03 - Condizionamento di un problema e stabilità di un algoritmo

Richiami

Siano:

- x i dati esatti di un problema
- x^* l'approssimazione del dato esatto x
- f l'applicazione risolvente
- $f(x)$ il risultato esatto di un problema
- $f(x^*)$ il risultato esatto ottenuto con il dato approssimato
- ψ l'algoritmo risolutivo implementato
- $\psi(x^*)$ il risultato ottenuto dall'algoritmo sul dato approssimato

$$\psi(x^*) = fl_A(f(x^*)) = fl_A(f(fl_A(x)))$$

Tipi di errori

Errore inerente

$$E_{in} = (\frac{f(x^*) - f(x)}{f(x)})$$

Confronta la risposta a partire da x^* piuttosto che da x.
Non è influenzato dall'algoritmo utilizzato

Errore algoritmico

$$E_{alg} = (\frac{\psi(x^*) - f(x^*)}{f(x^*)})$$

Confronta la risposta dell'algoritmo rispetto al risultato esatto con il dato approssimato.

Errore totale

$$E_{tot} = (\frac{\psi(x^*) - f(x)}{f(x)})$$

Confronta il risultato dell'algoritmo con il dato approssimmato rispetto al risultato esatto del problema nel caso si abbiano i dati esatti.

Relazione tra gli errori

$$E_{tot} = E_{alg}(1 + E_{in}) + E_{in} \simeq E_{alg} + E_{in}$$

Abbiamo quindi ottenuto che **l'accuratezza della soluzione dipende sia dal condizionamento di un problema che dalla stabilità algoritmica**.

Condizionamento di un problema

Quando a piccole perturbazioni (relative) nei dati x

$$(\frac{||x - x^*||}{||x||})$$

corrispondono perturbazioni (relative) sul risultato $f(x)$

$$(\frac{||f(x) - f(x^*)||}{||f(x)||})$$

dello stesso ordine di grandezza, il problema è definito **ben condizionato**, altrimenti è detto mal condizionato.

N.B. Il condizionamento è legato al problema numerico e non ha alcun legame con gli errori di arrotondamento delle operazioni di macchina nè con il particolare algoritmo utilizzato. Si tratta di una caratteristica del problema, che non dipende dal modo in cui la soluzione viene calcolata.

Indice di condizionamento

$$K = (\frac{||f'(x)|| \times ||x||}{||f(x)||})$$

K (o I_{cond}) è detto **indice di condizionamento** del problema e corrisponde al fattore di amplificazione dell'errore relativo sui dati $(\frac{||x-x^*||}{||x||})$

Pertanto se $K \gg 1$, allora il problema è mal condizionato.

Condizionamento sistema lineare

Richiamo matrice Jacobiana

Sia data una funzione $f : \mathbb{R}^n => \mathbb{R}^n$ tale che:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

La matrice jacobiana è la matrice $n \times n$ contente le derivate parziali come segue:

$$Jf = \begin{bmatrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & ... & f'_{1x_n} \\ ... \\ f'_{nx_1} & f'_{nx_2} & ... & f'_{nx_n} \end{bmatrix}$$

dove le f'_{ix_j} sono derivate rispetto alla variabile x_j della funzione f_i

---

Condizionamento sistema lineare

Sia dato il seguente sistema:

$$Ax = b$$

Si ha a disposizione A e b e si vuole trovare x.
Tuttavia dobbiamo trasformare il problema inserendo la perturbazione dei dati, avremo quindi:

$$Ax^* = b^*$$

L'applicazione risolvente sarà quindi $f_a : \mathbb{R}^n => \mathbb{R}^n$ tale che:

- $b => x$ ossia $f_a(b) = x$
- $b^* => x^*$ ossia $f_a(b^*) = x^*$

Abbiamo quindi che:

$$(\frac{||f_a(b^*) - f_a(b)||}{||f_a(b)||}) \leq K(\frac{||b^* - b||}{||b||})$$

ossia

$$(\frac{||x^* - x||}{||x||}) \leq K(\frac{||b^* - b||}{||b||})$$

Come si può stimare il valore di K nel caso di sistemi lineari?
Ricordiamo la norma matriciale indotta da una norma vettoriale:

$$||A|| := C_{min} = min\{c \in \mathbb{R}_+ : ||Ax|| \leq C||x||\}$$

Per cui risulta:

$$(\frac{||Ax||}{||x||}) \leq ||A||$$

Ora consideriamo il problema;

$$Ax = b$$

e definiamo l'applicazione risolvente:

$$f_a : b => x = A^{-1}b$$

Quindi per calcolare K:

$$K = (\frac{||f'_a(b)|| \times ||b||}{||f_a(b)||}) = (\frac{||A^{-1}|| \times ||Ax||}{||x||})$$

Ricordando che per le norme matriciali indotte dalle norme vettoriali:

$$(\frac{||Ax||}{||x||}) \leq ||A||$$

Abbiamo infine che **l'indice di condizionamento di una matrice quadrata** A è

$$K(A) := ||A|| \times ||A^{-1}||$$

Per una qualsiasi $f : \mathbb{R}^n => \mathbb{R}$ abbiamo quindi che:

$$K = \sum_{i=1}^{n} (f'_{x_i} \times \frac{|x_i|}{|f(x)|})$$

Stabilità di un algoritmo

Confronto tra $f(x^*)$ e la risposta fornita dall'algoritmo $\psi(x^*)$.
La stabilità di un algoritmo valuta quindi la reazione dell'algoritmo all'introduzione di perturbazioni nei dati iniziali.

Un algoritmo numerico è considerato **stabile** se l'errore algoritmico è dell'ordine di grandezza della precisione di macchina, cioè:

$$|E_{alg}| \prec g(n) \cdot eps$$

con n il numero di operazioni effettuate e $g(n) = c*n, c > 0$ (crescita dell'errore lineare).
Altrimenti l'algoritmo è detto instabile.

N.B. L'errore algoritmico dipende solo da come il risultato viene calcolato.
Pertanto, influiscono sull'errore algoritmico:

- il numero di operazioni eseguite
- l'ordine in cui le operazioni vengono eseguite
- il tipo di operazioni eseguite

Indice algoritmico

Si definisce **indice algoritmico** I_{alg} **la somma dei fattori di amplificazione dei singoli errori introdotti da ciascuna operazione**.

Diremo che un algoritmo è più stabile di un altro se ha un indice algoritmico inferiore.
N.B. L'indice algoritmico dipende, in generale, dai dati;
quindi ci possono essere algoritmi stabili per certi valori e instabili per altri.