**Definition 1**

Vi betecknar med $(C^1[a,b], || \ ||_\infty)$ Det normerade rum som består av mängden av alla kontinuerligt deriverbara funktioner på $[a,b]$ och normen $|| \ ||_\infty$, definierad genom

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Vi betecknar vidare med $(C[a,b], || \ ||_\infty)$ det normerade vektorrum som består av mängden av alla kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ och normen $|| \ ||_\infty$. Om en följd $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ av funktioner i $(C^1[a,b], || \ ||_\infty)$ eller $(C[a,b], || \ ||_\infty)$ konvergerar mot en funktion $f$ i $(C[a,b], || \ ||_\infty)$, dvs om

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

, skriver vi detta som

$$\overset{C}{\lim_{n\to\infty}} f_n = f$$

En funktion $D : (C^1[a,b], || \ ||_{C^1}) \mapsto (C[a,b], || \ ||_\infty)$ kallar vi för en operator. Vi kallar en operator $D$ för en derivataliknande operator om följande villkor uppfylls:

1. $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$
2. $D(f \cdot g) = D(f)g + fD(g)$
3. $D(f \circ g) = (D(f) \circ g)D(g)$
4. Om $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ & $\lim_{n\to\infty}^C D(f_n) = g$ så gäller att $g = D(f)$
5. $D$ avbildar inte alla funktioner till nollfunktionen

**Lemma 1**

Den klassiska derivatan $\frac{d}{dx}$ är en derivataliknande operator.

**Bevis**

Vi visar endast att $\frac{d}{dx}$ uppfyller punkt 4 ovan eftersom det är välkänt att övriga villkor uppfylls. Antag alltså att $\lim_{n\to\infty}^C f_n = f$ och $\lim_{n\to\infty}^C f_n' = g$. Då konvergerar $f_n$ mot $f$ punktvis och $f_n'$ mot $g$ likformigt i den vanliga bemärkelsen. Då får vi att

$$\int_a^x g(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a) = f(x) - f(a)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

Eftersom högerledet i den sista likheten är en primitiv funktion till $g$ så måste $f$ vara en primitiv funktion till $g$, dvs $f' = g$. Beviset är därmed färdigt. $\Diamond$

**Lemma 2**

Om $D$ är en derivataliknande operator, så är $D(p) = p'$ för alla polynom $p \in C^1(a, b)$

**Bevis**

Låt $f$ vara den konstanta funktionen $f(x) = 1$. Då har vi att

$$D(f) = D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + D(1) \cdot 1 = 2D(1) = 2D(f)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$D(f) = 0 = f'$$

Om istället $f$ är en konstant funktion $f(x) = C$ så har vi att

$$D(C) = D(C \cdot 1) = CD(1) = 0 = f'$$

Om istället $f(x) = ax + b$ för konstanter $a$ och $b$, så har vi

$$D(f) = D(ax + b) = D(ax) + D(b) = aD(x)$$

Vidare gäller för funktionen $h(x) = x$ att

$$D(h) = D(h \circ h) = (D(h) \circ h)D(h) = D(h)D(h)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$D(h)^2 - D(h) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$D(h) = 0 \text{ eller } D(h) = 1$$

Om $D(h) = 0$ så skulle i så fall $D(g) = D(h \circ g) = (D(h) \circ g) \cdot D(g) = 0 \cdot D(g) = 0$ för alla $g \in C^1[a, b]$ vilket strider mot villkor 5 i definitionen av derivataliknande operator. Således är $D(h) = 1 = h'$, varur direkt följer att $D(f) = a = f'$. Vi visar nu med induktion på högsta graden $n$ i en term i polynomet $p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ att $D(p) = \sum_{i=0}^{n} i\alpha_i x^{i-1} = p'$. Basfallen $n = 0$ och $n = 1$ är avklarade i och med ovanstående. Antag nu att påståendet är sant för alla $n \leq k$ och betrakta ett polynom $p = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i x^i$ med högsta grad $k + 1$. Då har vi, i enlighet med induktionsantagandet, att

$$D(p) = D\left(\sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i x^i\right) = D\left(\alpha_{k+1}x^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i\right)$$

$$=$$

$$D(\alpha_{k+1}x^{k+1}) + D\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i\right)$$

$$= \text{ ( på grund av induktionsantagandet )}$$

$$\alpha_{k+1}D(x \cdot x^k) + \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i x^{i-1}$$

$$= \text{ ( produktregeln )}$$

$$\alpha_{k+1}(D(x)x^k + xD(x^k)) + \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i x^{i-1}$$

$$= \text{ ( på grund av induktionsantagandet )}$$

$$\alpha_{k+1}(x^k + xkx^{k-1}) + \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i x^{i-1}$$

$$=$$

$$\alpha_{k+1}(k+1)x^k + \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{k+1} i\alpha_i x^i = p'$$

Beviset är nu färdigt. $\lozenge$

**Sats**

Det finns en och endast en derivataliknande operator och det är den klassiska derivatan.

**Bevis**

Vi har sett i lemma 1 att $\frac{d}{dx}$ är en derivataliknande operator så det finns minst en sådan. Låt nu $D$ vara en godtycklig derivataliknande operator. Vi har sett i lemma 2 att $D = \frac{d}{dx}$ för alla polynom i $C^1[a,b]$. Låt nu $f \in C^1[a,b]$ vara en godtyckligt vald funktion. Då är $f'$ kontinuerlig på $[a,b]$ och enligt Weierstrass approximationssats finns en följd $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ av polynom sådana att $\lim^C_{n\to\infty} p_n = f'$. Definiera nu polynom $P_n$ genom

$$P_n(x) = f(a) + \int_a^x p_n(t)dt$$

Det följer av integralkalkylens fundamentalsats att $P_n' = p_n$. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Eftersom $\lim^C_{n\to\infty} p_n = f'$ finns ett $N$ sådant att för alla $n \geq N$ gäller att $||p_n - f'||_\infty < \frac{\epsilon}{b-a}$. För sådana $n$ har vi också att

$$||P_n - f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left| f(a) + \int_a^x p_n(t)dt - f(x) \right| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x (p_n(t) - f'(t))dt \right|$$

$$\leq$$

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |p_n(t) - f'(t)|dt$$

$$<$$

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)\varepsilon}{b-a} = \frac{(b-a)\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Således har vi hittat en följd av polynom $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ sådana att

1. $\lim_{n\to\infty} P_n = f$
2. $\lim^C_{n\to\infty} P_n' = f'$

Notera nu att $f' = \lim_{n\to\infty} P_n' = \lim_{n\to\infty} D(P_n)$. Eftersom $D$ är en derivataliknande operator, gäller speciellt villkor 4 i definitionen därav, det vill säga, $D(f) = f'$. Således finns en och endast en derivataliknande operator och det är den klassiska derivatan, vilket skulle bevisas $\Diamond$