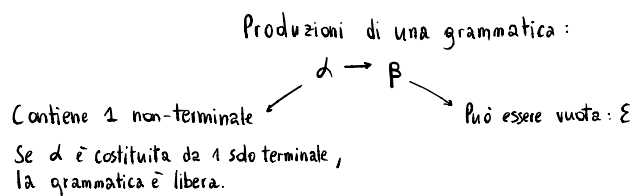


La scorsa lezione abbiamo visto che esistono più grammatiche che generano lo stesso linguaggio. Un esempio era la grammatica:  $\{a^n b^n \mid n > 0\}$



Def. Un linguaggio formale  $L$  è libero (da contesto)  $\Leftrightarrow$  se esiste una grammatica  $G$  libera (da contesto) tale che  $L=L(G)$ .

La grammatica  $S \rightarrow aSB \mid abc$   
 $cB \rightarrow Bc$   
 $bB \rightarrow bb$  produce il linguaggio  $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ . Non esiste una grammatica libera per questo linguaggio.

Come si fa a dimostrare che non c'è una certa grammatica libera che generi un linguaggio? Si dimostra con un lemma fondamentale.

### Pumping lemma per linguaggi liberi

Sia  $L$  un linguaggio libero. Allora:

Lunghezza

Posso decomporre  $z$  in 5 sottostringhe

$$\exists p \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } \forall z \in L, |z| > p, \exists u, v, w, x, y \text{ t.c. valgono:}$$

$$z = \underbrace{uvw}_{Q_1} \underbrace{xy}_{Q_2} \quad \& \quad |vwx| \leq p \quad \& \quad |vx| > 0 \quad \& \quad \forall i \in \mathbb{N}, \underbrace{uv^i w x^i y}_{Q_4} \in L$$

anche nullo

Questo lemma serve dal punto di vista tecnico per organizzare una dimostrazione del fatto che un certo linguaggio *non* sia libero. Affinché un certo linguaggio non sia libero, si deve verificare la negazione della tesi:

$$\forall p \in \mathbb{N}^+, \exists z \in L, |z| > p, \forall u, v, w, x, y \text{ t.c. valgono: } \neg (Q_1 \& Q_2 \& Q_3 \& Q_4)$$

$$z = uvwxy \quad \& \quad |vwx| \leq p \quad \& \quad |vx| > 0 \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}, uv^i w x^i y \notin L$$

De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg (Q_1 \& Q_2 \& Q_3 \& Q_4) &= \\ \neg Q_1 \text{ or } \neg Q_2 \text{ or } \neg Q_3 \text{ or } \neg Q_4 &= \\ \neg (Q_1 \& Q_2 \& Q_3) \text{ or } \neg Q_4 &= \\ Q_1 \& Q_2 \& Q_3 \Rightarrow \neg Q_4 \end{aligned}$$

In altre parole:

Propongo una parola  $z$ , e dimostro che, anche se la scompongo in una qualsivoglia decomposizione di cinque parti che caratteristiche che abbiamo scritto, riesco a trovare un indice  $i$  che, applicato alla  $v$  e alla  $x$ , fa sì che la parola non appartenga ad  $L$ .

ESEMPIO: Proposizione:  $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$  non è un linguaggio libero.

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che  $L$  sia un linguaggio libero. Sia  $p$  una costante arbitraria ( $\forall p \in \mathbb{N}^+$ ). Si consideri  $z = a^p b^p c^p$  ( $\exists z \in L, |z| > p$ ).

La parola che ho preso in considerazione è così fatta:  $\underbrace{a \dots a}_P \underbrace{b \dots b}_P \underbrace{c \dots c}_P$

Decomponendo la parola in  $uvwxy$  con  $|vwx| \leq p$  abbiamo le seguenti possibilità:

$\underbrace{a \dots a}_P \underbrace{b \dots b}_P \underbrace{c \dots c}_P$

Esiste questo  $i$ ? Certo che sì, ad esempio  $i=0$

$\Rightarrow \forall u, v, w, x$  se  $z = uvwxy$  &  $|vwx| \leq p$  &  $|vx| > 0$ , allora  $uv^0 w x^0 y \notin L$ , il che contraddice il pumping lemma.

$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ non contiene occorrenze di 'c'} \\ \circ \text{ non contiene occorrenze di 'a'} \end{array} \right.$

$$L_1 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\} \quad \text{FGAZ: } z = a^p b^p a^p b^p$$

$$L_2 = \{ww^{\text{reverse}} \mid w \in \{a,b\}^*\} \quad \text{EX: } abbba \quad S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \epsilon \quad \checkmark$$