



Jaider Pulido
132273

Back | FS



1/27

IMPLEMENTACIÓN DE GLBE PARA DINÁMICA DE FLUIDOS BIDIMENSIONAL

Jaider Iván Pulido Piñeros

*Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Física*



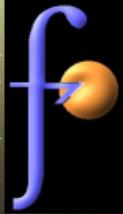
Jaider Pulido
132273

Back | FS

◀◀ ▶▶

2/27

14/10/2005



Dinámica de fluidos

Ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_{ext} \quad (1)$$

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

Ecuación de Vorticidad

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (3)$$

Jaider Pulido
132273

Back FS



3/27



f

Teoría Cinética de los Gases

Función de distribución de las partículas del gas

$$f = f(\mathbf{x}, \vec{\xi}, t)$$

Ecuación de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\vec{\xi}} f = \Omega \quad (4)$$

Jaider Pulido
132273

Back FS

◀◀ ◀▶▶

4/27

14/10/2005

Aproximación BGK (Bhatnagar-Gross-Krook)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{(eq)}]$$

Cantidades macroscópicas

$$\rho = \int f d\vec{\xi} = \int f^{(eq)} d\vec{\xi},$$

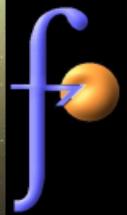
$$\rho \mathbf{u} = \int \vec{\xi} f d\vec{\xi} = \int \vec{\xi} f^{(eq)} d\vec{\xi}$$



Jaider Pulido
132273

Back	FS
◀◀	▶▶

5/27



Ecuación de Boltzmann Discretizada

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = -\frac{1}{\lambda} [f_\alpha - f_\alpha^{(eq)}], \quad \alpha = 0, \dots, 8$$

Cantidades macroscópicas

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(eq)},$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(eq)} \mathbf{e}_{\alpha}$$

Jaider Pulido
132273

Back FS



Discretización de la velocidad



Se tienen 9 posibles velocidades $\{e_\alpha | 0, 1, \dots, 8\}$ de las partículas. Los pesos de cada velocidad son:

$$w_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9}, \\ \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{36} \end{cases}$$

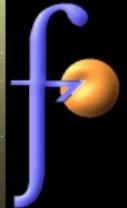


Jaider Pulido
132273

Back FS

◀◀ ▶▶

7/27



Discretización de espacio y tiempo

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \tau = \frac{\lambda}{\Delta t}$$

Lattice Boltzmann Equation (LBE)

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\lambda} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{(eq)}(\mathbf{x}, t))$$

Modelo LBGK

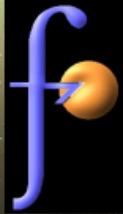
$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t + 1) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{(eq)}(\mathbf{x}, t))$$

Jaider Pulido
132273



Back	FS
◀◀	◀▶

8/27



Distribuciones de Equilibrio

Distribución Maxwelliana

$$f^{(eq)} = \frac{\rho}{\sqrt{(2\pi\theta)^D}} \exp\left[-\frac{(\vec{\xi} - \mathbf{u})^2}{2\theta}\right], \quad \theta = \frac{k_B T}{m}$$

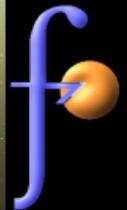
Expansión a segundo orden para números de Mach bajos ($\mathbf{u} \approx 0$)

$$f^{(eq)} = \frac{\rho}{\sqrt{(2\pi\theta)^D}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\theta}\right] \left\{ 1 + \frac{\vec{\xi} \cdot \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\vec{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{u^2}{2\theta} \right\}$$

Jaider Pulido
132273

Back	FS
◀◀	▶▶

9/27



Distribuciones de equilibrio en la red

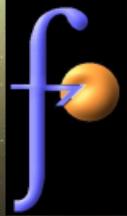
Para el caso de las 9 velocidades, con un parámetro de red $c = \sqrt{3\theta}$, ó $c_s^2 = \theta$, tenemos:

$$f_{\alpha}^{(eq)} = w_{\alpha}\rho \left\{ 1 + 3\frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\}$$

Cantidades Macroscópicas

$$P = c_s^2 \rho, \quad \nu = \frac{2\tau - 1}{6}$$

Back	FS
◀◀	◀▶



Generalización de la Ecuación de Boltzmann de Red (GLBE)

