Pumping lemma per linguaggi regolari

Sia L un linguaggio regolare. Allora $\exists p \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\forall z \in L, |z| > p$, $\exists u, v, w$ t.c.
$(z = uvw \ \& \ |uv| \leq p \ \& \ |v| > 0 \ \& \ \forall i \geq 0, uv^iw \in L) \longrightarrow$ 3 sottostringhe di cui 1 pumpable

DIMOSTRAZIONE

Se L è regolare, allora - è generato da una grammatica regolare - è riconosciuto da un NFA/DFA - è denotato da un'espressione regolare.

$\exists$ DFA $M = (S, A, move_d, s_0, F)$ t.c. $L(M) = L$

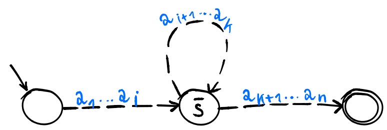
Prendiamo $p = |S|$, il numero di stati di M, che sappiamo esistere.

La massima lunghezza di un cammino in M da s_0 ad uno stato in F che attraversa ogni stato al più una volta è $(p-1)$

Se $z \in L$ è tale che $|z|$ deve essere p, $\exists$ un cammino $z = a_1 \dots a_n$ che attraversa uno stato almeno 2 volte.

Sia $\bar{s}$ uno dei tali stati. Supponiamo che il cammino da s_0 a $\bar{s}$ che non passa attraverso $\bar{s}$ (che quindi lo raggiunge la prima volta) sia etichettato $a_1 \dots a_i$, il cammino da $\bar{s}$ a $\bar{s}$ sia etichettato $a_{i+1} \dots a_K$, che il cammino da $\bar{s}$ allo stato finale sia etichettato $a_{K+1} \dots a_n$.

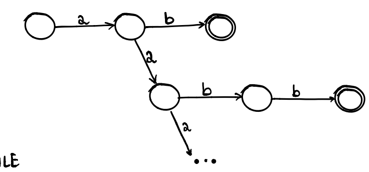
Allora, ponendo $u = a_1 \dots a_i$, $v = a_{i+1} \dots a_K$, $w = a_{K+1} \dots a_n$, ottengo la tesi.



Automa deterministico: 1 solo cammino da stato iniziale a finale.
Ho ipotizzato p stati: cammino lungo p-1.
Sto considerando una parola lunga > p. Allora c'è (almeno) uno stato da cui passo almeno 2 volte. Supponiamo che tale stato sia quello azzurro.

Il pumping lemma per linguaggi regolari, come al solito, è utile per dimostrare che un linguaggio *non* è regolare.

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ senza Pumping lemma...



DIFFICILE

Si usa la negazione: $\forall p \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\exists z \in L, |z| > p$, $\forall u, v, w$ t.c. $(z = uvw \ \& \ |uv| \leq p \ \& \ |v| > 0) \longrightarrow \exists i \geq 0, uv^iw \notin L$

Errato fare assunzioni, es. "prendo $p > 2$"

Esercizio

Dimostrare che $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ è regolare.

Supponiamo che L sia regolare. Sia $p \in \mathbb{N}^+$.

Prendiamo $z = a^p b^p$. $p + p = 2p > p$, z OK.

uv è confinato qua

$\underbrace{a \dots a}_{} \, b \dots b$

v ha almeno una 'a'.

Comunque siano uvw, v contiene almeno un'occorrenza di 'a' e contiene solo 'a'

uv^0w è della forma $a^j b^p$, con $j < p \Rightarrow uv^0w \notin L$ il che contraddice il pumping lemma.

Proprietà di $\mathcal{E}$-chiusura dei linguaggi regolari

- Linguaggi liberi: chiusi per unione; linguaggi regolari: anche.

L sull'alfabeto $A = \{a_1 \dots a_n\}$. $\bar{L} = L((a_1 | \dots | a_n)) \setminus L$

- I linguaggi regolari sono chiusi per complementazione.

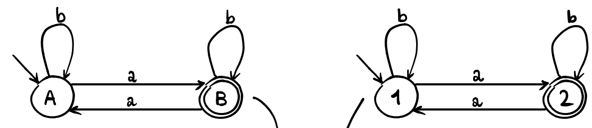
DIMOSTRAZIONE: Sia L un linguaggio regolare. $\exists$ DFA M t.c. $L(M) = L$.

Sia $M^{TOT} = (S, A, move_d, s_0, F)$ il DFA con funzione di transizione totale equivalente ad M e sia $\bar{M}^{tot}$ l'automa $(S, A, move_d, S \setminus F)$.

$\bar{M}^{tot}$ riconosce $\bar{L} \Rightarrow \bar{L}$ è regolare.

• I linguaggi liberi sono chiusi per intersezione? ... sì:

Sia L_1 = linguaggio con dispari occorrenze di 'a', L_2 = linguaggio con dispari occorrenze di 'b'.



$L_1 \cap L_2$ = dispari 'a' e dispari 'b'