02 - Norme di vettori e matrici

Norme di vettori

Una **norma vettoriale** su $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$$|| * || : \mathbb{R}^n => \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

che associa ad ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ di componenti $x_i, i = 1, ..., n$ uno scalare in modo che valgano le seguenti proprietà:

- $||x|| > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $||x|| = 0 \iff x = 0$ se non vale si parla di **seminorma**
- $||\alpha x|| = |\alpha| \times ||x|| \; \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (**disuguaglianza triangolare**)

Una conseguenza della disuguaglianza triangolare è

$$||x - y|| \geq |||x|| - ||y||| \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Tipi di norme

- **norma ∞**
- **norma 1**
- **norma 2**

Norma infinito (norma del massimo)

$$||x||_\infty = max_{i=1,...,n}|x_i|$$

Norma 1

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Norma 2 (norma euclidea)

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

Osservazione:
Per una matrice **ortogonale** A (ossia t.c. $A^T A = AA^T = I$) risulta:

$$||Ax||_2 = \sqrt{(Ax)^T(Ax)} = \sqrt{x^T A^T(Ax)} = \sqrt{x^T(A^T A)x} = \sqrt{x^T x} = ||x||_2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Norme equivalenti

Due norme vettoriali $|| * ||_+$ e $|| * ||_*$ si dicono **equivalenti** se esistono due costanti positive $A, B \in \mathbb{R}, 0 < A \leq B$, tali che $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$A||x||_+ \leq ||x||_* \leq B||x||_+$$

Teorema di equivalenza

In generale, per i vettori $x \in \mathbb{R}^n$ si può provare che:

1. $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$
2. $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$
3. $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$

Da cui si ottiene che:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$$

Richiamo errori sui dati

Siano x, x^* numeri reali tali che x è il dato esatto mente x^* è il dato approssimato.
Sia f l'applicazione risolvente tale che $f(x)$ è il risultato esatto e $f(x^*)$ è il risultato approssimato.

Abbiamo quindi che **l'errore relativo sui dati è**:

$$E_{rel}^{dati} = (\frac{|x - x^*|}{|x|})$$

Supponiamo ora che x e x^* siano vettori di $\mathbb{R}^n$, abbiamo quindi:

$$E_{rel}^{dati} = (\frac{||x - x^*||_y}{||x||_y}) \ \forall y \in \{1, 2, \infty\}$$

Norme di matrici

Una **norma matriciale generalizzata** è una funzione:

$$|| * || : \mathbb{R}^{m \times n} => \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Tali che:

- $||A|| > 0 \ \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $||A|| = 0 \iff A = 0$ se non vale si parla di **seminorma**

- $||\alpha A|| = |\alpha| \times ||A|| \; \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B|| \; \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (**disuguaglianza triangolare**)

Una conseguenza della disuguaglianza triangolare è

$$||A - B|| \geq |||A|| - ||B||| \; \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Una norma matriciale generalizzata è una **norma matriciale** se vale la seguente proprietà submoltiplicativa o di **consistenza**

$$||AB|| \leq ||A|| \times ||B||$$

ove A è B sono moltiplicabili tra di loro (# colonne A = # righe B).

N.B. Non tutte le norme matriciali generalizzate sono consistenti. Per esempio, se si definisce

$$||A|| = max_{i,j} |a_{i,j}|$$

questa è una norma matriciale generalizzata ma tuttavia non rispetta la proprietà di consistenza.

Norma matriciale COMPATIBILE

Una norma matriciale $|| * ||_M$ si dice **compatibile** con una norma vettoriale $|| * ||_y$ se:

$$||Ax||_y \leq ||A||_M \times ||x||_y$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Norma matriciale NATURALE (INDOTTA)

Si chiama **norma matriciale** $|| * ||_N$ **naturale o indotta** da una norma vettoriale $|| * ||_y$, la più piccola costante positiva C per cui vale:

$$||Ax||_y \leq C ||x||_y$$

Formalmente:

$$||A||_N := sup_{||x||_y \neq 0} \left(\frac{||Ax||_y}{||x||_y} \right) = max_{||x||_y \neq 1} ||Ay||_y$$

Norme matriciali indotte

Norma ∞ (norma del massimo)

$$||A||_\infty = max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Norma 1

$$||A||_1 = max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$$

N.B. Se A è una matrice simmetrica, allora $||A||_\infty = ||A||_1$

Norma 2 (norma spettrale)

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

con $\rho(M)$ è il **raggio spettrale** della matrice, ovvero l'**autovalore massimo in modulo**.
Nel nostro caso $M = A^T A$ quindi gode delle seguenti proprietà:

- **simmetrica** ($M^T = M$)
- **semidefinita positiva** ($x^T Ax \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$) => tutti gli autovalori sono reali non negativi

---

Numero di condizionamento di una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definiamo **valori singolari** di A i valori:

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq .... \geq \sigma_n(A) \geq 0$$

tali che σ_i^2 è un autovalore di $A^T A$. In particolare

$$\sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

e

$$\sigma_n(A) = \sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}$$

tali che λ_{min} è l'autovalore minimo e λ_{max} è l'autovalore massimo.

Si definisce **numero di condizionamento in norma 2** di A

$$K_2(A) := (\frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}) = (\frac{\sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}}{\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}})$$

Proprietà del numero di condizionamento in norma 2 di A:

1. $K_2(A^T A) = K_2(A)^2$
2. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **non singolare** $=> K_2(A) = ||A||_2 \times ||A^{-1}||_2$
   Una matrice **non singolare** è una matrice con $det(A) \neq 0$
3. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ simmetrica, allora:

$$K_2(A) = (\frac{max_{i=1,...,n}|\lambda_i(A)|}{min_{i=1,...,n}|\lambda_i(A)|})$$

Anche in questo caso esiste un **teorema di equivalenza** che mette in confronto le varie norme come fatto per le norme vettoriale ma che non studieremo.