En la generalización de la LBE para el modelo de 9 velocidades presentada por Lallemand & Luo^[1] (2000) se toman las nueve funciones de distribución de métodos LBE anteriores, las cuales se asocian al espacio $\mathbb{V} = \mathbb{R}^9$ generado por las 9 velocidades $\{\mathbf{e}_\alpha | 0, 1, \dots, 8\}$, y que en notación de kets se pueden escribir como

$$|f\rangle = (f_0, f_1, \dots, f_8)^T. \quad (5)$$



Así mismo, se construye un espacio $\mathbb{M} = \mathbb{R}^9$ basado en los momentos de $|f\rangle$. Se tienen entonces 9 momentos independientes entre sí, que se pueden expresar como:

$$|\varrho\rangle = (\rho, j_x, j_y, q_x, q_y, \varepsilon, e, p_{xx}, p_{xy})^T, \quad (6)$$

siendo ρ la densidad, $j_{x,y}$ el flujo de momentum, $q_{x,y}$ el flujo de calor, e y ε la energía y el cuadrado de ésta respectivamente, y $p_{x[x,y]}$ las componentes del tensor de stress.

Jaider Pulido
132273

Back	FS
◀◀	◀▶

12/27

14/10/2005



f

Los dos espacios son relacionados mediante

$$|\varrho\rangle = M |f\rangle, \quad |f\rangle = M^{-1} |\varrho\rangle, \quad (7)$$

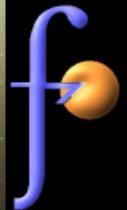
donde M es la matriz de transformación de \mathbb{V} a $\mathbb{M}^{[1]}$:

$$M \equiv \begin{pmatrix} \langle \rho | \\ \langle j_x | \\ \langle j_y | \\ \langle q_x | \\ \langle q_y | \\ \langle \epsilon | \\ \langle e | \\ \langle p_{xx} | \\ \langle p_{xy} | \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Jaider Pulido
132273

Back FS





Múltiples tiempos de relajación

El paso de relajación se efectúa en el espacio \mathbb{M} .

El proceso se expresa como:

$$|\Delta\varrho\rangle = S |\delta\varrho\rangle, \quad (9)$$

$$S = -\text{diag}(0, 0, 0, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8),$$

en donde $|\Delta\varrho\rangle$ es el cambio en los momentos, $|\delta\varrho\rangle = |\varrho\rangle - |\varrho^{(eq)}\rangle$ es la diferencia entre los momentos calculados con (7) y los de equilibrio; y S es una matriz diagonal, que contiene todos los parámetros de relajación.

Jaider Pulido

132273

Back FS

◀◀ ▶▶

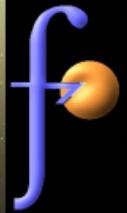
14/27



En las simulaciones se usó^[1]:

$$S = -\text{diag} \left(0, 0, 0, 3 \frac{(2 - s_7)}{(3 - s_7)}, 1.92, 1.14, 1.64, s_7, s_7 \right), \quad (10)$$

siendo $\tau = 1/s_7$ el mismo tiempo de relajación del modelo LBGK
(Por comodidad hacemos $\Delta[x, y] = 1$, $\Delta t = 1$, de manera tal que $c = 1$ y $c_s^2 = 1/3$).



Equilibrio en el espacio de momentos

Los momentos de equilibrio de la ec. (9) están dados por:

$$\begin{aligned} q_x^{(eq)} &= -j_x, \quad e^{(eq)} = -2\rho + 3\frac{(j_x^2 + j_y^2)}{\rho}, \quad p_{xx}^{(eq)} = \frac{(j_x^2 - j_y^2)}{\rho}, \\ q_y^{(eq)} &= -j_y, \quad \varepsilon^{(eq)} = \rho - 3\frac{(j_x^2 + j_y^2)}{\rho}, \quad p_{xy}^{(eq)} = \frac{j_x j_y}{\rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

De esta manera, a partir de las ecuaciones (5)-(11), la Ecuación de Boltzmann de Red Generalizada queda como:

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}_i + \mathbf{e}_\alpha, t+1)\rangle &= |f(\mathbf{x}_i, t)\rangle \\ &\quad + M^{-1} S \left[|\varrho(\mathbf{x}_i, t)\rangle - |\varrho^{(eq)}(\mathbf{x}_i, t)\rangle \right]. \end{aligned}$$

