Har du en nål, ett trägolv och gott om tid? Bra, då kan du approximera talet π hur noga du vill.

Andreas Rasmusson

November 11, 2024

Uppgift

Föreställ dig att du står på ett trägolv där varje bräda har bredden t. Du har en också en nål av längden t. Du kastar nålen på golvet upprepade gånger och varje gång nålen rör vid en golvspringa, så noterar du detta. Efter ett stort antal försök räknar du samman antalet gånger du gjort en notering och delar med antal gånger du kastat för att få andelen a_n gånger som nålen rört vid en brädspringa. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{a_n}$.

Lösning

Här gör vi upprepade oberoende slumpförsök som vart och ett har samma sannolikhet p att nålen rör vid en springa. Vi kan således modellera situtationen med en slumpvariabel $X \sim Bin(n, p)$. Vi börjar med att bestämma p. Det som bestämmer huruvida huruvida nålen rör vid en golvspringa är avståndet från nålens centrum till närmsta golvspringa s samt den spetsiga vinkel som (en eventuell förlängning av) nålen bildar med s. Om exempelvis avståndet från nålens centrum till s är $\frac{t}{2}$ så är den enda vinkeln v, där nålen rör vid en golvspringa, den nittiogradiga vinkeln. Vi betecknar vinkeln med θ och avståndet från nålens centrum till s med d. Då varierar θ med likformig sannolikhet mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$ medan d varierar med likformig sannolikhet mellan 0 och $\frac{t}{2}$. Vidare har θ täthetsfunktionen $f_\theta(x) = \frac{2}{\pi}$ på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ och d har täthetsfunktionen $f_d(x) = \frac{2}{t}$ på intervallet $[0, \frac{t}{2}]$. Eftersom θ och d är oberoende av varandra så får slumpvektorn (θ, d) täthetsfunktionen $f_{(\theta,d)}(x_1, x_2)$, definierad genom

$$f_{(\theta,d)}(x_1, x_2) = \begin{cases} f_\theta(x_1) f_d(x_2) = \frac{4}{t\pi} & \text{om } (x_1, x_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{t}{2}\right] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vi undersöker nu på vilken delmängd av $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{t}{2}\right]$ som nålen vidrör den närmsta golvspringan s. Om avståndet från nålens centrum till s är d, där $0 \leq d \leq \frac{t}{2}$, så kan vi betrakta den rätvinkliga triangel som bildas av följande sträckor:

1. Sträckan A från nålens centrum, längs nålen till s i punkten a
2. Sträckan B från nålens centrum, längs x-axeln till s i punkten b
3. Sträckan C från a till b

Då rör nålen vid s om och endast om $A \leq \frac{t}{2}$. Från grundläggande geometri vet vi att $sin(\theta) = \frac{B}{A} = \frac{d}{A}$. Således måste vi ha $A = \frac{d}{sin(\theta)}$. Vi kan nu dra slutsatsen att nålen rör vid en springa om och endast om

$$\frac{d}{sin(\theta)} \leq \frac{t}{2} \Leftrightarrow d \leq \frac{tsin(\theta)}{2}$$

Det följer nu att sannolikheten p för att nålen vidrör en springa ges av integralen

$$p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{tsin(x_2)}{2}} \frac{4}{t\pi} dx_1 \right) dx_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4x_1}{t\pi} \right]_0^{\frac{tsin(x_2)}{2}} dx_2$$

$$=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4sin(x_2)}{2\pi} dx_2 = \left[-\frac{2cos(x_2)}{\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Således vet vi nu att $X \sim Bin(n, \frac{2}{\pi})$. Då följer av lagen om de relativa frekvensernas stabilitet att $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\pi}$ och därmed att $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{a_n} = \pi$. Svaret är alltså π

Anmärkning

En följd av ovanstående är att man kan approximera talet π godtycklig noga genom att kasta nålen tillräckligt många gånger och beräkna $\frac{2}{a_n}$. Uppgiften ovan kallas Buffon's nålproblem. Bilden nedan visar resultatet av en simulering med tio miljoner kast av nålen: