Dann möchte man daraus eine Funktion $f : x \mapsto y$ herleiten, welche den funktionalen Zusammenhang zwischen x und y möglichst genau beschreibt. Dies ist dann gerade das mathematische Modell eines solchen Zusammenhangs zwischen x und y aus der Anwendung. Wir wollen schon an dieser Stelle festhalten – und werden das natürlich noch genauer sehen – dass die Idee einer "momentanen Änderungsrate an einer Stelle" einer Funktion ein sogenannt lokaler Aspekt bzw. eine lokale Eigenschaft einer Funktion ist. Wir wollen das kurz an einem Beispiel (s.a. [?, p.110]) demonstrieren.

§9-1 Beispiel.

Ein Turmspringer springt von einem 10-Meter-Turm mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 1.5 m/s aufwärts. Wir stellen uns folgende Fragen:

F.9-1 Wann wird der Springer auf dem Wasser auftre en?

F.9-2 Wie schnell wird er sich beim Sprung durch die Luft bewegen?

F.9-3 Mit welcher Geschwindigkeit tri t er auf die Wasseroberfläche?

F.9-4 Mit welcher Geschwindigkeit tre en demnach die berühmten Klippenspringer von Acapulco (Höhe bis ca. 40m) auf das Wasser?

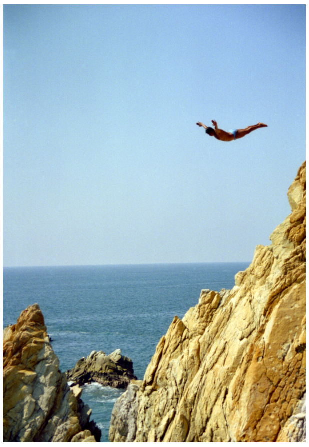


Abbildung 9.1 – Ein Kliffspringer in Acapulco
[A1]

F.9-5 Was wäre die Geschwindigkeit aus einer Höhe von 100 m?

Wir können diese Fragen z.B. mit dem klassischen Modell des senkrechten Wurfs eines Körpers nach oben unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes beantworten:

$$(*) \qquad s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

mit

$s(t)$ = Höhe des Springers in Meter m zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ in Sekunden s,

g = Erdbeschleunigung (d.h., die Beschleunigung aufgrund der Erdgravitation), $g \approx . -9.81 m/s^2$,

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit in m/s,

h_0 = Anfangshöhe in m.

In unserem Fall erhalten wir folgende Antworten:

- In der ersten Frage suchen wir nach dem Eintauchzeitpunkt t_e. D.h., nach t_e, wenn $s(t_e) = 0$ ist. Wir lösen also (*) nach $t = t_e$ auf:

$$s(t_e) = \frac{1}{2} g t_e^2 + v_0 t_e + h_0 = 0$$

$$\iff \qquad (**) \qquad t_e = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}.$$

  Eingesetzt heisst dies

$$t_e = \frac{-1.5 \overset{+}{(-)} \sqrt{2.25 - 196.2}}{-9,81} \approx 1.59s.$$

  Der Springer tri t also nach 1.59 Sekunden auf die Wasseroberfläche.

- Zur Beantwortung der zweiten Frage nach der Geschwindigkeit (in m/s) des Springers im Verlauf der Zeit, brauchen wir den zentralen Begri der *Ableitung einer Funktion*.

  Dieser Begri werden wir gleich in der Di erentialrechnung kennenlernen (das Thema von Teil II). Dadurch erhalten wir aus (*) die allgemeine Geschwindigkeitfunktion in der Zeit t:

$$(***) \qquad v(t) = \underset{\text{"Ableitung von } s \text{ bzgl. Variable } t\text{"}}{s'(t)}$$
$$= gt + v_0.$$

  Also in unserem konkreten Fall

$$v(t) = -9.81t + 1.5.$$

  Der Funktionsgraph dieser Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ in Abhängigkeit der Zeit sieht folgendermassen aus:

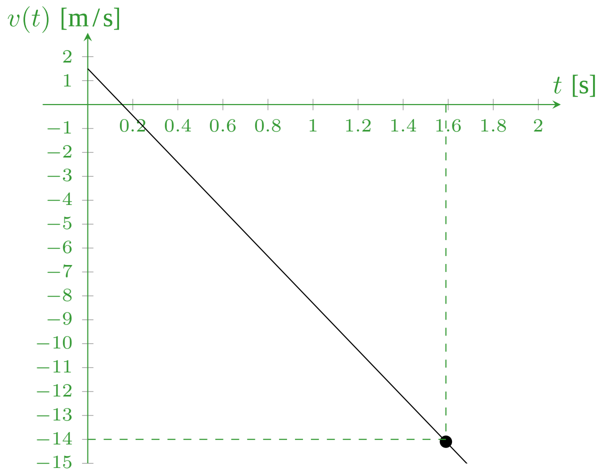


Abbildung 9.2 – Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ des Turmspringers aus 10 Meter.

- Wir lesen aus dem Funktionsgraphen ab, dass der Springer beim Wassereintritt ($t \approx 1.59$ s) ungefähr eine Geschwindigkeit $v(1.59)$ (nach unten, deshalb ist sie negativ!) vom Betrag

$$14m/s \quad (\approx 50km/h)$$

erreicht hat, was wir durch Einsetzen bestätigen. Dies beantwortet die dritte Frage.

- Betrachten wir jetzt noch den Geschwindigkeitsgraph für längere "Flug"-zeiten:

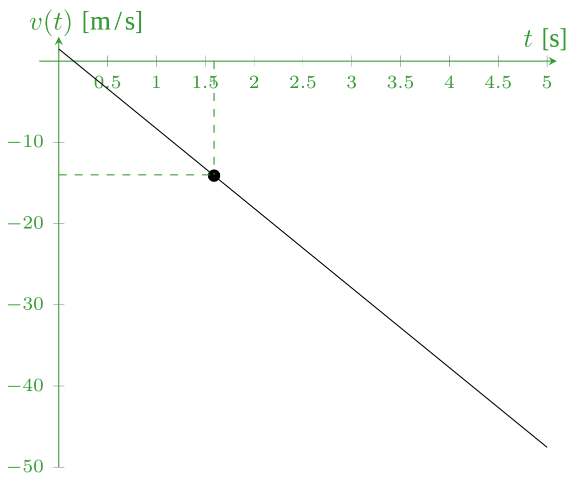


Abbildung 9.3 – Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ für "Flug"zeiten bis 5 s eines Turm-/Klippenspringers.

- In Acapulco tauchen die Klippenspringer erst nach ca. $3s$ ins Wasser ein (mit (**) gerechnet). Und damit erreichen sie Geschwindigkeiten bis zu

$$28m/s \quad (\approx 100km/h),$$

was wir wieder mit der Funktion $v(t)$ errechnen können.

- Antwort der letzten Frage schliesslich: Bei einer Höhe von 100 m wäre die Zeit bis zum Wassereintritt ca. $4.7s$ und die Geschwindigkeit etwa

$$44.6m/s \quad (\approx 160km/h).$$

◇

Ein anderer, in vieler Hinsicht komplementärer Blickwinkel wird in der Integralrechnung eingenommen. Historisch ist dieser Teil der Analysis daraus entstanden, dass man Flächen und Volumina von "Gebilden" berechnen wollte, welche nicht einfach durch Geraden begrenzt sind wie das z.B. bei Rechtecken, Dreiecken, Quadern, Würfeln, Pyramiden usw. der Fall ist. Erste Beispiele waren hier ja die Berechnungen am Kreis oder für die Kugel, aber man wollte weitergehen und solche Flächen- und Voluminaberechnungen auch für allgemeinere Objekte durchführen können, welche durch allgemeinere Funktionen begrenzt sind. Zwei Beispiele:

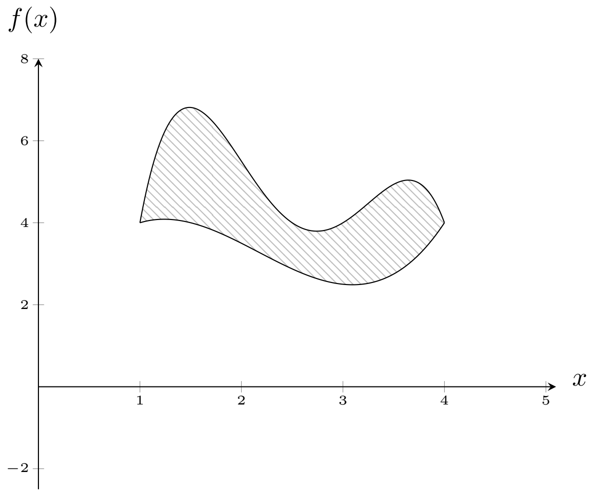


Abbildung 9.4 – Eine Grundfrage der Integralrechnung: Auffinden des Flächeninhaltes (schraffiert) von Objekten des abgebildeten Typs.

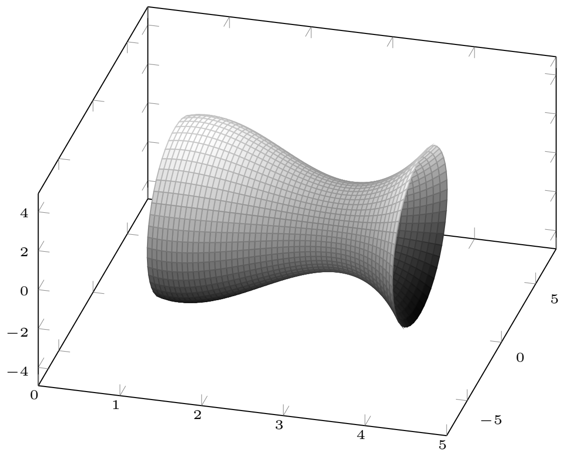


Abbildung 9.5 – Eine Grundfrage der Integralrechnung: Auffinden des Volumeninhaltes von Objekten des abgebildeten Typs.

An dieser Stelle müssen wir aber auch betonen, dass das "Volumen" in vielen Anwendungen viel weiter gefasst werden kann, als rein das Volumen eines geometrischen Objekts. In vielen Anwendungsgebieten gerade der Ingenieurswissenschaften hängen damit Grössen wie "Energieinhalt" z.B. einer Welle, die Energie eines Signals, E ektivwerte von Grössen, das "Fehlervolumen" in einem Machine Learning Algorithmus, ... usw., zusammen. Da spielt überall die Integrationstheorie eine wichtige Rolle.

Gleich wie in der Di erentialrechnung haben sich die Techniken der Integralrechnung als überaus erfolgreich herausgestellt, welche für eine Vielzahl unterschiedlicher Fragestellungen hilfreich sind. Für einige Fälle hat sich übrigens gezeigt, dass man den zentralen Begri der Integralrechnung, den des "Integrals", erweitern oder eine Variante davon einführen muss. So gibt es heute verschiedene Theorien, welche neben der historisch ersten, der Riemannschen Integrationstheorie [E.34] , je nach Fragestellung wichtig sind. Eine wichtige Variante ist zum Beispiel die sogenannte Lebesguesche Integrationstheorie [E.35] . In diesem Modul werden wir aber ausschliesslich über den Riemannschen Integrationsbegri sprechen, weil das Lebesgue

Integral bedeutend mehr mathematische Vorkenntnisse benötigt.

Schon sehr früh, praktisch parallel zur Entwicklung sowohl der Di erential- als auch der Integralrechnung (mehrheitlich auch durch diesselben Mathematiker betrieben), stellte sich eine sehr enge, komplementäre Verknüpfung der beiden Gebiete und ihrer Begri e heraus. Dies ist heute im berühmten Fundamentalsatz der Analysis (auch Hauptsatz der Di erential- und Integralrechnung [E.36]) prägnant formuliert. Darauf werden wir im Kapitel 17.4 noch näher eingehen.

Kapitel 10

Grundbegriffe

Kapitelinhalt

Version: 1.3, Last compiled on 2022/07/08, 12:00:13

LERNZIELE:

LZ 10.1 Sie verstehen was ein Di erenzen- und was ein Di erentialquotient einer reellen Funktion ist und können diese an einfachen Beispielen erklären.

LZ 10.2 Sie wissen, was die Di erenzierbarkeit und die Ableitung einer reellen Funktion ist und können diese Begri e an einfachen Beispielen erklären.

LZ 10.3 Sie verstehen die vorgestellten verschiedenen Perspektiven einer Ableitung und können diese an einfachen Beispielen erklären.

LZ 10.4 Sie kennen ein paar konkrete Anwendungen, welche diese Perspektiven benutzen.

10.1 Differenzenquotient einer Funktion an einer Stelle a

Um Komplikationen zu vermeiden und die Diskussion möglichst einfach zu halten bzw. auf das Wesentliche zu beschränken, werden wir im Folgenden normalerweise das Verhalten von Funktionen auf Teilmengen betrachten, welche Intervalle sind. Beachten Sie bitte deshalb die betre ende Formulierung in den Definitionen und Sätzen. Merken Sie sich auch, dass wir mit einem inneren Punkt eines Intervalls immer einen Punkt (ein Element des Intervalls) meinen, welcher nicht Intervallgrenze ist. Z.B. hat (a, b) nur innere Punkte, d.h., alle $a < x < b$ sind innere Punkte. Jedoch sind in $[a, b)$ nur die Punkte $a < x < b$ innere Punkte, die Intervallsgrenze a ist nicht innerer Punkt des Intervalls. Ebenso sind im Intervall $[a, b]$ zwar a und b Punkte im Intervall, jedoch nicht innere Punkte. Die inneren Punkte sind wieder nur die Elemente $a < x < b$, d.h., ohne die Intervallgrenzen a und b.

Damit wir den zentralen Begri des “Di erentialquotienten” einführen und verstehen können, wollen wir nun zuerst einen verwandten Begri kennenlernen, welcher eng mit dem des “Di erentialquotienten” zusammenhängt. Es ist dies der Di erenzenquotient [E.37] :

§10-1 Definition. (Di erenzenquotient einer reellen Funktion an einer Stelle a)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $a \in D$ ein innerer Punkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $h \in \mathbb{R}$ irgendeine reelle Zahl mit $h \neq 0$. Dann nennen wir

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

den Di erenzenquotienten von f an der Stelle a (für die Di erenz h). $\diamond$

Wie können wir diesen eben definierten Di erenzenquotienten interpretieren? Es gibt zwei wichtige Arten:

1. Geometrische Interpretation als Sekantensteigung:

   Wir können den Di erenzenquotienten einer reellen Funktion an einer Stelle a geometrisch wie in Abb. 10.1 gezeigt, als Sekantensteigung interpretieren.

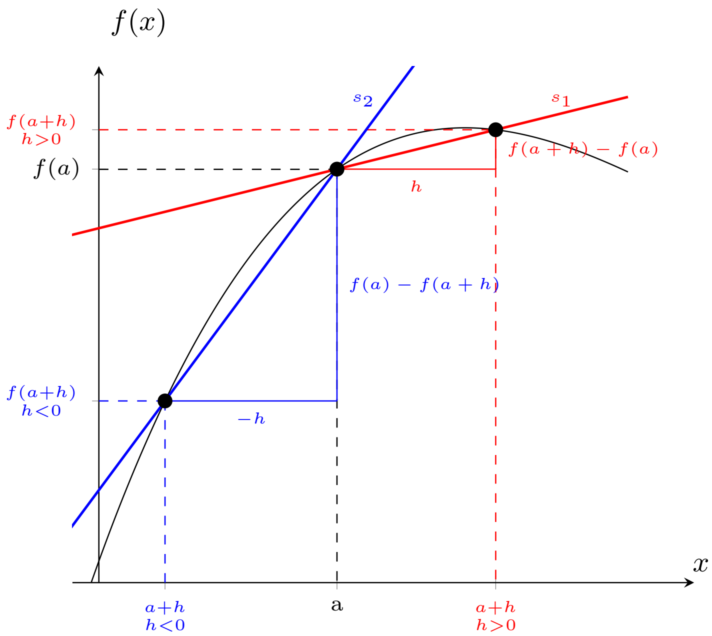


Abbildung 10.1 – Interpretation des Differenzenquotienten $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ als Sekantensteigung. Rot für Sekante s_1 mit $h>0$ und blau für Sekante s_2 mit $h<0$.

2. Funktionale Interpretation als (mittlere) Änderungsrate: Abb. 10.1 lässt aber auch noch folgende Interpretation zu, welche rein funktional (= “auf die Funktion bezogen”) ist und den geometrischen Aspekt der Sekanten und ihrer Steigung weglässt. Für ein $h \neq 0$ ist der Di erenzenquotient gerade die mittlere Änderungsrate der Funktionswerte im Bereich a und $a+h$! Er sagt also aus, wie stark sich der Funktionswert “im Durchschnitt” im Intervall $[a, a+h]$ für $h>0$ bzw. im Intervall $[a-h, a]$ für $h<0$ ändert.

   Wenn man nun die unabhängige Variable x insbesondere als Zeit t ansieht, dann entspricht das entsprechend der “mittleren Geschwindigkeit” mit welcher sich der Funktionswert verändert und wenn dieser Funktionswert den zurückgelegten Weg $s(t)$ beschreibt, ist es auch physikalisch die mittlere Geschwindigkeit einer Bewegung zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$.

§10-2 Beispiele.

1. Sei $f(x) := 3x+2$. Dann ist der Di erenzenquotient
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3(a+h)+2-(3a+2)}{h} = \frac{3h}{h} = 3.$$
   D.h., unabhängig von der Stelle a und der Distanz h ist der Di erenzenquotient 3. Dies ist aber klar, weil wir ja wissen, dass die Funktion $f(x) := 3x+2$ eine Gerade mit konstanter Steigung 3 beschreibt. Also ist die mittlere Änderungsrate der Funktionswerte natürlich konstant 3.
2. Sei $f(x) := 6x^2+1$. Dann lautet der Di erenzenquotient von f
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ldots = 12a+6h.$$

Er hat also z.B. an der Stelle $a := 1$ für $h := 2$ den Wert 24 und für $h := -3$ den Wert -6.

◇

Die Bedeutung des Di erenzenquotienten liegt jetzt aber nicht etwa in dieser konkreten Berechnung mit Werten von h und a, sondern in seiner Grenzwertbildung $h \to 0$ und in seiner Rolle bei der Definition des Di erentialquotienten, dem Thema des nächsten Abschnittes.

10.2 Differentialquotient, Differenzierbarkeit und Ableitung einer Funktion an einer Stelle a

Der Di erentialquotient einer Funktion an einer Stelle a – oder wie wir auch sagen, die Ableitung von f an der Stelle a – ist jetzt nichts anderes als der (beidseitige) Grenzwert des Di erenzenquotienten, für gegen Null strebende Di erenz h von der Stelle a, sofern dieser existiert:

§10-3 Definition. (Di erenzierbarkeit und Di erentialquotient / Ableitung einer reellen Funktion f (nach x) an einer Stelle a)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $a \in D$ ein innerer Punkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

(1) Existieren in a der links- und der rechtsseitige Grenzwert des Di erenzenquotienten für $h \to 0$ und sind die beiden Grenzwerte gleich, d.h., gilt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

so sagen wir, dass die Funktion f in a di erenzierbar ist.

(2) In einem solchen Fall, nennen wir diesen (beidseitigen) Grenzwert des Di erenzenquotienten, d.h.,

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

den Di erentialquotienten oder die Ableitung $f'(a)$ von f (nach x) an der Stelle a.

(3) Anstatt $f'(a)$, der sogenannten Euler-Notation für die Ableitung von f nach x an der Stelle a, sind auch noch andere Notationen üblich. Z.B.:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(a), \quad \text{... usw.}$$

Diese Notationsvarianten werden dann Leibniz-Notation für die Ableitung genannt. Wir werden in diesem Modul aber vor allem die Notation $f'(a)$ verwenden. [E.38]

◇

Beachten Sie hier unbedingt, dass wir den beidseitigen Grenzwert in Def. §8-5 als linksseitigen und rechtseitigen Grenzwert mit gleichem Grenzwert, also für eine beliebige Funktion g

$$\lim_{x\to a} g(x) := \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} g(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x)$$

definiert haben. Das heisst, wir haben den Di erentialquotienten bzw. die Ableitung an einer Stelle a also definiert, als den gemeinsamen linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert des Di erenzenquotienten, falls dieser existiert. (Und wir sagen dann eben, die Funktion sei di erenzierbar in a).

Wir werden gleich sehen, dass durchaus linker und rechter Grenzwert des Di erenzenquotienten existieren können, ohne dass sie gleich sind (auch nicht bei einer stetigen Funktion!). Dann können wir den Di erentialquotienten an dieser Stelle also nicht bilden, weil er nicht eindeutig ist. Die Funktion ist dann dort eben gerade nicht di erenzierbar. Zuerst wollen wir den Di erentialquotienten bzw. die Ableitung mittels vorhergehender Interpretationen des Di erenzenquotienten noch folgendermassen interpretieren:

1. Geometrische Interpretation als Tangentensteigung: Den Di erentialquotienten bzw. die Ableitung an einer Stelle a können wir aufgrund der Interpretation der Di erenzenquotienten als Sekantensteigung nun als Tangentensteigung ansehen, denn die Tangente ist die Grenzsekante für $h \to 0$.

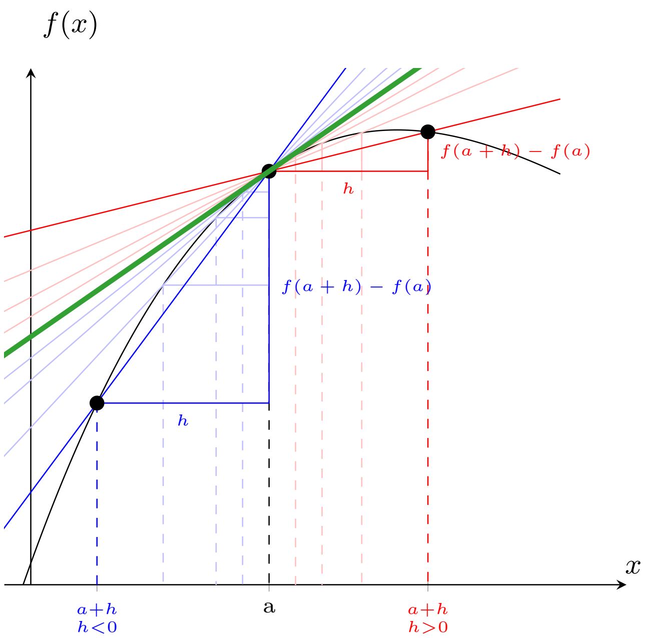


Abbildung 10.2 – Interpretation des Differentialquotienten bzw. der Ableitung $f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ als Steigung der Grenzsekante für $h \to 0$, d.h., der Tangente t (grün). Rot für Sekante s_1 mit $h > 0$ und blau für Sekante s_2 mit $h < 0$.

2. Funktionale Interpretation als momentane Änderungsrate: Damit ist auch die funktionale Interpretation des Di erentialquotienten bzw. der Ableitung klar. Der Di erentialquotient einer Funktion f in einer Stelle a kann als die momentane Änderungsrate der Funktionswerte an der Stelle a aufgefasst werden. Oder im Bild einer Bewegung mit Wegfunktion $s(t)$ in der Zeitvariable t: die momentane Geschwindigkeit der Bewegung im Zeitpunkt $t := a$.

Im ersten der folgenden Beispiele sehen wir nun, dass bei reelle Funktionen keineswegs an jeder Stelle der Di erentialquotient existieren muss, selbst dann nicht, wenn die Funktion an dieser Stelle stetig ist.

§10-4 Beispiele.

1. Die Betragsfunktion $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ hat in $a := 0$ keinen Di erentialquotienten (also keine Ableitung $f'(0)$), obwohl die Funktion überall – auch in 0 – stetig ist! Denn es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|a+h|-|a|}{h}\\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|-|0|}{h}\\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{(-1)|h|}\\ &= -1,\end{aligned}$$

und andererseits

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ldots = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = 1.$$

Die Grenzwerte der Di erenzenquotienten sind also verschieden. Mit anderen Worten: Die Betragsfunktion ist an der Stelle $a := 0$ nicht di erenzierbar oder wie wir eben auch sagen, nicht ableitbar.

2. Ist $f(x) := 2x^2 + 1$ in $a := 2$ ableitbar und wenn ja, wie lautet dort die Ableitung?

Wir rechnen

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2+1-9}{h}\\ &= \ldots\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{8h+2h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 8+2h\\ &= 8 \qquad \text{(sowohl für } h<0 \text{ als auch } h>0 \text{ (!))}\end{aligned}$$

◇

10.3 Die Ableitungsfunktion

§10-5 Definition. (Di erenzierbarkeit einer Funktion; Ableitungsfunktion einer di erenzierbaren Funktion)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem o enen Intervall D (also $D := (x_1, x_2)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$).

(1) Ist f für alle $a \in D$ des Definitionsbereiches di erenzierbar, so nennen wir f eine di erenzierbare Funktion.

(2) Die Funktion f', welche jedem $x \in D$ die Ableitung von f an der Stelle x zuordnet, d.h.,

$$f' : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) \underset{\substack{\text{Def.}\\10-3}}{:=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nennen wir die Ableitungsfunktion von f (nach x) (oft auch nur die Ableitung von f).

(3) In der sogenannten Leibniz-Notation (s.a. §10-3) wird dann die Ableitungsfunktion entsprechend

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

geschrieben. [E.39]

◇

§10-6 Beispiel.

Wir betrachten wieder die Funktion $f(x) := 2x^2 + 1$ und wollen ihre Di erenzierbarkeit und Ableitungsfunktion bestimmen. D.h., wir betrachten nun nicht mehr ein spezielles $a \in D$, sondern lassen $x \in D$ variabel. D.h., wir betrachten $\forall x \in D$ den Di erentialquotienten. Wir erhalten (mit der anderen Schreibweise für Grenzwertbildung und Konvergenz, so dass wir nicht immer das $\lim$-Symbol schreiben müssen):

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2(x+h)^2+1-2x^2-1}{h} \\
&= \frac{2(x^2+2xh+h^2)+1-2x^2-1}{h} \\
&= \frac{2x^2+4xh+2h^2-2x^2}{h} \\
&= \frac{4xh+2h^2}{h} \\
&= \frac{h(4x+2h)}{h} \\
&= 4x+2h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 4x \qquad \text{(sowohl für } h<0 \text{ als auch } h>0 \text{ (!)).}
\end{aligned}$$

Damit lautet also die Ableitung (Ableitungsfunktion) von f

$$f'(x) = 4x.$$

Wir können diese Funktion z.B. als Tangentensteigungsfunktion von f au assen, d.h., die Funktion, welche jedem $x \in D$ die Tangentensteigung (oder im alternativen Bild, die momentane Änderungsrate / Momentangeschwindigkeit) zuordnet.

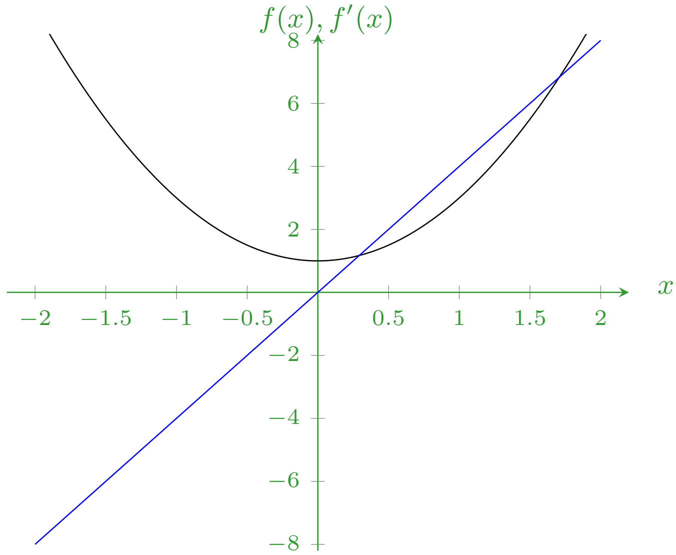


Abbildung 10.3 – Die Funktion $f(x) := 2x^2 + 1$ (schwarz) und ihre Ableitung (Ableitungsfunktion) $f'(x) = 4x$ (blau).

◇

§10-7 Satz. (Di erenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)

Ist f eine in $a \in D$ di erenzierbare Funktion, so ist sie in a auch stetig. Ist f di erenzierbar (auf ganz D), dann ist sie stetig (d.h. auf ganz D). ◇

Dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt, haben wir bereits am Gegenbeispiel auf S. 119 gesehen.

10.4 Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung selber wieder eine di erenzierbare Funktion, so lässt sich auch diese Ableitung selber wiederum "ableiten" ("di erenzieren", d.h., deren Ableitung berechnen). Und dies lässt sich beliebig lange wiederholen, bis die Funktion nicht mehr ableitbar ist. (Es gibt übrigens Funktionen, bei denen dies "nie endet", die also "beliebig oft ableitbar" sind. Dazu bald mehr!)

Damit können wir definieren:

§10-8 Definition. (Höhere Ableitungen einer di erenzierbaren Funktion)

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem o enen Intervall D.

(1) Ist f di erenzierbar mit Ableitung f' (welche wir dann auch erste Ableitung von f nennen) und ist die Ableitung f' selbst wieder di erenzierbar,

so nennen wir die Ableitung von f', also die Funktion

$$\begin{aligned} f'' : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f''(x) &:= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \end{aligned}$$

die 2. Ableitung von f.

(2) Sei f $(k-1)$-mal ableitbar für ein $k \in \mathbb{N}, k > 2$, mit $(k-1)$-ter Ableitung $f^{(k-1)}$.

Ist dann auch $f^{(k-1)}$ ableitbar (di erenzierbar), so sagen wir f sei k-mal ableitbar (di erenzierbar) und die k-te Ableitung von f ist natürlich definiert durch

$$\begin{aligned} f^{(k)} : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(k)}(x) &:= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x+h)-f^{(k-1)}(x)}{h}. \end{aligned}$$

(3) Das k einer höheren Ableitung $f^{(k)}$ wird auch die Ordnung der Ableitung von f genannt.

(4) In Leibniz-Notation schreibt man die höheren Ableitungen entsprechend als

$$\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}, \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x), \ldots$$

Man beachte hier, dass x^k nicht die k-te Potenz von x bezeichnet!

◇

Es ist üblich, bis und mit der dritten Ableitung[E.40] , diese mit Strichen zu schreiben, also f', f'', f'''. Für höhere Ableitungen $k > 3$ schreibt man dann die Ordnung einfach hochgestellt in runden Klammern, wie in der Definition vereinbart.

§10-9 Beispiel.

Was ist demnach die *zweite* Ableitung der Funktion $f(x) := 2x^2 + 1$?

Wir haben bereits die erste Ableitung als $f'(x) = 4x$ ermittelt. Für die zweite Ableitung, leiten wir jetzt einfach diese wiederum ab:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} &= \frac{4(x+h)-4x}{h} \\ &= \frac{4x+4h-4x}{h} \\ &= \frac{4h}{h} \\ &= 4. \end{aligned}$$

D.h., die zweite Ableitung von f ist die konstante Funktion mit 4, d.h..:

$$f''(x) = 4.$$

◇

Da es bei der Bestimmung der Di erenzierbarkeit und der Ableitung um Grenzwertberechnungen geht, muss dies natürlich im konkreten, realen Fall nicht so einfach gehen, wie in den ersten – sehr einfachen – Beispielen. Deshalb ist es wichtig, Sätze und Techniken zur Verfügung zu haben, welche uns bei solchen Untersuchungen unterstützen. Dies wird dann Thema des wichtigen nächsten Kapitels 11 sein.

10.5 Stetige Differenzierbarkeit

Die Ableitung einer an einer Stelle a differenzierbaren Funktion, kann dort stetig sein oder auch nicht. Diese zusätzliche, strengere Eigenschaft, dass die Ableitung auch stetig ist, ist oft sehr wichtig in Anwendungen (siehe z.B. Newton-Raphson Verfahren). Wir geben deshalb solchen Funktionen bzw. solchen Differenzierbarkeitsstellen einen entsprechenden eigenen Namen:

§10-10 Definition. (*Stetige Differenzierbarkeit, stetige Ableitung*)

Ist eine Funktion an einer Stelle a differenzierbar und ihre Ableitung dort zudem stetig, so sprechen wir insbesondere von einer in a *stetig differenzierbaren* (*stetig ableitbaren*) Funktion bzw. von in a *stetiger Differenzierbarkeit*.

Gilt dies für jede Stelle des Definitionsbereichs der Funktion, so nennen wir die ganze Funktion *stetig differenzierbare Funktion* mit *stetiger Ableitungsfunktion*. ◇

Kapitel 11

Ableitungsregeln

LERNZIELE:

LZ 11.1 Sie kennen die Di erenzierbarkeitsbereiche und die Ableitungen der fundamentalen Funktionen.

LZ 11.2 Sie können die Di erenzierbarkeit einer vorgegebenen Funktion abklären und gegebenenfalls die Ableitung mit den vorgestellten Mitteln bestimmen.

Es ist eine sehr häufig auftretende Routineaufgabe in irgendwelchen Anwendungsfragen, die Di erenzierbarkeit einer vorgegebenen Funktion zu bestimmen und gegebenenfalls die Ableitung zu berechnen. Im Prinzip kann dabei immer der definierende Grenzwert (siehe Def. §10-3 und Def. §10-5) verwendet werden. Mit einem kleinen Fundus an Ableitungen fundamentaler Funktionen und ein paar Ableitungsregeln lässt sich dies aber in vielen Fällen viel einfacher erledigen.

Beachten Sie im Folgenden, dass wir die konstante Funktion für eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit einem "Dach" auf dem c schreiben. D.h., für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\hat{c}$ die Funktion

$$\begin{aligned} \hat{c} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \hat{c}(x) := c \end{aligned}$$

(Jedem x wird einfach diese konstante Zahl c zugeordnet.) Im Weiteren schreiben wir ganz allgemein die Einschränkung einer Funktion $f : A \to B$ auf einen kleineren Teilbereich $C \subset A$ ihres Definitionsbereichs als

$$f\big|_C.$$

Mit anderen Worten für eine Funktion $f : A \to B$ und $C \subset A$ ist $f\big|_C$ ganz einfach die Funktion, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} f\big|_C : C &\to B \\ x &\mapsto f\big|_C(x) := f(x) \end{aligned}$$

Der folgende Satz liefert uns schon mal wichtige Di erenzierbarkeitsaussagen für ein paar sehr grundlegende Funktionen:

§11-1 Satz. (Di erenzierbarkeitsbereiche und Ableitungen fundamentaler Funktionen)

(1) Die konstante Funktion $\hat{c}$, für irgendein $c \in \mathbb{R}$, ist auf ganz $\mathbb{R}$ ableitbar und ihre Ableitungsfunktion ist die Nullfunktion:

$$\begin{aligned} \hat{c}' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \hat{c}'(x) = 0. \end{aligned}$$

oder kurz

$$\hat{c}' = \hat{0}.$$

(2) Die Identitätsfunktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{id}(x) := x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ di erenzierbar mit der konstanten Einsfunktion als Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} \mathrm{id}' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{id}'(x) = 1 \end{aligned}$$

d.h.,

$$\mathrm{id}' = \hat{1}.$$

(3) Die Kehrwertfunktion $\frac{1}{\mathrm{id}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\mathrm{id}}(x) := \frac{1}{x}$ ist auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (also ihrem Definitionsbereich) di erenzierbar mit der Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)' : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)'(x) = \frac{-1}{\mathrm{id}^2}(x) = -\frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

also kurz

$$\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)' = \frac{-1}{\mathrm{id}^2} = \left(-\mathrm{id}^{-2}\right).$$

Beachten Sie, dass wir hier auch $\frac{-1}{\mathrm{id}^2}(x) = \left(-\mathrm{id}^{-2}\right)(x)$ bzw. $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ schreiben können.

