06 - Minimi Quadrati

Risoluzione sistemi lineari sovradeterminati

$$Ax = b$$

con:

- $m > n$
- $rg(A) = n$

Poichè il numero di equazioni è superiore al numero di incognite, il sistema potrebbe non avere soluzione.

Pertando per rendere il problema ben posto, lo riformuliamo nella seguente maniera:

- determinare il vettore $x^* \in \mathbb{R}^n$ tale che:
  $x^* = argmin||b - Ax||_2^2$

ovvero cerco il vettore x^* che minimizza il quadrato della norma 2 del vettore $b - Ax$ che è un vettore di lunghezza m ossia:

$$||b - Ax^*||_2^2 \leq ||b - Ax||_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

N.B: La funzione in più variabili:

$$Q : \mathbb{R}^n \to R$$

$$Q(x) = ||b - Ax||_2^2$$

è una funzione strettamente convessa (in questo caso la sua Hessiana è definita positiva):

$$HQ(x) = 2A^T A$$

con un unico punto di minimo che è proprio x^*

Metodo $QRLS$

Come trovare x^* utilizzando la fattorizzazione QR di A?

Richiamo

- $||y||_2^2 = y^T y = y^T (QQ^T)y = (Q^T y)^T (Q^T y) = ||Q^T y||_2^2$ con Q ortogonale (se moltiplico quindi per Q^T la norma non cambia)

sostituendo $y = b - Ax$:

$$||b - Ax||_2^2 = ||Q^T b - Q^T Ax||_2^2$$

dove $Q^T A = R$ e quindi

$$||b - Ax||_2^2 = ||Q^T b - Rx||_2^2$$

avendo:

- $Q^T b = b^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{pmatrix}$
- $Q^T A = Q^T QR = R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

abbiamo infine che:

$$||b - Ax||_2^2 = || \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x||_2^2$$

andando a calcolare la differenza otteniamo:

$$||b - Ax||_2^2 = || \begin{pmatrix} b_1^* - R_1 x \\ b_2^* \end{pmatrix} ||_2^2$$

scomponendo la norma 2:

$$||b - Ax||_2^2 = ||b_1^* - R_1 x||_2^2 + ||b_2^*||_2^2$$

pertanto tornando al nostro problema dove dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} argmin||b - Ax||_2^2 &= argmin(||b_1^* - R_1 x||_2^2 + ||b_2^*||_2^2) \\ &= argmin(||b_1^* - R_1 x||_2^2) + ||b_2^*||_2^2 \end{aligned}$$

Scegliendo x^* che risolve $R_1 x = b_1^*$ si ottiene quindi la soluzione:

- $x^* = argmin||b - Ax||_2^2$
- $min||b - Ax||_2^2 = ||b - Ax^*||_2^2 = ||b_2^*||_2^2$

Osservazione: Se la matrice A è ben condizionata allora anche la matrice R_1 è ben condizionata:

$$K_2(A) = K_2(R_1)$$

Applicazione

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati di un insieme di dati sperimentali (m coppie di dati):

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{m-1}, y_{m-1})$$

Fisso $n < m$, grado del polinomio $(n - 1)$ della forma:

$$p_{n-1}(x_i) = y_i, \forall i = 0, ..., m - 1$$

Il polinomio deve soddisfare la condizione di passare per tutti gli m punti assegnati, avrà quindi come vettore delle incognite i vari $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ che identificano il polinomio, il termine noto contiene le ordinate dei punti e la matrice dei coefficenti è una matrice triangolare che dipende dalle ascisse dei punti.

A questo punto si vuole determinare $a^* \in \mathbb{R}^n$ t.c:

$$a^* = argmin||y - Ba||_2^2$$

e lo si fa tramite l'utilizzo della fattorizzazione QR
