Warum ist die logische Implikation so definiert?

Zusatzmaterial und Hintergründe zum Modul
"Mathematische Grundlagen der Informatik" (mgli)

Andreas Leiser
FHNW
andreas.leiser@fhnw.ch

23. September 2020
(Updated: 8. November 2021)

1 Definition der logischen Implikation und Fragestellung

Wir haben im Unterricht die **logische Implikation** durch folgende Wahrheitstabelle definiert:

$$\begin{array}{c|c||c} A & B & A \Rightarrow B \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{1}$$

Es stellt sich die natürliche Frage, wieso dies nicht identisch mit unserer alltäglichen Auffassung von "Implikation" (bzw. einer "Wenn ... dann ... -Aussage) ist und was dann damit genau dargestellt werden soll.

2 Die intuitive Alltagsauffassung einer "Wenn ... dann ... - Aussage" (Implikation)

Die alltägliche und intuitive Auffassung einer "Wenn ... dann ... - Aussage" bzw. einer "Implikation" oder einer "Folgerung" entspricht im Wesentlichen derjenigen einer *logischen Schlussweise*. Das heisst wir haben zwei Aussagen, nennen

wir sie A und B, welche irgendeinen inneren *kausalen* (d.h., ursächlichen) Zusammenhang haben. Eine Implikation wird dann so aufgefasst, dass die Wahrheit der Aussage A *ursächlich* die Wahrheit der Aussage B zur Folge hat. Also, wenn A wahr ist, dann ist ursächlich B wahr.
Schauen wir uns ein Beispiel einer solchen **kausalen Implikation** an.

Beispiel 1: Sei

$$A := \text{"Es regnet."} \tag{2}$$
$$B := \text{"Es hat Wolken."} \tag{3}$$

Dann lautet die Implikation

$$(A \Rightarrow B) \equiv \text{"Wenn es regnet, dann hat es (immer und ursächlich) Wolken."} \tag{4}$$

Zur Erinnerung, das Zeichen $\equiv$ bedeutet "semantisch äquivalent". Wie würde nun die Wahrheitstabelle einer solchen intuitiven Implikation aussehen? (Ich schreibe $\Rightarrow_k$ zur Unterscheidung dieser kausalen Implikation von derjenigen, die wir im Unterricht kennengelernt haben.)

$A = 0,\ B = 0$:

Mit dieser Belegung der Variablen, handelt es sich um die Aussage

"Wenn es nicht regnet, dann hat es keine Wolken."

Diese zusammengesetzte Aussage ist offensichtlich falsch, d.h., $(A \Rightarrow_k B) \equiv 0$. Wir würden also in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle eine 0 definieren.

A	B	$A \Rightarrow_k B$
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

$A = 0,\ B = 1$:

Die Aussage lautet nun

"Wenn es nicht regnet, dann hat es Wolken."

Diese Aussage ist offensichtlich ebenfalls falsch, d.h., $(A \Rightarrow_k B) \equiv 0$. Wir würden also auch in der zweiten Zeile der Wahrheitstabelle eine 0 definieren.

A	B	$A \Rightarrow_k B$
0	0	0
0	1	0
1	0	
1	1	

$A = 1,\ B = 0$:

Die Aussage lautet nun

"Wenn es regnet, dann hat es keine Wolken."

Auch diese Aussage ist offensichtlich falsch, $(A \Rightarrow_k B) \equiv 0$ und auch die dritte Zeile der Wahrheitstabelle erhält eine 0.

A	B	$A \Rightarrow_k B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	

$A = 1,\ B = 1$:

Die letzte Belegung führt auf die Aussage

"Wenn es regnet, dann hat es Wolken."

Diese Aussage entspricht auch der ursprünglichen Intention und ist offensichtlich richtig, d.h., $(A \Rightarrow_k B) \equiv 1$ und die vierte Zeile erhält eine 1. Wir haben ja gerade gesagt, dass es einen kausalen Zusammenhang zwischen Regen und der Existenz von Wolken am Himmel gibt.

