

Solução de Problemas de Valor no Contorno Bidimensionais

Data de entrega: 29 de novembro de 2015

1 Introdução

Equações diferenciais parciais, aparecem com frequência na solução de problemas em diversas áreas do conhecimento. Sendo assim, vamos estudar o processo de discretização pelo método das diferenças finitas de equações do tipo:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

considerando que a , b , c e $f(x, y)$ são conhecidas e que $u(x, y)$ é conhecida no contorno de Ω . Deseja-se obter a solução $u(x, y)$ no interior de um domínio retangular de dimensões $(x_0, x_{(N+1)}) \times (y_0, y_{(M+1)})$, sendo conhecida a solução no contorno do retângulo (condições de Dirichlet). Considere uma subdivisão do domínio em células retangulares, sendo $N + 1$ divisões na horizontal e $M + 1$ divisões na vertical, respectivamente, de dimensões h_x e h_y .

Como exemplo, na equação (1), tomando $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ e $f(x, y) = 0$, temos a conhecida equação diferencial de Laplace:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2)$$

Essa equação aparece em diversos problemas tais como:

- Condução de Calor.
- Campo de potencial eletrostático.
- Escoamento irrotacional de um fluido perfeito (sem viscosidade).
- Torção de uma barra prismática.

Além de muitos outros problemas práticos. O termo u refere-se a grandeza envolvida.

2 Objetivo do trabalho

Discretizar a equação (1) pelo método das diferenças finitas e resolver o sistema linear resultante através do método de eliminação gaussiana e método de Gauss-Seidel com relaxação sucessiva (SOR). Implementar todos algoritmos em Matlab (Octave) e em linguagem de programação C. Fazer uma análise comparativa dos métodos de solução de sistemas lineares entre si e do uso do Matlab (Octave) versus o uso da linguagem de programação C. Toda implementação deve utilizar técnicas de armazenamento de matrizes esparsas. Ou seja, o objetivo é armazenar apenas os elementos indispensáveis para resolução do sistema linear, desprezando assim, uma infinidade de coeficientes iguais a zero.

3 Etapas do trabalho

3.1 Implementação

Faça um programa modularizado (divido em procedimentos e funções) em Matlab e outro na linguagem C para resolver a equação bidimensional (1) pelo método das diferenças finitas utilizando alguns conceitos que serão desenvolvidos em sala de aula. O programa principal deve ter a seguinte estrutura:

- Um procedimento ou função para leitura dos dados feitas de duas formas alternativas: através do teclado ou através de um arquivo de entrada. (Deve ser dada ao usuário essa opção de escolha).
- Um procedimento ou função para a montagem do sistema esparsa resultante.
- Um procedimento ou função para tratar as condições de contorno.
- Um procedimento ou função para solução do sistema linear resultante pelo método de eliminação de Gauss.
- Um procedimento ou função para solução do sistema linear resultante pelo método de Gauss-Seidel com dispositivo SOR.
- Um procedimento ou função para imprimir os resultados em um arquivo de saída do tipo texto ou alternativamente imprimir o resultado na tela.

3.2 Validação dos algoritmos implementados

Teste o seu programa considerando um problema simples: condução de calor em uma placa plana com condições de contorno constantes e iguais. Em condições ideais de condutividade a variação da temperatura $T(x, y)$ em uma placa retangular satisfaz a equação de Laplace (caso particular da equação (1)):

$$-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{em} \quad (x_0, x_{(N+1)}) \times (y_0, y_{(M+1)}) \quad (3)$$

considerando que a temperatura $T(x, y) = T_0$ em todos os lados da placa, os valores no interior da placa devem ser aproximadamente iguais em todos os pontos da discretização.

4 Experimentos Sugeridos

Os experimentos visam medir o tempo gasto para efetuar a solução da equação (1) por diferenças finitas utilizando os dois métodos de solução de sistemas lineares mencionados e as diferentes implementações em Matlab (Octave) e em linguagem C.

Considerando a equação (1) em $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ onde $a = 60$, $b = 80$, $c = -40$ e $f(x, y)$ é tal que $u(x, y) = xe^{xy}\sin(\pi x)\cos(\pi y)$, deverão ser medidos e apresentados em tabelas os tempos de processamento em Matlab (Octave) e na linguagem de programação C para os seguintes casos de malhas: 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 e 256×256 .

4.1 Gráficos

Devem ser apresentados pelo menos um gráfico referente a solução do problema de validação da Seção 3.2 e outro referente a solução do problema da seção de testes. Os gráficos devem ser obtidos a partir dos arquivos de saída (arquivo texto da solução) e gerados com o auxílio do Matlab (Octave).

5 Estrutura do Relatório

O relatório deve ser escrito na forma de um artigo científico. Utilize para esse fim o \LaTeX , empregue as normas do padrão ABNT e salve a versão final em pdf. Siga exatamente o modelo proposto no arquivo `abntex2-modelo-artigo.tex` que segue anexo. O relatório deve conter obrigatoriamente as seguintes seções:

- **Introdução:** onde será apresentado um breve histórico do problema, os objetivos e a estrutura do trabalho.
- **Referencial Teórico:** onde será feito um pequeno resumo descrevendo todas as técnicas e métodos considerados.
- **Implementação:** onde serão apresentados a estrutura e comentários sobre partes significativas do código.
- **Experimentos Numéricos:** onde serão apresentados os exemplos testados, a descrição do hardware e software utilizados, os gráficos das soluções, além de comentários sobre cada experimento.
- **Conclusão:** onde serão sintetizadas as conclusões tiradas durante o desenvolvimento do trabalho.

6 Considerações gerais sobre o trabalho

- O trabalho (códigos mais relatório) deve ser enviado por e-mail para `lmuniz@ifes.edu.br` até o dia 29/11/2015 às 23:59h. Cada dia de atraso implicará em menos 1.0 ponto na nota final.
- O assunto do e-mail deve ser `AN152:TRAB2:<nome1>:<nome2>:<nome3>`, contendo em anexo, um arquivo do tipo `TRAB2.zip`. Neste caso `<nome1>`, `<nome2>` e `<nome3>` devem conter o nome e último sobrenome de cada participante (por exemplo, `AN152:TRAB2:Leonardo Lima:Jose Silva:Joao Santos`). Não utilize caracteres especiais como acentos, cedilha entre outros.
- Qualquer código que você tenha implementado deve ser anexado ao arquivo.zip descrito no item anterior. Não esqueça de anexar também o `Makefile`.
- Caso o arquivo seja enviado múltiplas vezes, apenas a última versão enviada será considerada.
- O trabalho poderá ser feito em grupo com até 03 participantes.

- A nota do trabalho só será divulgada após entrevista agendada com o grupo.
OBS₁: No dia da entrevista, todos os componentes do grupo deverão estar presentes. Nesse momento, o professor escolherá um representante do grupo para ser avaliado. Os demais serão dispensados. A nota de cada componente do grupo será a mesma.
- A nota do trabalho será de até 10 pontos. Sendo 5.0 pontos pela confecção do relatório e outros 5.0 pontos pelos códigos implementados.
- Códigos que não apresentarem nenhuma otimização com respeito ao tratamento das esparsidades terão a nota severamente comprometida.
- Trabalhos com códigos considerados iguais receberão nota zero.
- O grupo com os programas em Octave e linguagem C com a melhor iteratividade receberá um bônus de **1.0 ponto na média semestral final**.