(4) Die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten $\mathrm{id}^q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^q(x) := x^q$, für $q \in \mathbb{Q}$, ist auf ganz $\mathbb{R}$ di erenzierbar und die Ableitungsfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}^q)' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\mathrm{id}^q)'(x) = qx^{q-1}, \end{aligned}$$

also kurz

$$(\mathrm{id}^q)' = q\mathrm{id}^{q-1}.$$

(5) Die Betragsfunktion $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [E.41] di erenzierbar mit Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} |.|' &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|' = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Mit oben eingeführter Definition der Einschränkung einer Funktion auf einen Teilbereich ihres Definitionsbereichs, können wir also auch schreiben:

$$|.|' = \mathrm{sgn}\big|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}},$$

weil die Ableitung der Betragsfunktion o ensichtlich gerade die Einschränkung der Signumsfunktion auf die reellen Zahlen ohne die 0 ist.

◇

Beachten Sie, dass im obigen Satz die Aussage (3) ein Spezialfall von (4) ist (für $q = -1$).

§11-2 Beispiel. (Ableitung einer Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten)

Für die Ableitung z.B. der Potenzfunktion mit $h(x) := x^5$ erhalten wir also mit der Potenzregel

$$h'(x) = (x^5)' = 5x^4.$$

◇

§11-3 Beispiel. (Ableitung einer Potenzfunktion mit negativem Ganzzahlexponenten)

Mit der Potenzregel für negative Potenzen können wir also auch Brüche mit Potenzen im Nenner ableiten. Zum Beispiel ist die Ableitung der Funktion $h(x) := \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ gegeben durch

$$h'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

(Erinnern Sie sich daran, dass wir Brüche $\frac{a}{b}$ ganz generell immer auch als ab^{-1} schreiben können.)

◇

§11-4 Beispiel. (Ableitung einer Potenzfunktion mit rationalem Exponenten)

Schliesslich kann die Potenzregel für gebrochene Exponenten $q \in \mathbb{Q}$ auch dazu benutzt werden, um Funktionen mit Wurzelausdrücken abzuleiten. Erinnern Sie sich hier bitte daran, dass zum Beispiel $h(x) := \sqrt[5]{x}$ auch als $x^{\frac{1}{5}}$ geschrieben werden kann. Damit ist

$$h'(x) = (\sqrt[5]{x})' = (x^{\frac{1}{5}})' \underset{\substack{\text{Potenz-}\\ \text{regel}}}{=} \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

◇

§11-5 Beispiel. (Kombination für Potenzfunktionen)

Natürlich lässt sich dies kombinieren und etwa auch für Wurzelausdrücke *im Nenner* eines Bruches verwenden. Zum Beispiel erhalten wir so wiederum mit der Potenzregel für rationale Exponenten dann für die Ableitung der Funktion $h(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ die Funktion

$$h'(x) = (\frac{1}{\sqrt[3]{x}})' = (\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}})' = (x^{-\frac{1}{3}})' \underset{\substack{\text{Potenz-}\\ \text{regel}}}{=} -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

◇

Als zweites wichtiges Werkzeug neben den Ableitungen der genannten Grundfunktionen gelten weiter auch folgende essentielle Ableitungsregeln:

§11-6 Satz. (Ableitungsregeln)

Seien $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei auf dem o enen Intervall D di erenzierbare Funktionen. Und sei im Folgenden $c \in \mathbb{R}$, also eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:

(1) **Summenregel (Di erenzregel)**: Die Summe $f + g$ und die Di erenz $f - g$ ist di erenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} (f \pm g)' : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x). \end{aligned}$$

"Eine Summe (Differenz) zweier differenzierbarer Funktionen kann summandenweise differenziert werden."

(2) **Faktorregel**: Die Multiplikation $c \cdot f$ von f mit einer konstanten reellen Zahl c ist di erenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} (c \cdot f)' : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x). \end{aligned}$$

"Ein konstanter Faktor kann bei einer differenzierbaren Funktion vor die Ableitung gezogen werden."

(3) **Produktregel**: Das Produkt $f \cdot g$ ist di erenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

(4) **Potenzregel** [E.42] : Für die Ableitung einer (reellen) Potenz der Variablen gilt:

$$f(x) = x^r, r \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = rx^{r-1}.$$

(Insbesondere ist also die Ableitung von x gerade 1: $x' = 1$.)

(5) **Quotientenregel**: Falls $g(x) \neq 0, \forall x \in D$, ist der Quotient $\frac{f}{g}$ di erenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

(6) **Kettenregel**: Sei nun $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf E di erenzierbar und $g(E) \subset D$ (d.h., das Bild von g ist im Definitionsbereich von f).
Dann ist $f \circ g$ di erenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)' &: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

"Die Ableitung zweier verknüpfter (verketteter) differenzierbarer Funktionen berechnet sich durch 'äussere Ableitung (d.h., nach $y := g(x)$) mal innere Ableitung'."

◇

Vielleicht ist es an dieser Stelle gut, wenn ich noch hervorhebe, dass diese Sätze nur gelten, wenn auch die Voraussetzung im Satz erfüllt ist, also wenn f und g selber di erenzierbar sind. Beachten Sie ferner in der Kettenregel unbedingt auch, wie diese "äussere Ableitung" $f'(g(x))$ gemeint ist! Der Strich hier bedeutet nämlich nicht, dass nach der Variablen x abgeleitet wird, sondern dass das Argument $g(x)$ der Funktion f als Variable $y := g(x)$ angesehen wird und wir also f nach dieser Variablen y (und eben nicht nach x) ableiten müssen! Machen Sie sich dies bitte unbedingt klar, auch mit Hilfe der Beispiele und Aufgaben zur Kettenregel.

Da diese Ableitungsregeln ein äusserst wichtiges Handwerkszeug sind, wollen wir sie ausgiebig an Beispielen diskutieren und danach natürlich auch einige Aufgaben dazu lösen.

§11-7 Beispiel. (Anwendung der Summenregel)

Die Summenregel besagt nichts anderes als, dass wenn wir zum Beispiel eine Funktion $h(x) := 3x^2 + |x|$ haben, wir deren Ableitung in einfacher Weise als

$$h'(x) = (\underbrace{3x^2}_{=:f(x)} + \underbrace{|x|}_{=:g(x)})'$$

$$= (\underbrace{3x^2}_{=:f(x)})' + (\underbrace{|x|}_{=:g(x)})'$$
$$= 6x + \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \text{undef.}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 6x - 1, & x < 0 \\ \text{undef.}, & x = 0 \\ 6x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

erhalten können. Und dass diese Ableitung dann eine Funktion ist, welche auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert ist. Die 0 müssen wir dabei aus dem *Differenzierbarkeitsbereich von h* und damit aus dem Definitionsbereich für die Ableitung h' rausnehmen, da $|x|$ dort ja nicht di erenzierbar ist und damit auch die Summe von $3x^2$ mit $|x|$ nicht. ◇

Bemerkung. Lassen Sie sich im obigen Beispiel nicht von der wegen der Fallunterscheidung etwas "kompliziert" erscheinenden Schreibweise für die erhaltene Ableitungsfunktion erschrecken. Diese Schreibweisen mit Fallunterscheidung sind äusserst praktisch und ein sehr wichtiges Hilfsmittel, welches wir immer wieder verwenden werden. Es besagt wirklich nichts anderes, als dass wir die Funktion nicht durch denselben Term auf ganz $\mathbb{R}$ (oder eines anderen betrachteten Bereichs) ausdrücken können, sondern eben mehrere Fälle unterscheiden müssen.

Eine interessante zusätzliche Beobachtung in diesem Beispiel: Wenn wir den links- und rechtsseitigen Grenzwert der Ableitung h in $x = 0$ betrachten, dann sehen wir, dass dieser im linksseitigen Fall -1 und im rechtsseitigen Fall 1 ist. Also ist die erhaltene Ableitungsfunktion h an dieser Stelle auch nicht "stetig fortsetzbar", weil diese Definitionslücke nicht behoben werden und als Unstetigkeitsstelle zum Verschwinden gebracht werden kann.

§11-8 Beispiel. (Anwendung der Di erenzregel)

Die Di erenzregel ist natürlich analog der Summenregel und hat einfach die Subtraktion anstelle der Addition. Zum Beispiel erhalten wir für $h(x) := 8x^5 - 7x$

$$h'(x) = (8x^5 - 7x)' = (8x^5)' - (7x)' = 40x^4 - 7.$$

◇

§11-9 Beispiel. (Anwendung der Faktorregel)

Die Faktorregel ist ebenfalls sehr leicht anzuwenden. Sei etwa $h(x) := \frac{3}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist ihre Ableitung gegeben durch

$$h'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = 3\left(\frac{1}{x}\right)' = 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}.$$

Der Di erenzierbarkeitsbereich von h und der Definitionsbereich von h' ist damit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. ◇

§11-10 Beispiel. (Anwendung der Produktregel)

Sei $h(x) := 4x^3 \cdot 7x^4$. Wir wollen zur Demonstration die Produktregel auf h anwenden, auch wenn wir hier natürlich stattdessen zusammenfassen und dann direkt mit der Potenz- und Faktorregel ableiten würden:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\underbrace{4x^3}_{=:f(x)} \cdot \underbrace{7x^4}_{=:g(x)})' \\ &= 12x^2 \cdot 7x^4 + 4x^3 \cdot 28x^3 && \text{(Produktregel)} \\ &= 84x^6 + 112x^6 \\ &= 196x^6. \end{aligned}$$

Wir können dies kurz kontrollieren mit dem – für dieses einfache Beispiel – schnelleren Weg: $(4x^3 \cdot 7x^4)' = (28x^7)' = 28 \cdot 7x^6 = 196x^6$. ◇

Die Anwendung der Potenzregel haben wir schon bei den Ableitungen der fundamentalen Funktionen im Anschluss an Satz §11-1 näher an Beispielen kennengelernt. Wir wollen deshalb hier noch je ein Beispiel der letzten beiden, ebenfalls sehr wichtigen Regeln geben:

§11-11 Beispiel. (Anwendung der Quotientenregel)

Wir wollen die Funktion $h(x) := \frac{x^2}{|x|}$ mit der Quotientenregel ableiten:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{x^2}{|x|}\right)' \\ &= \frac{2x|x| - x^2 \operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)}{|x|^2} && \text{(Quotientenregel)} \\ &= \frac{2x^2 \operatorname{sgn}(x) - x^2 \operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 \operatorname{sgn}(x) - x^2 \operatorname{sgn}(x)}{x^2}\Big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \\ &= \operatorname{sgn}(x)|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}. \end{aligned}$$

Definitions- und Di erenzierbarkeitsbereich von h ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dies ist dann ebenso der Definitionsbereich der Ableitung h'. ◇

§11-12 Beispiel. (Anwendung der Kettenregel)

Sei $f(x) := x^3$ und $g(x) := x^2 + 2$. Wir bestimmen den Bereich, auf welchem die Ableitung $(f \circ g)'$ der Verknüpfung $f \circ g$, d.h., der Funktion

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 + 2)^3,$$

existiert und berechnen diese Ableitungsfunktion $(f \circ g)'$.

Aufgrund der Di erenzierbarkeit der Potenzfunktion und der konstanten Funktion gilt mit Hilfe der Summenregel, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ di erenzierbar ist, mit $g'(x) = 2x$. f ist auch Potenzfunktion, also auf ganz $\mathbb{R}$ di erenzierbar und mit der Potenzregel erhalten wir, dass $f'(x) = 3x^2$ gilt.

Damit ist mit der Kettenregel auch $f \circ g$ auf ganz $\mathbb{R}$ di erenzierbar und die Ableitungsfunktion ist gegeben durch

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' \underset{(*)}{=} 3(x^2+2)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+2)^2.$$

Beachten Sie: In $(*)$ müssen wir uns also $g(x)$ durch $y = g(x)$ ersetzt denken und damit $f(y) := y^3$ *nach y ableiten*, was $f'(y) = 3y^2$ ergibt. Dann ersetzen wir $y = g(x) = x^2 + 2$ wieder zurück ein. Dies liefert so einmal die "äussere Ableitung". Und schliesslich müssen wir gemäss Kettenregel noch die "innere Ableitung" $g'(x) = 2x$ dazu multiplizieren.

◇

Bemerkung. [Ableitung bei weiteren Parametern in einem Funktionsterm]

Beachten Sie unbedingt auch, dass wir weitere Parameter $a, b, c, \ldots$ in einem Funktionsterm haben können. Bei der Berechnung der Ableitung werden diese dann einfach wie konstante Zahlen behandelt. D.h., die Ableitung nach x einer Funktion der Form $h(x) = 3ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$ mit weiteren Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ lautet:

$$h'(x) = 9ax^2 + bx + c.$$

Konvention: Wenn die Übersicht wegen zusätzlicher Parameter in einem komplizierteren Ausdruck

$$h := \text{"Ausdruck in x, a,b,c, ..."}$$

verloren zu gehen droht, kann man im Ableitungssymbol auch die Variable nach welcher abgeleitet wird, explizit unter dem Ableitungssymbol $'$ oder $^{(n)}$ mitschreiben:

$$(h)'_x \text{ oder } (h)^{(4)}_x.$$

So wissen wir, dass nach x abgeleitet werden soll und wir können sofort erkennen, welches Symbol im Ausdruck als Ableitungsvariable aufgefasst werden soll und welche Symbole nur Variablen sind, welche konstanten Parametern entsprechen. Das ergibt uns – gerade auch für später! – die Flexibilität z.B. $(xy)'_y$ zu schreiben, um zu sagen, dass wir den Ausdruck xy nach y ableiten und x als konstanter Parameter zu behandeln haben. Wir halten das in einer kleinen Definition fest:

§11-13 Definition. (Explizite Symbolisierung der Ableitung nach einer bestimmten Variablen)

Seien $a, b, c, \ldots$ Variablen in einem Ausdruck h und x eine beliebige dieser Variablen. Mit

$$(h)'_x, \quad (h)''_x, \quad (h)'''_x, \quad \ldots, \quad (h)^{(n)}_x$$

für irgendein $n \in \mathbb{N}$, meinen wir nichts anderes als dass der Ausdruck h nach der Variablen x einmal, zweimal, dreimal, ..., n-mal, ... abgeleitet wird. Das heisst, wir betrachten h als Funktion in der Variablen x und alle anderen Variablen als feste Parameter. ◇

§11-14 Beispiel.

Damit spricht also nichts dagegen $(2ab^2c)'_b$ zu schreiben. Dies heisst nach obiger Konvention nichts anderes, als dass wir die Funktion $h(b) := 2ab^2c$ in der Variablen b betrachten und a, c konstante Parameter sind. Dann erhalten wir mit den obenstehenden Sätzen entsprechend die Ableitung von h nach b als

$$(2ab^2c)'_b = 4abc \qquad (= h'(b))\,.$$

◇

Der Satz über die Ableitung der fundamentalen Funktionen §11-1 und die Ableitungsregeln Satz §11-6 lassen sich natürlich insbesondere in beliebiger Länge und Kombination anwenden. Damit können wir schon eine ganz beträchtliche Anzahl von Funktionen ableiten. (Wir werden aber noch ein paar Ableitungen anderer wichtiger Funktionen kennenlernen.)

§11-15 Beispiel. (Gemischte Anwendung der Regeln)

Wir wollen als Beispiel noch eine etwas kompliziertere Funktion ableiten. Und damit wir uns nicht zu sehr darauf versteifen, dass die Variable nach welcher wir ableiten immer x heissen muss, betrachten wir $h(y) := \frac{y^3-3y^2+4\sqrt{y}}{y^2}$, $y > 0$. Dann ermitteln wir die Ableitung von h nach der Variablen y [E.43] folgendermassen:

$$h'(y) = \left(\frac{y^3 - 3y^2 + 4\sqrt{y}}{y^2}\right)'_y$$

$$= \frac{(y^3 - 3y^2 + 4\sqrt{y})'_y y^2 - (y^3 - 3y^2 + 4\sqrt{y}) \cdot 2y}{y^4}$$

(Quotientenregel auf den ganzen Ausdruck und
die Potenzregel gleich noch auf den entsprechenden Teilausdruck im Zähler angewandt.)

$$= \frac{(3y^2 - 6y + 4 \cdot \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}})y^2 - 2y^4 + 6y^3 - 8y\sqrt{y}}{y^4}$$

(Summen-/Differenzregel auf den Ableitungsausdruck im Zähler und
Potenzregel für die entsprechenden Summanden inkl. dem Wurzelausdruck angewandt;
rechter Term ausmultipliziert.)

$$= \frac{3y^4 - 6y^3 + 2y^{\frac{3}{2}} - 2y^4 + 6y^3 - 8y^{\frac{3}{2}}}{y^4}$$

(Erster Teil im Zähler ausmultipliziert.)

$$= \frac{y^4 - 6y^{\frac{3}{2}}}{y^4}$$

(zusammengefasst)

$$= 1 - 6y^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 1 - \frac{6}{\sqrt{y^5}}.$$ (letzte Umformung ist reine Geschmackssache)

Die Funktion und ihre Ableitung sehen folgendermassen aus:

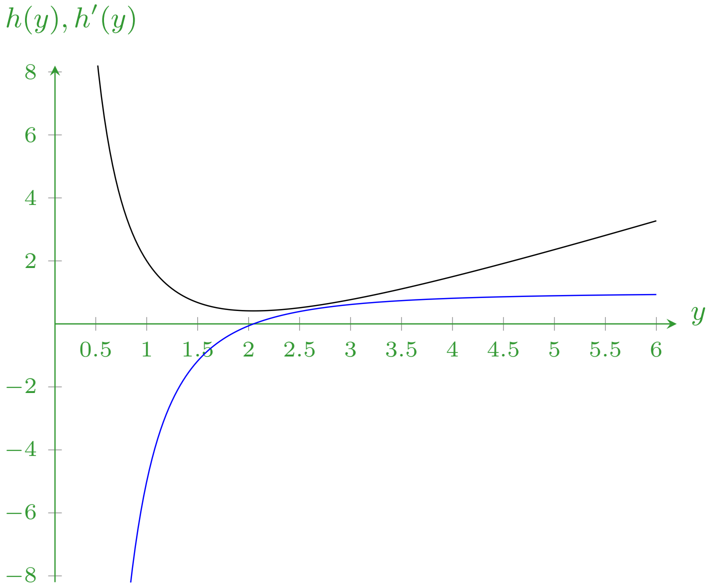


Abbildung 11.1 – Die Funktion $h(y) := \frac{y^3-3y^2+4\sqrt{y}}{y^2}$ (schwarz) und ihre Ableitung (Ableitungsfunktion) $h'(y) = 1 - \frac{6}{\sqrt{y^5}}$ (blau).

◇

Kapitel 12

Extremwertaufgaben und Kurvendiskussion

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 12.1 Sie können einfache Extremwertaufgaben für reelle Funktionen lösen.

LZ 12.2 Sie kennen ein paar konkrete Anwendungen von Extremwertproblemen.

LZ 12.3 Sie können Python benutzen, um diese Aufgaben zu erledigen.

LZ 12.4 Sie können eine Kurvendiskussion im besprochenen Umfang durchführen.

Eine der wichtigsten Grundaufgaben in Anwendungen ist es, bei einer gegebenen Funktion sogenannte Extremalstellen und Extremalwerte zu finden. Diese Art von Anwendungen nennt man ganz generell auch “Optimierungsprobleme”. Sie gehören zu den wichtigsten und am weitest verbreiteten Anwendungen in Natur-, Ingenieurs-, Wirtschaft- und Sozialwissenschaften und in der Technik. Man kann sogar den recht akkuraten Standpunkt einnehmen, dass fast alles, was wir eigentlich tun um unser Leben zu gestalten, irgendwie die Lösung eines Optimierungsproblems darstellt oder zumindest beinhaltet. Die Di erentialrechnung liefert hierfür in sehr vielen Fällen die zentralen, notwendigen Methoden und wir wollen im vorliegenden Kapitel diese grundlegende Anwendung der Di erentialrechnung einführend kennenlernen. Aber nicht dass Sie jetzt glauben, ich wolle Ihnen weismachen, dass Sie zum bestreiten Ihres Alltags laufend die Kenntnisse der Di erentialrechnung benötigen würden ... :-) Jedoch ist diese Anwendung für Sie als Informatiker zum Beispiel ganz aktuell im Bereich von “Machine Learning”, auch wenn wir darauf nur ganz am Rande eingehen können. Für Weiterführendes müssen wir auf entsprechende Module verweisen.

Wir werden im Folgenden wieder gewisse Betrachtungen einfachheitshalber auf o enen Intervallen durchführen.

12.1 Extremalstellen einer Funktion

Ein wichtiges Charakteristikum einer Funktion und, wie eben gesagt, auch von besonderem Interesse in Anwendungen, sind die Stellen an welchen die Funktionswerte einer Funktion ”lokale” und/oder ”globale Extrema” (das heisst, ”Minima” oder ”Maxima”) annehmen. Genau definieren wir diese Begri e so:

§12-1 Definition. (Extremalstellen einer reellen Funktion)

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf einem o enen Intervall D definierte Funktion.

(1) Wir sagen, f habe in einem Punkt $a \in D$ ein lokales Minimum, wenn in einer (beliebig kleinen!) Umgebung U von a

$$f(x) > f(a), \quad \forall x \in U,$$

gilt. Den Wert $f(a)$ nennen wir in so einem Fall ein lokales Minimum.

(2) Wir sagen, f habe in einem Punkt $a \in D$ ein lokales Maximum, wenn in einer (beliebig kleinen!) Umgebung U von a

$$f(x) < f(a), \quad \forall x \in U,$$

gilt. Den Wert $f(a)$ nennen wir in so einem Fall ein lokales Maximum.

(3) Liegt ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum vor, so sprechen wir auch einfach von einem lokalen Extremum[E.44] und bezeichnen a eine lokale Extremalstelle.

(4) Gilt für ein $a \in D$, dass für alle $x \in D$

$$f(x) > f(a)$$

bzw.

$$f(x) < f(a)$$

ist, so sprechen wir von einem globalen Minimum bzw. einem globalen Maximum von f an dieser Stelle a.

◇

§12-2 Beispiel.

Lokale und globale Extrema (Minima und Maxima) einer Funktion auf dem Intervall $I := (-1.3, 1.2)$:

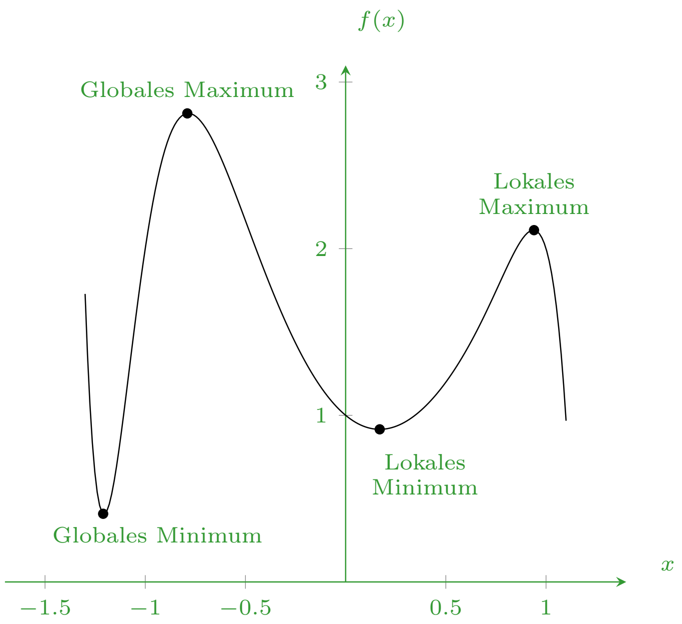


Abbildung 12.1 – Extremalstellen einer Funktion.

◇

§12-3 Satz. (Bedingungen für eine Extremalstellen)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in I \subseteq D$ ein innerer Punkt eines Intervalls I. f sei in a entsprechend oft di erenzierbar. Dann gilt:

(1) Notwendige Bedingung für lokales Extremum:

$$f \text{ hat ein lokales Extremum in } a \implies f'(a) = 0.$$

(2) Hinreichende Bedingung für lokales Maximum:

$$f'(a) = 0 \wedge f''(a) < 0 \implies f \text{ hat in } a \text{ ein lokales Maximum}$$

(3) Hinreichende Bedingung für lokales Minimum:

$$f'(a) = 0 \wedge f''(a) > 0 \implies f \text{ hat in } a \text{ ein lokales Minimum}$$

◇

§12-4 Beispiele.

1. Visualisierung der notwendigen Bedingung für lokales Extremum am Beispiel der Funktion $f(x) := -x^2$ mit ihrer Ableitung $f'(x) = -2x$:

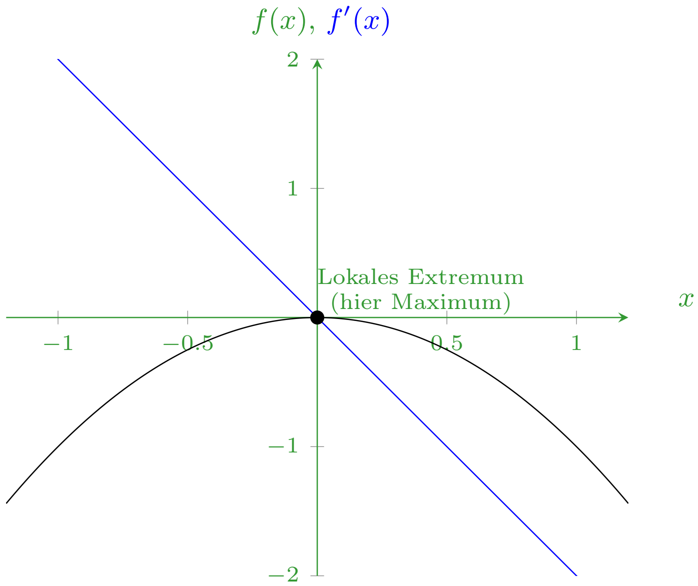


Abbildung 12.2 – Demonstration der notwendigen Bedingung für ein Extremum.

2. Visualisierung der hinreichenden Bedingung für lokales *Maximum* am Beispiel der Funktion $f(x) := -(x-1)^2 + 2$ mit ihren Ableitungen $f'(x) = -2x + 2$ und $f''(x) = -2$:

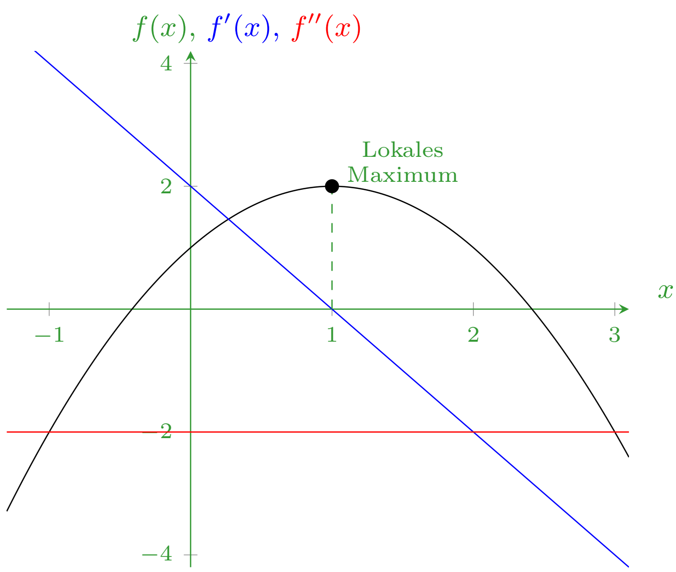


Abbildung 12.3 – Demonstration der hinreichenden Bedingung für ein lokales Maximum.

3. Visualisierung der hinreichenden Bedingung für lokales *Minimum* am Beispiel der Funktion $f(x) := (x-1)^2 + 3$ mit ihren Ableitungen $f'(x) = 2x - 2$ und $f''(x) = 2$:

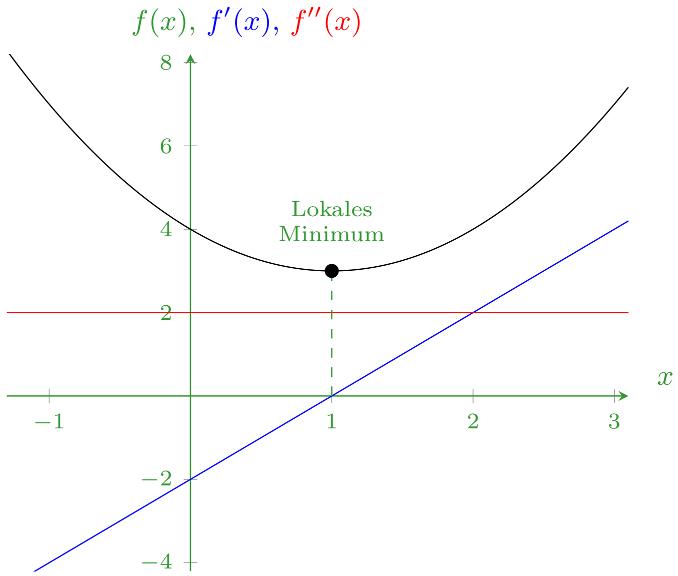


Abbildung 12.4 – Demonstration der hinreichenden Bedingung für ein lokales Minimum.

◇

§12-5 **Definition.** (Kritische Stellen einer di erenzierbaren Funktion)

Die Stellen $a \in D$ einer di erenzierbaren Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(a) = 0$$

nennen wir auch die kritischen Stellen von f und die Punkte $(a, f(a))$ die kritischen Punkte von f.

Es sind dies die Stellen bzw. Punkte einer Funktion, welche für die Untersuchung auf Extrema entscheidend sind. ◇

Die Monotonie von Funktionen haben wir schon eingeführt. Sie beschreibt ein ganz bestimmtes Steigungsverhalten von Funktionen und ist in dieser Hinsicht (zumindest lokales) ”Verhalten ohne Extrema”. Was können wir über Monotonie mittels den Ableitungen einer Funktion sagen?

Wir haben folgenden Satz:

§12-6 Satz. (Monotonie mittels Ableitungen bestimmen)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und auf $I \subseteq D$ di erenzierbar. Dann gilt:

(1) Ist $f'(x) > 0, \forall x \in I$, so ist f streng monoton steigend auf I.

(2) Ist $f'(x) < 0, \forall x \in I$, so ist f streng monoton fallend auf I.

(3) Ist $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ so ist f (schwach) monoton steigend auf I.

(4) Ist $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ so ist f (schwach) monoton fallend auf I.

(5) Gibt es $a, b \in I$, so dass $f'(a) < 0 \wedge f'(b) > 0$ ist, dann ist f auf I nicht monoton.

◇

Studieren Sie diese Aussagen auch anhand der Übersichtstabelle in Abschnitt 12.3.

12.2 Anwendung: Extremwertaufgaben (Optimierungsprobleme)

Eine wichtige Anwendung der Di erentialrechnung ist das Lösen von sogenannten Extremwertaufgaben. Hier geht es darum, dass man in einer Anwendung einen funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ kennt und man zum Beantworten einer Frage aus der Anwendung auf einem bestimmten Intervall I den kleinsten oder grössten Funktionswert finden möchte. Probleme dieses Typs gehören zur Klasse der sogenannten Optimierungsprobleme, wo es allgemein darum geht, irgendeinen "optimalen Wert" innerhalb einer (grossen) Menge möglicher Werte zu finden.

Das Verfahren kann folgendermassen schematisiert werden:

§12-7 Satz. (Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben)

Gegeben: Eine zweimal stetig di erenzierbare Funktion $y = f(x)$, welche in einer Anwendung einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Variablen x und y beschreibt.

Gesucht: Die Stelle x auf einem vorgegebenen Intervall I, an welchem $y = f(x)$ den kleinsten oder den grössten Wert aufweist.

(Gesucht sind also die Punkte (x_{min}, y_{min}) mit $y_{min} = f(x_{min})$ oder (x_{max}, y_{max}) mit $y_{max} = f(x_{max})$.)

Vorgehen:

1. Mit Hilfe der Di erentialrechnung bestimmen wir nun das Minimum oder Maximum im Innern des Intervalls I.
2. Den gefundenen Wert vergleichen wir noch mit den Werten der Randpunkte von I und nehmen als Lösung den kleineren bzw. grösseren der beiden Werte.

◇

Falls in der Beschreibung des Anwendungsproblems noch weitere Variablen vorkommen, kann man versuchen diese zusätzlichen Variablen, in diesem Zusammenhang oft Parameter genannt, in Funktion von x zu schreiben und somit zu eliminieren.

D.h., ist zum Beispiel der funktionale Zusammenhang ein Ausdruck $y = h(x,a)$ für eine weitere Variable a, dann kann man versuchen, a als Funktion $a = g(x)$ als in Funktion von x zu schreiben. Dann können wir nämlich in $y = h(x,a)$ den Parameter a durch $g(x)$ ersetzen und erhalten so einen funktionalen Zusammenhang $y = f(x) = h(x, g(x))$, also nur noch in der Variable x. Mit anderen Worten: wir haben den Parameter a eliminieren können.

Eine erstes einfacheres Anwendungsbeispiel aus der Geometrie:

Anwendung.

Auf einem quadratischen Rasenstück A mit Seitenlänge a soll ein rechteckiger Pool P gebaut werden. Um die Anordnung etwas ästethisch interessanter zu gestalten, sollen die Poolseiten parallel zu den *Diagonalen* des Rasenstücks gebaut werden, wobei alle vier Ecken des Pools den Rasenrand berühren sollen.

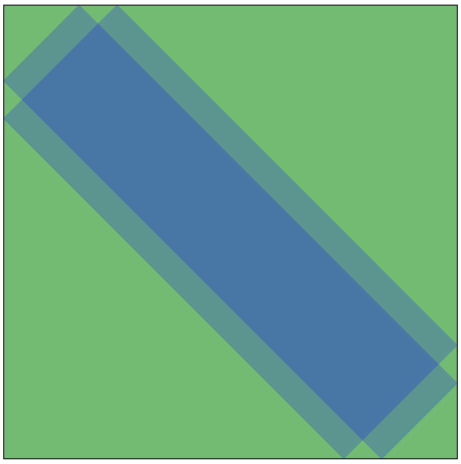


Abbildung 12.5 – Extremwertaufgabe: Poolbau auf einer quadratischen Rasenfläche mit zwei möglichen Anordnungen.

Wie muss der Pool gebaut werden, wenn er maximale Fläche haben soll?

Zuerst zeichnen wir die Situation genau auf:

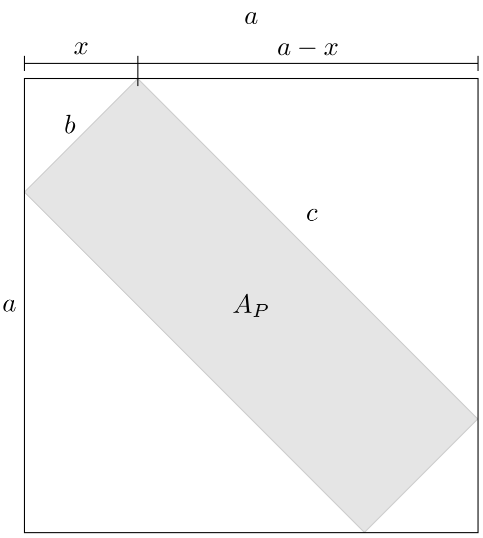


Abbildung 12.6 – Extremwertaufgabe: Poolbau auf einer quadratischen Rasenfläche, mathematisch beschrieben.

Die zu optimierende Fläche des Pools ist also

$$A_P = b \cdot c$$

Wir müssen hier etwas aufpassen: a ist nicht etwa ein zu eliminierender Parameter, sondern der vorgegebene, feste Parameter der Seitenlänge des Rasenstücks. Hingegen müssen wir b und c so schreiben, dass die Flächenformel A_P für die Poolfläche nur noch die Variable x enthält. Das heisst, wir suchen $b(x)$ und $c(x)$, so dass

$$A_P(x) = b(x) \cdot c(x)$$

ist und wir also die Parameter b und c eliminiert haben und nur noch die Variable x übrigbleibt. Dies scha en wir mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} b(x) &= \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x, \\ c(x) &= \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} = \sqrt{2(a-x)^2} = \sqrt{2}(a-x) \end{aligned}$$

Also ist unsere Funktion (in der Optimierung auch **Zielfunktion** genannt) gegeben zu

$$A_P(x) = b(x) \cdot c(x) = \sqrt{2}x\sqrt{2}(a-x) = 2x(a-x) = 2ax - 2x^2.$$

Hiervon suchen wir jetzt also die Stelle x auf $I := [0, a]$, mit maximalem Funtionswert. Wir leiten ab

$$\begin{aligned} A_P'(x) &= 2a - 4x, \\ A_P''(x) &= -4. \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle der ersten Ableitung ist

$$2a - 4x = 0 \Longleftrightarrow x_* = \frac{a}{2}$$

was unsere (einzige) kritische Stelle ist. Der Wert dort beträgt

$$A_P(x_*) = A_P(\frac{a}{2}) = 2a\frac{a}{2} - 2\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Wir testen noch die Ränder des Intervalls I: $A_P(0) = 0 < \frac{a^2}{2}$ und $A_P(a) = 0 < \frac{a^2}{2}$, also ist dort kein grösserer Funktionswert der Flächenfunktion zu finden. (Ist ja auch klar: Das wären wirklich degenerierte Pools!) Der Pool mit maximaler Fläche sollte also so gebaut werden, dass seine Ecken gerade an den Seitenhälften des Rasenstücks zu liegen kommen:

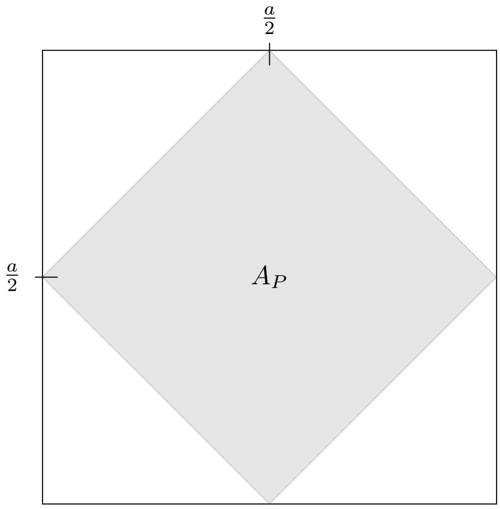


Abbildung 12.7 – Extremwertaufgabe: Poolbau auf einer quadratischen Rasenfläche; die optimale Anordnung.

Dann haben wir einen Pool mit der maximal möglichen Fläche von $A_P = \frac{a^2}{2}$.

Ein weiteres Anwendungsbeispiel:

Anwendung.

Ihr Wintersport-Hotel in den Walliser Alpen ist 5 Monate geö net. Sie wissen aus den langjährigen Daten, dass in diesen 5 Monaten der Gästeverlauf sich ungefähr wie

$$f(x) := x^3 - 8x^2 + 16x + 7$$

für $x \in [0, 5]$ verhält.

Frage (1) Wann ist mit dem Peak an Gästen zu rechnen?

Frage (2) Sie wollen Ihrem dauernd gestressten Chefkoch in diesen 5 Monaten drei Tage Wellnessurlaub schenken. Wann tun Sie das?

Beantworten Sie die Fragen zuerst rein rechnerisch mit Hilfe der Di erentialrechnung und verifizieren Sie Ihr Ergebnis danach am Plot der Funktion.

Um die Frage (1) zu beantworten, müssen wir alle *lokalen Maxima* der Funktion f auf dem Intervall $[0, 5]$ bestimmen. Dabei werden wir auch noch die Funktionswerte an den Rändern überprüfen müssen (d.h., für $x = 0$ und $x = 5$), denn es ist ja möglich, dass gleich zu Beginn oder am letzten Tag der grösste Andrang herrscht. (Und in diesem Fall müssten wir natürlich speziell vorbereitet sein: Es dürften ganz sicher keine Handwerker mehr im Haus sein, keine Angestellten dürften verspätet mit der Arbeit beginnen, bzw. kein Angestellter könnte schon einen Tag früher in die Saisonpause gehen, usw.) Zur Beantwortung der Frage (2) suchen wir dagegen ein globales Minimum. Wir möchten die Pause des Chefkochs natürlich in der ruhigsten Zeit einplanen. Sie sollte vorzugsweise zwischen der Hälfte und etwa dem letzten Viertel der Saison sein. Hier interessiert uns zudem nicht, ob an den Rändern (erster Tag oder letzter Tag) ein Minimum vorliegt. Zu dieser Zeit würde der Urlaub keinen Sinn machen.

Wir wenden also Satz §12-3 an und benötigen dazu die erste und zweite Ableitung von f:

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16, \qquad x \in [0,5],$$
$$f''(x) = 6x - 16, \qquad x \in [0,5].$$

Diese erhalten wir leicht mit den uns nun bekannten Sätzen. Als nächstes bestimmen wir die Nullstellen der ersten Ableitung, was uns die kritischen Stellen liefert:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff \quad & 3x^2 - 16x + 16 = 0 \\ \iff \quad & x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0 \\ \iff \quad & x_{1,2} = \frac{16}{3} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - \frac{64}{3}}}{2} = \frac{8}{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

d.h.,

$$x_{1,2} \in \{\frac{4}{3}, 4\}$$

sind unsere kritischen Punkte, welche zudem beide in unserem betrachteten Intervall $x \in [0,5]$ liegen. (Es wäre möglich, dass wir hier auch kritische Punkte ausserhalb des uns interessierenden Intervalls haben.) Mit den zweiten Ableitungen prüfen wir nun, welche lokalen Extrema an diesen beiden kritischen Stellen vorliegen:

$$f''(\frac{4}{3}) = 6 \cdot \frac{4}{3} - 16 = -8 < 0 \qquad \Longrightarrow \text{ lokales Maximum},$$
$$f''(4) = 24 - 16 = 8 > 0 \qquad \Longrightarrow \text{ lokales Minimum}.$$

Damit rechnen wir zur Beantwortung von Frage (1) noch die zwei Funktionswerte an den Rändern aus, $f(0) = 7$ und $f(5) = 12$, und vergleichen diese mit dem Funktionswert des lokalen Maximums in $x = \frac{4}{3}$, d.h., $f(\frac{4}{3}) = \frac{445}{27} \approx 16.5$. Das ermittelte lokale Maximum bei $x = \frac{4}{3}$ ist also das globale Maximum und wir wissen damit, dass der Peak an Gästen – mehr als 16 – nach $\frac{4}{3} \approx 1.\overline{3}$ Monaten, d.h., etwa 40 Tage nach Saisonbeginn zu erwarten ist.
Unser ermitteltes lokales Minimum bei $x = 4$ Monaten liegt zwar etwas später als gewünscht in der Saison, aber das passt. Zudem können wir auch noch $f(4) = 8$ berechnen, d.h., wir müssen in der Zeit, in welcher der Chefkoch dann weg wäre mit etwa 8 Gästen rechnen. Das sind zu viele als dass der zweite Koch dann krank sein dürfte. Sonst kriegen die Gäste wieder versalzene Suppe vom Küchengehilfe wie beim letzten Mal!

12.3 Krümmungsverhalten einer Funktion

Ein weiteres wichtiges Charakteristikum einer Funktion (bzw. des Graphen einer Funktion) sind Krümmungseigenschaften. Zwei wichtige solche Eigenschaften sind die sogenannte Konkavität und die Konvexität. Anschaulich gesprochen beschreiben sie die Rechts- bzw. Linkskrümmung des Funktionsgraphen:

§12-8 Definition. (Konkave und konvexe Funktionen)
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und auf $I \subseteq D$ zweimal di erenzierbar.

(1) Gilt
$$f''(x) < 0, \forall x \in I,$$
so nennen wir f konkav (rechtsgekrümmt) auf I.

(2) Gilt hingegen
$$f''(x) > 0, \forall x \in I,$$
so nennen wir f konvex (linksgekrümmt) auf I.

Der Funktionsgraph einer konkaven Funktion beschreibt eine Rechtskurve, derjenige einer konvexen Kurve eine Linkskurve. ◇

Beachten Sie, dass eine Funktion, welche auf einem Intervall I konkav ist, eine streng monoton fallende erste Ableitung f' auf I hat. D.h., ,
$$f''(x) < 0, \forall x \in I.$$
Hingegen hat sie in einem konvexen Bereich eine streng monoton steigende erste Ableitung f', also
$$f''(x) > 0, \forall x \in I.$$
Höhere Ableitungen sagen auch noch Weiteres über das Verhalten einer Funktion aus. Man kann z.B. auch den Übergang untersuchen, bei welchem der Funktionsgraph von einem konkaven Bereich in einen konvexen Bereich (oder umgekehrt) übergeht. Dies sind die sogenannten Wendestellen bzw. Wendepunkte. Es sind dies Stellen, mit lokalem Extremum der ersten Ableitung (d.h., die zweite Ableitung ist Null, $f''(a) = 0$):

§12-9 Definition. (Wendestellen und Wendepunkte einer di erenzierbaren Funktion)
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in I \subseteq D$ ein innerer Punkt eines Intervalls I. f sei in a mindestens zweimal di erenzierbar.

(1) Gilt für a entweder
$$(*) \qquad f''(x) < 0, \text{ für } x < a \text{ und } f''(x) > 0, \text{ für } x > a$$
oder
$$(**) \qquad f''(x) > 0, \text{ für } x < a \text{ und } f''(x) < 0, \text{ für } x > a$$
so nennen wir a eine Wendestelle und $(a, f(a))$ einen Wendepunkt von f in I.

(2) Im Fall von $(*)$ können wir genauer auch von einem konkav-konvexen Wendepunkt und im Fall von $(**)$ von einem konvex-konkaven Wendepunkt sprechen.

◇

Gilt zusätzlich an einer Wendestelle, dass auch $f'(a) = 0$ ist, dann sprechen wir übrigens anschaulich von einer horizontalen Wendestelle bzw. von einem horizontalen Wendepunkt bzw. von einem Sattelpunkt (Terrassenpunkt) (s.a. §12-12).

§12-10 Satz. (Bedingungen für Wendepunkte)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in I \subseteq D$ ein innerer Punkt eines Intervalls I. f sei in a mindestens zweimal bzw. dreimal di erenzierbar.

(1) **Notwendige Bedingung:**

$$a \text{ ist Wendestelle von } f \quad \Longrightarrow \quad a \text{ ist lokales Extremum der ersten Ableitung (d.h., } f''(a) = 0\text{)}$$

(2) **Hinreichende Bedingung für konkav-konvexen Wendepunkt:**

$$f''(a) = 0 \ \wedge \ f'''(a) > 0$$
$$\Longrightarrow \quad a \text{ ist konkav-konvexe Wendestelle von } f.$$

(3) **Hinreichende Bedingung für konvex-konkaven Wendepunkt:**

$$f''(a) = 0 \ \wedge \ f'''(a) < 0$$
$$\Longrightarrow \quad a \text{ ist konvex-konkave Wendestelle von } f.$$

◇

§12-11 Beispiele.

1. Visualisierung der notwendigen Bedingung für eine Wendestelle am Beispiel der Funktion $f(x) := -x^3 + 6x^2 - 5x + 6$ mit ihren Ableitungen $f'(x) = -3x^2 + 12x - 5$ und $f''(x) = -6x + 12$:

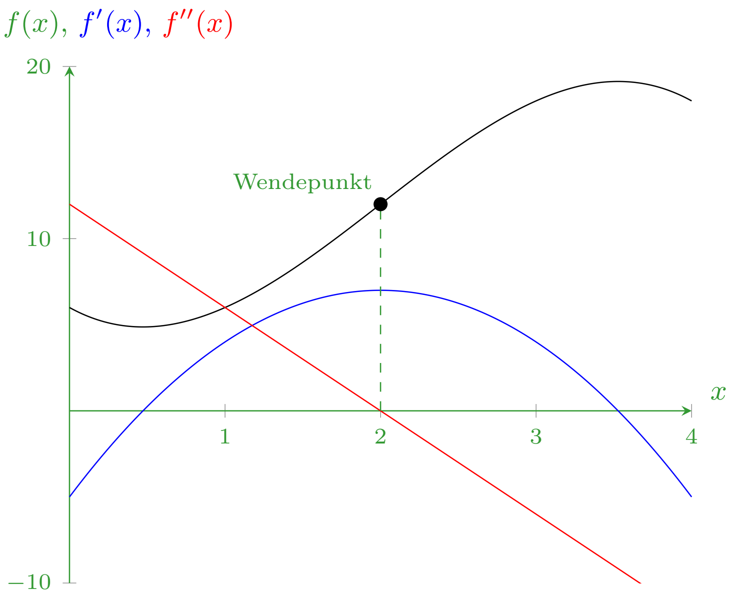


Abbildung 12.8 – Demonstration der notwendigen Bedingung für eine Wendestelle.

2. Visualisierung der hinreichenden Bedingung für $f(x) := x^3 - 6x^2 + 5x - 6$ mit ihrer Ableitungen $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ und $f''(x) = 6x - 12$ und $f'''(x) = 6$:

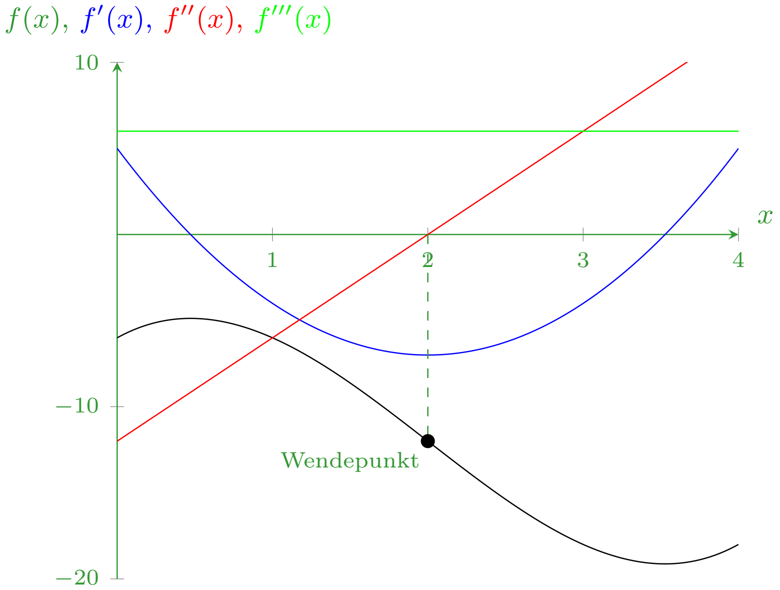


Abbildung 12.9 – Demonstration der hinreichenden Bedingung für eine konkav-konvexe Wendestelle.

3. Visualisierung der hinreichenden Bedingung für *konvex-konkave* Wendestelle am Beispiel der Funktion $f(x) := -x^3 + 6x^2 - 5x + 6$ mit ihren Ableitungen $f'(x) = -3x^2 + 12x - 5$, $f''(x) = -6x + 12$ und $f'''(x) = -6$:

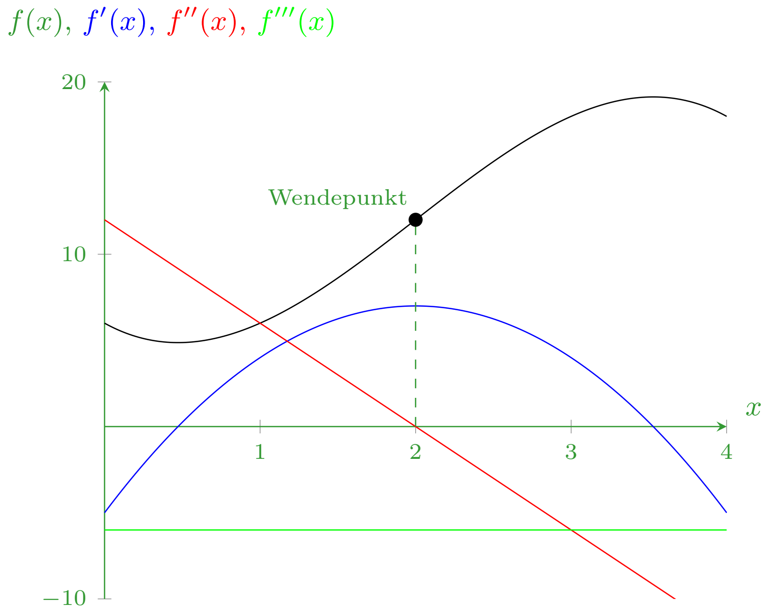


Abbildung 12.10 – Demonstration der hinreichenden Bedingung für eine konvex-konkave Wendestelle.

◇

Was passiert eigentlich, wenn in den Bedingungen für Extrema in Satz §12-3 (2) oder (3) auch die zweite Ableitung Null ist? Es zeigt sich, dass wenn die dritte Ableitung nicht Null ist, dies zu einem weiteren speziellen Punkt auf dem Funktionsgraphen führt:

§12-12 Definition. (Sattelpunkt einer dreimal di erenzierbaren Funktion)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in I \subseteq D$ ein innerer Punkt eines Intervalls I. f sei in a dreimal di erenzierbar.

Gilt in a, dass

$$f'(a) = f''(a) = 0$$

und

$$f'''(a) \neq 0$$

gilt, so nennen wir a eine **Sattelstelle** (**Terrassenstelle**) von f und insbesondere $(a, f(a))$ einen **Sattelpunkt** (**Terrassenpunkt**) von f. ◇

Insbesondere müssen wir uns merken, dass also $f'(a) = 0$ tatsächlich noch nicht bedeutet, dass ein Extremum vorliegt, da es sich also auch um einen Sattelpunkt handeln kann!

§12-13 Beispiel.

Wir visualisieren den Fall, an welchem $f'(a) = 0$ nicht ein Extremum, sondern einen Sattelpunkt liefert. Das ist nämlich schon beim sehr einfachen Beispiel von $f(x) := x^3 + 2$ so: die ersten drei Ableitungen sind $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$, so dass in $a := 0$ die Bedingungen der Def. §12-12 erfüllt sind:

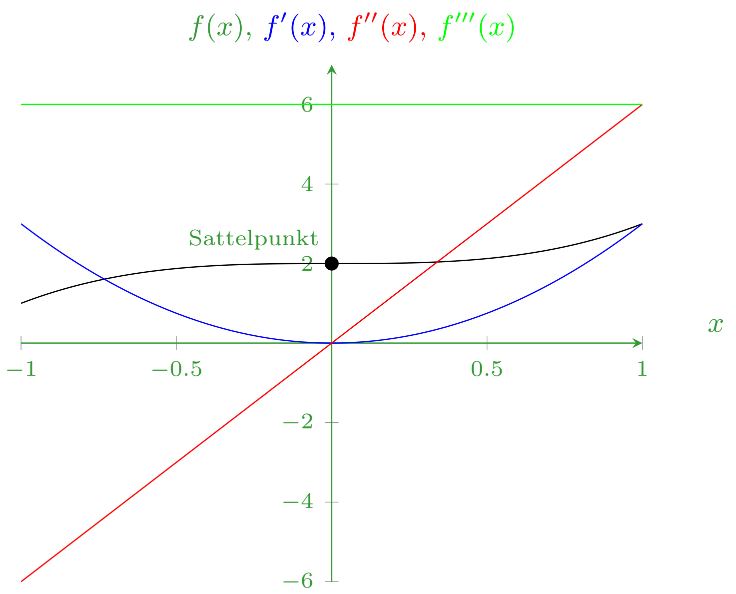
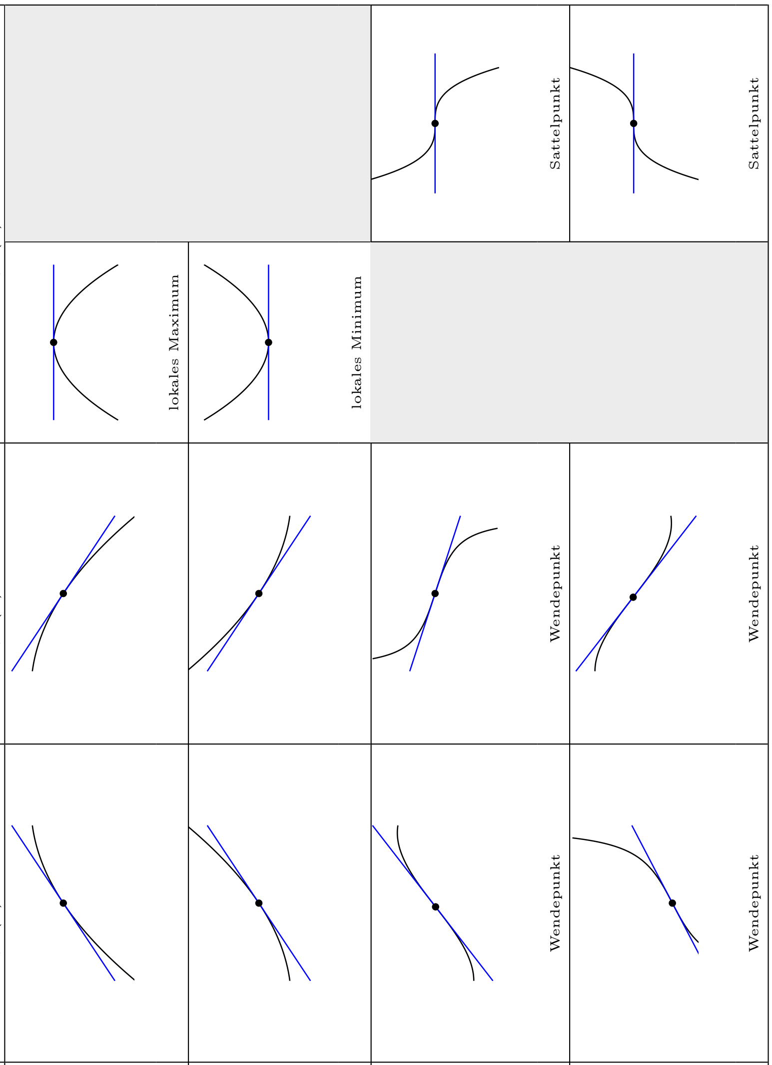


Abbildung 12.11 – Beispiel eines Sattelpunktes.

◇

Abschliessend noch eine kleine Zusammenfassung bzw. Übersicht:



Krümmungseigenschaften auf Intervall I mit $a \in I$	Steigungseigenschaften auf Intervall I mit $a \in I$			
	streng monoton steigend	streng monoton fallend	nicht monoton	schwach monoton
	$f'(a) > 0$	$f'(a) < 0$	$f'(a) = 0$	
konkav $f''(a) < 0$			lokales Maximum	
konvex $f''(a) > 0$			lokales Minimum	
konvex-konkav $f''(a) = 0$ $f'''(a) < 0$	Wendepunkt	Wendepunkt		Sattelpunkt
konkav-konvex $f''(a) = 0$ $f'''(a) > 0$	Wendepunkt	Wendepunkt		Sattelpunkt

Tabelle 12.1 – Übersicht Steigungs- und Krümmungsverhalten, Extrema in Abhängigkeit der 1. Ableitung einer (genügend oft differenzierbaren) Funktion.

12.4 Anwendung: Kurvendiskussion

Mit unseren Kenntnissen ist es nun möglich, für eine vorgegebene Funktion wesentliche Aspekte des Kurvenverlaufs zu bestimmen. Dies nennt man Kurvendiskussion für eine vorgegeben Funktion $y = f(x)$. Das Vorgehen dazu (im Umfang unserer Kenntnisse) kann folgendermassen schematisch zusammengefasst werden:

§12-14 Satz. (Schema Kurvendiskussion)

Für die Kurvendiskussion für eine Funktion f gehen wir schrittweise folgendermassen vor:

1. Maximaler Definitionsbereich D_f von f bestimmen. (D.h., Definitionslücken identifizieren.)
2. Extremalpunkte bestimmen (inklusive Typ lokal/global, Minimum/Maximum).
3. Sattelpunkte bestimmen.
4. Wendepunkte und Typ (konvex-konkav/konkav-konvex) bestimmen.
5. Polstellen und Verhalten im Unendlichen (also Grenzwerte für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$) bestimmen.
6. (Ev.) Kurvenverlauf skizzieren.

(Anm.: Es sind auch noch weitere Merkmale wie z.B. Symmetrie-Eigenschaften mögich, die man ebenfalls noch bestimmen kann.) $\diamond$

Kapitel 13

Elementare Funktionen

Kapitelinhalt

Version: 1.3, Last compiled on 2022/07/08, 12:00:13

LERNZIELE:

LZ 13.1 Sie kennen die Definitionen, prinzipiellen Funktionsgraphen und wichtigsten Eigenschaften (vor allem die Ableitungseigenschaften) der besprochenen “elementaren Funktionen”.

13.1 Einführung

Es ist an der Zeit, ein paar wichtige Funktionen zu repetieren bzw. einzuführen, welche in der Analysis und anderswo wichtige Rollen spielen und die wir dann im Kontext der Di erential- und Integralrechnung untersuchen und benutzen wollen. Der erste Teil dieses Kapitels ist somit als Repetition und Vertiefung zu sehen.

Aber zuerst, was sind denn genau die "elementaren Funktionen"? In der Mathematik meint man i.A.[E.45] damit eine Klasse von Funktionen in der folgenden Art:

§13-1 Definition. (Elementare Funktionen in der Analysis; [?, p.250])

In der Analysis versteht man unter einer **elementaren Funktion** eine Funktion, welche folgende Form hat:

- Sie ist aufgebaut aus den Funktionen $\widehat{c}$ (konstante Funktion, $c \in \mathbb{R}$, also konstante Terme), der Identitätsfunktion id (also dem Term x), der Sinusfunktion $\sin(x)$ und der Exponentialfunktion $\exp(x)$.
- Die einzelnen Teile darin sind durch einen endlichen Ausdruck verknüpft mittels der Grundoperationen $+, -, \cdot, /$ und
- der Funktionsverknüpfung $\circ$ (Komposition) sowie der Kehrwertfunktion $\frac{1}{\mathrm{id}}$ (also dem Term $\frac{1}{x}$, wo definiert).

◇

§13-2 Beispiele.

1. $f_1(x) := 3 \cdot \sin(\frac{2\pi x}{15})$ ist elementar.
2. $f_2(x) := \frac{x^5}{3\exp(x)} \cdot \frac{\tan 4x}{\sqrt{\pi x + 4x^4}}$ ist elementar auf ihrem Definitionsbereich.
3. Jede Polynomfunktion $f_3(x) := p_n(x)$ für irgendeinen Grad $n \in \mathbb{N}$ ist elementar.
4. Die unbestimmten Integrale bzw. die Stammfunktionen (siehe Teil III)

$$f_4(x) := \int_a^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$$

und

$$f_5(x) := \int_a^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

(mit $a \in \mathbb{R}$) sind zum Beispiel *nicht* elementar.
5. Die sogenannt "Besselschen Funktionen", welche in der Ingenieursmathematik eine wichtige Rolle spielen, sind *nicht* elementar.

◇

13.2 Potenzfunktionen

§13-3 Definition. (Potenzfunktionen)
Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ein von der konkreten Funktion f abhängiger Definitionsbereich.

Eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : D_f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := ax^r \end{aligned}$$

mit $a, r \in \mathbb{R}$ heisst **Potenzfunktion**. ◇

§13-4 Beispiel.
Der folgende Plot zeigt Beispiele für Potenzfunktionen in Abhängigkeit verschiedener Potenzen r, wobei immer $a := 1$ gewählt ist. Beachten Sie insbesondere die verschiedenen Definitionsbereiche und die grosse Variabilität der Funktionsgraphen, welche noch nicht einmal komplett ist!

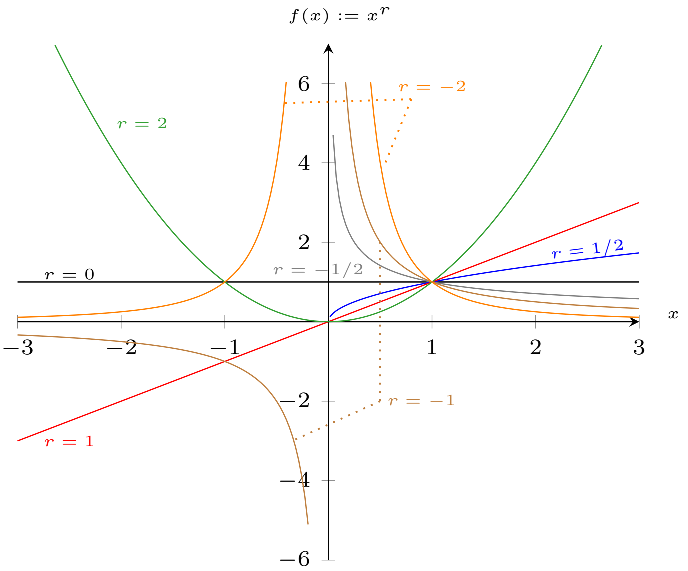


Abbildung 13.1 – Beispiele für Potenzfunktionen in Abhängigkeit verschiedener Potenzen $r \in \mathbb{R}$ und $a := 1$ konstant.

◇

§13-5 Satz. (Facts zu Potenzfunktionen)
Sei $a, r \in \mathbb{R}$ und $f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax^r$. Dann gilt:

(1) **Definitionsbereiche:**

	$r < 0$	$r > 0$
$r \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$
$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$

(2) **Wertebereiche:**

	$r < 0$		
	$r \in \mathbb{Z} \wedge r$ gerade	$r \in \mathbb{Z} \wedge r$ ungerade	$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$a < 0$	$\mathbb{R}_{<0}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}_{<0}$
$a > 0$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}_{>0}$

	$r > 0$		
	$r \in \mathbb{Z} \wedge r$ gerade	$r \in \mathbb{Z} \wedge r$ ungerade	$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$a < 0$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$
$a > 0$	$\mathbb{R}_{\leq 0}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{\leq 0}$

(3) Stetigkeit: Potenzfunktionen sind stetig auf ihren Definitionsbereichen.

(4) Di erenzierbarkeit und Ableitung: Sei D_f der Definitionsbereich der jeweiligen Potenzfunktion f und A_f der Di erenzierbarkeitsbereich, d.h., alle Stellen $x \in D_f$, wo f ableitbar ist.

	$r < 0$	$r = 0$	$0 < r < 1$	$r \geq 1$
A_f	D_f	$\mathbb{R}$	$D_f \setminus \{0\}$	D_f

Im Fall der Di erenzierbarkeit ist die erste Ableitung

$$(ax^r)' = rax^{r-1}.$$

◇

13.3 Polynomfunktionen

§13-6 Definition. (Polynomfunktion, Monom, Koe zient, Grad)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

mit $a_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}_n, a_n \neq 0$, heisst Polynomfunktion (in der Variablen x) vom Grad n. Sie wird auch reelle Polynomfunktion oder nur reelles Polynom genannt.

Die einzelnen Summanden in einer Polynomfunktion, d.h., die Terme der Form

$$a_k x^k$$

wobei $a_k \in \mathbb{R}$ und ein $k \in \mathbb{N}$ ist, nennen wir Monome und die a_k die Koe zienten bzw. a_n insbesondere den Leitkoe zienten des Polynoms. Den Grad des Polynoms f schreiben wir mit $\mathrm{grad}(f)$. ◇

Beachten Sie, dass die Polynomfunktion ausgeschrieben einfach eine Summe mit Vielfachen von einzelnen Potenzen in der Variable x ist

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Im Fall $n := 0$ ist die Polynomfunktion einfach eine konstante Funktion $f(x) = \widehat{a_0}$. Für $n := 1$ sprechen wir von einer linearen Funktion $f(x) = a_1 x + a_0$, für $n := 2$ von einer quadratischen Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und für $n := 3$ von einer kubischen Funktion ..., usw.. Polynomfunktionen mit $n > 1$ nennen wir auch nichtlineare Polynomfunktionen. Beachten Sie auch, dass Polynome manchmal explizit mit p_n für ein $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet werden, $p_7(x) := x^7 - 4x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 2x + 6$ um speziell herauszustreichen, dass es sich um ein Polynom 7.Grades handelt. Wir werden dies eher selten tun, da dies einen Text nicht sehr leserlich macht.

Wie sehen solche Polynomfunktionen grafisch aus? Ein paar Beispiele:

§13-7 Beispiele.

1. Polynomfunktionen vom Grad 0 und 1:

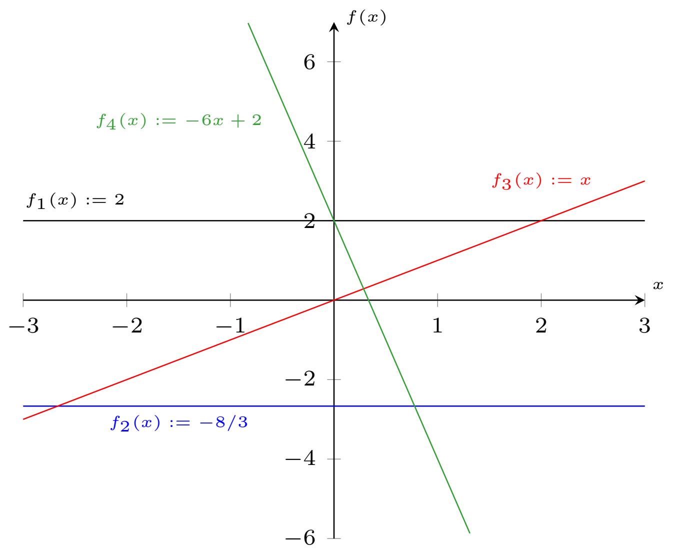


Abbildung 13.2 – Beispiele für Polynomfunktionen von Grad 0 und 1 (also unsere bekannten konstanten und linearen Funktionen).

2. Quadratische Polynomfunktionen (d.h., Grad 2):

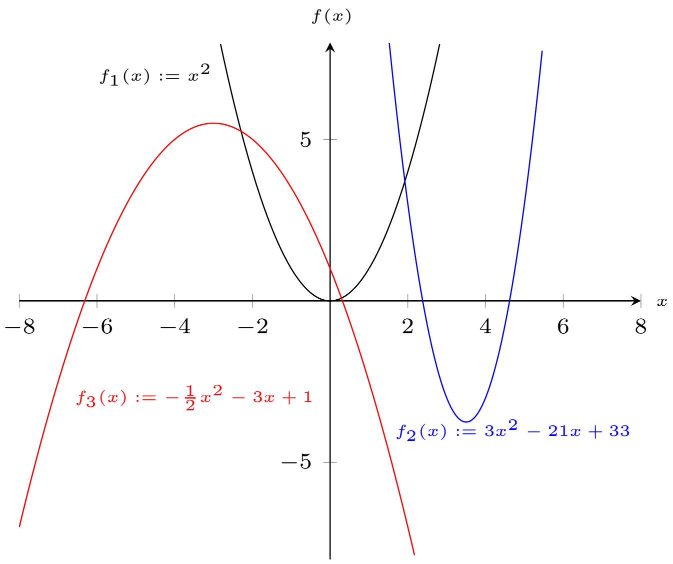


Abbildung 13.3 – Beispiele von Polynomfunktionen vom Grad 2 (quadratische Polynome).

