La scorsa lezione abbiamo visto che esistono più grammatiche che generano lo stesso linguaggio. Un esempio era la grammatica: $\{a^n b^n \mid n > 0\}$

Produzioni di una grammatica:

$\alpha \to \beta$

Contiene 1 non-terminale

Può essere vuota: ε

Se α è costituita da 1 solo terminale, la grammatica è libera.

Def. Un linguaggio formale L è libero (da contesto) ⇔ se esiste una grammatica G libera (da contesto) tale che L=L(G).

La grammatica
$$S \to aSB \mid abc$$
$$cB \to Bc$$
$$bB \to bb$$
produce il linguaggio $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$. Non esiste una grammatica libera per questo linguaggio.

Come si fa a dimostrare che non c'è una certa grammatica libera che generi un linguaggio? Si dimostra con un lemma fondamentale.

Pumping lemma per linguaggi liberi

Sia L un linguaggio libero. Allora:

Lunghezza

Posso decomporre z in 5 sottostringhe

$$\exists p \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } \forall z \in L,\ |z| > p,\ \exists u,v,w,x,y \text{ t.c. valgono:}$$

$$\underbrace{z = uvwxy}_{Q_1} \quad \& \quad \underbrace{|vwx| \le p}_{Q_2} \quad \& \quad \underbrace{|vx| > 0}_{Q_3} \quad \& \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \underbrace{uv^i w x^i y \in L}_{Q_4}$$

anche nullo

Questo lemma serve dal punto di vista tecnico per organizzare una dimostrazione del fatto che un certo linguaggio *non* sia libero. Affinché un certo linguaggio non sia libero, si deve verificare la negazione della tesi:

$$\forall p \in \mathbb{N}^+,\quad \exists z \in L,\ |z| > p,\quad \forall u,v,w,x,y \text{ t.c. valgono: } !(Q_1 \,\&\, Q_2 \,\&\, Q_3 \,\&\, Q_4)$$

$$z = uvwxy \quad \& \quad |vwx| \le p \quad \& \quad |vx| > 0 \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N},\ uv^i w x^i y \notin L$$

De Morgan:

$!(Q_1 \,\&\, Q_2 \,\&\, Q_3 \,\&\, Q_4) =$

$!Q_1 \text{ or } !Q_2 \text{ or } !Q_3 \text{ or } !Q_4 =$

$!(Q_1 \,\&\, Q_2 \,\&\, Q_3) \text{ or } !Q_4 =$

$Q_1 \,\&\, Q_2 \,\&\, Q_3 \Rightarrow Q_4$

In altre parole:

Propongo una parola z, e dimostro che, anche se la scompongo in una qualsivoglia decomposizione di cinque parti che caratteristiche che abbiamo scritto, riesco a trovare un indice *i* che, applicato alla v e alla x, fa sì che la parola non appartenga ad L.

ESEMPIO: Proposizione: $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ non è un linguaggio libero.

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che L sia un linguaggio libero. Sia p una costante arbitraria $(\forall p \in \mathbb{N}^+)$. Si consideri $z = a^p b^p c^p$ $(\exists z \in L,\ |z| > p)$.

La parola che ho preso in considerazione è così fatta: $\underbrace{a \dots a}_{p}\ \underbrace{b \dots b}_{p}\ \underbrace{c \dots c}_{p}$

Decomponendo la parola in uvwxy con $|vwx| \le p$ abbiamo le seguenti possibilità:

$$a \dots\dots a \quad b \dots\dots b \quad c \dots\dots c$$

Esiste questo i? Certo che sì, ad esempio $i = 0$

$\Rightarrow \forall u,v,w,x$ se $z = uvwxy$ & $|vwx| \le p$ & $|vx| > 0$, allora vwx
- o non contiene occorrenze di 'c'
- o non contiene occorrenze di 'a'

$\Rightarrow uv^0 w x^0 y \notin L$, il che contraddice il pumping lemma.

$L_1 = \{ww \mid w \in \{a,b\}\}$ FGAZ: $z = a^p b^p a^p b^p$

reverse

$L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}\}$ Ex: abba $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$ ✓