08 - Integrazione Numerica

Il problema

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$
$$x_i \in [a,b], \forall i = 1, ..., n$$

Formula del trapezio

Andiamo ad approssimare la funzione f con il polinomio di interpolazione di grado 1 P_1 che congiunge il punto $f(a)$ al punto $f(b)$ e di conseguenza:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx = (\frac{b-a}{2})(f(a)+f(b))$$

dove quindi:

$$P_1(x) = f(a)L_0(x) + f(b)L_1(x)$$
$$= f(a)(\frac{x-b}{a-b}) + f(b)(\frac{x-a}{b-a})$$
$$= (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})x + (\frac{bf(a)-af(b)}{b-a})$$

a questo punto:

$$I(f) = I_1(f) = \int_a^b P_1(x)dx$$
$$= \int_a^b (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})x + (\frac{bf(a)-af(b)}{b-a})dx$$
$$= (\frac{b-a}{2})(f(a)+f(b))$$

Formula di Simpson

Andiamo ad approssimare la funzione f con il polinomio di interpolazione di grado 2 P_2 che congiunge il punto $f(a)$ alla funzione valutata nel punto intermedio e poi al punto $f(b)$ e di conseguenza:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_2(x)dx$$

dove quindi:

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f((\frac{a+b}{2}))L_1(x) + f(b)L_2(x)$$

a questo punto:

$$I(f) = I_2(f) = \int_a^b P_2(x)dx$$

$$= (\frac{b-a}{6})(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Formula di tipo composita

Data la funzione f anzichè approssimarla con un polinomio la vado a spezzare in N intervalli e poi vado ad approssimare le sottofunzioni

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^{N-1} (\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x)dx)$$

dove $z_{k+1} - z_k = (\frac{b-a}{N})$
denoto quindi con:

$$I_n^k(f) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x)dx$$

dove n è il grado del polinomio, che nel caso del trapezio è 1.

Formula del trapezio composita

$I_1^k(f)$ è l'integrale approssimato di f su $[z_k, z_{k+1}]$ ottenuto con la formula del trapezio ($n = 1$)

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^{N-1} I_1^k(f)$$

dove

$$I_1^k(f) = (\frac{z_{k+1} - z_k}{2})(f(z_k) + f(z_{k+1}))$$

da cui segue che

$$I(f) = (\frac{b-a}{2N})(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(z_k) + f(b))$$

N.B. Sono richieste $N + 1$ valutazioni di f

Formula di Simpson composita

$I_2^k(f)$ è l'integrale approssimato di f su $[z_k, z_{k+1}]$ ottenuto con la formula di simpson ($n = 2$)

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^{N-1} I_2^k(f)$$

dove

$$I_2^k(f) = (\frac{z_{k+1} - z_k}{6})(f(z_k) + 4f(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}) + f(z_{k+1}))$$

da cui segue che

$$I(f) = (\frac{b-a}{6N}) \sum_{k=0}^{N-1} (f(z_k) + 4f(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}) + f(z_{k+1}))$$

$$= (\frac{b-a}{6N})(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(z_k) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}) + f(b))$$

N.B. Sono richieste $2N+1$ valutazioni di f

Trapezio vs Simpson (The final round)

Come visto Simpson richiede più valutazioni della f rispetto al metodo del trapezio tuttavia tramite Simpson sono richiesti molti meno intervalli rispetto al metodo del trapezio a parità di tollerenza, quindi risulta più efficace usare il metodo Simpson

---

Resto della formula di quadratura semplice

Ricordiamo la funzione resto:

$$r_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$$
$$x \in [a, b]$$

allora tramite un teorema che non facciamo possiamo dire che nel caso del calcolo integrale:

$$r_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}$$

con $\epsilon \in (a, b)$

e quindi il **resto di una formula di quadratura semplice** risulta:

$$R_n(f) = \int_a^b r(x)dx$$

Resto della formula del trapezio

$$R_1(f) = -(\frac{1}{12})(b-a)^3 f^{(2)}(\epsilon))$$

con $\epsilon \in (a, b)$

nel caso di N sottointervalli:

$$R_1^N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} R_1^k(f)$$

da cui segue

$$R_1^N(f) = -(\frac{1}{12})(\frac{(b-a)^3}{N^2})(f^{(2)}(\epsilon))$$

Sotto le ipotesi che $f \in C^2[a,b]$ possiamo notare che per $N \to +\infty$ il resto tende a 0, quindi per ogni tolleranza scelta posso trovare un numero di sottointervalli N tale per cui il resto rimane minore della tolleranza

---

Resto della formula di Simpson

$$R_2(f) = -(\frac{1}{90})(\frac{b-a}{2})^5 f^{(4)}(\epsilon))$$

con $\epsilon \in (a,b)$

nel caso di N sottointervalli:

$$R_2^N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} R_2^k(f)$$

da cui segue

$$R_2^N(f) = -(\frac{1}{2880})(\frac{(b-a)^5}{N^4})(f^{(4)}(\epsilon))$$

Sotto le ipotesi che $f \in C^4[a,b]$ possiamo notare che per $N \to +\infty$ il resto tende a 0, quindi per ogni tolleranza scelta posso trovare un numero di sottointervalli N tale per cui il resto rimane minore della tolleranza

---

Algoritmo di quadratura automatica mediante il raddoppio degli intervalli

Come trovare N t.c:

$$|I(f) - I^{2N}(f)| < tol$$

Procedimento (Trapezi composita)

Si parte da $N = 1$ e si procede con il raddoppio del numero di sottointervalli fino a quando:

$$(\frac{|I^{2N}(f) - I^N(f)|}{3}) \leq tol$$

Output: $ I^2N(f)$

Per Simpson composita:

$$(\frac{|I^{2N}(f) - I^N(f)|}{15}) \leq tol$$