3. Kubische Polynomfunktionen (d.h., Grad 3):

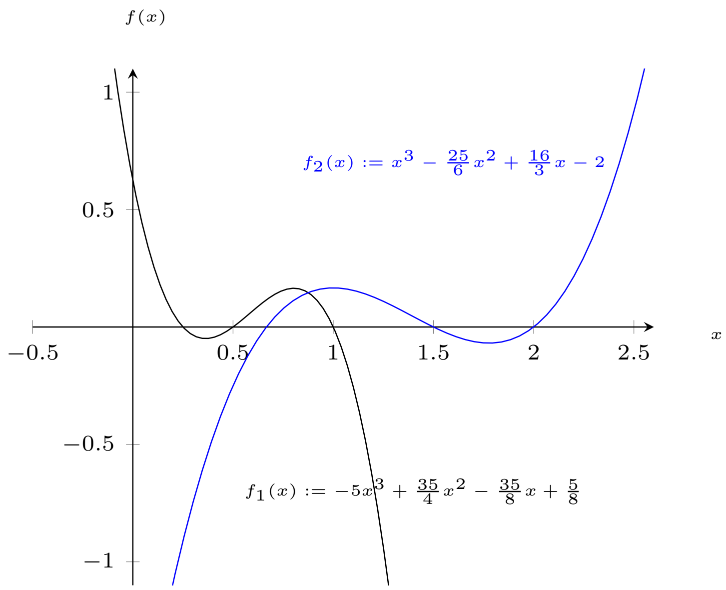


Abbildung 13.4 – Beispiele von Polynomfunktionen vom Grad 3 (kubische Polynome).

4. Polynomfunktionen höheren Grades $n > 3$:

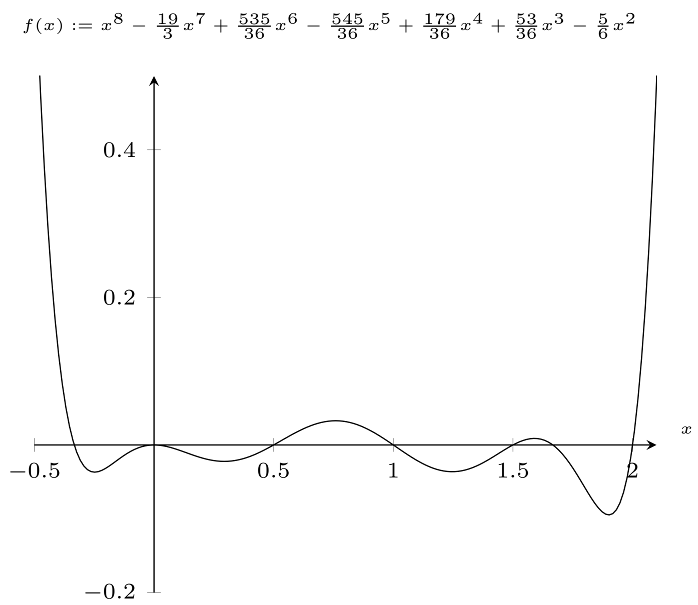


Abbildung 13.5 – Beispiel einer Polynomfunktion mit Grad höher 3.

◇

§13-8 Satz. (Facts zu Polynomfunktionen)

(1) Jede Polynomfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(2) Di erenzierbarkeit und Ableitung: Eine Polynomfunktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft di erenzierbar und es gilt

$$(f(x))' = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(3) Asymptotisch, d.h., für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$, verhält sich eine Polynomfunktion wie ihr Monom mit grösstem Exponent.

(4) Ein Polynom f vom Grad $\mathrm{grad}(f) = n$ hat höchstens n Nullstellen. D.h., es gibt höchstens n Stellen $x_k, k \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\}$ mit $f(x_k) = 0$.

◇

Mit Polynomen lässt sich rechnen und das ist ein sehr wichtiger Aspekt, gerade in der Ingenieursmathematik. Dabei gilt:

§13-9 Definition. (Rechnen mit Polynomen)

(1) Zwei Polynome werden addiert oder subtrahiert indem einfach die Koe -zienten der Terme mit gleichem Exponenten addiert und subtrahiert werden.

Tritt in einem beteiligten Polynom z.B. ein Exponent nicht auf, so wird er als Monom mit Koe zienten 0 aufgefasst.

(2) Die **Multiplikation mit einer reellen Zahl** erfolgt durch Multiplikation jedes einzelnen Terms (Summanden) des Polynoms.

(3) Zwei Polynome $f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ mit den Graden n bzw. m werden **multipliziert**, indem

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right)}_{=:c_k} x^k$$

gerechnet wird.

(4) Die **Division** $\frac{f}{g}$ führt normalerweise auf ein Polynom $q(x)$ und einen additiven Restausdruck $r(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + r(x)$$

wobei immer gilt:

$$\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g) \text{ oder } r(x) = 0.$$

Die Polynomdivision wird durch folgenden **Divisionsalgorithmus** durchgeführt[E.46] :

https://youtu.be/WaRxx94rIgk

◇

Polynome beliebigen Grades können also addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert werden und auch mit einer reellen Konstanten multipliziert ("vervielfacht") werden. Im Fall der Division muss aber dabei nicht notwendigerweise wieder ein Polynom entstehen.

Schauen Sie sich bei Bedarf auch entsprechende Videos an (z.B. auch Khan Video). Hier noch je ein Beispiel:

§13-10 Beispiele.

1. Das fün ache des Polynoms $f(x) := -2x^6 + x^3 + 3x^2 - 4$ ist das Polynom $5 \cdot f$ (auch $5f$ geschrieben) mit

$$(5 \cdot f)(x) = -10x^6 + 5x^3 + 15x^2 - 20.$$

2. Die Addition $f+g$ der Polynome $f(x) := 3x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x - 9$ und $g(x) := 2x^3 + 6x - 2$ ergibt das Polynom $f + g$ mit

$$(f + g)(x) = 3x^4 - 3x^3 - x^2 + 10x - 11.$$

3. Die Di erenz $f - g$ der Polynome $f(x) := 8x^5 + 2x^4 + x^2 + 5x + 2$ und $g(x) := 2x^6 - 4x^5 + 3x^2 - 6x + 2$ ist das Polynom $f - g$ mit

$$(f - g)(x) = -2x^6 + 12x^5 + 2x^4 - 2x^2 + 11x.$$

4. Die Multiplikation $f \cdot g$ (das schrieben wir auch bei Funktionen kurz als fg) der beiden Polynome

$$\begin{aligned} f(x) &:= 3x^3 + 2x^2 - 1 \\ g(x) &:= -2x^3 + 4x + 5 \end{aligned}$$

erhalten wir folgendermassen:

- Als erstes berechnen wir die Koe zienten des Produkts mit der Formel

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Eine Potenz, die in einem Polynom nicht vorkommt, kann man sich als mit einem Koeffizienten 0 multipliziert denken! Also $0 \cdot x^k$.

$$\begin{aligned}
c_0 &:= \sum_{j=0}^{0} a_j b_{-j} = a_0 b_0 = (-1) \cdot 5 = -5, \\
c_1 &:= \sum_{j=0}^{1} a_j b_{1-j} = a_0 b_1 + a_1 b_0 = (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 5 = -4, \\
c_2 &:= \sum_{j=0}^{2} a_j b_{2-j} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
&= (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 0 + 0 + 10 = 10, \\
c_3 &:= \sum_{j=0}^{3} a_j b_{3-j} = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\
&= (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 2 + 8 + 15 = 25, \\
c_4 &:= \sum_{j=0}^{4} a_j b_{4-j} = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 \\
&= (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\
&= 0 + 0 + 0 + 12 + 0 = 12, \\
c_5 &:= \sum_{j=0}^{5} a_j b_{5-j} = \ldots \quad \textit{(zur Übung!)} \quad \ldots = -4, \\
c_6 &:= \sum_{j=0}^{6} a_j b_{6-j} = \ldots \quad \textit{(zur Übung!)} \quad \ldots = -6.
\end{aligned}$$

- Jetzt müssen wir nur noch die Summanden entsprechend hinschreiben (wir ordnen nach absteigender Potenz, das ist aber Geschmackssache):

$$(f \cdot g)(x) = -6x^6 - 4x^5 + 12x^4 + 25x^3 + 10x^2 - 4x - 5.$$

5. Die Division $\frac{f}{g}$ von $f(x) := 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4$ und $g(x) := x^2 + 2$ ergibt eine *gebrochen-rationale Funktion* (siehe anschliessend), also *kein* Polynom mehr. Dies folgt durch die Anwendung des Divisionsalgorithmus':

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4) : (x^2 + 2) = 2x^2 - 5x - 2 + \dfrac{10x}{x^2 + 2} \\
\quad \underline{-(2x^4 + 4x^2)} \\
\quad -5x^3 - 2x^2 - 4
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
\underline{-(-5x^3 - 10x)} \\
-2x^2 + 10x - 4 \\
\underline{-(-2x^2 - 4)} \\
10x
\end{array}
\qquad (1 = \mathrm{grad}(10x) < \mathrm{grad}(g) = 2, \text{ also Rest } \frac{10x}{x^2+2}.)
$$

Der Quotient $\frac{f}{g}$ ist also die Funktion:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x^2 - 5x - 2 + \frac{10x}{x^2+2}.$$

◇

Potenzfunktionen (Abschnitt 13.2) sind sowohl Spezialfälle wie auch Verallgemeinerungen von Polynomfunktionen: Sie sind Spezialfall, weil sie nur aus einem Monom bestehen. Und sie sind eine Art Verallgemeinerung, weil der Exponent im Monom jetzt nicht wie bei den Polynomfunktionen eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ zu sein braucht, sondern ganz allgemein eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ sein kann.

13.4 Gebrochen rationale Funktionen

§13-11 Definition. ((Gebrochen-) Rationale Funktionen)

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ein von der konkreten Funktion f abhängiger Definitionsbereich.

Eine rationale Funktion (auch gebrochen-rationale Funktion) ist eine Funktion, welche als Bruch mit je einer Polynomfunktion in Zähler und Nenner geschrieben werden kann, d.h.,

$$
\begin{aligned}
f : D_f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x \mapsto f(x) &:= \frac{p_n(x)}{q_m(x)}
\end{aligned}
$$

wobei p_n eine Polynomfunktion mit Grad n und q_m eine Polynomfunktion mit Grad m. ◇

Rationale Funktionen haben aufgrund der Polstellen (Nullstellen im Nenner) einen unter Umständen sehr unterschiedlichen Funktionsgraphen. (Das ist ja auch nicht verwunderlich, da es sich um die allgemeinste Klasse von Funktionen bisher handelt.) Ein Beispiel:

§13-12 Beispiel.

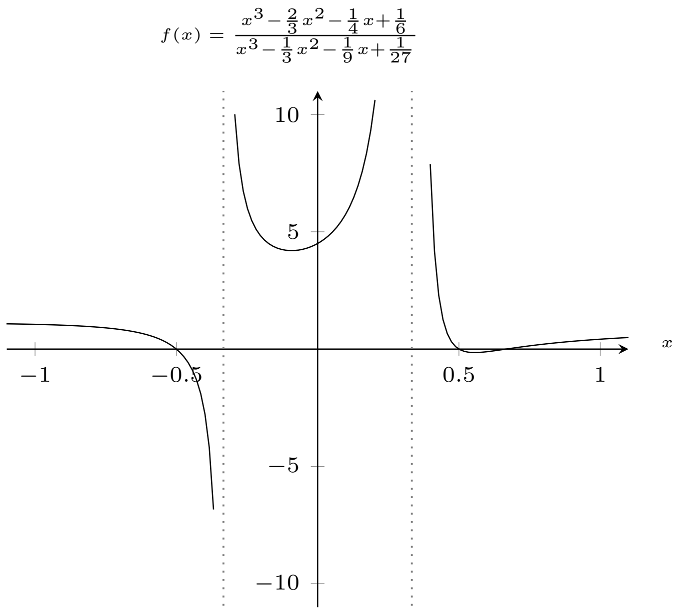


Abbildung 13.6 – Beispiel für eine allgemeine Rationale Funktion.

◇

Gebrochen-rationale Funktionen sind eine so allgemeine Klasse von Funktionen, dass Aussagen zu ihnen, welche für alle solche Funktionen gelten, noch nicht sehr interessant sind. Eine ist es aber:

§13-13 Satz. (Di erenzierbarkeitsbereich gebrochen-rationaler Funktionen)

Die gebrochen-rationalen Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich di erenzierbar. ◇

Überlegen Sie sich an dieser Stelle, wie wir die Ableitung einer gebrochen-rationalen Funktion ermitteln können.

13.5 Hintergrund: Winkel im Grad- und im Bogenmass

Wir werden auch Winkel benutzen und wollen hier betonen, dass wir das vorzugsweise im Bogenmass rad tun. Das heisst wir unterteilen den Kreis nicht in die 360 Einheiten, welche uns die Gradeinheiten $^\circ$ definieren, sondern in die sogenannten Bogenlängen, welche von einem Winkel am Einheitskreis definiert werden. Oder allgemeiner, das Verhältnis von Bogenlänge zu Radius, welcher von einem Winkel definiert wird. Die Umrechnung ist nicht schwer: Sei α ein Winkel im Gradmass $^\circ$ und sei x derselbe Winkel im Bogenmass rad. Dann gilt:

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

bzw.

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x.$$

Gerade im Zusammenhang mit den folgenden trigonometrischen Funktionen werden Winkel sehr oft im Bogenmass angegeben. Da α im Gradmass abgesehen von Vielfachen in $[0, 360)$ liegt, ist damit $x \in [0, 2\pi)$ im Bogenmass.

Ein paar einfache Umrechnungen sollte man immer auch gleich verfügbar haben:

Gradmass ($^\circ$)	0°	1°	45°	57.3...°	60°	90°	180°	360°
Bogenmass (rad)	0	0.017...	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Tabelle 13.1 – Kleine Gradmass zu Bogenmass Umrechnungstabelle

13.6 Die trigonometrischen Funktionen sin, cos, sowie ihre Umkehrfunktionen arcsin, arccos

Die trigonometrischen Funktionen sind die Funktionen Sinus ($\sin$), Kosinus ($\cos$), Tangens ($\tan$), Kotangens ($\cot$), sowie ihre Umkehrfunktionen Arkussinus ($\arcsin$), Arkuskosinus ($\arccos$), Arkustangens ($\arctan$), Arkuskotangens (arccot). In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Sinus- und der Cosinusfunktionen und ihren Umkehrfunktionen, der Arkussinus- und der Arkuscosinus-Funktion, beschäftigen.

Aus der elementaren Geometrie wissen wir, dass der Sinus eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gerade das Verhältnis der Längen der Gegenkathete und der Hypotenuse ist:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

Ist also der Winkel $\alpha := 0$ Grad, so ist die Gegenkathete 0 und das Verhältnis zwischen Gegenkathete und Hypotenuse (welcher Länge auch immer) ist Null. Wir sagen $\sin(0) = 0$. Für grössere α nimmt der Sinus entsprechend zu, bis er für α gegen 90° gegen 1 strebt (ohne diesen Wert je zu erreichen). Deshalb ist elementargeometrisch der Sinus eines Winkels α nur für $\alpha \in [0, 90^\circ)$ definiert. Geht man auf den Einheitskreis, dann entspricht der Sinus eines Winkels gerade der Länge der Gegenkathete des dem Einheitskreis eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks, wenn α der Winkel des Ortsvektors der Hypotenuse mit der x-Achse ist und die Hypotenuse (bzw. deren Ortsvektor) im Gegenuhrzeigersinn gedreht wird. Für Details konsultieren Sie bitte einen elementargeometrischen Text. Auf jeden Fall lässt sich so am Einheitskreis der Sinus auch für beliebige Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren und es ergibt sich damit insbesondere seine charakteristische Periodizität von 360° oder 2π im Bogenmass, seine Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs und sein ebenso charakteristischer Wertebereich von $[-1, 1]$, weil man die Länge der Gegenkathete unterhalb der x-Achse negativ nimmt.

Analog definiert man ursprünglich in der Elementargeometrie den Cosinus eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gerade als das Verhältnis der Längen der Ankathete und der Hypotenuse:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

Eine völlig analoge Überlegung wie beim Sinus führt auf dem Einheitskreis zur Entsprechung des Cosinus als die Länge der Ankathete, welche wieder mit einem Vorzeichen je nach Lage über oder unter der x-Achse versehen wird. Damit ist der Cosinus ebenfalls für Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$

definiert und es folgt ebenso seine charakteristische 2π-Periodizität, die Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse, sein $[-1,1]$-Wertebereich und darüber hinaus die Phasenverschiebungsbeziehung zum Sinus, $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (im Bogenmass).

In der Analysis will man nun genau diese Sinus- und diese Cosinusfunktion mit Hilfe der Werkzeuge der Analysis definieren und "behandeln". Dies führt auf die "Reihenentwicklung" der beiden Funktionen, welche aufgrund der Konvergenz dieser Reihen dann auch als Definitionen für die beiden Funktionen benutzt werden. Aus dieser Perspektive wollen wir nun die beiden Funktionen definieren und ein paar fundamentale Eigenschaften diskutieren.

§13-14 Definition. (Reelle Sinusfunktion, reelle Cosinusfunktion)

Die (reelle) Sinusfunktion ist die Funktion, welche durch folgende für jedes x konvergierende Reihe definiert ist:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Die (reelle) Cosinusfunktion ist die Funktion, welche durch folgende konvergierende Reihe definiert ist:

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

◇

Sie kennen wahrscheinlich schon die Funktionsgraphen:

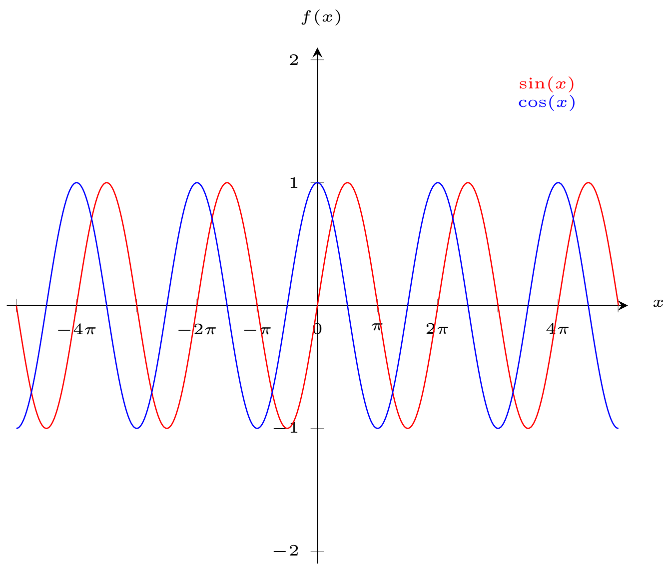


Abbildung 13.7 – Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion im Intervall $[-5\pi, 5\pi]$.

§13-15 Satz. (Facts zur Sinus- und zur Cosinusfunktion)

(1) $\sin$ und $\cos$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und haben nirgends Polstellen.
(2) Der Wertebereich von $\sin$ und von $\cos$ ist das Intervall $[-1, 1]$.
(3) Die folgenden Einschränkungen sind – zum Beispiel, siehe auch Periodizität nachfolgend – bijektiv:

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],$$
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1],$$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heisst das Hauptintervall (der Hauptzweig) des Sinus und $[0, \pi]$ das Hauptintervall (der Hauptzweig) des Cosinus.
(4) $\sin$ und $\cos$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft di erenzierbar und es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x),$$
$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

(5) $\sin$ und $\cos$ sind beides 2π-periodische Funktionen. D.h., $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x),$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

(6) $\sin$ ist punktsymmetrisch um den Urspungspunkt $(0, 0)$ (also eine sogenannte ungerade Funktion), d.h.,

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

$\cos$ ist achsensymmetrisch um die y-Achse eine (also eine sogenannte gerade Funktion), d.h.,

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

◇

Aufgrund der Bijektivitätseigenschaft der Sinus- und der Cosinusfunktion auf den erwähnten Intervallen, existieren dort jeweils ihre Umkehrfunktionen. Diese Umkehrfunktionen sind also folgendermassen definiert bzw. erhalten folgende spezielle Namen:

§13-16 Definition. (Reelle Arcussinusfunktion, reelle Arcuscosinusfunktion)

$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \arcsin(x) := \sin^{-1}(x),$$

also die Umkehrfunktion des Sinus auf seinem Hauptintervall, wird die Arkussinus-Funktion genannt. Und die Funktion

$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x) := \cos^{-1}(x),$$

also die Umkehrfunktion des Cosinus auf seinem Hauptintervall, heisst Arkuscosinus-Funktion. ◇

Der Funktionsgraphen der beiden Umkehrfunktionen auf den Hauptzweigen sieht so aus:

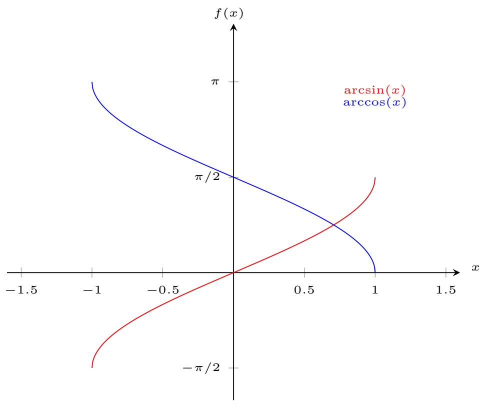


Abbildung 13.8 – Graphen der Arkussinus- und der Arkuscosinusfunktion auf dem Hauptzweig.

13.7 Die trigonometrischen Funktionen tan, cot, sowie ihre Umkehrfunktionen arctan, arccot

In der Elementargeometrie haben wir noch weitere Funktionen, welche die Längenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck beschreiben. Die zwei nächstwichtigen sind die Tangens- und Cotangensfunktion und diese lassen sich aufgrund ihrer Natur ganz einfach mittels der Sinus- und der Cosinusfunktion definieren:

§13-17 Definition. (Reelle Tangensfunktion, reelle Cotangensfunktion)

Die (reelle) Tangensfunktion ist die Funktion

$$\begin{aligned} \tan : D_{\tan} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

und die (reelle) Cotangensfunktion die Funktion

$$\begin{aligned} \cot : D_{\cot} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

◇

Wir betrachten zuerst die Funktionsgraphen:

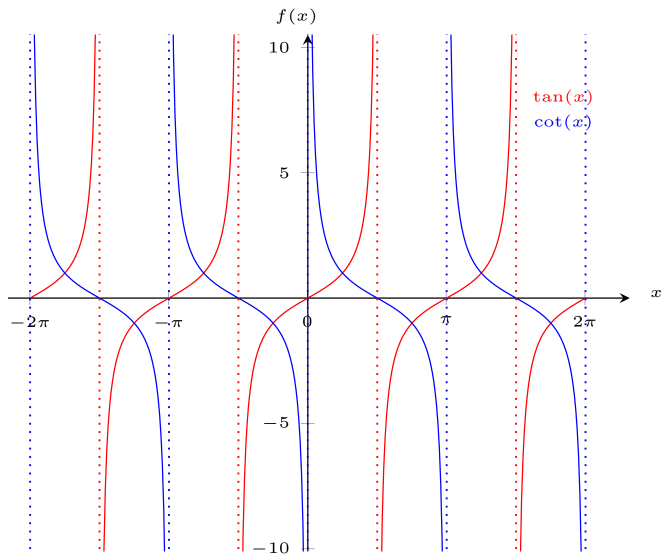


Abbildung 13.9 – Graphen der Tangens- und der Cotangensfunktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

Wie sie schon an der Art der Definition und auch in den Funktionsgraphen sehen, sind die Tangens- und die Cotangensfunktion nicht mehr auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Diese Eigenschaft und andere Fakten halten wir in folgendem Satz fest:

§13-18 **Satz.** (Facts zur Tangens- und zur Cotangensfunktion)

(1) Definitionsbereiche:

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Damit hat die Tangensfunktion die Polstellen $\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ und die Cotangensfunktion $\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Der Wertebereich von $\tan$ und von $\cot$ ist $\mathbb{R}$.

(3) Die Einschränkungen (z.B.)

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},$$
$$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R},$$

sind bijektiv.

(4) $\tan$ und $\cot$ sind auf ihren Definitionsbereichen beliebig oft di erenzierbar und es gilt

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)},$$
$$\cot'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

(Mit $\sin^k(x)$ meinen wir hier $(\sin(x))^k$, für $k \in \mathbb{N}$. Im Gegensatz zu $f^{\circ k}(x) := (f \circ ... \circ f)(x)$.)

(5) $\tan$ und $\cot$ sind beides π-periodische Funktionen. D.h., $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(x+\pi) = \tan(x),$$
$$\cot(x+\pi) = \cot(x).$$

(6) Symmetrie: Beide Funktionen sind punktsymmetrisch zum Urspungspunkt $(0,0)$, d.h.,

$$\tan(-x) = -\tan(x),$$
$$\cot(-x) = -\cot(x).$$

(D.h., es sind sogenannt ungerade Funktionen.)

◇

Auch die Tangens- und die Cotangensfunktion haben wieder Hauptzweige, auf welchen wir die Umkehrfunktionen arctan und arccot definieren. Ihr Funktionsverlauf werden wir kurz in einer Aufgabe auf dem Übungsblatt studieren.

13.8 Exponential- und Logarithmusfunktionen

§13-19 Definition. (Exponentialfunktionen)

Sei[E.47] $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$.

Dann ist die Exponentialfunktion zur Basis b definiert als die Funktion

$$\begin{aligned} \exp_b : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp_b(x) := b^x. \end{aligned}$$

◇

§13-20 Definition. (Natürliche Exponentialfunktion; ”die Exponentialfunktion”)

Im Fall der Basis $b := e$, d.h., der Eulerschen Konstanten

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459...,$$

sprechen wir dann von der natürlichen Exponentialfunktion, von der e-Funktion oder einfach von der Exponentialfunktion[E.48] . Diese Funktion schreiben wir dann meist auch abkürzend als $\exp := \exp_e$ und ihr Funktionswert als

$$\exp(x) := \exp_e(x) = e^x.$$

◇

§13-21 Beispiel.

Zu den wichtigsten Exponentialfunktionen gehören diejenigen zu den Basen $b := 10$, $b := 2$ und vor allem $b := e$.

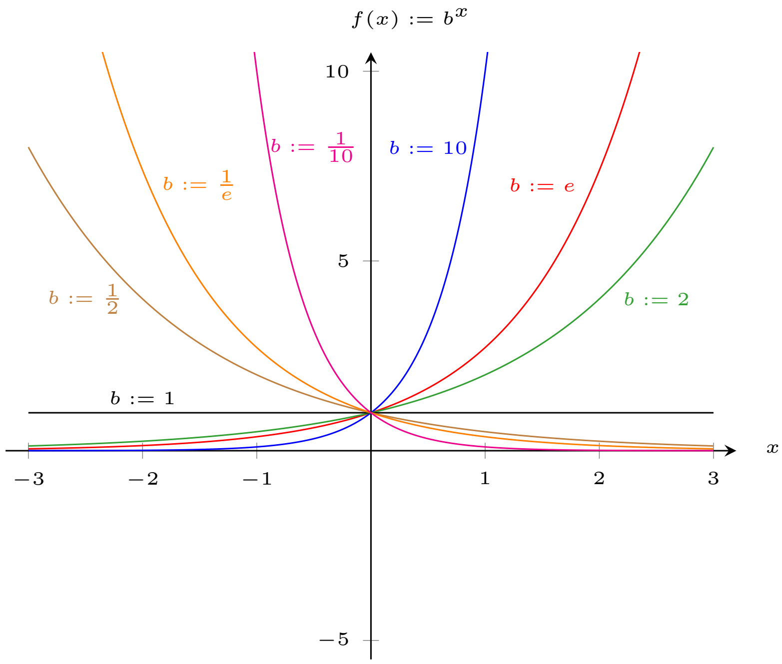


Abbildung 13.10 – Ein paar wichtige Exponentialfunktionen.

◇

Anwendung. Sigmoidfunktionen und Künstliche Neuronale Netze

Im Bereich künstlicher neuronaler Netze (KNN) und Machine Learning werden oft sogenannte ”Neuronenaktivierungsfunktionen” verwendet. Diese habe meist annähernd eine gestreckte, monoton steigende S-förmige Gestalt, welche wir **Sigmoidfunktionen** nennen. Die genaue Form kann zwar relativ unterschiedlich sein, aber allen gemeinsam sind vor allem folgende Eigenschaften:

- Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und ihre Funktionswerte sind beschränkt, oft auf Intervallen $(0, 1)$, $(-1, 1)$, ... usw. (wobei in Anwendungen mit KNN's oft nur ein beschränktes Definitionsintervall betrachtet wird),
- sie ist in jedem Punkt di erenzierbar, oft sogar ”glatt”, d.h., unendlich oft di erenzierbar mit stetigen Ableitungen,
- sie ist monoton steigend und hat deshalb eine nicht-negative erste Ableitung an jeder Stelle,
- ihre erste Ableitung ist eine glockenförmige Funktion (d.h., sie hat eine Form wie die sogenannte ”Gausskurve” der ”Normalverteilung”).

Ursprünglich wurde als Aktivierungsfunktion eine a n-lineare Funktion auf einem Intervall gewählt.

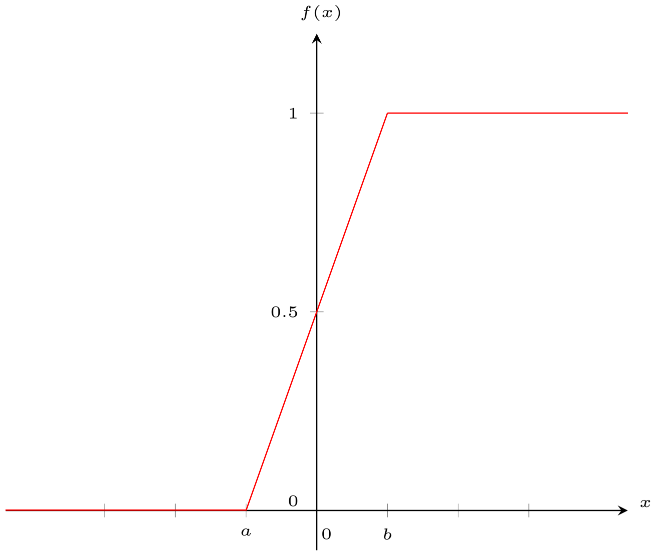


Abbildung 13.11 – Ursprüngliche Neuronenaktivierungsfunktion in KNN's.

Danach hat man aber festgestellt, dass ”besser S-förmige” Funktionen meist bedeutend besser sind. Solche lassen sich unter anderem mit der Exponentialfunktion konstruieren. Zwei Beispiele:

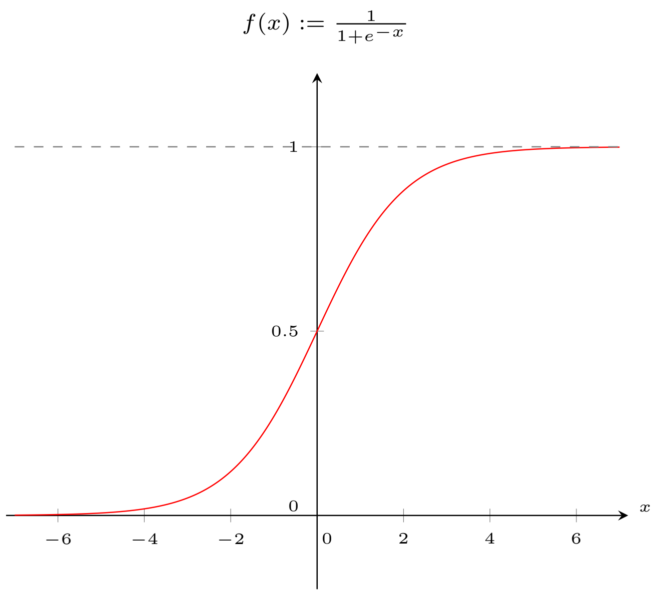


Abbildung 13.12 – Beispiel einer Sigmoidfunktion welche mittels der Exponentialfunktion konstruiert ist.

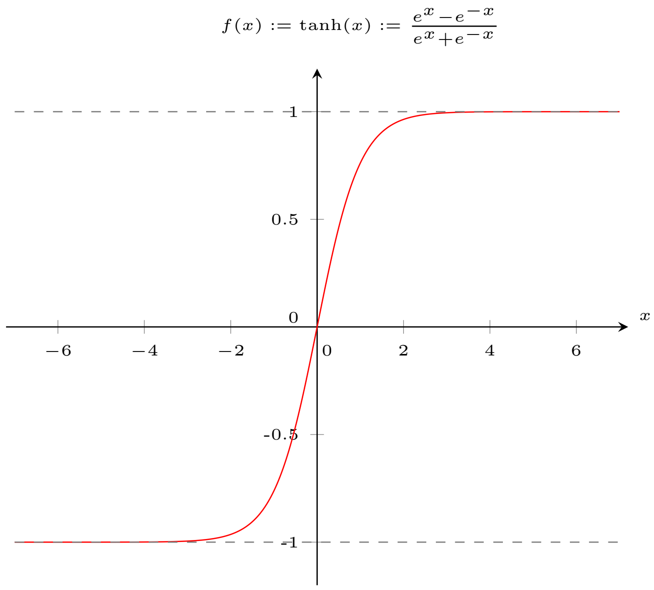


Abbildung 13.13 – Weiteres Beispiel einer Sigmoidfunktion welche mittels der Exponentialfunktion konstruiert ist.

§13-22 Definition. (Logarithmusfunktionen)

Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.

Dann ist die Logarithmusfunktion zur Basis b definiert als die Funktion

$$\begin{aligned} \log_b : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_b(x) \end{aligned}$$

← Sagt noch nichts darüber aus, *wie* wir dies konkret berechnen!

mit der Eigenschaft, dass

$$\exp_b(\log_b(x)) = x \quad \text{und} \quad \log_b(\exp_b(x)) = x,$$

oder anders geschrieben

$$b^{\log_b(x)} = x \text{ und } \log_b(b^x) = x,$$

ist. D.h., die Logarithmusfunktion zur Basis b ist gerade die Umkehrfunktion (wieder bzgl. der Funktionsverknüpfung) der Exponentialfunktion zur Basis b.

Im Fall der Basis $b := e$, d.h., der Eulerschen Konstanten, sprechen wir dann entsprechend vom natürlichen Logarithmus, was oft auch als $\ln := \log_e$ geschrieben wird[E.49] . ◇

§13-23 Beispiel.

Damit ist der Funktionsgraph zu den wichtigsten Logarithmusfunktionen zu den Basen $b := 10$, $b := 2$ und vor allem $b := e$, folgendermassen gegeben

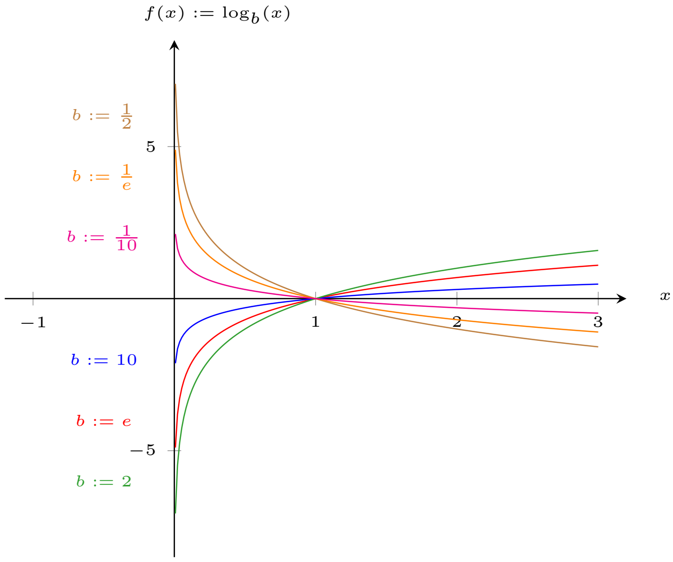


Abbildung 13.14 – Ein paar wichtige Logarithmusfunktionen.

◇

§13-24 Satz. (Facts zu Exponentialfunktionen)

(1) $\exp_b$ ist für alle $0 < b < 1$ streng monoton fallend und als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv (also umkehrbar).

(2) $\exp_b$ ist für alle $b > 1$ streng monoton steigend und als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv (also umkehrbar).

