I linguaggi liberi sono chiusi per unione

L1 ed L2 linguaggi liberi $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ è un linguaggio libero, ossia:

$\exists\, G_1, G_2$ grammatiche libere t.c. $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$.

Esempio: $S \rightarrow aSb \mid ab$ $\quad \{a^n b^n \mid n>0\}$
$A \rightarrow cAd \mid cd$ $\quad \{c^n d^n \mid n>0\}$

$\{a^n b^n \mid n>0\} \cup \{c^n d^n \mid n>0\}$

TROVIAMONE UNA GRAMMATICA

$Z \rightarrow S \mid A$ $\quad \rightarrow$ ipotesi: $Z \notin V_1 \cup V_2$
$S \rightarrow aSb \mid ab$
$A \rightarrow cAd \mid cd$

Sembra essere opportuna, ma c'è solo un dettaglio di cui ci dobbiamo occupare

$\{a^n b^n \mid \dots\}$ $\quad S \rightarrow aSb \mid ab$
$\{c^n d^n \mid \dots\}$ $\quad S \rightarrow cSd \mid cd$

$Z \rightarrow S \mid S$ genererebbe un macello: necessità di fare α-equivalenza!

(Riscrivere i non-terminali omonimi)

$G = (\{Z\} \cup V_1 \cup V_2',\ T_1 \cup T_2,\ Z,\ \{Z \rightarrow S_1 \mid S_2'\} \cup P_1 \cup P_2')$

Nuovo start symbol

- V_2', S_2', P_2' ottenuti da V_2, S_2 e P_2 per ridenominazione dei non-terminali omonimi a quelli di $V_1 \setminus T_1$
- $Z \notin V_1 \cup V_2'$

G è tale che $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

I linguaggi liberi sono chiusi per concatenazione

L_1 ed L_2 concatenati fanno $\{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \ \&\ w_2 \in L_2\}$

DIMOSTRAZIONE $\quad L_1, L_2$ linguaggi liberi $\Rightarrow \exists\, G_1 = (V_1, T_1, S_1, P_1)$ & $G_2 = (V_2, T_2, S_2, P_2)$ libere e tali che $L_1 = L(G_1)$ & $L_2 = L(G_2)$

Sia $G_2' = (V_2', T_2, S_2', P_2')$ una α-ridenominazione di G_2 tale che evita possibili clash con i non-terminali di G_2.

Allora $G = (\{Z\} \cup V_1 \cup V_2',\ T_1 \cup T_2,\ Z,\ P_1 \cup P_2' \cup \{Z \rightarrow S_1 \mid S_2'\})$ è tale che $Z \notin V_1 \cup V_2$

$L(G)$ è la concatenazione di L_1 e L_2.

I linguaggi liberi non sono chiusi per intersezione

L_1, L_2 liberi... $L_1 \cap L_2$ libero?

Esempio: $L_1 = \{a^n b^n c^j \mid n, j > 0\} \rightarrow$ Libero! Nota che è la concatenazione di $\{a^n b^n \mid n>0\}$ e $\{c^j \mid j>0\}$.

$L_2 = \{a^j b^n c^n \mid n, j > 0\} \rightarrow$ Libero.

$\downarrow$

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \rightarrow$ NON È LIBERO!