Jaider Pulido
132273

Back FS

◀◀ ▲ ▶▶

16/27

El método GLBE es más estable que LBGK



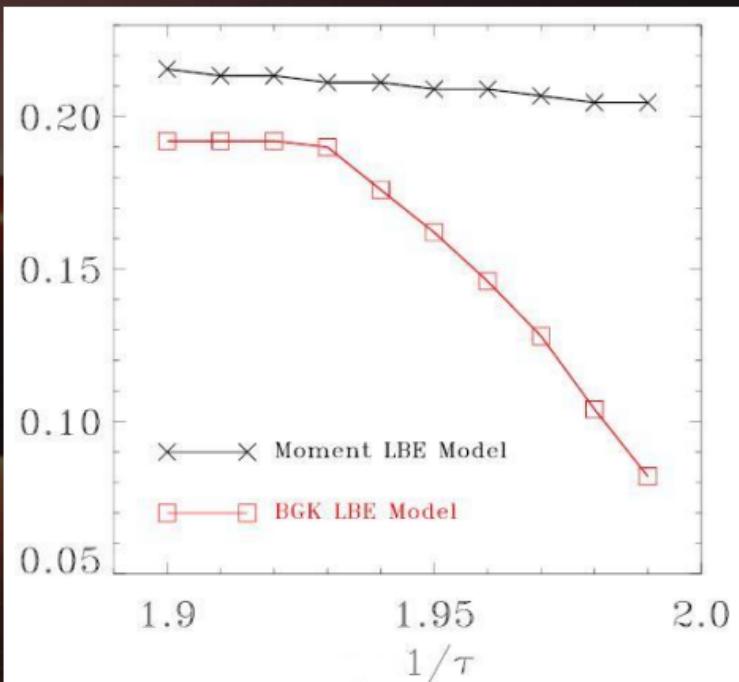
Jaider Pulido
132273

Back FS



17/27

14/10/2005



Lallemand & Luo^[1] (2000)

Implementación

Construcción de un código en lenguaje IDL.

- Posibilidad de “dibujar” el obstáculo
- Definición de las condiciones de frontera
- Cada pixel de la red se asocia a un nodo de la red
- Cálculo de flujo, presión y componente z de la vorticidad