(3) $\exp_b$ ist für alle $b > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft di erenzierbar und es gilt

$$(\exp_b(x))' = \exp_b(x)\ln(b).$$

(4) **Wachstumsverhalten:**
$0 < b < 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} \exp_b(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} \exp_b(x) = 0.$$

$b > 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} \exp_b(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} \exp_b(x) = \infty.$$

(5) **Wertebereich:**
$0 < b < 1$:

$$x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow \exp_b(x) > 1,$$
$$x \in [0, \infty) \Longrightarrow \exp_b(x) \leq 1,$$

$b > 1$:

$$x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow \exp_b(x) < 1,$$
$$x \in [0, \infty) \Longrightarrow \exp_b(x) \geq 1,$$

(6) **Spezielle Werte:**

$$\exp_b(0) = 1,$$
$$\exp_b(1) = b.$$

(7) **Rechenregeln:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\exp_b(x+y) &= \exp_b(x) \cdot \exp_b(y),\\
\exp_b(x-y) &= \frac{\exp_b(x)}{\exp_b(y)},\\
\exp_b(x \cdot y) &= \exp_{\exp_b(x)}(y) = \exp_{b^x}(y),\\
\exp_b(-x) &= \frac{1}{\exp_b(x)} = \exp_{\frac{1}{b}}(x),\\
\exp_a(x) \cdot \exp_b(x) &= \exp_{a \cdot b}(x).
\end{aligned}$$

◇

§13-25 Satz. (Zusätzliche Facts zur ***natürlichen*** Exponentialfunktion)

Für die natürliche Exponentialfunktion gilt zusätzlich zu Satz §13-24 bzw. insbesondere:

(1) **Reihendarstellung von** $\exp$:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp(x) := e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(2) **Ableitung von** $\exp$ (“Di erentialgleichung von $\exp$”):

$$\exp' = \exp$$

bzw. anders geschrieben

$$(e^x)' = e^x$$

Die natürliche Exponentialfunktion hat also die herausragende Eigenschaft, dass sie diejenige Funktion ist, welche ihre eigene Ableitung ist!

(3) Spezielle Werte:

$$\exp(0) = 1 \text{ und } \exp(1) = e \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$

(4) Wachstumsgeschwindigkeit: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0.$$

(5) Funktionalgleichungen:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp(x)\cdot\exp(-x) = 1,$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y).$$

◇

§13-26 Satz. (Facts zu Logarithmusfunktionen)

(1) $\log_b$ ist für alle $0 < b < 1$ streng monoton fallend und als Funktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bijektiv (also umkehrbar).
(2) $\log_b$ ist für alle $b > 1$ streng monoton steigend und als Funktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bijektiv (also umkehrbar).
(3) $\log_b$ ist für alle $b > 0, b \neq 1$ auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ beliebig oft di erenzierbar und es gilt

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{x\ln(b)}.$$

(4) Wachstumsverhalten:
$0 < b < 1$:

$$\lim_{x\to 0} \log_b(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = -\infty.$$

$b > 1$:

$$\lim_{x\to 0} \log_b(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \infty.$$

(5) Wertebereich:
$0 < b < 1$:

$$x \in (0,1) \Longrightarrow \log_b(x) > 0,$$
$$x \in [1,\infty) \Longrightarrow \log_b(x) \leq 0,$$

$b > 1$:

$$x \in (0,1) \Longrightarrow \log_b(x) < 0,$$
$$x \in [1,\infty) \Longrightarrow \log_b(x) \geq 0,$$

(6) **Spezielle Werte:**

$$\log_b(1) = 0,$$
$$\log_b(b) = 1.$$

(7) **Rechenregeln:** $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\log_b(x+y) = \log_b(x) + \exp_b(1 + \frac{y}{x}),$$
$$\log_b(x-y) = \log_b(x) + \exp_b(1 - \frac{y}{x}),$$
$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y),$$
$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y),$$
$$\log_b(\frac{1}{x}) = -\log_b(x),$$
$$\log_b(x^r) = r \log_b(x).$$

◇

§13-27 Satz. (Zusätzliche Facts zur ***natürlichen*** Logarithmusfunktion)

Für die natürliche Logarithmusfunktion gilt zusätzlich zu Satz §13-26 bzw. insbesondere:

(1) **Reihendarstellung von** $\ln$:

$$\forall x \underbrace{(-1,1)}_{!} : \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n!}$$

(2) **Ableitung von** $\ln$ **(“Di erentialgleichung von** $\ln$**”)**:

$$\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}}$$

für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ bzw. anders geschrieben

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

(3) **Spezielle Werte:**

$$\ln(1) = 0 \text{ und } \ln(e) = 1 \quad (\text{e} = \text{Eulersche Zahl})$$

(4) Wachstumsgeschwindigkeit: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} \ln(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0.$$

(5) Funktionalgleichungen:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}: \quad \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x),$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}: \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

$\diamond$

Am Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass es viele weitere Eigenschaften und Sätze zu den behandelten Funktionen gibt. Es gibt natürlich auch noch viele weitere “elementare Funktionen”. Am besten schauen Sie einmal für eine kleine Orientierung ein bisschen auf Wikipedia rum: Elementare Funktionen auf der deutschen Wikipedia-Seite. Das hilft als Einstieg, falls Sie später das Thema mit Fachliteratur vertiefen wollen oder müssen.

Wir werden im Verlauf der nächsten Kapitel und Übungsserien öfters wieder auf dieses Kapitel zurückkommen und Teile davon weiter vertiefen.

Kapitel 14

Das Problem unbestimmter Ausdrücke und die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

---

L E R N Z I E L E :

LZ 14.1 Sie verstehen das Problem der unbestimmten Ausdrücke bei Grenzwert-Untersuchungen von Funktionen.

LZ 14.2 Sie kennen die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital und können sie im Umfang der besprochenen Beispiele und Aufgaben anwenden.

In diesem Kapitel besprechen wir noch eine weitere sehr wichtige Anwendung der Ableitung, welche es uns ermöglicht, das in Abschnitt 8.2 angesprochene Problem zu lösen: Nämlich wie mit unbestimmten Ausdrücken im Zusammenhang mit der Grenzwertbestimmung bei Funktionen umgegangen werden kann. Dort haben wir schon ansatzweise gesehen, dass wenn wir den Grenzwert einer Funktion ausrechnen wollen, wir plötzlich auf sogenannte "unbestimmte Ausdrücke" stossen können, wofür die Konvergenz- bzw. Divergenzfrage nicht mehr entschieden werden kann. Das Problem tritt z.B. häufig im Zusammenhang mit gebrochen-rationalen Funktionen (Abschnitt 13.4) auf. Wir wollen das Phänomen noch einmal detailliert an ein paar Beispielen demonstrieren:

§14-1 Beispiele.

1. Schon bei folgendem einfachen Grenzwert kommen wir im ersten Augenblick auf einen Ausdruck, welcher nicht sinnvoll sein kann:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \frac{0}{0}$$
Hier kann man vielleicht noch argumentieren, dass dieser Ausdruck nicht definiert sei, wegen der Division durch Null. Wir werden aber sehen, dass hier durchaus auch Grenzwerte existieren können. Im obenstehenden Fall können wir x im Bruch kürzen, was uns dann
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$
liefert. Und dieses Kürzen dürfen wir natürlich durchführen, weil für den Grenzwert der Wert x für $x \to 0$ nie Null selbst sein muss. Das Argument der "Nicht-Definiertheit" vorhin gerade greift aber in den folgenden zwei Fällen nicht mehr.
2. Folgender Grenzwert liefert z.B. ein "unbestimmter Summenausdruck":
$$\lim_{x\to\infty} 10^x \cdot x^5 - e^x = \infty - \infty$$
3. Ebenso dieser:
$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = 0 \cdot (-\infty)$$
4. Ein weiteres Beispiel eines "unbestimmten Bruchs":
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}.$$
5. Umgekehrt haben wir auch
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

◇

In welchen Situationen generell kann das Problem auftreten? Es zeigt sich, dass dies dann der Fall ist, wenn wir sogenannte "unbestimmte Ausdrücke" (nicht zu verwechseln mit "unbestimmter Divergenz" oder mit "unbestimmten Grenzwerten"!) haben:

§14-2 Definition. (Unbestimmter Ausdruck)

Im Zusammenhang mit Grenzwerten von Funktionen bezeichnen wir folgende Symbole (die man oft nach Umformungen und Grenzwertbetrachtungen erhält) als unbestimmten Ausdruck:

$$\begin{aligned} \text{"Brüche":} \quad & \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \\ \text{"Summen":} \quad & \infty - \infty, -\infty + \infty, \end{aligned}$$

"Produkte": $0 \cdot \infty, \infty \cdot 0,$

"Potenzen": $0^0, \infty^0, 1^\infty.$

◇

Die folgende Regel von Bernoulli-de l'Hôpital hilft uns nun manchmal, die wichtigen Fälle $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ aufzulösen.

Beachten Sie hier, dass man die Fälle $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ und $\frac{-\infty}{-\infty}$ alle auf $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen kann: Man zieht einfach das entsprechende Vorzeichen vor den Grenzwert. Auch die Fälle $0 \cdot \infty$ und $\infty \cdot 0$ kann man darauf zurückführen: Den Faktor, welcher zur 0 führt kann man als Divisor schreiben. Für die Auflösung der übrigen Fälle, siehe z.B. [?, Tabelle S.627].

§14-3 Satz. (Regel von Bernoulli-de l'Hôpital[E.50])

Seien f und g zwei Funktionen und sei a im Definintionsbereich beider Funktionen, wobei wir $a \in \{-\infty, \infty\}$ zulassen, wenn dies in den Definitionsbereichen liegt.

Sei weiter $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ in einer "kleinen" Umgebung um a herum. Gilt nun

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{\infty}{\infty}"$$

oder

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{0}{0}",$$

dann gilt auch

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechtsstehende Grenzwert existiert. Man kann dann also den korrekten Grenzwert mit der rechten Seite bestimmen. ◇

§14-4 Korollar. (Regel von Bernoulli-de l'Hôpital für links- bzw. rechtsseitiger Grenzwerte)

Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital gilt auch entsprechend für die unbestimmten Ausdrücke $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ bei der Berechnung links- bzw. rechtsseitiger Grenzwerte. ◇

§14-5 Beispiel.

Als erstes betrachten wir folgenden Grenzwert mit unbestimmtem Ausdruck:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} = \frac{0}{0}.$$

Wir haben also $f(x) := x^3 - 8$ und $g(x) := x^4 - 16$. Mit Bernoulli-de l'Hôpital können wir diesen Grenzwert aber berechnen. Denn wir haben

$$f'(x) = 3x^2,$$
$$g'(x) = 4x^3,$$

wofür

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{4x^3} = \frac{3}{8}$$

gilt. Da die Bedingungen des Satzes von Bernoulli-de l'Hôpital erfüllt sind, folgt daraus, dass

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} = \frac{3}{8}.$$

◇

§14-6 Beispiel.

Das geht analog ebenfalls, falls wir unbestimmte Ausdrücke mit Unendlich ∞ haben und auch, wenn wir zudem die Variable x z.B. ebenfalls gegen ∞ streben lassen. Wir betrachten den Grenzwert mit unbestimmtem Ausdruck

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Wir haben hier $f(x) := x$ und $g(x) := 2^x$ mit den Ableitungen

$$f'(x) = 1,$$
$$g'(x) = \ln(2)2^x. \qquad \text{(siehe Satz §13-24)}$$

Die Voraussetzungen für den Satz von Bernoulli-de l'Hôpital sind erfüllt und wir dürfen wegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(2)2^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

folgern, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = 0.$$

◇

Was machen wir, wenn der Grenzwert mit den Ableitungen wieder auf einen unbestimmten Ausdruck führt? Wir versuchen einfach nochmals den Satz von Bernoulli de l'Hôpital anzuwenden. Das dürfen wir sogar so oft tun, bis wir keinen unbestimmten Ausdruck mehr erhalten! Wir halten fest:

§14-7 Satz.

Wenn jeweils in jedem Schritt die Voraussetzungen erfüllt sind, können wir den Satz von Bernoulli de l'Hôpital iterativ solange anwenden, bis der Grenzwert der entsprechenden Ableitungen nicht mehr ein unbestimmter Ausdruck ist. Dies ist dann auch der Grenzwert des Ausgangsausdrucks. ◇

Damit können wir beispielsweise folgende wichtige Aussage beweisen:

§14-8 Satz.

Die (natürliche) Exponentialfunktion e^x wächst schneller als jede Potenzfunktion $x^n, n \in \mathbb{N}$. D.h.:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

◇

Beweis. Wir wenden einfach für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital n-mal an:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

□

Kapitel 15

Numerische Methoden: Das Newton-Verfahren (Newton-Raphson-Verfahren)

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 15.1 Sie kennen das Newton-Verfahren, seine Bedeutung und können es zur Lösung nicht-linearer Gleichungen in einer Variablen und der Nullstellen Bestimmung einer nicht-linearen Funktion in einer Variablen anwenden.

LZ 15.2 Sie können in konkreten Fällen die Konvergenzgeschwindigkeit abschätzen.

LZ 15.3 Sie können in konkreten Fällen das behandelte Konvergenzkriterium und das Kriterium für eine Nullstelle anwenden.

15.1 Problemstellung und Idee

Das Au nden von Lösungen einer Gleichung ist in den Anwendungen der Mathematik ganz allgemein eines der Grundprobleme. Sie wissen vielleicht bereits, dass bei Polynomgleichungen bis und mit Ordnung 4 (und damit insbesondere bei linearen und quadratischen Gleichungen) dies relativ "einfach" möglich ist und wir sogar Lösungsformeln zur Verfügung haben. Bei Polynomgleichungen mit höherer Ordnung (d.h., grösser 4) und noch mehr bei allgemeineren nichtlinearen Gleichungen ist aber oft eine Auflösung nicht mehr "einfach so" möglich. Im Gegenteil: Bei Polynomen vom Grad > 4 kann sogar bewiesen werden, dass solche Lösungsformeln gar nicht existieren können! Deshalb muss man in vielen Fällen nichtlineare Gleichungen approximativ mithilfe eines sogenannten "numerischen Verfahrens"[E.51] lösen. Ein sehr wichtiges Verfahren hierzu, das Newton-Verfahren, wollen wir nun kennenlernen.

Als erstes, wollen wir uns in Erinnerung rufen, dass ganz allgemein das Auflösen einer (nicht notwendig linearen) Gleichung nach einer Variablen x

$$g(x) = h(x)$$

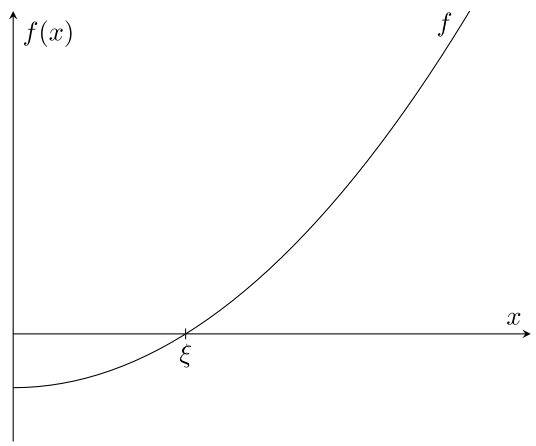
als dasselbe angesehen werden kann, wie das Au nden der Nullstelle einer (nicht notwendig linearen) Funktion f, d.h., x so finden, dass

$$f(x) = 0.$$

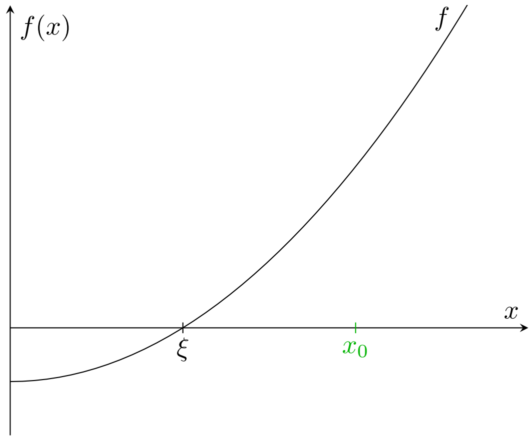
Dazu muss man nur die erste Gleichung minus $h(x)$ rechnen und dann die Funktion $f(x) := g(x) - h(x)$ betrachten und eben hierfür die Nullstelle ξ (griech. Buchstabe "klein xi") ermitteln.

Wie können wir so eine Nullstelle finden, wenn f nun eine nichtlineare, allgemeinere Funktion aber zumindest di erenzierbar, ist[E.52] ?

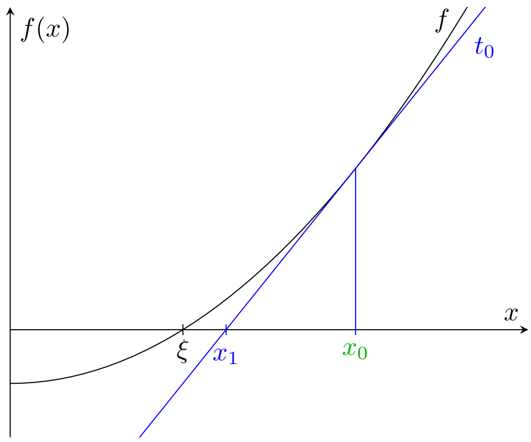
Die Idee ist ganz einfach und wir wollen sie anhand einer geometrischen Überlegung verstehen. Angenommen unsere nichtlineare Funktion f hat einen Graphen wie abgebbildet und die Nullstelle liegt in ξ:



Wie können wir zu einer (ersten) Näherung x_0 der Nullstelle kommen? Die Idee ist folgende: Wir wählen einfach mal einen Startwert x_0 und fassen diesen als erste Approximation der Nullstelle auf.



Das liefert uns natürlich vorerst immer noch keinen Hinweis darauf, wo die (oder eine, es kann ja mehrere geben) Nullstelle von f liegen könnte. Aber mit folgender Idee kommen wir unter Umständen weiter: Wir können die Ableitung von f an der Stelle x_0 berechnen, was uns die Tangentensteigung von f an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $(x_0, f(x_0))$ liefert. Mit der Tangente an diesem Punkt haben wir, falls die Tangente in x_0 nicht gerade horizontal ist, eine Gerade, welche die x-Achse in einer Stelle x_1 schneidet.



x_1 ist also die Nullstelle einer Funktion einer Geraden (d.h., einer a n-linearen Funktion t_0), wovon wir die Nullstelle mühelos durch Nullsetzen der Funktionalgleichung von t_0 und Auflösen nach x ermitteln können. t_0 ist nämlich gerade die Funktion[E.53]

$$\begin{aligned} t_0(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass in dieser Formel der Tangentenfunktion alle Grössen (bis auf die Variable x natürlich) bekannt sind. Wir lösen also $t_0(x) = 0$ auf und erhalten die Nullstelle x_1 der Tangente t_0 als neue Approximation für die Nullstelle ξ von f:

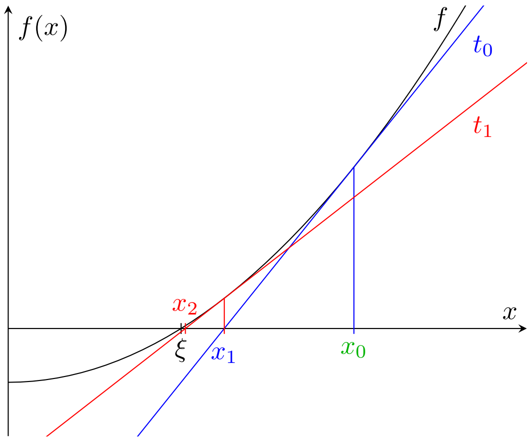
$$\begin{aligned} & f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0 \\ \iff \qquad & x_1 := x = \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} \\ \iff \qquad & x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Was machen wir nun sinnvollerweise als nächstes? Dasselbe natürlich nochmal. Wir nehmen x_1 als neue (ho entlich bessere) Approximation der Nullstelle ξ und ermitteln nun die

Tangente $t_1(x)$ im Punkt $(x_1, f(x_1))$. Deren Nullstelle x_2, entsprechend berechnet durch

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

ist zumindest in unserem Fall eine schon ganz gute Näherung für ξ:



15.2 Newton-Raphson Verfahren

Es ist klar, dass in einer geeigneten Situation das im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Verfahren iterativ wiederholt werden kann und wir immer näher an ξ herankommen. D.h., dass wir so also die Nullstelle "beliebig genau berechnen können". Die ganze Idee kann folgendermassen als Verfahren formuliert werden:

§15-1 Definition. (Newton-Raphson-Verfahren (auch "Newtonsches Tangentenverfahren"))

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf dem o enen Intervall D di erenzierbare Funktion[E.54]. Dann besteht das Newton-Raphson-Verfahren (Newton-Verfahren, Newtonsches Intervallverfahren) darin, eine Nullstelle von f iterativ (="schrittweise") und approximativ mit folgenden Schritten zu berechnen:

(1) Wähle einen geeigneten Startwert x_0.

(2) Berechne für $n \in \mathbb{N}, n > 0$,

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{(Newton-Iteration)}$$

Bei geeignetem Startwert x_0 konvergiert dann das Verfahren gegen eine Nullstelle ξ von f (d.h., $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi$) und jedes Folgenglied x_n kann als eine Näherung der Nullstelle angesehen werden. $\diamond$

Das Verfahren muss natürlich nicht immer (d.h., für beliebige di erenzierbare Funktionen f und beliebige Startstellen x_0) zum Ziel führen. Auch ist nicht unmittelbar klar, wie schnell diese Approximation gegen die Nullstelle strebt. Es gilt aber folgende wichtige Aussage:

§15-2 Satz. (Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens)

(1) Das Newton-Raphson-Verfahren ist für zweimal stetig di erenzierbare Funktionen[E.55] ein lokal konvergentes Verfahren. D.h., wird der Startwert x_0 "genügend nahe" an der (oder an einer) Nullstelle gewählt, so konvergiert es gegen die (diese) Nullstelle.

(2) Quadratische Konvergenzgeschwindigkeit: Im Fall der Konvergenz gegen eine Nullstelle[E.56] ist die Konvergenz "quadratisch" und damit "schnell". D.h., $\forall n \in \mathbb{N}$: $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|x_{n+1} - \xi| \leq c|x_n - \xi|^2.$$

(3) Fehlerabschätzung bzgl. Startwert: Im Fall der Konvergenz gegen eine Nullstelle gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|x_n - \xi| \leq c^{2^n-1}|x_0 - \xi|^{2^n}.$$

(4) Konvergenzkriterium: [E.57]

Ist f zweimal stetig di erenzierbar[E.58] und liegen alle Iterationspunkte $x_n, n \in \mathbb{N}$, inkl. Startpunkt x_0 in einem Intervall I wofür

$$\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1, \qquad \forall x \in I, f'(x) \neq 0,$$

gilt, so konvergiert das Newton-Verfahren, falls I eine Nullstelle enthält.

◇

Bemerkungen.

- Es gibt verschiedene Varianten des Newton-Verfahrens. So kann z.B. ein sogenanntes Sekanten-Verfahren angewendet werden, wenn die Ableitungsfunktion z.B. nicht bekannt ist. So ein Verfahren basiert dann direkt auf dem Di erenzenquotienten. Das Newton-Verfahren ist aber diesen Verfahren bzgl. Konvergenzgeschwindigkeit überlegen.

- Als Ausblick in die "mehrdimensionale Analysis" sei auch erwähnt, dass das Newton-Verfahren eine mehrdimensionale Entsprechung hat: Damit können auch Nullstellen mehrdimensionaler Funktionen berechnet werden. Da dem Newton-Verfahren prinzipiell eine Linearisierung des Problems bzw. der Funktion zugrunde liegt, ist der mehrdimensionale Fall dann vor allem im Verbund mit der linearen Algebra, und dort speziell mit der numerischen linearen Algebra, zu behandeln.

Wir demonstrieren das Newton-Verfahren zuerst an einem ganz einfachen Beispiel:

§15-3 Beispiel.

Sei $f(x) := x^2 - 1$. Natürlich kennen wir die Nullstellen für diese sehr einfache quadratische Funktion (oder können sie z.B. mit der Mitternachsformel ganz einfach berechnen.). Es ist ja $f(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ und damit sind die Nullstellen gegeben durch $\mathcal{N} = \{-1, 1\}$.

Wir schauen mal, ob bzw. wie uns das Newton-Verfahren diese Nullstellen liefert. Wir wählen den Startpunkt $x_0 := 2$ (und wir erwarten, dass damit die Nullstelle 1 gefunden wird). Zuerst brauchen wir für das Newton-Verfahren noch die erste Ableitung von f:

$$f'(x) = 2x.$$

Dann berechnet die Newton-Iteration für die ersten drei Schritte: (Wir schreiben absichtlich alles sehr detailliert hin. Das wird man später natürlich abkürzen.):

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &\underset{\substack{\text{Def.}\\15-1}}{=} x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \\
x_2 &\underset{\substack{\text{Def.}\\15-1}}{=} x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{5}{4} - \frac{\frac{9}{16}}{\frac{10}{4}} = \frac{5}{4} - \frac{36}{160} = \frac{5}{4} - \frac{9}{40} = \frac{41}{40} \\
x_3 &\underset{\substack{\text{Def.}\\15-1}}{=} x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{41}{40} - \frac{(\frac{41}{40})^2 - 1}{2\frac{41}{40}} = \frac{41}{40} - \frac{\frac{1681}{1600} - \frac{1600}{1600}}{\frac{82}{40}} \\
&= \frac{41}{40} - \frac{81}{1600}\frac{40}{82} = \frac{41}{40} - \frac{81}{40 \cdot 82} = \frac{82 \cdot 41 - 81}{40 \cdot 82} = \frac{3362 - 81}{3280} = \frac{3281}{3280}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass diese Iteration ziemlich schnell gegen die Nullstelle 1 konvergiert:

$n =$	0	1	2	3
$x_n =$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{41}{40}$	$\frac{3281}{3280}$
$x_n \approx$	2	1.25	1.025	1.0003

Die zweite Nullstelle werden wir in einer Übungsaufgabe iterativ ermitteln. ◇

Das Newton-Verfahren lässt sich nun folgendermassen zur Lösung einer nicht-linearen Gleichung anwenden:

§15-4 Beispiel.

Angenommen wir wollen die (o ensichtlich nicht-lineare) Gleichung

$$x^2 = 5x^3$$

lösen. Durch einfaches Umschreiben erhalten wir

$$-5x^3 + x^2 = 0$$

und damit entspricht dies für die nicht-lineare Funktion $f(x) := -5x^3 + x^2$ gerade dem Au nden der Nullstellen. Mit dem Newton-Verfahren erhalten wir (wir tun natürlich so, als würden wir nicht sehen, dass 0 o ensichtlich eine Nullstelle ist...):

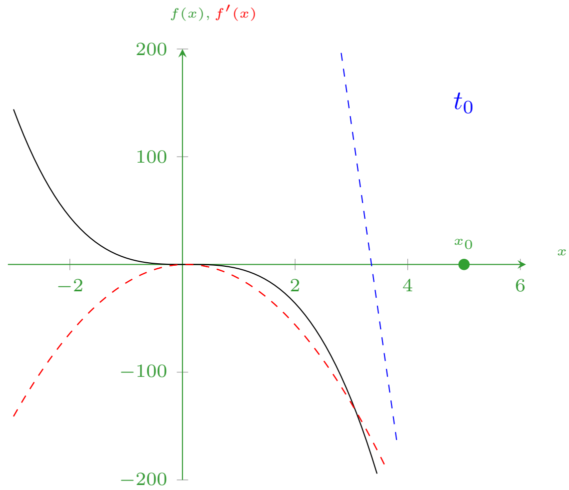
$$f'(x) = -15x^2 + 2x$$

Wählen wir mal den Startwert $x_0 := 5$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 5 \\
x_1 &= 5 - \frac{600}{365} = \frac{1825 - 600}{365} = \frac{1225}{365} = \frac{245}{73} \approx 3.36 \\
x_2 &= ... \approx 2.26 \\
x_3 &= ... \approx 1.53 \\
x_4 &= ... \approx 1.04 \\
x_5 &= ... \approx 0.72 \\
x_6 &= ... \approx 0.51 \\
x_7 &= ... \approx 0.37 \\
x_8 &= ... \approx 0.28
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_9 &= \ldots \approx 0.23 \\
x_{10} &= \ldots \approx 0.21 \\
x_{11} &= \ldots \approx 0.201 \\
x_{12} &= \ldots \approx 0.20001
\end{aligned}
$$

Die Iteration scheint tatsächlich wieder gegen eine Nullstelle (hier: $\frac{1}{5} = 0.2$) zu konvergieren. Vielleicht ist die Geschwindigkeit etwas überraschend langsam, vor allem am Anfang. Das erklärt sich aber leicht, wenn wir den Funktionsgraphen und die Stelle, wo der Startwert $x_0 := 5$ liegt, betrachten:



Die Tangente welche am Punkt $(5, f(5))$ des Graphen liegt, ist sehr steil und auch die darauffolgenden Iterationsstellen werden gerade anfangs sehr steile Tangenten hervorrufen. Erst wenn die Iteration relativ nahe am Nullpunkt liegt sind diese Tangentensteigungen flacher, was die Konvergenz beschleunigt. ◇

Um zu zeigen, dass auch was schiefgehen kann, werden wir in den Übungen auch entsprechende Beispiele studieren.

Natürlich muss zudem eine di erenzierbare Funktion nicht unbedingt eine Nullstelle haben. Folgender Satz über di erenzierbare Funktionen hilft manchmal, ein Intervall zu finden, in welchem sicher eine Nullstelle von f liegt, falls es das überhaupt gibt:

§15-5 Satz. (Kriterium für eine Nullstelle einer stetigen Funktion in einem Intervall)

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion (was insbesondere für di erenzierbare Funktionen gilt).

Gilt für ein Intervall $[a, b] \subseteq D$, $a < b$

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

dann hat f im Innern (a, b) mindestens eine Nullstelle. ◇

Das Newton-Verfahren spielt auch heute noch in der Praxis eine wichtige Rolle. Häufig setzt man es in Kombination mit anderen Verfahren ein: Eine Eingangsstufe lokalisiert grob

Nullstellen, danach verwendet man das Newton-Verfahren um dort lokal die Nullstelle mit gewünschter Genauigkeit zu berechnen. (Natürlich muss man dafür auch noch die Ableitung berechnen können.)

Kapitel 16

Numerische Methoden: Die Taylor-Approximation

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 16.1 Sie kennen die Taylor-Approximation einer Funktion, ihre Bedeutung und können sie an konkreten Beispielen anwenden.

LZ 16.2 Sie können in konkreten Fällen den Fehler einer Taylor-Approximation mit den behandelten Sätzen bestimmen und auch einen Funktionswert bei vorgegebener Genauigkeit berechnen.

LZ 16.3 Sie kennen den Satz von Taylor als Kriterium für die Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe.

16.1 Einführung und Problemstellung

Viele kompliziertere nichtlineare Funktionen lassen sich durch eine Verallgemeinerung der Idee des Newton'schen Tangentenverfahrens, der sogenannten Taylor-Approximation[E.59] , besser handhaben. Man sagt dann auch, dass die "Taylor-Entwicklung" einer solchen Funktion betrachtet wird. Dies ist eine weitere sehr wichtige Anwendung in der Ingenieursmathematik, welche sowohl auf der Di erentialrechnung als auch auf dem früher kennengelernten Konzept einer unendlichen Reihe basiert.

Worum geht es genau? Die Grundfrage ist folgende: Wann und wie kann eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem o enen Intervall $I \subseteq D$ durch eine konvergente Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt $a \in I$, d.h., durch eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad \forall x \in I,$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, dargestellt werden?

Es zeigt sich, dass folgender Satz gilt:

§16-1 Satz. (Notwendige Form einer konvergenten Potenzreihe für eine Funktion)

Wird eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem o enen Intervall $I \subseteq D$ durch eine konvergente Potenzreihe der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad \forall x \in I,$$

mit $a \in I$, dargestellt, dann gilt notwendigerweise $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

und damit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

(Und insbesondere ist die Funktion dann notwendigerweise unendlich oft stetig di erenzierbar [E.60] .) ◇

Das heisst, will man eine Funktion auf einem o enen Intervall durch eine sogenannte konvergente Potenzreihe darstellen, dann hat sie notwendigerweise die angegebene Form. Dies ist gerade die Reihe, welche wir im folgenden Abschnitt Taylor-Reihe nennen werden.

16.2 Die Taylor-Approximation

§16-2 Definition. (Taylor-Polynom und Taylor-Reihe einer Funktion; Maclaurin-Reihe)

Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem o enen Intervall I.

(1) Ist f n-mal stetig di erenzierbar, so nennen wir für einen inneren Punkt $a \in I$ das Polynom

$$(T_n f)(x; a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das n-te Taylor-Polynom von f an der Entwicklungsstelle a. (Oder auch das Taylor-Polynom der Ordnung n von f an der Stelle a.)

Die Grösse

$$a_k := \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

darin nennt man auch den k-ten Taylor-Koe zienten von f an der Stelle a. (Oder den Taylor-Koe zienten der Ordnung k von f an der Stelle a.)

(2) Ist f sogar unendlich oft (∞-mal) stetig di erenzierbar, so können wir für einen inneren Punkt $a \in I$ sogar die Reihe

$$(Tf)(x; a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

betrachten, welche wir die Taylor-Reihe von f an der Entwicklungsstelle a nennen.

(3) Im Fall von $a := 0$ nennt man die Taylorreihe übrigens auch Maclaurin-Reihe für f.

◇

Die zentrale Frage ist nun, wie gut bzw. wann die Funktion f durch die unter Umständen besser zu handhabende Taylor-Reihe ersetzt werden kann und wie gut das n-te Taylor-Polynom die Funktion f annähert. Insbesondere möchte man wissen, wie gross der von n abhängige Fehler ist, wenn man zum Beispiel anstatt f das n-te Taylor-Polynom benutzt. Eine Antwort liefert:

§16-3 Satz. (Satz von Taylor (Taylor-Entwicklung))

Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf einem o enen Intervall I mind. $n+1$-mal stetig di erenzierbare Funktion[E.61] . Sei a eine Stelle im Innern von I.

Dann lässt sich für jedes $x \in I$ die Funktion f als

$$f(x) = (T_n f)(x; a) + (R_n f)(x; a)$$

darstellen, wobei

$$(R_n f)(x; a) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \text{für ein } \xi \in (a, x),$$

das sogenannte n-te **Restglied in Lagrange-Form** ist. Diesen Sachverhalt nennen wir die **Taylor-Entwicklung von f an der Stelle a**. ◇

Beachten Sie, dass wir das exakte ξ im Restglied im Allgemeinen nicht finden können (oder müssen)! Wir schätzen stattdessen die Grösse dieses Restgliedes im Normalfall durch eine betragsmässig obere Grenze ab.

Wir müssen hier auch noch erwähnen, dass es noch eine Anzahl weiterer Formeln für das n-te Restglied gilt, welche je nach Situation geeigneter sind. Auf eine detailliertere Besprechung solcher Aspekte müssen wir hier aber verzichten. Stattdessen wollen wir fähig sein, das Bisherige an konkreten Beispielen anzuwenden. Hierfür ist folgende Version des Satzes von Taylor ebenfalls von zentraler Bedeutung:

§16-4 Satz. (Satz von Taylor (Taylor-Entwicklung) für unendlich oft di erenzierbare Funktionen)

Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf einem o enen Intervall I unendlich oft (d.h., ∞-mal) stetig di erenzierbare Funktion (wir nennen solche Funktionen übrigens auch glatt.) Sei a eine Stelle im Innern von I.

