Sats (kedjeregeln - Enkelt bevis men starka krav på f och g)

Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara definierade och deriverbara på hela $\mathbb{R}$. Låt vidare $k(x)$ vara den sammansatta funktionen $f(g(x))$ och x_0 vara ett reellt tal. Om det finns ett tal $h_0 > 0$ och ett öppet intervall $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ kring x_0, i vilket gäller att $g(x) \neq g(x_0)$ så är $k'(x_0) = f'(g(x_0))$.

Bevis

Vi behöver visa att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - g(x_0)}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

För alla h sådana att $-h_0 < h < h_0$ kan vi skriva

$$\frac{f(g(x_0 + h)) - g(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - g(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x + h) - g(x_0)}{h} \tag{1}$$

Definiera en funktion $m(h)$ genom $m(h) = g(x_0 + h) - g(x_0)$. Då gäller följande:

- $g(x_0 + h) = g(x_0) + m(h)$
- $\frac{f(g(x_0+h))-g(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)} = \frac{f(g(x_0)+m(h))-g(x_0)}{m(h)}$
- $\lim_{h\to 0} m(h) = 0$ eftersom g är kontinuerlig

Således kan likheten (1) ovan skrivas

$$\frac{f(g(x_0 + h)) - g(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0) + m(h)) - g(x_0)}{m(h)} \cdot \frac{g(x + h) - g(x_0)}{h} \tag{2}$$

Eftersom f är deriverbar och $\lim_{h\to 0} m(h) = 0$, existerar gränsvärdet $\lim_{m(h)\to 0} \frac{f(g(x_0)+m(h))-g(x_0)}{m(h)}$ och är lika med $\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+h)-g(x_0)}{h}$ som i sin tur är lika med $f'(g(x_0))$. Vidare existerar gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ och är lika med $g'(x_0)$. Då följer det av gränsvärdeslagarna att:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0) + h) - g(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Således gäller $k'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$. Beviset är nu färdigt. $\Diamond$

Anmärkning

Det är lite störande att behöva kräva att $g(x) \neq g(x_0)$ i en omgivning av x_0 bara för att kunna skriva om kvoten $\frac{f(g(x_0+h))-g(x_0)}{h}$ i beviset ovan. Dessutom behandlar versionen av kedjeregeln ovan bara funktioner som är definierade och deriverbara på hela $\mathbb{R}$. Vi ska nu se att vi kan skippa antagandet att $g(x) \neq g(x_0)$ i en omgivning av x_0 och försvaga villkoret att f och g är definierade och deriverbara överallt till att endast vara definierade och deriverbara i en öppen omgivning av x_0 respektive $g(x_0)$. Detta sker på bekostnad av att beviset blir lite längre och att vi får anta att f' är kontinuerlig i x_0.

Sats (kedjeregeln - version 2, något svagare krav på f och g men längre bevis)

Låt $g(x)$ vara definierad och deriverbar i ett öppet intervall kring en punkt x_0. Låt vidare $f(x)$ vara definierad och deriverbar i ett öppet intervall kring $g(x_0)$ och derivatan $f'(x)$ vara kontinuerlig i $g(x_0)$. Då gäller att funktionen $k(x) = f(g(x))$ är väldefinierad i något öppet intervall kring x_0 och deriverbar i x_0 med derivatan $k'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Bevis

Vi bevisar satsen i följande steg:

1. Vi visar att $k(x)$ är väldefinierad i något öppet intervall kring x_0
2. Vi visar att för varje par av punkter $a < b$ i definitionsmängden till f finns en punkt ξ emellan a och b sådan att lutningen på sekanten mellan $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ är lika med lutningen på tangenten i punkten $(\xi, f(\xi))$. Annorlunda uttryckt: Det finns ett tal ξ emellan a och b sådant att $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
3. Vi använder resultatet i punkt 2 ovan för att bevisa satsen

Steg 1:

Då $g(x)$ är kontinuerlig i x_0 så kan vi genom att välja ett tillräckligt litet intervall kring x_0 säkerställa att funktionsvärdena $g(x)$ i detta intervall är så nära $g(x_0)$ att de ingår i definitionsmängden till f. Således är $f(g(x))$ väldefinierad i detta intervall kring x_0

Steg 2:

Definiera en funktion $r(x)$ genom $r(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Då är $r(x)$ definierad och kontinuerlig på intervallet $a \leq x \leq b$ och deriverbar på intervallet $a < x < b$. Vidare är

$$r(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

och

$$r(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

Eftersom kontinuerliga funktioner, definierade på ett slutet intervall $a \leq x \leq b$ antar såväl sitt minsta värde m som sitt största värde M i intervallet, så finns tal x_m och x_M i intervallet sådana att $r(x_m) = m$ och $r(x_M) = M$. Om x_m och x_M båda är ändpunkter så är $r(x_m) = r(x_M)$ och r är därmed konstant. Härur följer att vi kan välja en godtycklig punkt ξ sådan att $a < \xi < b$ och få

$$0 = r'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Således är steg 2 bevisat i det fall $r(x)$ är konstant eller, annorlunda uttryckt, när $f(x) = c + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ för någon konstant c. Om inte både x_m och x_M är ändpunkter så måste denna punkt vara en stationär punkt eftersom det inte är en ändpunkt. Vi kan då välja denna punkt som vårt ξ och återigen få

$$0 = r'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Nu är steg 2 bevisat i sin helhet.