Jaider Pulido
132273

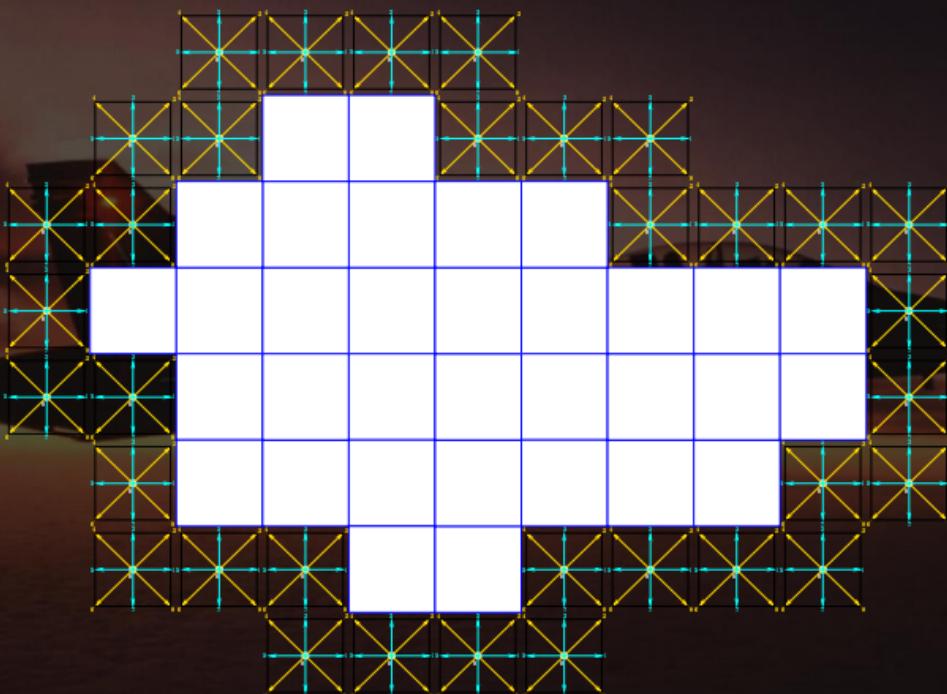
Back | FS

◀◀ ▲ ▶▶

18/27

14/10/2005

Condiciones de frontera



Jaider Pulido
132273

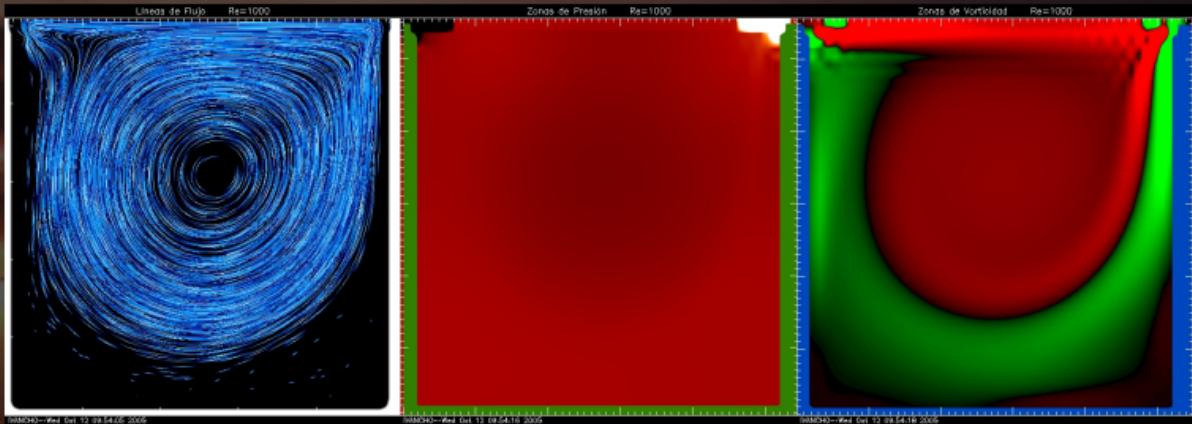
Back | FS



19/27

Resultados

Flujo en una cavidad cuadrada



$$\mathcal{R} = 1000$$

Back | FS

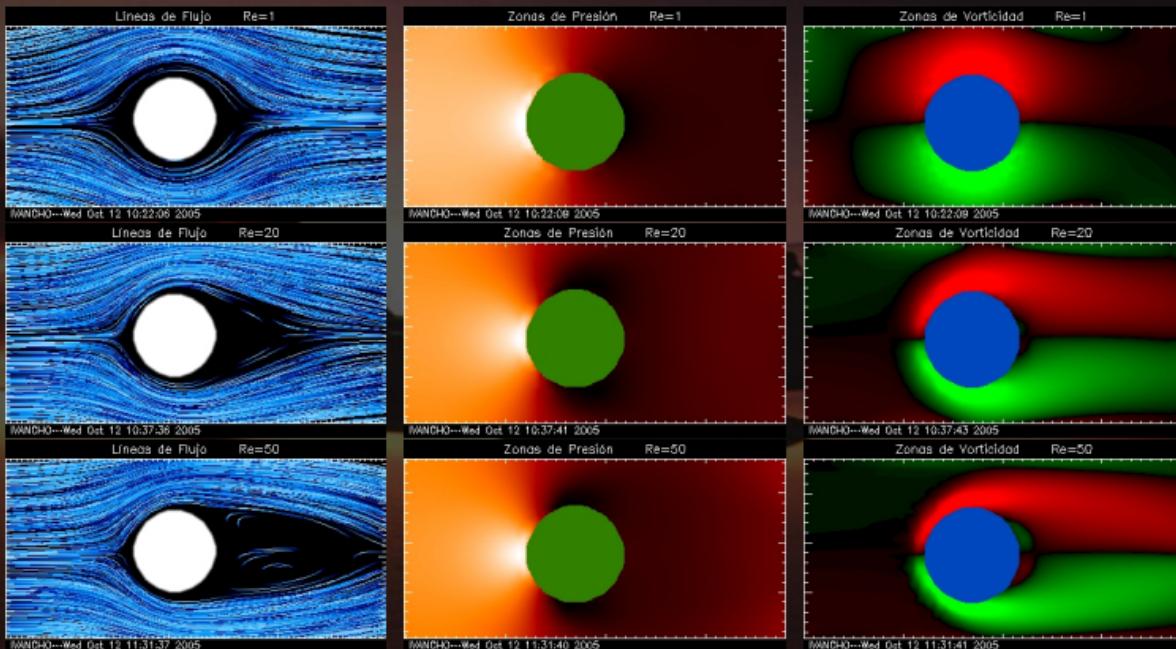


20/27

14/10/2005



Obstáculo Cilíndrico



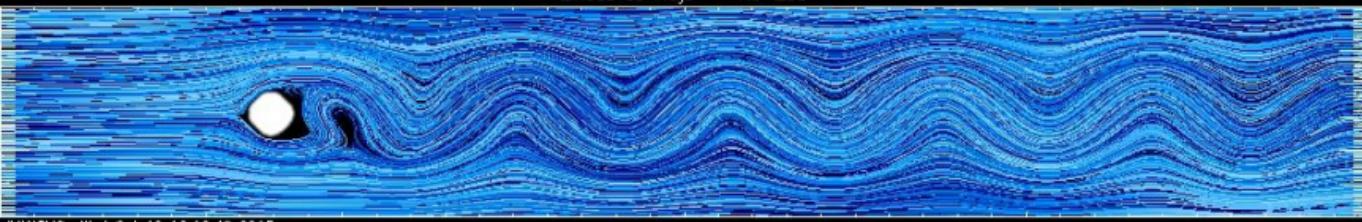
Jaider Pulido
132273

Back | FS



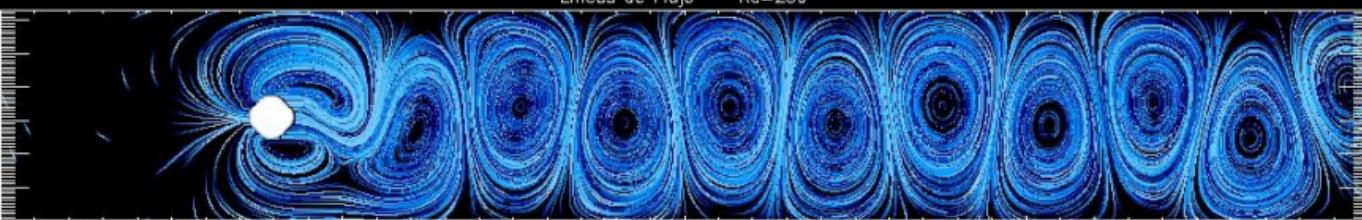