A	B	$A \Rightarrow_k B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(5)

Wir sagen auch, dass die Richtigkeit der Aussage A ("es regnet") eine **hinreichende Bedingung** für die Richtigkeit der Aussage B ("es hat Wolken") ist. Damit meinen wir, dass wenn A zutrifft ($A \equiv 1$ ist), dann trifft immer auch B zu (also $B \equiv 1$). D.h., wenn A wahr ist, dann ist es "hinreichend" anzunehmen, dass auch B wahr ist. Und ebenso sagen wir, dass die Aussage B ("es hat Wolken") eine **notwendige Bedingung** dafür ist, dass es regnet. (Es braucht notwendigerweise Wolken am Himmel damit es regnet.) Damit meinen wir, dass wenn B zutrifft (d.h., $B \equiv 1$ ist), immer – "notwendigerweise" – auch A zutrifft (d.h., $A \equiv 1$ ist)

Nach dem eben Gesagten, sollte uns deshalb nicht überraschen, dass die kausale Implikation gerade die Wahrheitstabelle der logischen Konjuktion $\wedge$ (logisches "und") hat.

Also, zusammengefasst die obigen beiden Begriffe in einer Implikation:

$$\underbrace{A}_{\substack{\text{hinreichende Bedingung für} \\ \text{die Wahrheit / das Eintreffen von } B}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\substack{\text{notwendige Bedingung} \\ \text{bei Wahrheit / beim Eintreffen von } A}} \tag{6}$$

Wir können uns merken:

> *Eine kausale (ursächliche) Implikation zwischen zwei Aussagen ist nur wahr, wenn die Prämisse (Voraussetzung) und die Konklusion (Folgerung) wahr sind. Insbesondere ist dann die Prämisse eine hinreichende Bedingung für die Konklusion und die Konklusion eine notwendige Bedingung für die Prämisse.*

3 Vergleich mit der kennengelernten logischen Implikation und Interpretation

Der Vergleich von (5) mit (1) zeigt, dass dies tatsächlich zwei verschiedene Auffassungen von "Wenn ... dann ..."-Aussagen bzw. einer Implikation (Folgerung) sind.

Warum definieren wir dies also in der Aussagelogik, wenn es bei der Implikation um die *Operation (Verknüpfung)* geht, anders und wie ist diese Definition zu verstehen?

Der Hintergund ist folgender: Die obige kausale Implikation beschreibt eine logische und kausale **Schlussweise**, so wie sie zum Beispiel in einem mathematischen Beweis vorkommt. Denn dort gibt es eben immer diesen kausalen Zusammenhang zwischen den beteiligten Aussagen. Hingegen ist die Implikation, die wir im Unterricht kennengelernt haben, eine logische **Operation** (sie entspricht ja wegen $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ gerade einem abgeleiteten Ausdruck von elementaren logischen Operationen / Verknüpfungen). An Operationen stellen wir aber eine andere Anforderung, ähnlich wie bei den Operationen von Zahlen auch: Sie sollen für *alle* Objekte A und B gelten. In unserem Fall also für alle logischen Aussagen und nicht nur diejenigen Paare, welche einen inneren kausalen Zusammenhang haben!

D.h., eine logische Implikation als Operation, man nennt sie übrigens zur Unterscheidung von der kausalen Implikation auch **materiale Implikation**, darf keine Kausalitäten benutzen damit sie sinnvoll ist. Dazu betrachten wir nun folgende Aussagen:

Beispiel 2: Sei

$$C := \text{"Paris ist die Hauptstadt Frankreichs."} \tag{7}$$
$$D := \text{"Der Mount Everest ist der höchste Berg der Welt."} \tag{8}$$

Dann lautet die Implikation

$$(C \Rightarrow D) \equiv \text{"Wenn Paris die Hauptstadt Frankreichs ist,}$$
$$\text{dann ist der Mount Everest der höchste Berg der Welt."} \tag{9}$$

Jetzt wollen wir hierfür eine sinnvolle Wahrheitstabelle finden. Am besten überlegt man sich dies mit dem kennengelernten Begriff der hinreichenden Bedingung und beginnt mit folgender Überlegung:

Wenn C wahr ist und C eine hinreichende Bedingung für die Wahrheit von D ist, also $C \Rightarrow D$ wahr ist (ohne Kausalität), wie muss dann D sein? Sicher nicht falsch, sondern eben gerade wahr. Sonst würde das ja heissen

$$\text{"}C \text{ ist hinreichend für } D \text{ und } C \text{ ist wahr, also ist } D \text{ falsch."} \tag{10}$$

Das ist ein Widerspruch: D kann nicht falsch sein, wenn die Wahrheit von C hinreichende Bedingung für die Wahrheit von Aussage D ist und C wahr ist. Also muss unsere vierte Zeile sicher so aussehen:

Zeile 4, $C = 1, D = 1$:

C	D	$C \Rightarrow D$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	1

D.h., wir müssen sinnvollerweise auch im nicht-kausalen Fall interpretieren, dass

$$(C \Rightarrow D) \equiv \text{"Wenn Paris die Hauptstadt Frankreichs ist,}$$
$$\text{dann ist der Mount Everest der höchste Berg der Welt."} \tag{11}$$

eine wahre Aussage ist. Insbesondere macht es eben nur Sinn, wenn wir aus der Wahrheit von C und von $C \Rightarrow D$ die Wahrheit von D fordern. Haben Sie das bemerkt? Dieser untergepunktete Satz selbst war eben auch gerade eine Implikation und zwar eine kausale:

$$(C \wedge (C \Rightarrow D)) \Rightarrow_k D \tag{12}$$

Wir haben gerade mit Logik über einen logischen Sachverhalt gesprochen! Das nennt man übrigens "Metaebene", weil es eine Ebene darüber ist. Es ist in derjenigen Sprache ("Metasprache" genannt), mit welcher wir über eine Sprache sprechen ;-)

(5) bei der kausalen Implikation $\Rightarrow_k$ bestätigt, dass unsere Interpretation und Wahl von Zeile 4 richtig ist.

<u>Zeile 3, $C = 1, D = 0$:</u>

In der dritten Zeile ist die Aussage C wahr und die Aussage D falsch. Wir können hier direkt argumentieren, dass – da C wahr ist und diese Wahrheit hinreichend für die Wahrheit von D ist – die Falschheit von D bedeutet, dass $C \Rightarrow D$ falsch sein muss. Also muss bei Falschheit der Konklusion die Implikation falsch sein. Diese Belegung entspricht der Aussage

"Wenn Paris die Hauptstadt Frankreichs ist,
dann ist der Mount Everest nicht der höchste Berg der Welt." (13)

Dieses Beispiel bestätigt unsere allgemeine Überlegung, denn das ist sicher falsch. Weil die Hauptstadt von Frankreich *ist* Paris und der Mount Everest *ist* der höchste Berg der Welt, trotz fehlender Kausalität. Damit ist bei dieser Belegung $(C \Rightarrow D) \equiv 0$ und wir haben die 3. Zeile gefunden.

C	D	$C \Rightarrow D$
0	0	
0	1	
1	0	0
1	1	1

<u>Zeilen 1 und 2, $C = 0$:</u>

Was geschieht jetzt, wenn wir $C = 0$ haben? Schauen wir uns nochmals (12) genau an. Wir haben dort gesagt, dass diese *kausale* Implikation $\Rightarrow_k$ wahr ist. D.h., dass

$$(C \wedge (C \Rightarrow D)) \Rightarrow_k D) \equiv 1 \tag{14}$$

ist. Da wir den Fall $C = 0$ betrachten, setzen wir dies in (14) einmal ein:

$$(\underbrace{(0 \wedge (0 \Rightarrow D)}_{\equiv 0 \text{ (Rechenregel)}} \Rightarrow_k D) \equiv 1 \tag{15}$$

also

$$(0 \Rightarrow_k D) \equiv 1 \tag{16}$$

Dies entspricht gerade den beiden Fällen von Zeile 1 und 2 der Wahrheitstabelle: "Aus 0 (falsch), können wir nicht kausal (wir betrachten ja $\Rightarrow$) die Aussage D folgern, egal welchen Wahrheitswert D hat" und diese Implikation ist immer wahr gemäss (15). Also insgesamt genau wie im Unterricht definiert:

$$\begin{array}{c|c||c} C & D & C \Rightarrow D \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{17}$$