Esercitazione N. 5
Metodi per il calcolo di zeri di funzione
Codici e sperimentazione numerica

Obiettivo
Sperimentazione numerica relativa ai metodi per il calcolo di zeri di funzione.

Codici
Scrivere le function `bisezione.m`, `falsi.m`, `corde.m`, `newton.m` e `secanti.m` che implementino rispettivamente il metodo di bisezione, di falsa posizione, delle corde, di Newton e delle secanti per il calcolo di zeri di funzione.
Tali function devono assumere come dati in input:

- `fname` nome della fuzione di cui calcolare lo zero (e pure `fpname` nome della funzione derivata prima nel caso di `Newton`);
- x_0 valore di innesco del metodo (e pure x_{-1} nel caso di `secanti`);
- `tolx` tolleranza per il test d'arresto sull'incremento
$$|x_{k+1} - x_k|/|x_{k+1}| < tolx;$$
- `tolf` tolleranza per il test del residuo
$$|f(x_{k+1})| < tolf;$$
- `NMAX` numero massimo di iterazioni.

In output devono essere restituiti l'approssimazione dello zero `x` e il numero di iterazioni effettuate `nit`.
N.B. Nel caso del metodo di bisezione e di falsa posizione si considera per il test di arresto l'ampiezza del sottointervallo confrontata con `tolx`.

Sperimentazione numerica

1. Confrontare i metodi sopra implementati nei casi seguenti:
   - $f(x) = \exp(-x) - (x + 1)$ in $[-1, 2]$ con $x_0 = -0.5$, $x_{-1} = -0.3$, $tolx = 1.e - 12$, $tolf = 1.e - 12$;
   - $f(x) = \log_2(x + 3) - 2$ in $[-1, 2]$ con $x_0 = -0.5$, $x_{-1} = 0.5$, $tolx = 1.e - 12$, $tolf = 1.e - 12$;
   - $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x^2}{4}$ in $[1, 3]$ con $x_0 = 1.8$, $x_{-1} = 1.5$, $tolx = 1.e - 12$, $tolf = 1.e - 12$.

Mostrare in un grafico in scala semilogaritmica sulle ordinate (comando semilogy) l'andamento di $e_k = |x_k - \alpha|$, $k = 1, ..., nit$, sapendo che $\alpha = 0, 1, 2^{4/3}$ nei tre casi.
Calcolare infine, a partire dai valori di $\{x_k\}$ con k sufficientemente grande, la stima dell'ordine di convergenza p come

$$p \approx \ln \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \right| \Big/ \ln \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \right|,$$

e si confronti il valore ottenuto con quello atteso.

2. Calcolare il valore di $\sqrt[3]{8}$ facendo uso dei metodi implementati per il calcolo di zeri di funzioni, fissato una tolleranza $tolx = tolf = 1e - 10$ e sperimentando al variare dell'iterato iniziale x_0 per il metodo di Newton ed x_0 ed x_{-1} per il metodo delle secanti.

3. Fissato un valore $y_0 \in [-1, 1]$, individuare, facendo uso del metodo di bisezione, l'unico valore $x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ tale che $sin(x_0) = y_0$

4. Utilizzare il metodo di Newton e il metodo di Newton modificato per il calcolo dello zero di molteplicità 2 della funzione $f(x) = x^3 + x^2 - 33x + 63$ con $x_0 = 1$, $tolx = 1.e - 12$ e $tolf = 1.e - 12$. Calcolare infine, a partire dai valori di $\{x_k\}$ ottenuti nei due casi, la stima dell'ordine di convergenza p.