21/27

Líneas de Flujo Re=250



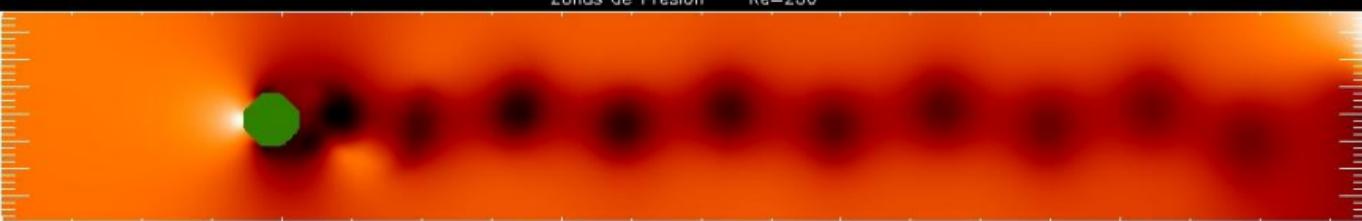
IVANCHO---Wed Oct 12 10:06:49 2005

Líneas de Flujo Re=250



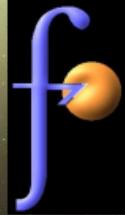
IVANCHO---Wed Oct 12 10:08:01 2005

Zonas de Presión Re=250



IVANCHO---Wed Oct 12 10:08:02 2005

Zonas de Vorticidad Re=250



Jaider Pulido

132273

Back FS

<< <> >>

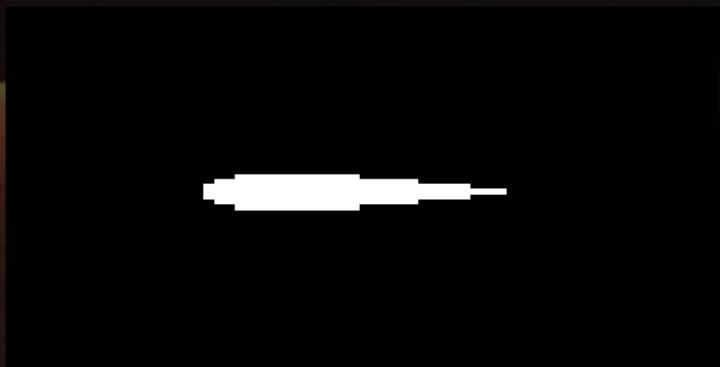
22/27

14/10/2005

Ala NACA-0012



Aproximación en una red de 137x70 pixels



Jaider Pulido
132273