Steg 3

Vi använder resultatet i steg 2 för att bevisa satsen. Vi behöver bevisa att differenskvoten

$$\frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h}$$

har gränsvärdet $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$. För varje h sådant att $g(x_0 + h)$ tillhör definitionsmängden för f, definierar vi ett tal $\xi(h)$ genom:

1. Om $g(x_0+h) \neq g(x_0)$ så låter vi $\xi(h)$ vara ett tal y i det öppna intervallet mellan $g(x_0)$ och $g(x_0+h)$ som uppfyller $f'(y) = \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}$.
2. Om $g(x_0) = g(x_0+h)$ låter vi $\xi(h)$ vara lika med $g(x_0)$

Eftersom g är deriverbar i sin definitionsmängd är g också kontinuerlig i sin definitionsmängd. Därmed gäller att $\lim_{h\to 0} \xi(h) = g(x_0)$. Vidare är $f'(x)$ kontinuerlig i punkten $g(x_0)$, varför $\lim_{h\to 0} f'(\xi(h)) = f'(g(x_0))$. För differenskvoten $\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ gäller då att

$$\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} = \begin{cases} \frac{f'(\xi(h))(g(x_0+h)-g(x_0))}{h} & \text{om } g(x_0+h) \neq g(x_0) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Notera att om $g(x_0+h) = g(x_0)$, så är $0 = f'(g(x_0))(g(x_0+h)-g(x_0)) = f'(\xi(h))(g(x_0+h)-g(x_0))$. Således behöver vi inte fallindela som vi gjort ovan utan vi kan helt enkelt skriva

$$\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} = f'(\xi(h)) \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Vi har redan konstaterat att $\lim_{h\to 0} f'(\xi(h)) = f'(g(x_0))$ och eftersom $\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$ så följer av gränsvärdeslagarna att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\xi(h)) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x)}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Således är $k(x)$ deriverbar i x_0 och $k'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$. Beviset är nu färdigt. $\Diamond$

Anmärkning

Beviset ovan är förhålladevis långt och man kan undra varför det skulle vara nödvändigt att f och g är deriverbara i en hel omgivning av x_0. Varför skulle det inte räcka med deriverbarhet endast i x_0? Idén i beviset, både i för första och andra versionen, är att skriva om en differenskvot som en produkt. Vi ska nu se att detta är möjligt att göra utan att kräva något annat än att f och g är definierade i en öppen omgivning av x_0 respektive $g(x_0)$ samt att f och g är deriverbara i x_0 respektive $g(x_0)$.

Sats (kedjeregeln - version 3, svaga krav på f och g)

Låt $g(x)$ vara en funktion, definierad i en öppen omgivning av en punkt x_0 och låt $f(x)$ vara en funktion definierad i en öppen omgivning av $g(x_0)$. Om g är deriverbar i x_0 och f är deriverbar i $g(x_0)$ så är funktionen $k(x)$, definierad genom $k(x) = f(g(x))$ definierad i en öppen omgivning av x_0 och deriverbar i x_0 med derivatan $k'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Bevis

Vi utelämnar beviset att $k(x)$ är definierad i en omgivning kring x_0 då det är identiskt med beviset i version 2 ovan. Vi visar att det finns en funktion $r(h)$ definierad i en öppen omgivning av $h = 0$ sådan att:

1. $\lim_{h\to 0} r(h) = f'(g(x_0))$
2. $r(h) \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$

Om vi lyckas med detta så har vi bevisat satsen eftersom båda gränsvärdena $\lim_{h\to 0} r(h)$ och $\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ existerar (det senare eftersom g är deriverbar i x_0) och då ger gränsvärdeslagarna att gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ existerar och är lika med

$$\lim_{h\to 0} r(h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Så till beviset att det går att finna en sådan funktion $r(h)$. Eftersom f är definierad i en öppen omgivning av $g(x_0)$ och g är kontinuerlig i x_0 (eftersom g är deriverbar i x_0) så är det möjligt att för h tillräckligt nära noll definiera

$$R(h) = \begin{cases} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} & \text{om } g(x_0+h) \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{annars} \end{cases}$$

Vi påstår nu att $R(h)$ är vår sökta funktion $r(h)$. Vi börjar med att bevisa att

$$\lim_{h\to 0} R(h) = f'(g(x_0))$$

För att inse detta definierar vi en funktion $m(h)$ genom $m(h) = g(x_0+h) - g(x_0)$. Då följer att $g(x_0+h) = g(x_0) + m(h)$. Vidare är $m(h)$ kontinuerlig i punkten $h = 0$ eftersom g är deriverbar och därmed kontinuerlig i punkten x_0. Således gäller att $\lim_{h\to 0} m(h) = m(0) = 0$ och därmed att

$$R(h) = \begin{cases} \frac{f(g(x_0)+m(h))-f(g(x_0))}{m(h)} & \text{om } m(h) \neq 0 \\ f'(g(x_0)) & \text{annars} \end{cases}$$

Eftersom f är deriverbar i $g(x_0)$ så existerar gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+m(h))-f(g(x_0))}{m(h)}$ och är lika med $f'(g(x_0))$, varur följer att gränsvärdet $\lim_{h\to 0} R(h)$ existerar och är lika med $f'(g(x_0))$ som utlovat. Vi går vidare och bevisar det återstående påståendet, nämligen att $R(h) \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$. Notera att vi definionsmässigt har:

$$R(h) \cdot \frac{(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} = \begin{cases} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} & \text{om } g(x_0+h) \neq g(x_0) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Notera också att

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \begin{cases} \frac{f(g(x_0+h)) - g(x_0)}{h} & \text{om } g(x_0+h) \neq g(x_0) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Således har vi att

$$R(h) \cdot \frac{(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h}$$

precis som utlovat. Beviset är nu färdigt. $\Diamond$