Gibt es Konstanten $c, d > 0$, so dass

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq cd^n,$$

für alle $x \in I$ und fast alle n (d.h., nur mit endlich vielen Ausnahmen), dann strebt das Restglied $(R_n f)(x; a)$ für n gegen ∞ gegen Null (d.h., $\lim\limits_{n\to\infty} (R_n f)(x; a) = 0$).

Mit anderen Worten, der Fehler in der Approximation verschwindet und die Funktion f ist identisch mit ihrer Taylor-Reihe:

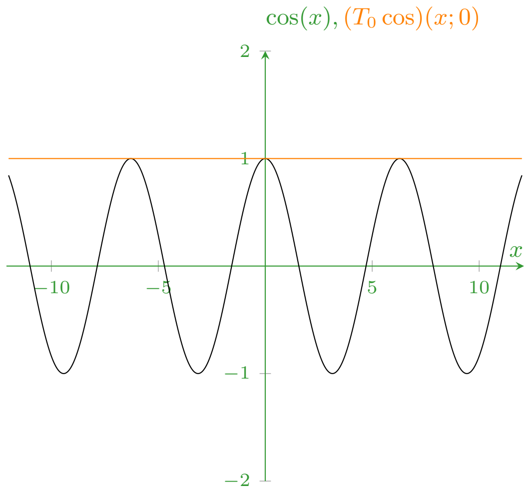
$$f(x) = (Tf)(x; a) \underset{\substack{\text{(nach}\\ \text{Def.)}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

◇

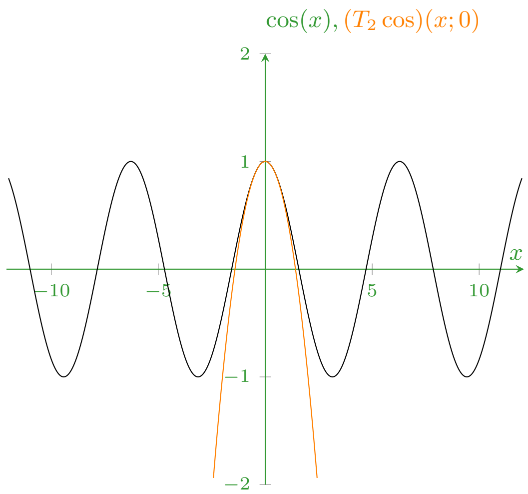
§16-5 Beispiel.

Als ein erstes Beispiel wollen wir uns die Taylor-Approximation der Cosinus-Funktion mit Entwicklungspunkt $a := 0$ ansehen. Wir starten mit der Bestimmung des n-ten Taylor-Polynoms von $\cos(x)$ an der Stelle $a := 0$:

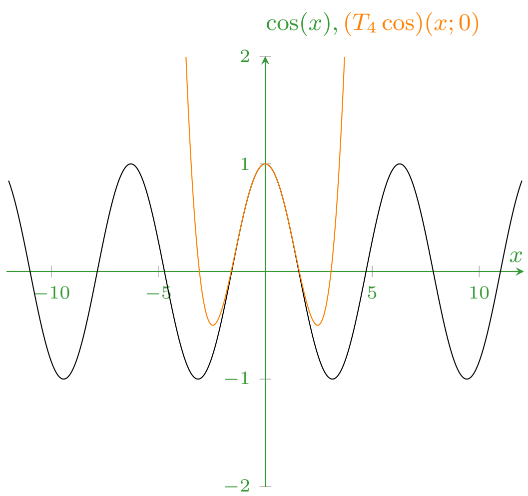
$$(T_n \cos)(x; 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k$$



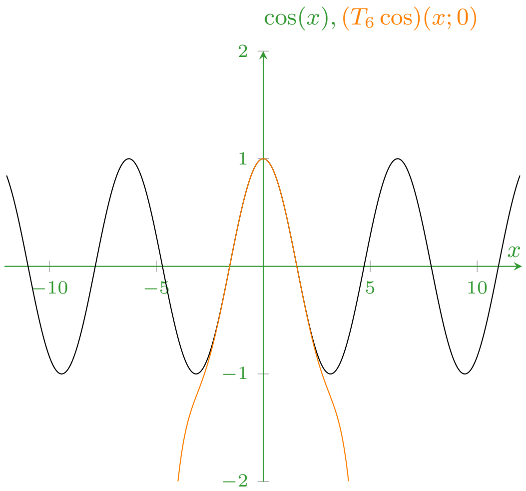
$\cos(x), (T_0 \cos)(x; 0)$
2
1
x
-10
-5
5
10
-1
-2

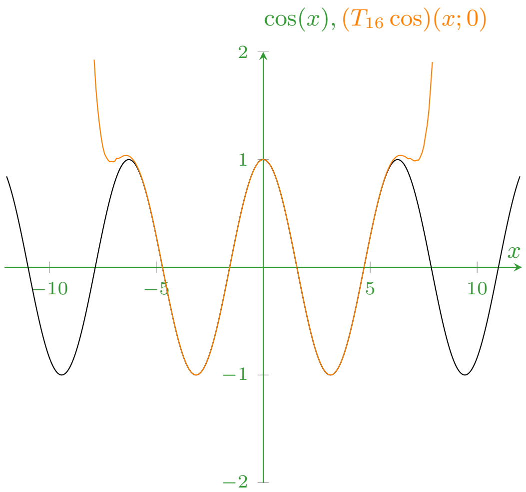


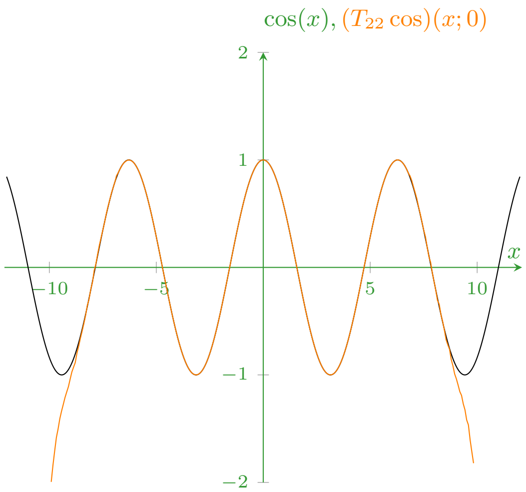
$\cos(x), (T_2 \cos)(x; 0)$
2
1
x
-10
-5
5
10
-1
-2



$\cos(x), (T_4 \cos)(x; 0)$
2
1
x
-10
-5
5
10
-1
-2


cos(x), (T6 cos)(x; 0)
2
1
−1
−2
x
−10
−5
5
10


cos(x), (T16 cos)(x; 0)
2
1
−1
−2
x
−10
−5
5
10


cos(x), (T22 cos)(x; 0)
2
1
−1
−2
x
−10
−5
5
10

◇

Teil III

Integralrechnung

Kapitel 17

Einführung und Grundbegriffe

Kapitelinhalt

LERNZIELE:

LZ 17.1 Sie verstehen die zwei Grundfragen der Integralrechnung.

LZ 17.2 Sie wissen im dargestellten Umfang, wie die erste Grundfrage auf die Begri e der Stammfunktion, des unbestimmten Integrals und der unbestimmten Integrierbarkeit führen.

LZ 17.3 Sie verstehen im dargestellten Umfang, wie die zweite Grundfrage auf die Begri e des bestimmten Riemann Integrals und der Riemann-Integrierbarkeit führen.

LZ 17.4 Sie können einfache Flächenprobleme selbständig lösen.

LZ 17.5 Sie kennen den Hauptsatz der Di erential- und Integralrechnung (Fundamentalsatz der Analysis) und können seine Bedeutung erklären.

17.1 Einführung

Mit der Integralrechnung kommen wir nun quasi zum “Gegenstück” der Di erentialrechnung. Wir werden sehen, wie dies gemeint ist und dass die Theorie dazu auch noch für andere wichtige Dinge benutzt werden kann, wie etwa die Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen bzw. zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse. Die zwei Grundfragen der Integralrechnung welche uns beschäftigen werden, sind also folgende:

§17-1 Definition. (Zwei Grundfragen der Integralrechnung)

(1) Die Frage nach der Stammfunktion und dem unbestimmten Integral einer Funktion:

Gegeben eine Funktion f.
Wie lautet eine Funktion F, so dass f gerade die Ableitung von F ist, also

$$f = F'$$

gilt?

(2) Die Frage nach der Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen bzw. zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse, d.h., dem bestimmten Integral einer Funktion:

Gegeben eine Funktion f mit den “geeigneten Eigenschaften”.
Wie gross ist die Fläche A_f, welche der Funktionsgraph von f mit der x-Achse einschliesst?

$\diamond$

Wir werden sehen, dass Di erenzieren und Integrieren entsprechender Funktionen als eine Operation und ihre inverse Operation gesehen werden kann (siehe später “Hauptsatz der Di erential- und Integralrechnung”). Die Ergebnisse dieser Theorie werden wir dann auch zur Lösung der zweiten Grundfrage, derjenigen der Flächenberechnung, benutzen können.

17.2 Die Stammfunktion, Integrierbarkeit und das unbestimmte Integral

Eine Funktion, welche abgeleitet gerade eine gegebene andere Funktion ergibt, ist o ensichtlich ein wichtiges Objekt. Wir geben dieser deshalb einen speziellen Namen und definieren:

§17-2 Definition. (Stammfunktion und unbestimmte Integrierbarkeit)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

(1) Eine di erenzierbare Funktion $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, wenn für alle $x \in D$:

$$F'(x) = f(x).$$

D.h., wenn f gerade die Ableitungsfunktion von F an jeder Stelle $x \in D$ ist.
Oder anders gesagt, wenn f auf D die Ableitungsfunktion von F ist.

(2) Gibt es für eine Funktion f eine Stammfunktion, so nennen wir f (unbestimmt) integrierbar.

$\diamond$

§17-3 Beispiele.

1. $F(x) := \frac{1}{4}x^4$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^3$.
   Denn $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4\right)'_x = \frac{4}{4}x^3 = x^3$.
2. Die Funktion $F(x) := \frac{1}{4}x^4 - 5$ ist eine andere Stammfunktion von $f(x) = x^3$.
   Denn es gilt ebenfalls $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - 5\right)'_x = \frac{4}{4}x^3 + 0 = x^3$.
3. $F(x) := -\cos(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$.
   Denn $F'(x) := (-\cos(x))'_x = -(-\sin(x)) = \sin(x)$.
4. Die Funktion $F(x) := \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2\sqrt{x}$.
   Denn $F'(x) = \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)'_x = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'_x = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{x}$.

$\diamond$

Nach Definition sind damit alle der Funktionen f in den vorhergehenden Beispielen (unbestimmt) integrierbar. Wenn Sie sich jetzt fragen, wie man denn konkret zu einer Funktion eine Stammfunktion bestimmt, dann ist das die richtige Frage! Ein wesentlicher Teil der Integrationstheorie befasst sich nämlich gerade damit, gri ge Sätze und Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen für eine gegebene Funktion zu liefern. Denn nur in einfachen Fällen ist dies "einfach so" möglich. Wir werden uns näher mit diesem Thema beschäftigen. Wir fahren aber vorerst fort, mit den Grundbegri en.

§17-4 Satz und Definition. (Unbestimmtes Integral, Integration)

Sei f eine integrierbare Funktion mit Stammfunktion F.

(1) Ist F Stammfunktion von f, so ist auch $F + C$ für alle reellen Zahlen $C \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Deshalb nennen wird den Ausdruck

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

auch das **unbestimmte Integral** der Funktion f. Hierin nennen wir:

- $\int$ das **Integrationszeichen**, welches an ein geschwungenes "S" für "Summe" erinnern soll,
- f bzw. $f(x)$ den **Integranden**,
- x die **Integrationsvariable**,
- $\mathrm{d}x$ symbolisiert die infinitesimal kleine[E.62] Intervall-Länge bzgl. der Integrationsvariablen x.

Das unbestimmte Integral beschreibt also die Gesamtheit der Stammfunktionen einer Funktion f.

(2) Mit **Integration** einer Funktion verstehen wir das Au nden des unbestimmten Integrals (also aller Stammfunktionen) oder einer einzelnen Stammfunktion einer gegebenen Funktion.

$\diamond$

§17-5 Beispiel.

Damit sind die unbestimmten Integrale für die Funktionen f im vorhergehenden Beispiel gegeben als

$$\begin{aligned} \int x^3 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}x^4 + C, \\ \int \sin(x) \,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + C, \\ \int 2\sqrt{x} \,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C, \end{aligned}$$

für beliebiges $C \in \mathbb{R}$. ◇

17.3 Das bestimmte Integral

Wir wollen uns nun der zweiten Frage zuwenden, nämlich der, wie man die Fläche unter einem Funktionsgraphen bzw. zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse berechnen kann. Wir werden sehen, dass die Theorie der Integralrechnung das nötige Werkzeug dazu liefert.

Wir fragen uns also, wie man z.B. die folgenden Flächen berechnen könnte:

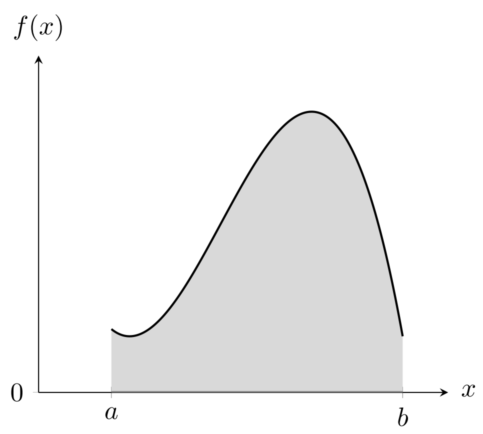


Abbildung 17.1 – Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse.

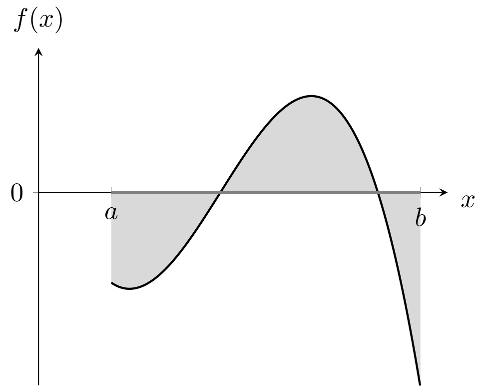


Abbildung 17.2 – Fläche zwischen einem anderen Funktionsgraphen und der x-Achse.

In der Di erentialrechnung konnten wir bereits erfolgreich durch eine Approximationsüberlegung und einen Grenzprozess die "instantane Wertänderung" einer Funktion bzw. die Tangente an einen Punkt des Funktionsgraphen ermitteln. Für die Fläche wollen wir eine analoge "infinitesimale" Überlegung machen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten hierzu. Den Weg, den wir hier gehen wollen, führt zum sogenannten Riemann'schen Integral oder auch Darboux-Integral genannt[E.63] . Eine andere (wichtige) Möglichkeit, die wir hier aber nicht besprechen werden, ist die des sogenannten Lebesgue Integrals. Und es gibt noch einige weitere Integralbegri e, z.B. das Stieltjes-Integral, Itō-Integral, ... usw..

Wir starten mit Riemann's Idee (Abschnitt 17.3.1) und diskutieren anschliessend Darboux's alternative Betrachtungsweise (Abschnitt 17.3.2). Schliesslich wird sich in entscheidender Weise herausstellen, dass beide Ideen völlig äquivalent sind und die Berechnungen nicht von den Herangehensweisen abhängen (Abschnitt 17.3.3. [E.64]

17.3.1 Riemann's Idee

Wir überlegen uns, dass die Schwierigkeit bei der Flächenberechnung unter einem Funktionsgraphen ja darin liegt, dass wir keine "Formel" für ein geometrisches Gebilde haben, deren (eine) Seite nicht eine Gerade ist. In der Elementarmathematik haben wir hingegen einige Flächenformeln kennengelernt für solche Objekte wie Quadrate, Recht- und Dreiecke. Im Fall des Rechtecks mit Seiten a und b wissen wir, dass sich die Fläche durch "Länge mal Breite" berechnet, d.h.,

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b.$$

Können wir dieses Wissen nutzen, um zumindest eine (sehr grobe) Näherung z.B. der Fläche in Abb. 17.1 zu erhalten? Ja, wir können diese Fläche z.B. annähern ("approximieren"), indem wir das Intervall des Definitionbereichs der Funktion unterteilen und die Fläche durch Rechtecke über diesen Intervallen ersetzen. Die Fläche dieser Rechtecke können wir ja eben elementar berechnen.

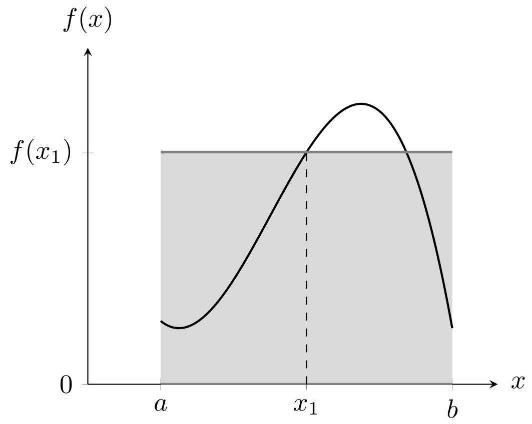


Abbildung 17.3 – Eine erste (grobe) Näherung der Fläche.

Das ist aber noch keine sehr gute Näherung für die Fläche. Und wir können uns auch überlegen, dass wenn der Funktionsgraph ein bisschen anders aussehen würde, diese Näherung durchaus noch bedeutend schlechter sein könnte. Aber was geschieht, wenn wir die Idee einfach weiterverfolgen und "verfeinern"? Wir können ja das Intervall $I := [a, b]$ in zwei gleich grosse Stücke zerlegen:

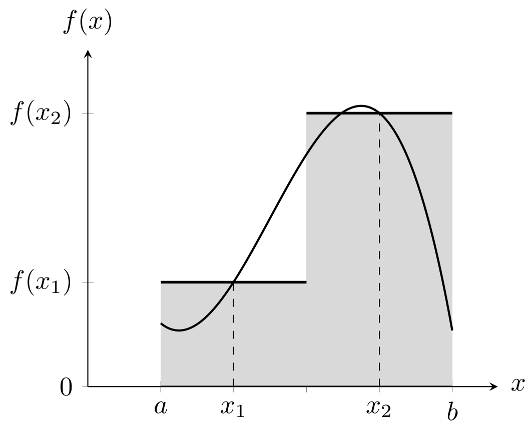


Abbildung 17.4 – Eine zweite Näherung der Fläche.

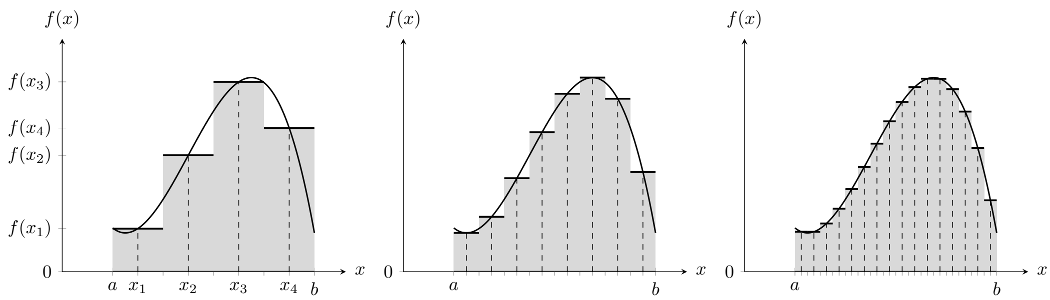


Abbildung 17.5 – Weitere Näherungen der Fläche für 4, 8 und 16 Intervalle.

Wenn wir also die Intervalle immer kleiner machen, dann scheint die Summe der Rechtecksflächen tatsächlich gegen die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse zu streben! Es lässt sich mathematisch zeigen, dass das zumindest für gewisse Klassen von Funktionen auf einem Interval (mehr dazu gleich!) immer funktioniert:

§17-6 Definition. (Riemann-Integrierbarkeit und (bestimmtes) Riemann-Integral)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir die Stellen

$$x_k := a + \frac{2k-1}{2}\Delta_n x, \quad k \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\},$$

Stützstellen genannt, wobei

$$\Delta x := \Delta_n x := (b-a)/n,$$

die n-te Intervall-Länge ist.

Dann nennen wir f eine Riemann-integrierbare Funktion, wenn der Grenzwert definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta_n x$$

existiert. Diesen Grenzwert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ selbst nennen wir dann das Riemann-Integral von f auf $[a, b]$ (oder auch nur das bestimmte Integral). $\diamond$

An dieser Stelle eine wichtige Bemerkung: Der Zahlenwert, welcher das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ in der vorhergehenden Definition §17-6 liefert, entspricht nur in gewissen Fällen gerade der gesuchten Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von f und der x-Achse. Nämlich nur dann gerade, wenn der ganze Graph oberhalb der x-Achse liegt, die Funktion also immer nicht-negativ ist. Wie wir etwas später sehen werden (Satz §17-18) liefert nämlich das Integral für den Fall eines Funktionsverlaufs unterhalb der x-Achse eine negative Zahl, welche aber zumindest dem Betrag nach dem Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse entspricht. Diesen Vorzeichenwechsel werden wir bei der Flächenberechnung noch berücksichtigen müssen bzw. für die korrekte Flächenformel müssen wir den Betrag der Funktion integrieren (siehe §17-19). Anschaulich gesprochen klappen wir die negativen Teile des Funktionsgraphen nach oben in den positiven Bereich über der x-Achse.

17.3.2 Darboux's alternative Betrachtungsweise

Im Gegensatz zur Grundidee von Riemann können wir als Approximationen für das Integral anstatt die Rechtecke um die verschiedenen mittleren Stellen herum zu nehmen, auch die sogenannten Darboux-Obersummen und -Untersummen betrachten. (Siehe auch Titelbild des Skripts!) Diese Idee geht auf Jean Darboux zurück und hat sich als völlig äquivalent zur Idee von Riemann herausgestellt. Wenn wir hier nun die Intervall-Längen gegen Null streben lassen, dann erkennen wir, dass für "geeignete" Funktionen der Grenzwert der Obersummen gleich dem Grenzwert der Untersummen ist, weil die kleinen Rechtecke, welche durch die Treppenfunktionen der Ober- und Untersummen entstehen, zu einem Punkt (mit Flächeninhalt Null) verschwinden. Wenn dies der Fall ist, nennen wir die Funktion auch Darboux-integrierbar und die beiden (gleichen) Grenzwerte das Darboux-Integral oder eben – da völlig äquivalent – Riemann-integrierbar und die beiden (gleichen) Grenzwerte das Riemann-Integral.

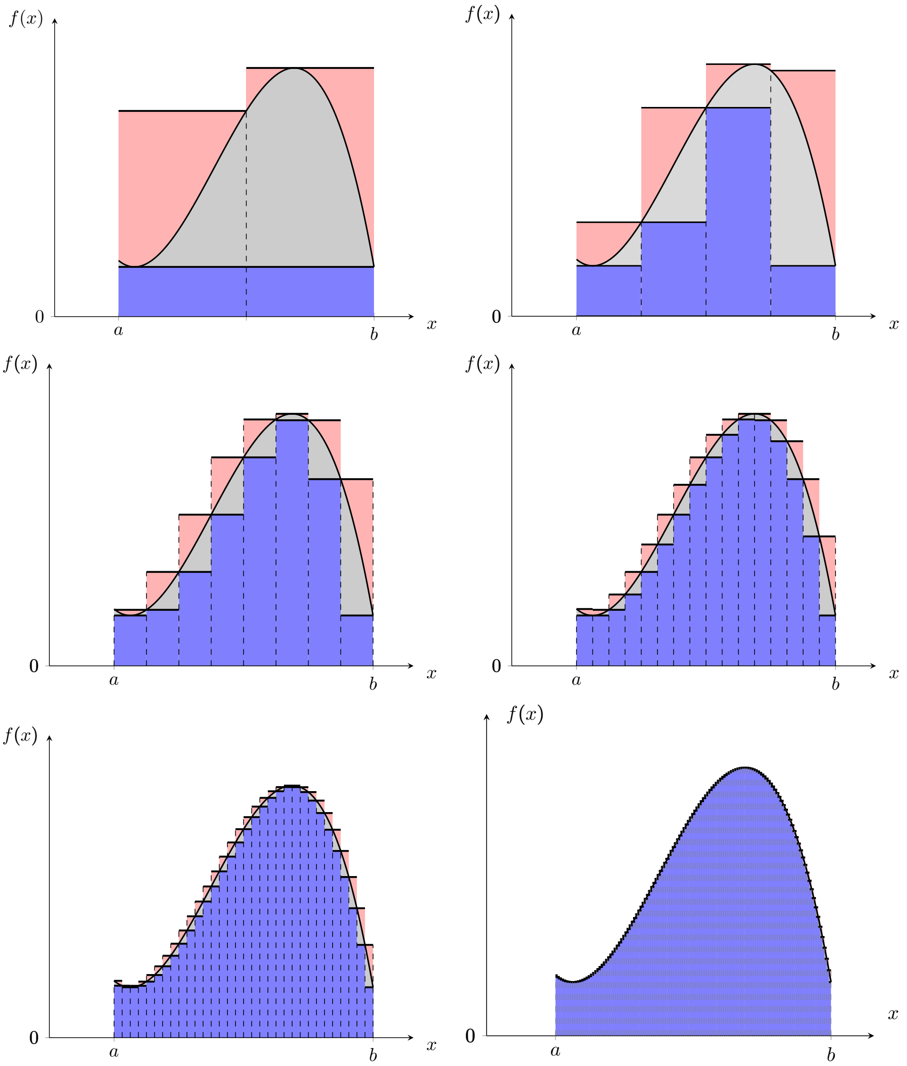


Abbildung 17.6 – Näherungen der Fläche nach Darboux für 2, 4, 8, 16, 32 und 128 Intervalle.

Diese Grundidee von Darboux wollen wir nun detailliert und präzise umsetzen. Dazu brauchen wir zuerst weitere Grundbegri e aus der Analysis.

§17-7 Definition. (Obere untere Schranke einer Menge; Supremum und Infimum einer Menge; unbeschränkte Mengen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) $x \in \mathbb{R}$ heisst obere Schranke von M

$$:\Longleftrightarrow \qquad \forall y \in M : y \leq x.$$

(2) $x \in \mathbb{R}$ heisst **untere Schranke** von M

$$:\Longleftrightarrow \qquad \forall y \in M : x \leq y.$$

(3) $x \in \mathbb{R}$ heisst **Supremum** von M

$$:\Longleftrightarrow \qquad x \text{ ist kleinste obere Schranke von } M.$$

Das Supremum einer Menge M wird auch

$$\sup M$$

geschrieben.

(4) $x \in \mathbb{R}$ heisst **Infimum** von M

$$:\Longleftrightarrow \qquad x \text{ ist grösste untere Schranke von } M.$$

Das Infimum einer Menge M wird auch

$$\inf M$$

geschrieben.

(5) M heisst **nach oben unbeschränkt**, wenn M keine obere Schranke hat. Man schreibt dann auch $\sup M := \infty$.

(6) M heisst **nach unten unbeschränkt**, wenn M keine untere Schranke hat. Man schreibt dann auch $\inf M := -\infty$.

(7) M heisst **unbeschränkt**, wenn M weder obere noch untere Schranke hat. D.h., wenn $\sup M = \infty$ und $\inf M = -\infty$ gilt.

◇

Bemerkung. Beachten Sie, dass sowohl obere und untere Schranke wie auch Supremum und Infimum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ Element der Menge sein kann, oder auch nicht! Im weiteren kann eine Menge obere oder untere Schranke haben oder auch nicht. Das gleiche gilt für Supremum und Infimum.

§17-8 Beispiele.

1. $\mathbb{N}$ ist eine nach oben unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $\inf \mathbb{N} = 0$. D.h., $\sup \mathbb{N} = \infty$. Jede negative Zahl inkl. der Null ist untere Schranke von $\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind beides unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$, denn es gibt keine grösste oder kleinste ganze und keine grösste oder kleinste rationale Zahl.
3. Das Intervall $I := [-2, 4]$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, für welche -2 untere Schranke und Infimum ist (-3 z.B. wäre eine weitere untere Schranke, welche aber nicht Infimum ist) und für welche 4 obere Schranke und Supremum ist. Im Intervall $(-2, 4)$ haben -2 und 4 genau diesselbe Eigenschaft, aber mit dem Unterschied, dass sie in der Teilmenge selbst nicht enthalten sind.
4. Das Intervall $I := (0, \infty)$ hat 0 als untere Schranke und Infimum, welche nicht Element dieser Teilmenge sind. Zudem ist das Intervall nach oben unbeschränkt, hat also keine obere Schranke und $\sup I = \infty$.

◇

§17-9 Definition. (Supremum und Infimum einer Abbildung)

Sei $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Abbildung.

(1) Für ein $M \subseteq D_f$ ist das **Supremum** von f auf M definiert durch

$$\sup_M f := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

(2) Für ein $M \subseteq D_f$ ist das **Infimum** von f auf M definiert durch

$$\inf_M f := \inf\{f(x) \mid x \in M\}.$$

$\diamond$

§17-10 Beispiele.

1. Sei $f(x) := x^2$ und $I := [-2, 3)$.

   Dann ist

$$\inf_I f = 0,$$
$$\sup_I f = 9.$$

2. Sei $f(x) := e^x$ und $M := (0, \infty)$.

   Dann ist

$$\inf_M f = 1,$$
$$\sup_M f = \infty.$$

3. Wieder für $f(x) := e^x$ und jetzt $M := (-\infty, 0)$ gilt:

$$\inf_M f = 0,$$
$$\sup_M f = 1.$$

4. Sei $f(x) := \sin(x)$ und $M := (-\pi, 0] \cup \{\frac{\pi}{4}\}$.

   Dann ist

$$\inf_M f = -1,$$
$$\sup_M f = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\diamond$

§17-11 Definition. (Zerlegungen eines beschränkten, abgeschlossenen Intervalls)

Sei $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein (beschränktes, abgeschlossenes) Intervall. Eine **Zerlegung** von I in n Teilintervalle, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ist eine Menge

$$Z := \{x_k \in I \mid x_0 = a, x_n = b, x_{k-1} < x_k, \forall k \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\}\}.$$

Die Zahl

$$\Delta x := \Delta_n x = \max\{x_k - x_{k-1} \mid k \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\}\}$$

nennt man die Feinheit der Zerlegung und die einzelnen Teilintervalle bezeichnet man meist mit I_k, d.h., man schreibt

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \qquad k \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\}.$$

Die Menge aller Zerlegungen des Intervalls I bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}$. $\diamond$

Bemerkung. Wenn wir die mittleren, einander entsprechenden Intervallsgrenzen nicht überlappen lassen, dann liefert eine Zerlegung Z wie oben definiert, gerade eine Partition des Intervalls I im Sinn wie im Modul mgli (Mathematische Grundlagen der Informatik) definiert. Beachten Sie ebenfalls, dass die Intervalle einer Zerlegung nicht notwendig alle die gleiche Länge haben müssen.

§17-12 Beispiele.

1. Für das Intervall $I := [0, 3]$ ist z.B.

   $$Z := \{0, 1, 2, 3\}$$

   eine Zerlegung. Die (wieder beschränkten und abgeschlossenen) Teilintervalle dieser Zerlegung sind also

   $$\{[0, 1], [1, 2], [2, 3]\}.$$

   (Und $[0, 1) \cup [1, 2) \cup [2, 3]$ wäre eine Partition von I.) Die Feinheit dieser Zerlegung ist $\Delta x = 1$.
2. Eine Zerlegung muss, wie gesagt, nicht in Teilintervalle gleicher Länge erfolgen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

   $$Z := \{0\} \cup \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\}\}$$

   eine Zerlegung des sogenannten Einheitsintervalls $I := [0, 1]$. Hier haben o ensichtlich alle Teilintervalle unterschiedliche Länge.[E.65] Die Feinheit ist für $n > 1$ konstant $\Delta x = \Delta_n x = \frac{1}{2}$.

   Konkret haben wir z.B. für $n := 5$ die Zerlegung $Z := \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ was I in

   $$I = [0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$$

   zerlegt. Die Feinheit ist $\Delta_5 x = \frac{1}{2}$.

3. Jedes Intervall $I := [a, b]$ lässt sich für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ durch die Zerlegung

   $$Z := \{a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) \mid k \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}\}$$

[E.66] in die sogenannte **äquidistante Zerlegung der Feinheit** $\Delta_n x = \frac{b-a}{n}$ unterteilen.

Das Interessante an dieser Zerlegung ist, dass die Feinheit für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. D.h., die Zerlegung wird beliebig fein (bis sie sich quasi nicht mehr vom Intervall I selbst unterscheiden lässt).

4. Die äquidistante Zerlegung des Intervalls $I := [-3, 3]$ ist gegeben durch

$$Z := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

◇

§17-13 Definition. (Ober- und Untersummen einer Funktion bzgl. einer Zerlegung)

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $Z := Z_n := \{x_k \in I \mid x_0 = a, x_n = b, x_k < x_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}_n\}$ eine Zerlegung von I in n Teilintervalle.

(1) Die (Darboux'sche) Obersumme von f bzgl. Z ist definiert als die Zahl

$$O_f(Z) := O_f(Z_n) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

(2) Die (Darboux'sche) Untersumme von f bzgl. Z ist definiert als die Zahl

$$U_f(Z) := U_f(Z_n) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

◇

§17-14 Beispiel.

Sei $f : I := [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$. Die äquidistante Zerlegung in $n := 4$ Teilintervalle und mit Feinheit $\Delta_4 x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ist gegeben durch

$$Z = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}.$$

Wir betrachten also die Teilintervalle

$$I = [1, \frac{5}{4}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}] \cup [\frac{7}{4}, 2].$$

Damit ist die Obersumme von f bzgl. dieser Zerlegung Z gegeben als

$$\begin{aligned} O_f(Z) &= \sum_{k=1}^{4} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + 2^2 \frac{1}{4} \\ &= \ldots \\ &= \frac{87}{32} \\ &\approx 2.72 \end{aligned}$$

und die Untersumme beträgt

$$\begin{aligned} U_f(Z) &= \sum_{k=1}^{4} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot \frac{1}{4} \\ &= 1^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \frac{1}{4} \\ &= \ldots \\ &= \frac{63}{32} \\ &\approx 1.97. \end{aligned}$$

Wir werden bald sehen, dass die Fläche unter f und über dem Intervall $[1,2]$ $A_f = \frac{7}{3} \approx 2.33$ beträgt. Die Ober- und Untersumme liefern also eine erste Näherung an diesen Wert:

$$U_f(Z) \approx 1.97 < 2.33 < 2,72 \approx O_f(Z).$$

$\diamond$

§17-15 Definition. (Darboux-Integrierbarkeit und bestimmtes Darboux-Integral einer Funktion)
Sei $f : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt

$$\inf_{Z \in \mathcal{Z}} O_f(Z) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} U_f(Z)$$

dann heisst f auf I **Darboux-integrierbar** und diese Zahl

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_{Z \in \mathcal{Z}} O_f(Z) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} U_f(Z)$$

das **bestimmte Darboux-Integral** von f auf I. $\diamond$

Bemerkung. Das Symbol $\int$ soll das Summenzeichen $\sum$ für diesen Grenzprozess der Integration symbolisieren. Das $\mathrm{d}x$ soll suggestiv die "di erentiell kleine Intervall-Längen" aus welchen das Argument x genommen wird, symbolisieren. Das heisst, man kann dies als Symbol für Feinheiten die gegen 0 streben au assen, also: $\mathrm{d}x$ symbolisiert quasi $\Delta x \to 0$ oder $\Delta_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Sind $\forall n \in \mathbb{N}$ die Z_n Zerlegungen in n Teilintervallen mit Feinheiten, welche für n gegen unendlich gegen Null streben, dann liefern diese eine erste hilfreichere Methode, das bestimmte Darboux-Integral als Grenzwert konkret zu berechnen (siehe folgender Satz).