Back | FS

◀◀ ▲ ▶▶

23/27

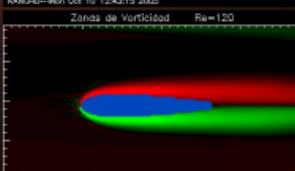
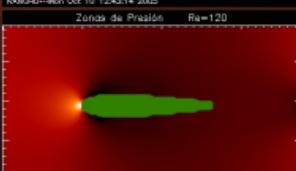
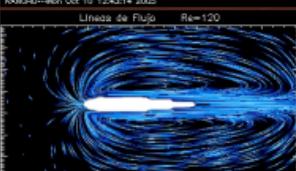
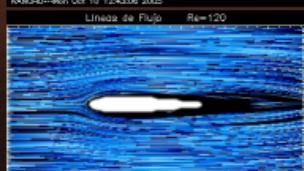
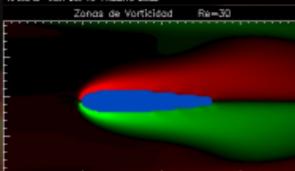
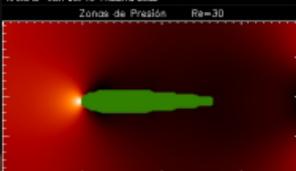
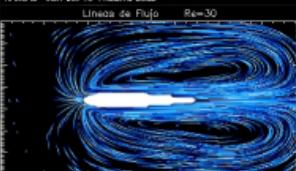
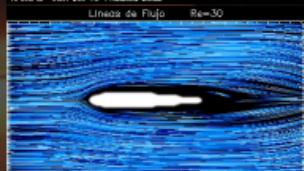
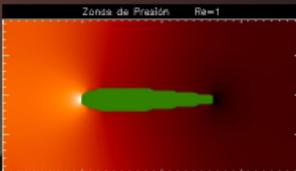
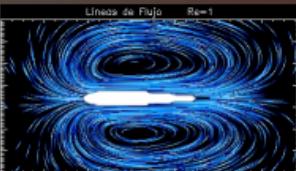
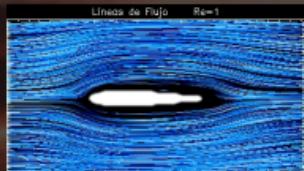
14/10/2005

