Oggi formalizzeremo ciò che abbiamo visto ieri: la minimizzazione del DFA.

Input: DFA con funzione di transizione totale.
Output: minDFA, cioè quello che ha il numero minimo di stati (nodi) e transizioni (archi), che non necessariamente ha funzione di transizione totale, ed è depurato da dead-states e pozzo.

Questo algoritmo è il più efficiente conosciuto.

Partizionamento: si tratta di effettuare un partizionamento in gruppi, in cui elementi siano equivalenti rispetto ad una nozione specifica di equivalenza.

EQUIVALENZA:

In quanti k-passi di transizione.

$move_d^k$ è definita per induzione sul valore di k.

$move_d^0(s,\varepsilon) = s \longrightarrow$ "Applicata ad un certo stato s, considerando la parola vuota ε".
Ricordiamo che i DFA non prevedono ε-transizioni. Qui ε è usata solo per dare la definizione induttiva.

$move_d^{k+1}(s, wa) = move_d(move_d^k(s,w), a)$ Per muoversi in k+1 passi in s rispetto alla parola wa.

Sia $D = (S, A, move_d, s_0, F)$ un DFA con $move_d$ totale. Allora due stati $(s,t) \in S$ sono equivalenti, e si scrive $s \sim t$, se e solo se per ogni parola w di lunghezza k e sull'alfabeto A, la $move_d^k(s,w) \in F$ se e solo se anche $move_d^k(t,w) \in F$.
è uno stato finale

Questo esplicita formalmente quello che ieri avevamo trattato intuitivamente: due stati sono equivalenti se, con la stessa parola, riesco a raggiungere uno stato finale (non *lo stesso* stato finale, ma *un certo* stato finale).

La minimizzazione del DFA consiste, da un punto di vista tecnico, nel trovare una partizione degli stati del nostro DFA, rispetto a questa nozione di equivalenza. Cioè, vogliamo mettere, nello stesso sottoinsieme di stati di un DFA, tutti quelli che hanno questa caratteristica.

Noi partiamo dal seguente partizionamento grossolano.

$B_1 = F$ (stati finali)
$B_2 = S \setminus F$ (non finali)

Questi due blocchi rappresentano l'insieme di quello stati che si differenziano per parole di lunghezza 0. Cioè, quello che abbiamo è che:

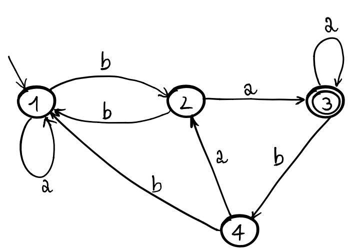
$\forall s \in B_1, \forall t \in B_2, \; s \not\sim t$ in quanto:
- $move_d^0(s,\varepsilon) = s \in B_1 \subseteq F$ (finale)
- $move_d^0(t,\varepsilon) = t \in B_2$, quindi certamente $t \notin F$.

Come facciamo il raffinamento di B2? Quello che dobbiamo ottenere, nel caso in cui riteniamo sia necessario suddividere ancora B1 e B2, sono blocchi che hanno queste caratteristiche:
1. Contengono stati equivalenti,
2. Coppie distinte di blocchi non contengono stati equivalenti (gli stati equivalenti sono obbligati a stare nello stesso blocco).

Cosa facciamo per accertarci di queste due proprietà? Diciamo che:

Data una certa partizione degli stati (es.: nei blocchi $B_1 \dots B_5$), se, per qualche $B_i \neq B_j$ e per qualche $\underset{\text{alfabeto}}{a \in A}, \exists\, \underset{\text{stati}}{s,t} \in B_i$ t.c. e t.c. $move_d(s,a) \in B_j$ & $move_d(t,a) \notin B_j$, allora diciamo che B_i è splittable rispetto a (B_j, a).

MENO FORMALMENTE: Se esistono 2 stati s,t di uno stesso blocco B_i, e un simbolo a, tale per cui tramite a arrivo in uno stato B_i per s, ma in uno stato in un blocco $B_j \neq B_i$ per t, allora...



$B_i = \{\overset{s}{1}, \overset{t}{4}\}$ $\quad B_j = \{2, 3\}$ $\quad$ s va in B_j, t non va in B_j ma in B_i

b b

B_i può essere splittato rispetto a (B_j, a).

Cosa è lo split di B_i rispetto a (B_j, a)?

E' ottenuto rimpiazzando B_i con 2 blocchi dati da $\{s \in B_i$ t.c. $move_d(s,a) \in B_j\}$ & $\{s \in B_j$ t.c. $move_d(s,a) \notin B_j\}$

Algoritmo di partition refinement

INPUT: DFA totale $D = (S, A, move_d, s_0, F)$

OUTPUT: partizione degli stati di S in blocchi di stati equivalenti secondo la definizione di equivalenza.

$B_1 = F$

$B_2 = S \setminus F$

$P = \{B_1, B_2\}$

while ($\exists B_i, B_j \in P$ & $\exists a \in A$ con B_i splittable rispetto a (B_j, a))

{ split di B_i rispetto a (B_j, a) in P } % ottengo 2 sottoinsiemi: - stati di B_i che tramite a-transizioni raggiungono stati che stanno in B_j

- stati di B_i che tramite a-transizioni raggiungono stati che stanno in B_i

Algoritmo per la minimizzazione di DFA

INPUT: DFA totale

OUTPUT: min DFA

Let $P = \{B_1 \dots B_n\}$ il risultato del partition refinement di B.

foreach B_i impostare uno stato temporaneo t_i (poi potremo anche buttarlo via) % con questo foreach decidiamo quali sono gli stati

if $B_i \subseteq F$ (e' composto esclusivamente da stati finali) allora t_i è finale % dell'automa che stiamo costruendo

foreach (B_i, B_j, a) t.c. $s_i \in B_i$, $s_j \in B_j$, $move_d(s_i, a) = s_j$ % c'è una transizione da s_i a s_j etichettata a

impostare una transizione etichettata a dallo stato temporaneo t_i per B_i allo stato temporaneo t_j per B_j.

foreach dead temporaney state t_i, rimuovere t_i e tutte le transizioni da/a t_i.

- Gli stati del minDFA sono gli stati temporanei rimasti (sopravvissuti) a questa fase qui.
- Le transizioni del minDFA sono le transizioni rimaste.
- Lo stato iniziale del minDFA è lo stato che corrisponde a B_i t.c. $s_0 \in B_i$