§17-16 Satz. (Berechnung eines Darboux-Integrals)
Seien $\forall n \in \mathbb{N}$ Zerlegungen Z_n in n Teilintervallen gegeben, welche Feinheiten haben, die für $n \to \infty$ gegen Null streben. (D.h., $\Delta_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.) Dann lässt sich das Darboux-Integral einer Darboux-integrierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auch

berechnen als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_n x,$$

wobei $x_k \in I_k$. Ist die Zerlegung nicht äquidistant, dann kann man Letzteres auch als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_{k,n} x,$$

schreiben.[E.67] ◇

Auch beim Darboux-Integral müssen wir berücksichtigen, dass dieser Zahlenwert nur dann eine Formel für die Fläche zwischen Funktionsgraphen und der x-Achse liefert, wenn wir den Betrag von f integrieren (siehe wiederum Satz §17-19). [E.68]

§17-17 Beispiel.

Wir wollen mit vorhergehendem Satz das Darboux-Integral des Beispiels auf S.219 berechnen. Sei also $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ und

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_n x, \qquad x_k \in I_k \qquad \text{(Satz §17-16)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{1}{n}$$

(Weil hier $a = 1$ und $b = 2$, also $\Delta_n x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ ist.)

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\cdot\frac{1}{n}$$

(Weil hier $f(x) := x^2$ und damit also $f(x_k) = (x_k)^2$ ist.)

$$\underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

(Weil hier damit $x_k := a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) = 1 + k\frac{2-1}{n} = 1+\frac{k}{n}$ ist.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}+\frac{2k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{3},$$

(Grenzwert z.B. mit Python oder Mathematica, ...)

$$= \frac{7}{3}.$$

Beachten Sie in $(*)$, dass wir damit in unserem Fall wegen $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, aufgrund von Satz §17-16 und weil f in diesem Bereich streng monoton steigend ist, quasi automatisch die Untersummen im Grenzübergang zur Berechnung des Integrals verwenden. Das eben erhaltene Ergebnis können wir uns auch direkt mit Python bestätigen lassen:

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x')
>>> integrate(x**2,(x,1,2))
7/3
```

◇

17.3.3 Äquivalenz von Riemann's und Darboux's Betrachtungsweisen

Es hat sich gezeigt, dass Betrachtungsweisen von Riemann einerseits und von Darboux andererseits völlig äquivalent sind und wir können je nach Präferenz die eine oder die andere wählen. Dies und weitere zentrale Eigenschaften sind in den folgenden beiden, sehr wichtigen Sätzen zusammengefasst:

§17-18 Satz. (Eigenschaften)

(1) Das Darboux- und das Riemann-Integral sind äquivalent.

D.h.:

- ⤳ Jede Funktion, die Darboux-integrierbar ist, ist auch Riemann-integrierbar und umgekehrt.
- ⤳ Ist eine Funktion in einem dieser beiden Sinne integrierbar, so sind die beiden Integrale (d.h., die beiden Grenzwerte) gleich.
- ⤳ Insbesondere können wir damit auch das Riemann-Integral gemäss Satz §17-16 berechnen.

> Es hat sich eingebürgert, sowohl für Def. §17-6 als auch für Def. §17-15 deshalb einfach von der (bestimmten) Riemann-Integrierbarkeit und dem (bestimmten) Riemann-Integral zu sprechen. (Und das wollen wir im folgenden auch so machen.)

(2) Stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall (wir sagen auch, auf einem kompakten Intervall) sind Riemann-integrierbar. [E.69]

(3) $f > 0$ und Riemann-integrierbar $\implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$

(Mit $f > 0$ meinen wir, dass f auf $[a, b]$ eine positive Funktion ist, d.h., dass $\forall x \in [a, b] : f(x) > 0$.)

(4) $f < 0$ und Riemann-integrierbar $\implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0.$

(Mit $f < 0$ meinen wir, dass f auf $[a, b]$ eine negative Funktion ist, d.h., dass $\forall x \in [a, b] : f(x) < 0$.)

$\diamond$

Wegen Satz §17-18 (3) und (4) müssen wir zur Flächenberechnung einer beliebigen Riemann-integrierbaren Funktion (vgl. z.B. Abb. 17.2) also einfach den (oder die) negativen Teile "nach oben klappen". Wir erhalten also allgemein folgende Antwort auf unsere Ausgangsfrage zur Flächenberechnung:

§17-19 Satz. (Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse)

Sei $f : [a, b] \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von f und der x-Achse gegeben durch das Riemann-Integral

$$A_f = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$\diamond$

17.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Fundamentalsatz der Analysis)

§17-20 Theorem. (Hauptsatz der Di erential- und Integralrechnung (Fundamentalsatz der Analysis))

(1) Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist für alle $x_0 \in (a, b)$ die Funktion $F : [x_0, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine auf $[x_0, b]$ stetige und auf (x_0, b) di erenzierbare Funktion und gerade eine Stammfunktion von f.

Insbesondere ist damit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) di erenzierbar mit

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in (a, b).$$

(2) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I := [a, b]$ integrierbare Funktion mit Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

◇

Beweis. (siehe Literatur) □

§17-21 Beispiele.

1. Wir vollziehen den ersten Teil des Hauptsatzes für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ kurz nach. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_n t \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kx}{n}\right)^2 \cdot \frac{x}{n} \\
&\qquad \text{(Da } t_k = 0 + k\left(\frac{x-0}{n}\right) = \frac{kx}{n} \text{ und } \Delta_n t = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}\text{.)} \\
&= x^3 \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}}_{=1/3,\ \text{Python}} \\
&= \frac{1}{3}x^3.
\end{aligned}$$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist tatsächlich eine Stammfunktion von f.

2. Da $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von $f(x) := x^2$ ist, können wir mit dem zweiten Teil des Hauptsatzes das bestimmte Integral von Beispiel S.219 bzw. S.221 sofort nachrechnen:

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\,\Big|_1^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

◇

Kapitel 18

Integrationstechniken: Symbolische Integration

Kapitelinhalt

Version: 1.3, Last compiled on 2022/07/08, 12:00:13

LERNZIELE:

LZ 18.1 Sie sollen fähig sein, die behandelten Sätze anzuwenden und damit unbestimmte und bestimmte Integrale symbolisch zu bestimmen.

18.1 Unbestimmte Integrale

Mit den folgenden Integralen wichtiger Funktionen und den anschliessenden Integrationsregeln können wir für viele der in der Praxis vorkommenden Funktionen ihr Integral bestimmen.

§18-1 Satz. (Integrale wichtiger Funktionen ("Grundintegrale"))

(1) $\int 0 \, \mathrm{d}x = 0 + C = C.$

(2) $\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C.$

(3) Folgendes Grundintegral ist auch unter dem Namen Konstantenregel bekannt:
$\int c \, \mathrm{d}x = cx + C, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$

(4) Das folgende Grundintegral bzw. die nächsten vier entsprechen einer Potenzregel:
$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ für $n \in \mathbb{N}, n \neq -1.$

(5) $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ und $x \neq 0.$

(6) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$ (Das ist der vorhergehende Fall $n = -1.$)

(7) $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $x > 0.$

(8) $\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C.$

(9) $\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + C.$

(10) $\int \tan(x) \, \mathrm{d}x = -\ln(|\cos(x)|) + C,$ für $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(11) $\int \cot(x) \, \mathrm{d}x = \ln(|\sin(x)|) + C,$ für $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(12) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \tan(x) + C,$ für $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(13) $\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, \mathrm{d}x = -\cot(x) + C,$ für $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(14) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C.$

(15) $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C,$ für $a > 0.$

◇

Beweis. (durch Ableiten) □

Wie gesehen, entspricht die Integration einer Funktion der Umkehroperation der Di erentiation einer Funktion. Deshalb haben wir unter anderem zu jeder Ableitungsregel (siehe Satz §11-6) eine zugehörige "umgekehrte Integrationsregel".

§18-2 Satz. (Integrationsregel)

Im Folgenden seien f und g Riemann-integrierbare Funktionen.

(1) Summen- und Di erenzregel:

$$\int f(x) \pm g(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(2) Faktorregel: $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$\int c f(x) \, \mathrm{d}x = c \int f(x) \, \mathrm{d}x.$$

(3) Partielle Integration (Produktintegration; aus Produktregel):

$$\int f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(4) Substitutionsregel (aus Kettenregel):

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\phi'(t) \, \mathrm{d}t$$

für stetig di erenzierbare Funktion ϕ. (D.h., Substitution $x = \phi(t)$) Dieses Vorgehen bezeichnen wir oft auch als Variablentransformation.

Die Substitutionsregel hat in der Leibniz-Notation für die Ableitung folgende Form, welche manche Leute praktischer finden:

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

◇

Summen-/Di erenz- und Faktorregel sind o ensichtlich. Wir geben erste Beispiele für die partielle Integration und die Substitutionsregel:

§18-3 Beispiel.

Angenommen wir wollen das unbestimmte Integral von $\int xe^x \, \mathrm{d}x$ berechnen. Mit partieller Integration (p.I.) erhalten wir dann leicht:

$$\int \underbrace{x}_{=f} \underbrace{e^x}_{=g'=g} \, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

◇

§18-4 Beispiel.

Die Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \sqrt{2x-1} \, \mathrm{d}x$ können wir z.B. mit einer geeigneten Variablensubstitution machen:

$$\int \sqrt{2x-1} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t$$

(Variablensubstitution $t = \phi^{-1}(x) = 2x - 1$, also $x = \phi(t) = \frac{1}{2}(t+1)$ mit $\phi'(t) = \frac{1}{2}$.)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \right) \\
&= \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + C. \\
&\quad \text{(Rücksubstitution der Variable } t = \phi^{-1}(x) = 2x-1)
\end{aligned}
$$

◇

Falls jemand ein Beispiel der Substitutionsregel in der Leibniz-Notation für die Ableitung möchte:

§18-5 Beispiel. (Substitutionsregel in der Leibniz-Notation für die Ableitung)

Wir berechnen $\int 3x^2 e^{x^3} \, \mathrm{d}x$ und verwenden dabei die Leibniz-Notation für die Ableitung. Die Substitutionsregel können wir hier "von rechts nach links gelesen" anwenden, also auf unser Integral angewendet in der Form

$$
(*) \qquad \int f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \int f(x) \, \mathrm{d}x
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\int 3x^2 e^{x^3} \, \mathrm{d}x &= \int e^{x^3} 3x^2 \, \mathrm{d}x \\
&\quad \text{(Nur die Faktoren des Integranden kommutiert, damit unser Integral so dasteht,} \\
&\quad \text{wie wir } (*) \text{ anwenden)} \\
&= \int e^t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x \\
&\quad \text{(Hier: } t := x^3 \text{ und } \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} = 3x^2) \\
&= \int e^t \frac{\mathrm{d}t}{\cancel{\mathrm{d}x}} \, \cancel{\mathrm{d}x} \\
&= \int e^t \, \mathrm{d}t \\
&= e^t + C \\
&= e^{x^3} + C. \\
&\quad \text{(Rücksubstitution } t = x^3)
\end{aligned}
$$

◇

Oft kann insbesondere die partielle Integration mehrmals angewendet werden. Das nennt sich dann n-fache **partielle Integration**. Ein Beispiel hierzu, welche noch einen häufig erfolgreichen Trick zeigt:

§18-6 Beispiel.

Wir wollen das unbestimmte Integral $\int e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x$ berechnen. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\int e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x &= \int \underbrace{\cos(2x)}_{=f} \underbrace{e^x}_{=g'=g} \, \mathrm{d}x \\
&\quad (\textit{Geeignete} \text{ Wahl von } f \text{ und } g.)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos(2x)e^x - \int (\cos(2x))' e^x \, \mathrm{d}x \\
&= \cos(2x)e^x + 2 \int \underbrace{\sin(2x)}_{=f} \underbrace{e^x}_{=g} \, \mathrm{d}x \\
&= \cos(2x)e^x + 2 \left(\sin(2x)e^x - 2 \int \cos(2x)e^x \, \mathrm{d}x \right) \\
&\quad \text{(Partielle Integration ein zweites Mal angewendet.)} \\
&= \cos(2x)e^x + 2\sin(2x)e^x - 4 \int \cos(2x)e^x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Auf den ersten Blick scheinen wir so nicht wirklich weiter zu kommen. Aber der Eindruck täuscht und ist ein exzellentes Beispiel, dass es wichtig ist, dass man immer sehr aufmerksam seine Rechnung betrachtet und das Ziel, was man erreichen möchte! Beim genaueren betrachten der letzten Zeile, sehen wir nämlich, dass wir rechts genau noch das Integral stehen haben, welches wir ja berechnen wollen und auch links der Gleichheitskette steht! Damit können wir diese Gleichung leicht äquivalent umformen und erhalten unmittelbar unser Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
5 \int e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x &= \cos(2x)e^x + 2\sin(2x)e^x \\
\iff \int e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{5} \left(\cos(2x)e^x + 2\sin(2x)e^x \right) \\
\iff \int e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{5} \cos(2x)e^x + \frac{2}{5} \sin(2x)e^x .
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Wir sehen auch, dass es entscheidend ist, dass wir beim Produkt im Integranden die "richtigen" Faktoren für die Rolle des f und des g wählen! Eine

Kleine Merkregel zur partiellen Integration:

- Als f wählen wir vorzugsweise einen Faktor des Integranden, welcher abgeleitet einen einfacheren Term darstellt.
- Als g wählen wir vorzugsweise einen "grösstmöglichen" Teilfaktor des Integranden, für welchen wir das Integral gut berechnen können (z.B. via eines Grundintegrals).

Bemerkung. Eine weitere wichtige Technik ist die Integration durch sogenannte Partialbruchzerlegung des Integranden, welche oft bei gebrochen-rationalen Integranden weiterhilft. Ohne dass wir diese Technik hier näher studieren können, sei dies erwähnt um zu zeigen, dass es natürlich noch weitere Verfahren zur symbolischen Integration gibt.

Bemerkung. Schliesslich sei auch noch erwähnt, dass es oft zum Ziel führt, wenn man den Integranden umformt, bevor man integriert. Besonders oft ist dies eine gute Strategie, wenn man einen Ausdruck zuerst möglichst vollständig ausmultipliziert oder sonst wie in mehrere kleinere Summanden zerlegt, weil man dann zuerst die Summen- und Di erenzregel anwenden kann und so einfachere Integranden erhält. Noch ein Beispiel hierzu:

§18-7 Beispiel.

$$
\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(Integranden umformen)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}
$$

◇

18.2 Bestimmte Integrale

Zusätzlich zu den Sätzen über das unbestimmte Integral (§18-1 und §18-2) gibt es für die Berechnung bestimmter Integrale noch eine Vielzahl weiterer Facts, von denen wir hier noch ein paar sehr nützliche kennelernen wollen. Wir werden auch gleich als erstes sehen, wie nützlich dies tatsächlich sein kann.

Aber erinnern Sie sich bitte an dieser Stelle nochmals daran, dass das unbestimmte Integral und das bestimmte Integral immer zwei völlig unterschiedliche mathematische Objekte sind:

- Das unbestimmte Integral ist immer eine Funktion (bis auf eine additive Konstante, die Stammfunktion des Integranden).
- Das bestimmte Integral ist immer eine Zahl.

Der Hauptsatz der Di erential- und Integralrechnung zeigt uns aber unter anderem, wie wir das Eine mit dem Anderen berechnen können.

Wir haben in Satz §17-19 eine erste, allgemeine Berechnungsformel für die Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse formuliert. Das "Problem" dort ist, dass das Betragszeichen im Integranden die e ektive Berechnung des Integrals unnötig schwierig macht. Denn wenn wir das Verhalten des Vorzeichens des Integrals geeignet berücksichtigen, können wir die Flächenberechnung auch ohne die Betragsfunktion im Integranden durchführen. Hilfreich dafür sind Facts aus den folgenden zusätzlichen Rechenregeln für bestimmte Integrale:

§18-8 Satz. (Rechenregeln für bestimmte Integrale)

Im Folgenden seien die involvierten Funktionen immer auf den entsprechenden Intervallen Riemann-integrierbar und zur ersten Vereinfachung hier sogar stetig[E.70] . Dann gilt:

(1) Vertauschungsregel (Vorzeichenregel):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Integral über einem Punkt:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(Das formuliert man manchmal sprachlich auch so: "Das Integral über einem zum Punkt degenerierten Intervall ist immer Null.")

(3) Zerlegungsregel bzgl. des Intervalls: $\forall c \in I := [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diese Regel kann natürlich auch auf beliebig endlich viele “Zwischenstellen” $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$ erweitert werden:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) Mittelwertsatz (der Integralrechnung) für stetige Funktionen: $\exists \xi \in I := [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$

Der Funktionswert $f(\xi)$ wird dann Mittelwert des Integrals von f über dem Integrationsintervall $[a,b]$ genannt. Der Sinn dieses Begri s wird deutlich, wenn wir die Formel leicht umstellen:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi).$$

(5) Substitutionsregel für bestimmte Integrale[E.71] : Sei $\phi : [\alpha,\beta] \to I$ stetig di erenzierbar (und $f : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ wie bereits gesagt stetig). Dann gilt:

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

◇

Das liefert uns u.a. neben der allgemeinen Formel von Satz §17-19 noch eine handlichere Formel zur Flächenberechnung, für den Fall, dass wir endlich viele Nullstellen haben und damit endlich viele Teile des Funktionsgraphen je positiv oder negativ ist:

§18-9 Satz. (Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse (Version 2))

Sei $f : [a,b] \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit den höchstens endlich vielen Nullstellen $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$. Dann ist die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von f und der x-Achse gegeben durch

$$A_f = \sum_{k=0}^{n-1} A_{f_k},$$

wobei

$$\begin{aligned} f_k : [c_k, c_{k+1}] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_k(x) := f(x), \end{aligned}$$

$c_0 := a, c_n := b$ (d.h., die Teilfunktionen auf den Teilintervallen, die entweder positiv ($f_k > 0$) oder negativ ($f_k < 0$) sind) und

$$A_{f_k} := \begin{cases} \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f_k(x)\, \mathrm{d}x, & f_k > 0, \\ -\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f_k(x)\, \mathrm{d}x, & f_k < 0. \end{cases}$$

◇

Schliesslich halten wir noch fest, dass wir die bisherigen auf einem Intervall $I := [a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen folgendermassen charakterisieren können:

§18-10 Satz. (Charakterisierung auf einem beschränkten Intervall Riemann-integrierbarer Funktionen)

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Wir sagen, dass eine Eigenschaft fast überall gilt, wenn es nur endlich viele Ausnahmen gibt, für welche die Eigenschaft nicht gilt. Dann haben wir folgende Charakterisierung der Riemann-integrablen Funktionen:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist Riemann-integrierbar} \\ \iff \quad & f \text{ ist beschränkt und fast überall stetig.} \end{aligned}$$

◇

Damit erhalten wir einen Satz zur Berechnung des bestimmten Integrals aller Riemann-integrierbaren Funktionen:

§18-11 Satz. (Bestimmtes Integral einer beliebigen Riemann-integrierbaren Funktion)

Sei $f : [a, b] \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit den höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen $c_1 < c_2 < ... < c_{n-1}$ und sei $c_0 := a$ und $c_n := b$. Dann ist ihr Riemann-Integral gegeben als

$$\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

◇

18.3 Integraltafeln, Webressourcen, Computer Algebra Systeme

Es ist o ensichtlich so, dass Integrale zu berechnen nicht notwendigerweise ein leichtes Unterfangen ist. Als Ingenieur ist es deshalb insbesondere auch wichtig zu wissen, wo man nachschlagen kann. Historisch haben sich grössere (gedruckte) Sammlungen von Integralen ("Integraltafeln") entwickelt. Mit Internet und Computer Algebra Systemen haben sich dazu noch zwei weitere wichtige Hilfsmittel hinzugesellt. Denken Sie aber daran, dass Sie als Ingenieur trotzdem immer noch die letzte Verantwortung dafür tragen, ob die Mathematik, welche Sie benutzen, auch korrekt ist.

Ein paar hilfreiche Ressourcen möchte ich hier noch auflisten:

- Gedruckte Integralsammlungen (in entsprechenden Bibliotheken verfügbar):
  - Tabellen im "Bronstein":
  - "Gradshteyn-Ryzhik":
  - "Gröbner und Hofreiter":
  - Tabellen im "Zwillinger":
- Web:
  - Integrale auf EqWorld: **http://eqworld.ipmnet.ru/en/auxiliary/aux-integrals.htm**
  - **https://de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung_Mathematik:_Integrale**
- Computer Algebra Systeme (kleine Auswahl, `<...>` bedeutet, hier entsprechender Ausdruck einzugeben):
  - Python:

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x')
>>> integrate(<f(x)>,x)
```

Listing 18.1 – Unbestimmtes Integral mit Sympy bestimmen

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x')
>>> integrate(<f(x)>,(x,<a>,<b>))
```

Listing 18.2 – Bestimmtes Integral mit Sympy bestimmen

  - Mathematica:

```
In[1]:= Integrate[<f[x]>,x]
```

Listing 18.3 – Unbestimmtes Integral mit Mathematica bestimmen

```
In[1]:= Integrate[<f[x]>,{x,<a>,<b>}]
```

Listing 18.4 – Bestimmtes Integral mit Mathematica bestimmen

– Matlab:

```
syms x
int(<f(x)>, x)
```

Listing 18.5 – Unbestimmtes Integral mit Matlab bestimmen