Ángulo de ataque: 0°

Flujo - Obstáculo Móvil

Presión

Vorticidad



f

Jaider Pulido
132273

Back FS



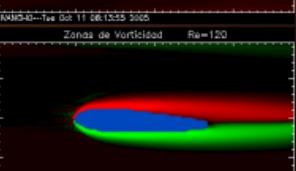
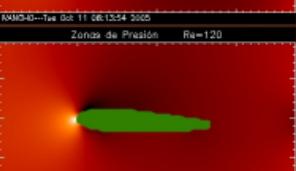
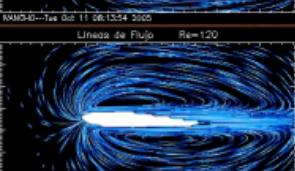
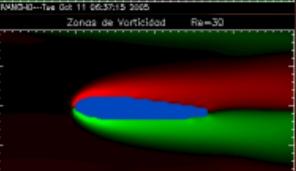
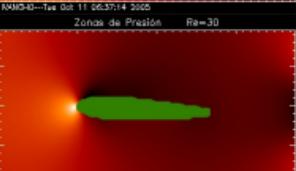
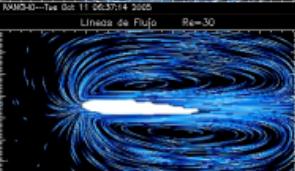
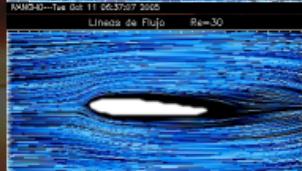
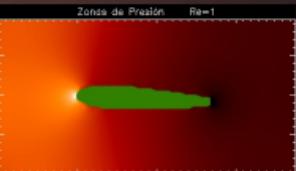
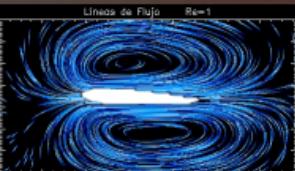
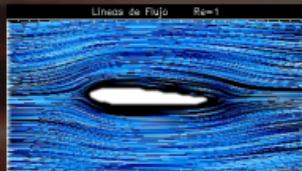
24/27

Ángulo de ataque: 3°

Flujo - Obstáculo Móvil

Presión

Vorticidad



f

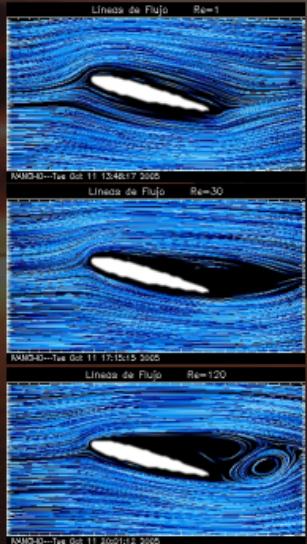
Jaider Pulido
132273

Back FS

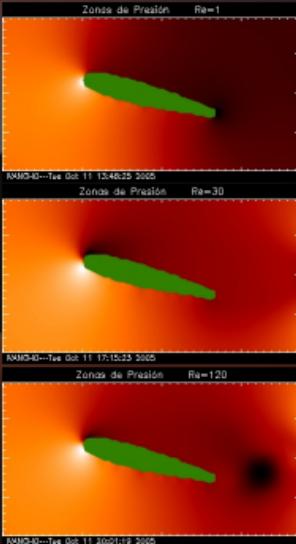


Ángulo de ataque: 15°

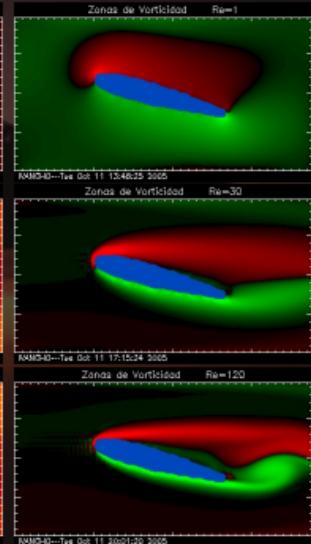
Flujo - Obstáculo Móvil



Presión



Vorticidad



Jaider Pulido
132273

Back FS

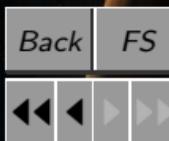


Referencias

- [1] Lallemand P. and Luo L.-S.. *Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability.* Phys. Rev. E, 2000, **61**, 6546-6562.
- [2] Luo L.-S.. *Theory of the lattice Boltzmann Equation.* October 9-13, 2000, China Center of Advanced Science and Technology, Beijing, China.
- [3] Lockard D. P. et al.,. *Evaluation of PowerFLOW for Aerodynamic Applications.* J. Statist. Phys., 2002, **107** 423-478.
- [4] He X. and Doolen G. D.. *Lattice Boltzmann method on a curvilinear coordinate system: Vortex shedding behind a circular cylinder.* Phys. Rev. E, 1997, **56**, 434-440.
- [5] Landau L. D. and Lifshitz E. M.. *Curso de física teórica, Vol. 6: Mecánica de fluidos..* Reverté, 1986.
- [6] Feynman R., Leighton R., Sands M.. *Física. Vol II: Electromagnetismo y materia..* Addison-Wesley, 1987.



Jaider Pulido
132273



27/27

14/10/2005