```
syms x
int(<f(x)>, x,<a>, <b>)
% oder aequivalent:
int(<f(x)>, x,[<a>, <b>])
```

Listing 18.6 – Bestimmtes Integral mit Matlab bestimmen

Kapitel 19

Integrationstechniken: Numerische Integration

LERNZIELE:

LZ 19.1 Sie sollen einen ersten Eindruck über numerische Integrationsverfahren anhand der Newton-Cotes Formeln erhalten.

LZ 19.2 Sie sollen wissen, dass es noch (viele) andere Ansätze gibt.

Die Bestimmung von Integralen (bestimmt und unbestimmt) kann beliebig schwierig sein. Deshalb hat man auch numerische Methoden entwickelt, welche Näherungslösungen berechnen. Natürlich ist man hier wiederum an Verfahren interessiert, bei denen man den aufgrund der Approximation gemachten Fehler angeben kann und bei denen dieser Fehler im Prinzip beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur "genügend rechnet".

Wenn Sie sich unsere Herleitungen des unbestimmten und des bestimmten Integrals (inkl. dem Haupsatz) nochmals genau anschauen, dann sehen Sie, dass weil wir diese Begri e als Grenzwerte definiert haben, wir im Prinzip schon Näherungsmethoden zur Verfügung haben. Denn wir können ja diesen Grenzprozess nach endlich vielen Schritten abbrechen und wir erhalten dann eine Näherung. Wenn Sie sich den Hauptsatz ansehen, dann sehen Sie im übrigen auch, dass wir ein unbestimmtes Integral (und damit Stammfunktionen) immer auch mit Hilfe von Näherungen von bestimmten Integralen erhalten können.

Eine weitere Möglichkeit ein bestimmtes Integral annähernd zu bestimmen, ist nun beispielsweise auch das Verfahren mittels einer sogenannten "interpolatorischen Quadraturformel" (Interpolationsquadratur). Die Idee ist folgende: Wie gesehen, haben wir aufgrund der Integrationsregeln immer gute Werkzeuge zur Verfügung um das Integral eines Polynoms zu bestimmen. Wenn wir also den Integranden mittels eines Polynoms vom Grad n approximieren, dann können wir auch das resultierende Integral als Approximation des Integrals des ursprünglichen Integranden betrachten. Dies führt schliesslich zu folgendem Verfahren, wenn wir den speziellen Typ der sogenannten Lagrangeschen Interpolationspolynome auswählen:

§19-1 Satz. (Integration mittels Lagrangescher Interpolationsquadratur (Newton-Cotes Formeln))

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und seien $\{x_k \in I \mid k \in \mathbb{N}_n, x_k \leq x_{k+1}\}$ $n+1$ Interpolationsstellen.

Dann ist die Lagrangesche Interpolationsquadratur vom Grad n – auch Newton-Cotes Formel vom Grad n genannt – die Integral-Approximation

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b \ell_{kn}(x)\,\mathrm{d}x\right) f(x_k)\end{aligned}$$

mit

$$\ell_{kn}(x) := \prod_{\substack{j=0\\ k\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)},$$

welches das k-te Lagrange-Polynom vom Grad n für die Interpolationsstelle x_k genannt wird.

Ist f z.B. auf I sogar $n+1$-mal stetig di erenzierbar, dann ist der Fehler der

Lagrangeschen Interpolationsquadratur betragsmässig nach oben beschränkt durch

$$|e(f,n)| \leq \frac{\max_{x\in I}\{|f^{(n+1)}(x)|\}}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)| \, \mathrm{d}x.$$

◇

Im Fall von $n := 1$ sprechen wir übrigens auch von der Sehnentrapezregel (Trapezregel), für $n := 2$ von der Simpson-Regel und im Fall von $n := 3$ von der $\frac{3}{8}$-Regel (Näheres dazu: siehe Literatur).

§19-2 Beispiel. (Newton-Cotes für $n := 1$ (d.h., Trapezregel))

Sei $f(x) := 1 + e^{-x}\sin(4x)$ und $I := [a,b] := [0,1]$. Wir berechnen

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

mittels der Newton-Cotes Formel für $n := 1$ (Trapezregel).

Als erstes stellen wir fest, dass unsere Interpolationsstellen

$$\{0,1\}$$

sind. Die Lagrangeschen Interpolationspolynome sind in unserem Fall gegeben als

$$\begin{aligned} \ell_{01}(x) &= \frac{(x-1)}{(0-1)} = \frac{(x-1)}{-1} = -x+1, \\ \ell_{11}(x) &= \frac{(x-0)}{(1-0)} = x. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x &\approx \int_0^1 \ell_{01}(x) \, \mathrm{d}x f(0) + \int_0^1 \ell_{11}(x) \, \mathrm{d}x f(1) \\ &= \int_0^1 1 - x \, \mathrm{d}x f(0) + \int_0^1 x \, \mathrm{d}x f(1) \\ &= (x|_0^1 - \frac{1}{2}x^2|_0^1) f(0) + \frac{1}{2}x^2|_0^1 f(1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\sin(4)}{e}) \\ &= 1 + \frac{\sin(4)}{2e} \\ &\approx 0.860794. \end{aligned}$$

Wie gross ist der Fehler? Mit obiger Schätzformel erhalten wir allgemein z.B. [E.72] (dies ist allerdings etwas grob abgeschätzt, man kann dies auch noch genauer machen), dass der Fehler nicht grösser als

$$|e(f,n)| \leq \frac{(n+1)4^{n+1}}{(n+1)!}$$

ist. D.h., für $n = 1$ ist er durch

$$|e(f, 1)| \leq 16$$

nach oben beschränkt, was natürlich noch nicht sehr aussagekräftig ist. Bereits an dieser groben Fehlerabschätzung lässt sich aber noch ein wichtiger E ekt erkennen, welcher zu beachten ist: Es ist durchaus möglich, dass der Fehler anfangs relativ gross wird und die Schranke erst ab einer gewissen Rechengenauigkeit (d.h., ab einem gewissen n) zufriedenstellend klein wird und dann schliesslich gegen Null konvergiert. Dies sieht man sehr schön an folgendem Plot:

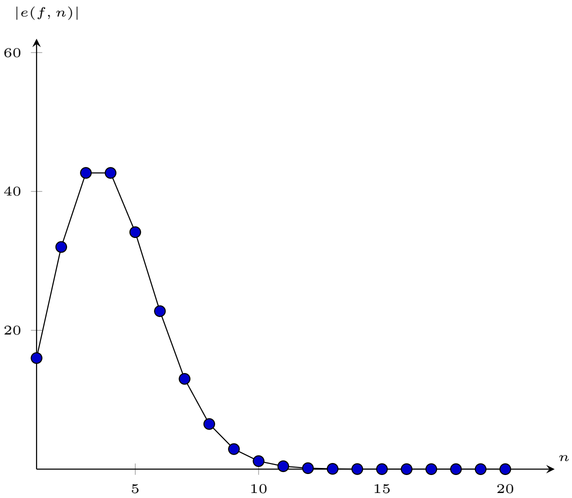


Abbildung 19.1 – Plot der berechneten oberen Fehlerschranke der Beispielsfunktion f für $n \in \{1, 2, .., 20\}$.

◇

§19-3 Beispiel. (Newton-Cotes für $n := 3$ (d.h., $\frac{3}{8}$-Regel))

Sei wieder $f(x) := 1 + e^{-x} \sin(4x)$ und $I := [a, b] := [0, 1]$. Wir berechnen nun

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

mittels der Newton-Cotes Formel für $n := 3$, also mit der $\frac{3}{8}$-Regel.

Unsere Interpolationsstellen sind nun

$$\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}.$$

Die Lagrangeschen Interpolationspolynome sind damit gegeben als

$$\begin{aligned}
\ell_{03}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{2}{3})(0 - 1)} \\
&= ... = -\frac{9}{2}x^3 + 9x^2 - \frac{11}{2}x + 1, \\
\ell_{13}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = ... = \frac{27}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 9x,
\end{aligned}$$

$$\ell_{23}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \ldots = -\frac{27}{2}x^3 + 18x^2 - \frac{9}{2}x,$$
$$\ell_{33}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \ldots = \frac{9}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_0^1 \ell_{03}(x)\,\mathrm{d}x f(0) + \int_0^1 \ell_{13}(x)\,\mathrm{d}x f(1) \\ &\quad + \int_0^1 \ell_{23}(x)\,\mathrm{d}x f(2) + \int_0^1 \ell_{33}(x)\,\mathrm{d}x f(3) \\ &= \ldots \\ &\approx 0.942467.\end{aligned}$$

Das ist besser als für $n = 1$, denn der exakte Wert ist 1.30825. Aber es ist immer noch keine besonders gute Näherung, was sich durch oben gezeigten Plot der Fehlerschranke erklärt. Wir müssten also doch für ein wesentlich grösseres n die Newton-Cotes-Formel anwenden, was natürlich nur noch mit Hilfe eines Rechners möglich ist. Dann aber können wir das Integral numerisch mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

◇

Zum Abschluss noch eine kleine, knappe Übersicht über ein paar andere Ideen, wie man numerisch integrieren kann:

- Andere Interpolationspolynome anstelle der Lagrangeschen: Man kann versuchen, anstelle der Lagrangepolynome andere Polynome zu verwenden (die sogenannte "Gauss-Quadratur" ist so ein Verfahren).
- Sehnentrapezregel: Oder man interpoliert nur linear zwischen einer Anzahl von Interpolationsstellen, was wie schon erwähnt zur sogenannten "Sehnentrapezregel" führt und somit ein Spezialfall einer Newton-Cotes Formel ist.
- Summierte Quadratur: Die Approximation kann oft verbessert werden, indem man zuerst das Integrationsintervall in mehrere, nicht notwendig äquidistante Intervalle zerlegt und eine numerische Integration separat über den Teilintervallen durchführt (mit einer für dieses Teilintervall abgestimmter Methode). Am Schluss kann man dann aufgrund der uns bekannten Rechenregeln summieren und erhält ein Integral für die Funktion über dem ganzen Ausgangsintervall.
- Monte-Carlo-Methoden: Einen ganz anderen Weg geht man bei den sogenannten Monte-Carlo-Methoden. Man erzeugt zufällig eine Anzahl n von Stellen im Intervall und nimmt den Durchschnitt der Funktionswerte als Integral. D.h., die Summe

  $$S(f,n) \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

  wird als Approximation des Integrals genommen. (Erkennen Sie, welcher Satz u.a. dieser Idee zugrunde liegt?)

Kapitel 20

Uneigentliche Integrale

LERNZIELE:

LZ 20.1 Sie sollen wissen in welchen Situationen uneigentliche Integrale auftreten können.

LZ 20.2 Sie sollen erste (einfache) uneigentliche Integrale im Umfang der Beispiele und Übungsaufgaben berechnen können.

Bisher konnten wir nur stetige Funktionen, welche auf einem beschränkten Intervall definiert sind, integrieren. Können wir dasselbe aber auch für Funktionen auf unbeschränkten Intervallen $(-\infty, b], [a, \infty), (-\infty, \infty)$ tun? Ja das geht!

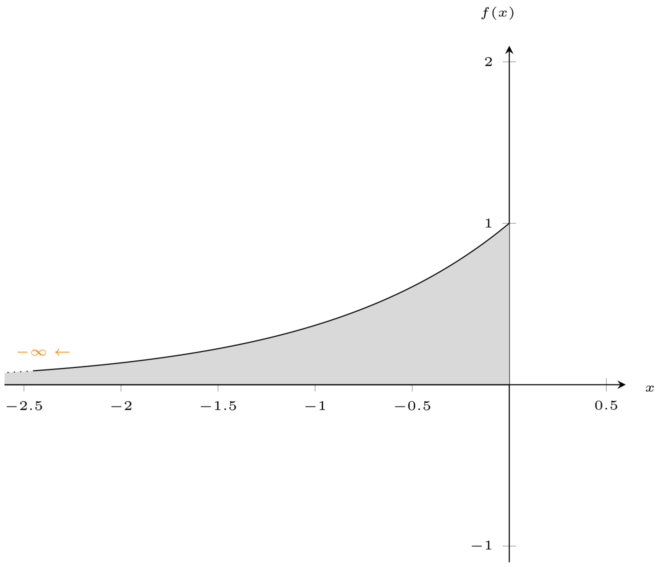


Abbildung 20.1 – Uneigentliches Intergral, z.B. auf $I := (-\infty, 0]$.

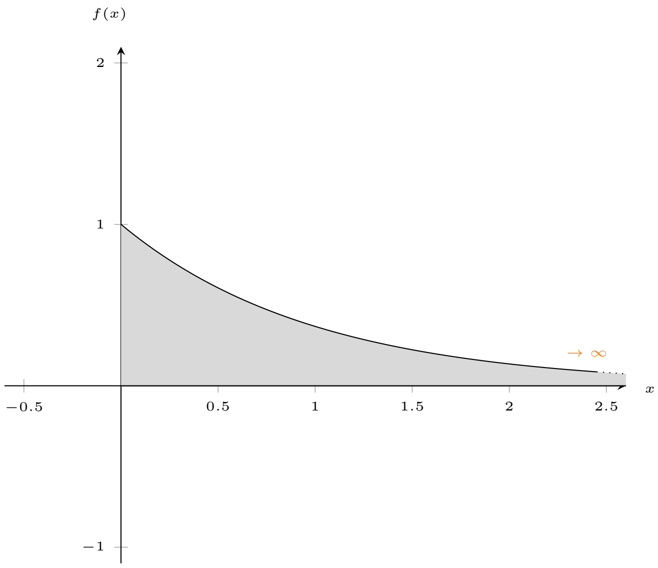


Abbildung 20.2 – Uneigentliches Integral, z.B. auf $I := [0, \infty)$.

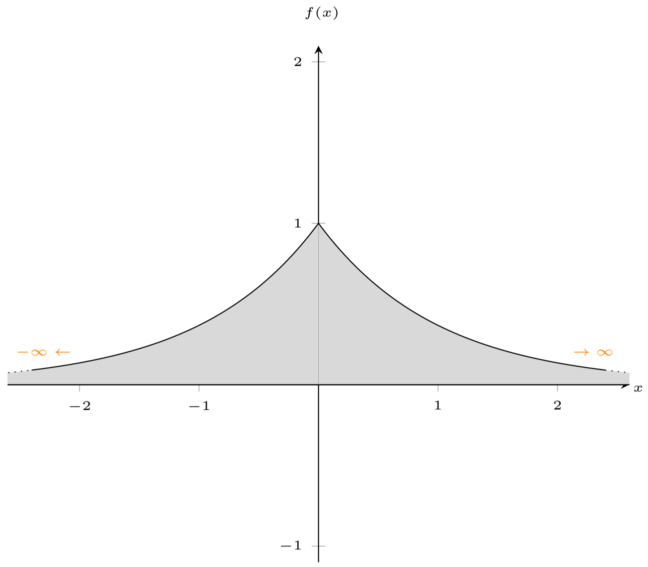


Abbildung 20.3 – Uneigentliches Integral, z.B. auf $I := (-\infty, \infty)$.

Eine ähnliche Frage ist, ob wir auch Integrale berechnen können, falls der Integrand (also die zu integrierende Funktion) auf dem Integrationsintervall unbeschränkt ist? Das kann z.B. vorkommen, wenn wir eine Unstetigkeitsstelle haben, wo der Funktionswert gegen (positiv oder negativ) unendlich strebt[E.73] . Ja, auch das geht in einigen Fällen!

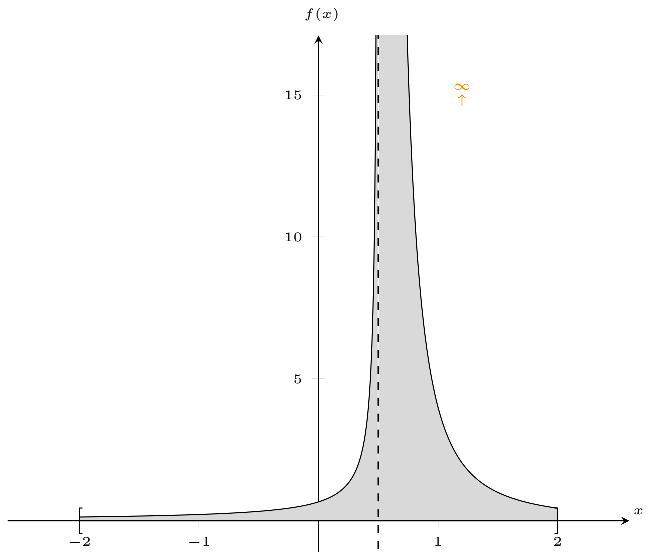


Abbildung 20.4 – Uneigentliches Intergral, z.B. mit einer unbeschränkten Unstetigkeitsstelle in $c := 1/2$.

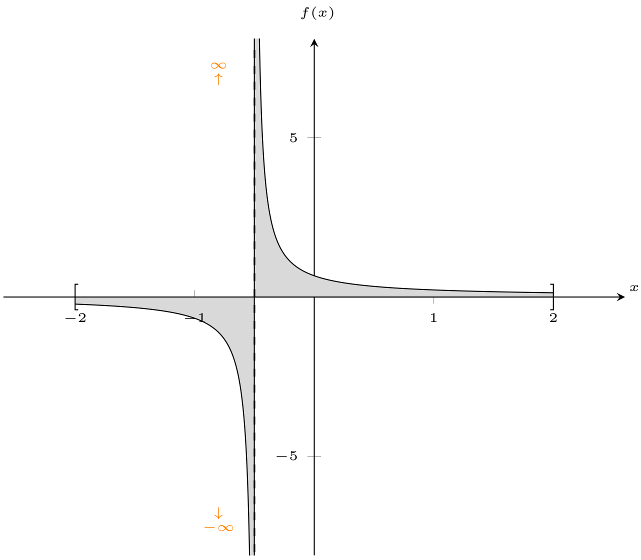


Abbildung 20.5 – Uneigentliches Integral, z.B. mit einer unbeschränkten Unstetigkeitsstelle in $c := -1/2$.

Solche Integrale nennen wir uneigentliche Integrale und ihre Funktionen uneigentlich integrierbar. Dies sind sehr nützliche Erweiterungen des Riemannschen Integralbegri s, wie wir ihn kennengelernt haben.

Wir beginnen mit der ersten Situation, wobei wir drei Fälle unterscheiden können:

§20-1 Definition. (Uneigentliche Integrale auf unbeschränkten Intervallen)

(1) Sei $f : I := [a, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass f auf allen Intervallen $[a, b]$, für $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b < \infty$, Riemann-integrierbar ist. Existiert dann der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

so nennen wir f auf $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar und den Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f auf I.
Ist der Grenzwert $\pm\infty$ so sagen wir auch, dass das Integral bestimmt divergiere und falls der Grenzwert nicht existiert und nicht $\pm\infty$ ist, dass das Integral divergiere.

(2) Sei $f : I := (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, so dass f auf allen Intervallen $[a, b]$, für $a \in \mathbb{R}$ mit

$-\infty < a < b$, Riemann-integrierbar ist. Existiert dann der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

so nennen wir f auf $(-\infty, b]$ uneigentlich integrierbar und den Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f auf I.
Ist der Grenzwert $\pm\infty$ so sagen wir auch, dass das Integral bestimmt divergiere und falls der Grenzwert nicht existiert und nicht $\pm\infty$ ist, dass das Integral divergiere.

(3) Sei $f : I := (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass f auf allen Intervallen $[a, b]$, für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$, Riemann-integrierbar ist. Existiert dann für irgendein $c \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(rechte Seite wie gerade eben definiert[E.74]), so nennen wir f auf $(-\infty, \infty)$ uneigentlich integrierbar und den Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f auf I.
Ist der Grenzwert $\pm\infty$ so sagen wir auch, dass das Integral bestimmt divergiere und falls der Grenzwert nicht existiert und nicht $\pm\infty$ ist, dass das Integral divergiere.

◇

§20-2 Beispiele.

1. Es ist eine interessante Frage, ob die Fläche zwischen der Funktion $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := e^x$ und der x-Achse (siehe nachfolgende Abb. 20.6) endlich oder unendlich ist, und, falls sie endlich ist, wie gross die Fläche ist.

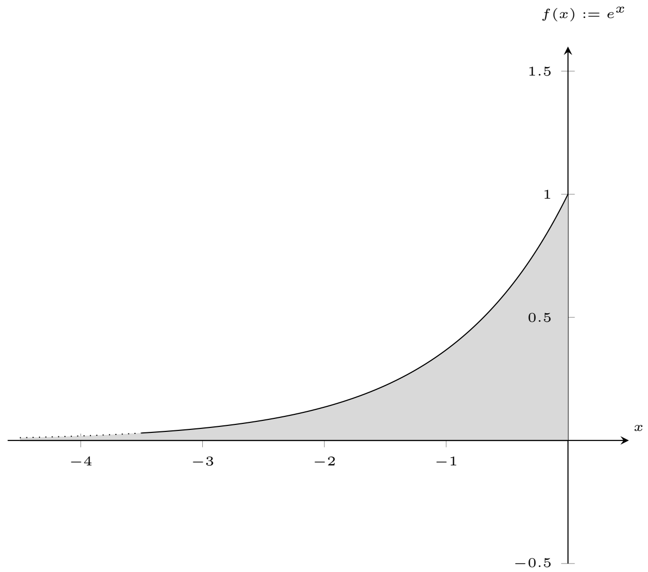


Abbildung 20.6 – Zur Flächenberechnung des Funktionsgraphen von $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := e^x$ mittels uneigentlichem Integral.

Auf den ersten Augenblick scheint das sehr schwer zu beantworten, denn zwar strebt die Funktion für x gegen ∞ gegen Null, wird also "immer weniger Fläche" haben. Jedoch geht das ja bis unendlich so, ohne dass der Funktionswert je 0 erreicht und damit kommt "immer noch etwas Fläche hinzu".

Mit dem eingeführten Begri des uneigentlichen Integrals können wir nun aber diese Frage ganz einfach beantworten. Denn wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^x \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{a \to -\infty} e^x \Big|_a^0 \\
&= \lim_{a \to -\infty} 1 - e^a \\
&= \lim_{a \to -\infty} 1 - \lim_{a \to -\infty} e^a \\
&= 1 - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass die Fläche nicht nur tatsächlich endlich ist (obwohl die Funktion gegen unendlich geht und "*immer* noch etwas Fläche dazukommt, wenn wir weiter nach $-\infty$ gehen", da der Graph nie 0 wird!), sondern dass sie sogar dieselbe Fläche hat wie das Einheitsquadrat, nämlich 1.

2. Genauso können wir uns jetzt die Frage stellen, wie gross denn die Fläche unter dem Funktionsgraphen von $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ ist (siehe Abb. 20.7).

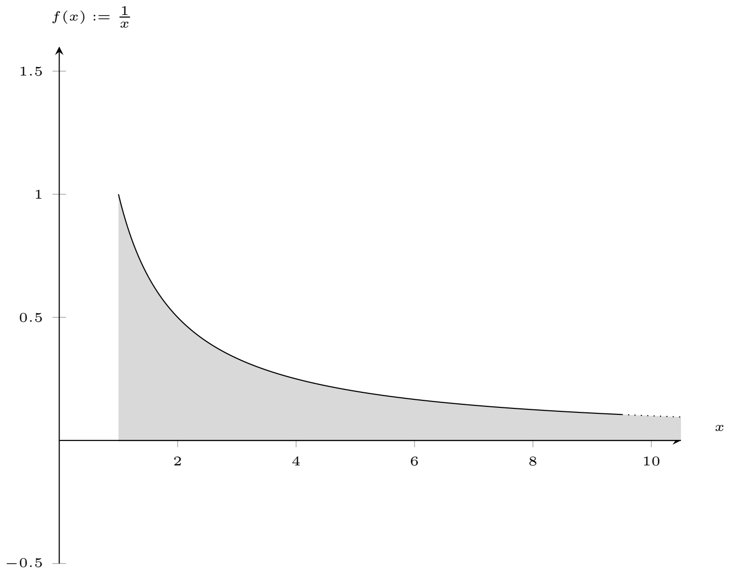


Abbildung 20.7 – Zur Flächenberechnung des Funktionsgraphen von $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ mittels uneigentlichem Integral.

Wir erhalten wieder mit dem uneigentlichen Integral:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\ln(x)\,\big|_1^b\right) \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln(b) - 0 \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Diese Fläche ist also tatsächlich unendlich, da dieses Integral bestimmt divergent gegen unendlich ist.

◇

Nun noch die zweite Situation, diejenige eines unbeschränkten Integranden. Zur Vereinfachung betrachten wir den Fall einer Funktion, die auf einem beschränkten Intervall I definiert ist[E.75] .

§20-3 Definition. (Uneigentliche Integrale unbeschränkter Funktionen)

(1) Sei $f : I := (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche für alle c mit $a < c < b$ auf $[c, b]$ beschränkt und Riemann-integrierbar sei, und für welche

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

nicht konvergiert. Existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

so sagen wir, dass f auf I uneigentlich integrierbar ist und nennen den Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f auf $(a,b]$.

(2) Sei $f : I := [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche für alle c mit $a < c < b$ auf $[a,c]$ beschränkt und Riemann-integrierbar sei, und für welche

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$$

nicht konvergiert. Existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

so sagen wir, dass f auf I uneigentlich integrierbar ist und nennen den Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f auf $[a,b)$.

(3) Sei $f : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche bis auf eine Polstelle c mit $a < c < b$ auf I beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Sei also

$$\lim_{x\to c} f(x)$$

nicht konvergent. Existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(rechte Seite wie gerade eben definiert), so sagen wir, dass f auf I uneigentlich integrierbar ist und nennen den Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

das uneigentliche Integral von f auf $[a,b]$.

$\diamond$

Beachten Sie: Mit den uneigentlichen Integralen können wir insbesondere auch den Zerlegungssatz (3) von Satz §18-8 verallgemeinern, so dass wir bei entsprechender Konvergenz

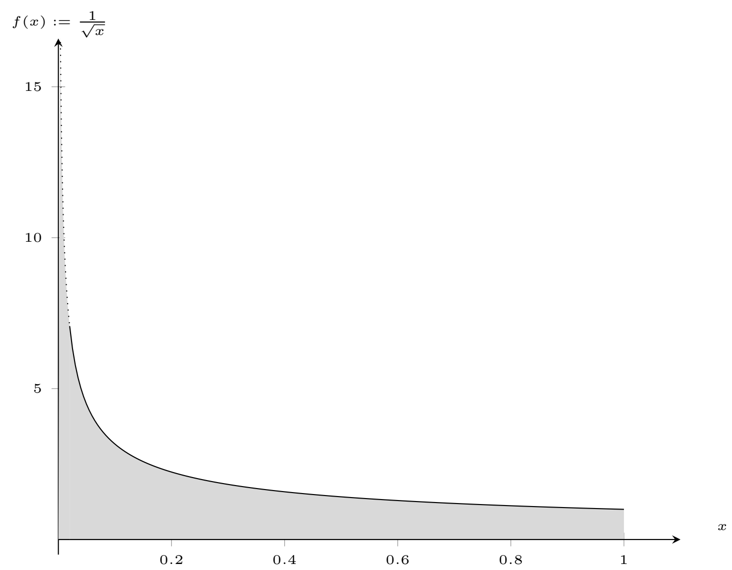


Abbildung 20.8 – Zur Flächenberechnung des Funktionsgraphen von $f : (0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ mittels uneigentlichem Integral.

auch dann ein Integral einer Funktion berechnen können, wenn diese mit Ausnahme von endlich vielen Polstellen uneigentlich integrierbar ist.

§20-4 Beispiele.

1. Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht beschränkt (siehe Abb. 20.8) und ist damit nicht Riemann-integrierbar. Wir können aber auch hier das uneigentliche Integral verwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x &= \lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} \left(2x^{\frac{1}{2}} \, \Big|_c^1 \right) \\ &= 2 - \lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} 2\sqrt{c} \\ &= 2. \end{aligned}$$

   Mit dem uneigentlichen Intergral konnten wir also auch diese Fläche berechnen.

2. Wir betrachten die Funktion gegeben durch $f : [0,2] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ (siehe Abb. 20.9). Sie hat in $c := 1$ eine Polstelle (unbehebbare Unstetigkeitsstelle, in welcher f nicht beschränkt ist). Damit ist auch sie auf diesem Intervall nicht Riemann-integrierbar und wir benutzen wiederum das uneigentliche Integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 (x-1)^{-2/3} \, \mathrm{d}x$$

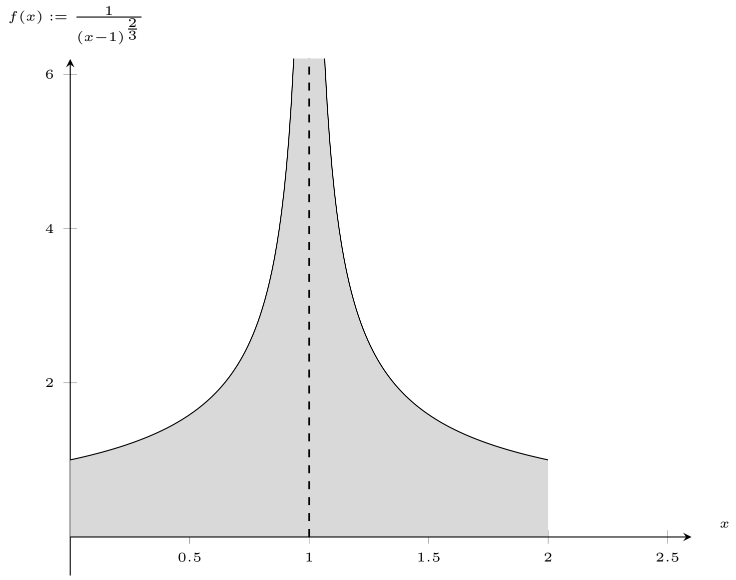


Abbildung 20.9 – Zur Flächenberechnung eines Funktionsgraphen mit Polstelle, $f:[0.2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ mittels uneigentlichem Integral.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (x-1)^{-2/3}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)^{-2/3}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{c\to 1\\ c<1}} \int_0^c (x-1)^{-2/3}\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{c\to 1\\ c>1}} \int_c^2 (x-1)^{-2/3}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{c\to 1\\ c<1}} \left(3(x-1)^{\frac{1}{3}}\ \Big|_0^c\right) + \lim_{\substack{c\to 1\\ c>1}} \left(3(x-1)^{\frac{1}{3}}\ \Big|_c^2\right) \\
&= 3\lim_{\substack{c\to 1\\ c<1}} (c-1)^{\frac{1}{3}} - 3(-1)^{\frac{1}{3}} + 3 - 3\lim_{\substack{c\to 1\\ c>1}} (c-1)^{\frac{1}{3}} \\
&= -3(-1)^{\frac{1}{3}} + 3 \\
&= -3(-1) + 3 \\
&\qquad \text{(beachten Sie: } (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1\text{, da } (-1)^3 = (-1)(-1)^2 = -1 \text{ ist.)} \\
&= 6.
\end{aligned}
$$

◇

Appendix

Ergänzende Notizen

[E.1] Zur Erinnerung: Nur schon wenn Sie die Diagonale des einfachsten Quadrates mit Seitenlänge 1 berechnen wollen oder den Umfang bzw. die Fläche des Einheitskreises, müssen Sie wegen $\sqrt{2}$ und π ein Verständnis der reellen Zahlen haben! Und Sie werden sehr schnell bei solchen sehr einfachen Fragestellungen beispielsweise über die trigonometrischen Funktionen mitten in der Analysis landen.

[E.2] Damit ist "maschine learning" auch ein Teilgebiet der sogenannten "künstlichen Intelligenz".

[E.3] Und Lineare Algebra und Analytische Geometrie sind dabei ebenso wichtig!

[E.4] Ein Umstand der z.B. auch in der Kryptologie von zentralster Bedeutung ist!

[E.5] Ein weiteres für die Informatik sehr grundlegendes Thema ist im Weiteren auch die Analyse (Komplexität) von *Problemen* selbst (unabhängig von spezifischen Lösungsalgorithmen): Dieses Gebiet der Komplexitätstheorie (computational complexity theory) wird in der theoretischen Informatik untersucht.

[E.6] Wir verwenden die beiden Begriffe als äquivalent.

[E.7] Nicht zu verwechseln mit den "Graphen" aus mgli, welche allgemeiner Relationen sind.

[E.8] Sie werden in der linearen Algebra auch "lineare Abbildungen" und später vielleicht auch z.B. "lineare Funktionale" kennenlernen. Die Begriffe sind zwar eng verwandt aber trotzdem auseinanderzuhalten. Denn im Sinne der linearen Algebra ist unsere hier definierte lineare Funktion eine *affine Abbildung* und *nur im Spezialfall* $q := 0$ auch eine *lineare Abbildung*. Sie haben vielleicht unsere Definition als "lineare Funktion" kennengelernt, was leider sehr häufig und ungenauerweise gemacht wird. Aus diesem Grund möchte ich immer ganz korrekt von affin-linearen Funktionen sprechen.

[E.9] In der Mathematik sagt man dieser Eigenschaft, dass die reellen Zahlen unter Addition, eine **geordnete** Menge (genauer: eine geordnete Gruppe) sind. Symbolisch: $(\mathbb{R}, +, \leq)$

[E.10] In der Mathematik sagt man dieser Eigenschaft, dass die reellen Zahlen unter Addition und Multiplikation, eine **geordnete** Menge (genauer: ein geordneter Körper) sind. Symbolisch: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

[E.11] In diesem Modul verstehen wir immer mit "Zahlenfolge" eine "reelle Zahlenfolge", falls nichts anderes gesagt wird.

[E.12] Denn Zahlenfolgen entsprechen ja im allgemeinen irgendwelchen konkreten Dingen (Daten) in einer Anwendung, welche man mathematisch modellieren und weiter untersuchen will.

[E.13] Wie man darauf kommt, haben wir bereits in mgli einführend kennengelernt.

[E.14] Wir werden übrigens sehen, dass dies ein Spezialfall einer "geometrischen Folge" ist, bei welcher $q := 1 + k\Delta t$ gilt, und die damit nicht konvergiert.

[E.15] Aus dem Lateinischen: "Limes" bedeutet die Grenze.

[E.16] Man kann auch Divergenz noch unterscheiden, z.B. in bestimmte oder unbestimmte Divergenz usw.. Wir wollen dies aber einfachheitshalber an dieser Stelle noch nicht tun (siehe später).

[E.17] Dies ist keine wirkliche Einschränkung zur Definition, dass $\varepsilon > 0$ eine beliebige reelle Zahl ist. Denn wir können in einem solchen Fall immer ein $k \in \mathbb{N}$ wählen, so dass sogar $\frac{1}{k} < \varepsilon$ ist.

[E.18] Beachten Sie: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also nicht notwendig konvergent!

[E.19] Beachten Sie: Dies ist tatsächlich eine Umformung welche den Ausdruck nicht verändert. Wir erweitern einfach den Bruch mit $1 = \frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{n^k}}$.

[E.20] Heron von Alexandria (10 - 70), griechisch-ägyptischer Mathematiker und Ingenieur.

[E.21] Zur Erinnerung: Die Quadratwurzel einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist einfach definiert als die Zahl $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $b^2 = a$. Und dieser Zahl b geben wir dann einfach das *Symbol* $\sqrt{a} := b$.

[E.22] Später werden wir dies in den Kontext der Newton-Iteration für eine Nullstelle der Funktion $f(x) := x^2 - a$ stellen können. Die Überlegung ist folgende:

- Gesucht ist also $x = \sqrt{a}$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Durch umformen erhalten wir
$$x = \sqrt{a} \Longleftrightarrow x^2 = a \Longleftrightarrow x^2 - a = 0.$$
- Bei der Berechnung von $\sqrt{a}$ ist also eine Nullstelle der Funktion $f(x) := x^2 - a$ gesucht.
- Mit der Newton-Iteration (siehe Kap.15) wird diese dann durch die Iteration
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$
berechnet.
- In unserem Fall also wegen $f'(x) = 2x$
$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}} = \frac{2x_{n-1}^2 - (x_{n-1}^2 - a)}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}^2 + a}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$
Dies ist gerade die Iteration des Heron-Verfahrens.

[E.23] Diese kann man aus einem Fehlerterm bei der Newton-Iteration ableiten. Dort gilt für den Betrag des absoluten Fehlers für eine Nullstelle α einer Funktion $f(x)$ (im Fall der Konvergenz des Verfahrens) und mit einem geeigneten $\xi_{n-1} \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &= \left| \frac{-f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})}(x_{n-1} - \alpha)^2 \right| \\ &= \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{a})^2 && \text{(im Fall des Heron-Verfahrens)} \\ &\leq \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \frac{a}{x_n})^2. \end{aligned}$$
Neben dem Newton-Verfahren Kap.15 werden wir ab Kap.9 auch lernen, was z.B. die erste und die zweite Ableitung f' und f'' einer Funktion ist.

[E.24] Grob gesagt, heisst das, dass sich die Anzahl korrekte Ziffern nach dem Komma im Durchschnitt nach jedem Schritt verdoppeln.

[E.25]

[E.26] Deshalb könnte man "Reihen" auch "Summenfolgen" nennen.

[E.27] Manchmal auch "Teilsumme".

[E.28] Eine **arithmetische Folge** $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ist eine Folge, welche mit einer reellen Zahl a startet und deren benachbarte Folgenglieder jeweils eine konstante Differenz d haben. D.h.,
$$x_n := a + nd$$
für reelle Zahlen $a, d \in \mathbb{R}$.

[E.29] Also insbesondere für $p = 1$: Obwohl die harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ bekanntlich eine Nullfolge ist und damit konvergiert, divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, d.h., für $p = 1$.

[E.30] Für echt kleiner 1, d.h., $|x| < 1$ konvergiert die Reihe übrigens sogar "absolut", was ein wichtiger, stärkerer Konvergenzbegriff ist. Diesen werden wir aber in diesem Modul nicht besprechen.

[E.31] Erinnern Sie sich: Mit Folgen haben wir ja bisher Funktionen auf den natürlichen Zahlen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ betrachtet. Der *Definitionsbereich* ist jetzt mit den reellen Zahlen oder einer Teilmenge davon viel grösser! Diese Mengen sind im Allgemeinen nicht mehr nur abzählbar unendlich, sondern sogar *überabzählbar unendlich*.

[E.32] Später werden Sie unter Umständen sehen, dass diese Theorie auch in höhere Dimensionen (beliebige viele Dimensionen) verallgemeinert wird. Ein Grossteil der Anwendungen in Wissenschaft und Technik benötigt gerade auch diese Verallgemeinerung

[E.33] D.h., durch irgendwelche "Datenerhebungen".

[E.34] Nach Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), deutscher Mathematiker.

[E.35] Nach Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941), französischer Mathematiker. (Der Name wird "Löbehg" gesprochen.)

[E.36] Und oft auch aufgeteilt in den 1. und den 2. Hauptsatz.

[E.37] Beachten Sie unbedingt, dass wir zwei sehr ähnlich klingende Begriffe haben: den *Differenzen*quotienten und den *Differential*quotienten. Unterscheiden Sie diese sehr sorgfältig!

[E.38] Die Definition der Ableitung an der Stelle a schreibt man in der Leibniz-Notation dann meistens als

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

[E.39] Als Grenzwert damit: $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

[E.40] Übrigens fasst man die Funktion f selbst als Ableitung 0-ter Ordnung auf. Also: $f^{(0)} := f$.

[E.41] Beachte: Wie schon festgestellt, ist sie in 0 eben nicht differenzierbar.

[E.42] Diese Potenzregel ist also einfach eine Verallgemeinerung der eben kennengelernten Ableitungen von Potenzfunktionen für Exponenten, welche sogar beliebige reelle Zahlen sein können. Nehmen Sie dies hier nur zur Kenntnis, dass dies auch für solche Exponenten formuliert werden kann. Wir werden weiterhin bei rationalen Exponenten $q \in \mathbb{Q}$ bleiben.

[E.43] Die hier gerade die einzige ist, die in Frage kommt.

[E.44] Mehrzahl: “Extrema”, ebenso “Minima” und “Maxima”.

[E.45] Was eine “elementare Funktion” ist, wird aber in der Mathematik nicht einheitlich verwendet.

[E.46] Vgl. z.B. auch https://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision.

[E.47] Oft schliesst man auch gerade den wenig interessanten Fall $b := 1$ mit aus.

[E.48] Spricht man nur von der “Exponentialfunktion” ohne Erwähnung einer Basis, dann hat es sich eingebürgert, dass man die Exponentialfunktion zur Basis e meint.

[E.49] ln = “logarithmus naturalis” (lat.)

[E.50] Auch “de l’Hospital” geschrieben.

[E.51] Von den vielen hervorragenden (allgemeinen) Bücher über numerische Mathematik, möchte ich hier z.B. [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**] erwähnen.

[E.52] Und beachten Sie, dass wir hier nicht nur von *nichtlinearen Polynomfunktionen* sprechen. Sondern noch viel allgemeiner von nichtlineare Funktionen, welche auch kein Polynom eines höheren Grades sind. Sie kennen schon einige Beispiele: allgemeine gebrochen-rationale Funktionen, die Wurzelfunktion, die trigonometrischen Funktionen $\cos, \sin, \tan, \cot$, die Exponentialfunktion $\exp_b$ und die Logarithmusfunktion $\log_b$, ...usw.

[E.53] Zur Erinnerung: Eine Gerade mit Steigung m und Achsenabschnitt q wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = mx + q$. Diese sogenannte Normalform einer Geraden ist äquivalent mit der sogenannten Punktsteigungsform

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0,$$

wobei m wieder die Geradensteigung und (x_0, y_0) irgendein Punkt auf der Geraden ist. Da wir ja mit $(x_0, f(x_0))$ einen Punkt auf unserer Tangenten t_0 kennen, und ebenso die Steigung $m = f'(x_0)$, ergibt sich die Funktion unserer Tangente mit dieser Punktsteigungsform zu

$$t_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$t_0(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{=:m}x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{=:q},$$

wenn man dies noch ausmultiplizieren will.

[E.54] Im allgemeinen muss man sogar *stetige* Differenzierbarkeit fordern, da das Verfahren sonst kaum kontrollierbar ist.

[E.55] Für die lokale Konvergenz muss *zweimal stetige Differenzierbarkeit gefordert werden.*

[E.56] Und *der dreifachen stetigen Differenzierbarkeit* der Funktion.

[E.57] Der Beweis dieses Kriteriums ergibt sich aufgrund eines ganz zentralen Begriffs – dem einer ”kontrahierenden Abbildung” – und eines ganz zentralen Satzes der Analysis, dem ”Banachschen Fixpunktsatz”. Für Interessierte: z.B. [**?**, Kap.8, §1 und §2]

[E.58] Selbstverständlich ist hier immer “*mindestens* n-mal stetig differenzierbar” ... gemeint.

[E.59] Diese Methode ist nach dem Erfinder bzw. Entdecker, dem britischen Mathematiker Brook Taylor (1685–1731), benannt.

[E.60] Auf I. Genauer würde schon reichen: Auf einer (offenen) Umgebung von a

[E.61] Beachten Sie, dass hier stetige Differenzierbarkeit *bis zur Ordnung* $n+1$ gefordert werden muss, damit auch das Restglied definiert ist.

[E.62] D.h., gegen unendlich klein strebend.

[E.63] Die Art wie wir im Folgenden das bestimmte "Riemann-Integral" einführen ist historisch gesehen eigentlich das *Darboux-Integral*, da es auf Jean Gaston Darboux[E.76] zurückgeht. Dieser Zugang ist etwas intuitiver und in der Literatur wird das Riemann-Integral oft auch auf diese Weise (eben eigentlich das Darboux-Integral) eingeführt, da man zeigen konnte, dass die beiden Begriffe äquivalent sind. Das Integral, welches historisch gesehen korrekterweise das Riemann'sche ist, wird äquivalent aber leicht anders definiert.

[E.64] Das ist natürlich essentiell: Würden wir verschiedene Werte bzw. Flächeninhalte erhalten, dann müsste man sich fragen, ob diese Ansätze überhaupt Sinn machen. Bzw., welcher der Sinnvolle ist.

[E.65] Dies ist manchmal wichtig, wenn man an gewissen "interessanten" oder "heiklen" Stellen der Funktion eine feinere Zerlegung machen will, an anderen aber eine gröbere ausreicht.

[E.66] Beachten Sie (vgl. auch Symbolverzeichnis): Wir zählen die 0 zu den natürlichen Zahlen hinzu. D.h., wir haben eigentlich bereits $0 \in \mathbb{N}$ bzw. $0 \in \mathbb{N}_n$ für diese beiden Symbole. Um keine Missverständnisse auftreten zu lassen, schreiben wir aber, wie hier, die 0 oft explizit noch hinzu.

[E.67] Beachten Sie: Das Darboux-Integral ist nicht von der spezifischen Art einer für $n \to \infty$ in der Feinheit gegen 0 gehenden Menge von Zerlegungen Z_n abhängig. Das heisst, für *jede* solche Zerlegung ergibt sich *derselbe* Wert für das Integral. Dies ist entscheidend, denn würden Werte für das Integral davon abhängen, welche Zerlegung man benutzt, würde dies die Idee in Frage stellen!

[E.68] Dies ist insofern nicht erstaunlich, da wir in §17-18 sehen, dass Riemann und Darboux-Integrale äqiuvalent sind.

[E.69] Beachten Sie aber: Dies ist noch keine *äquivalente* Charakterisierung der Riemann-integrierbaren Funktionen. (So eine werden wir in Satz §18-10 erhalten.) Die formulierte Aussage ist ja nur eine hinreichende, aber noch keine notwendige Bedingung, denn sie ist eine *Implikation*:

$$f \text{ ist stetig auf kompaktem Intervall } I \Longrightarrow f \text{ ist Riemann-integrierbar auf } I.$$

Die Umkehrung muss – wie wir eben in Satz §18-10 sehen werden – nicht gelten.

[E.70] Siehe Satz §18-10 für eine genaue Charakterisierung der Riemann-integrierbaren Funktionen. Siehe auch Kap. 20 für eine Lockerung dieser Einschränkung, bei welcher wir auch unbeschränkte Unstetigkeitsstellen / Pole zulassen werden.

[E.71] Es lohnt sich diese hier für den Fall bestimmter Integrale noch einmal explizit aufzuschreiben. Denn die Substitution wirkt sich hier auf die Integrationsgrenzen aus!

[E.72] Die etwas grobe Abschätzung einer Schranke ist die folgende (es lässt sich auch noch genauer abschätzen):

$$\begin{aligned}
|e(f,n)| &\leq \frac{\max_{x\in I}\{|f^{(n+1)}(x)|\}}{(n+1)!} \int_a^b \left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right| \mathrm{d}x && \text{(Satz §19-1)} \\
&\underset{(*)}{\leq} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^1 \left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right| \mathrm{d}x \\
&\underset{(**)}{\leq} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^1 n+1 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \left(x(n+1)\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{(n+1)4^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in $(*)$ benutzt, dass

$$\begin{aligned}
&\text{für } n=0: && \left(1+e^{-x}\sin(4x)\right)'_x = -4e^{-x}\cos(4x) \\
&\text{für } n=1: && \left(-4e^{-x}\cos(4x)\right)'_x = -4^2e^{-x}\sin(4x) \\
&\text{für } n=2: && \left(-4^2e^{-x}\sin(4x)\right)'_x = -4^3e^{-x}\cos(4x) \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

und damit – weil $|\cos(4x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ sowie $|e^{-x}| \leq 1, \forall x \in [0,1]$ –

$$|f^{(n+1)(x)}| \leq 4^{n+1}, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Und in (∗∗) haben wir benutzt, dass

$$|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)| \leq |\prod_{k=0}^{n} 1|, \qquad \forall x, x_k \in [0,1],$$

und damit

$$|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)| \leq n + 1$$

ist.

[E.73] Solche Funktionen sind ja nicht Riemann-integrierbar.

[E.74] Also haben wir in (3) wegen (1) und (2) das uneigentliche Integral als Summe zweier Grenzwerte definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für irgendein $c \in \mathbb{R}$.

[E.75] Aber die beiden Fälle können ohne Probleme auch kombiniert werden, wobei man dann zwei Grenzwertprozesse zu betrachten hat.

[E.76] Franz. Mathematiker (1842-1917).

Symbolverzeichnis

e	Eulersche Konstante (Euler Zahl) $e \approx 2.71828...$
id	Die Identitätsfunktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{id}(x) := x$.
	(D.h., jedem x wird einfach das x selbst zuordnet.)
$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null: $\{1, 2, 3, 4, ...\}$
$\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen inkl. Null: $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$\mathbb{N}_n$	Menge der natürlichen Zahlen bis und mit n, für ein $n \in \mathbb{N}$: $\{0, 1, 2, ..., n\}$
π	Kreiszahl Pi $\pi \approx 3.14159...$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen, d.h., $\mathbb{Q} = \{q \mid \ \exists m \in \mathbb{Z} \wedge \ \exists n \in \mathbb{N}_+ : q = \frac{m}{n}\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen, d.h., $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der nicht-negativen reellen Zahlen, d.h., $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_{<0}$	Menge der negativen reellen Zahlen, d.h., $\mathbb{R}_{<0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$\mathbb{R}_{\leq 0}$	Menge der nicht-positiven reellen Zahlen, d.h., $\mathbb{R}_{\leq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen, d.h., $\mathbb{Z} = \{a \mid a \in \mathbb{N} \vee -a \in \mathbb{N} \vee a = 0\}$
$\mathbb{Z}_{>0}$	Menge der positiven, negativen ganzen Zahlen, d.h., $\mathbb{Z}_{>0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Menge der nicht-negativen, negativen ganzen Zahlen, d.h., $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$
$\mathbb{Z}_{<0}$	Menge der negativen, ganzen Zahlen, d.h., $\mathbb{Z}_{<0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a < 0\}$
$\mathbb{Z}_{\leq 0}$	Menge der nicht-positiven, ganzen Zahlen, d.h., $\mathbb{Z}_{\leq 0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 0\}$

Version: 1.3, Last compiled on 2022/07/08, 12:00:13

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Listings

Literaturverzeichnis

Bildverzeichnis

[A1] Ken Eckert. A cli diver falling 45 meters in Acapulco, Mexico. Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39240747.

Index