Departamento de Informática, Programas de Pós-Graduação em Informática e Engenharia Mecânica - UFES/CT
Disciplina: Algoritmos Numéricos II, Computação Científica - 13/1
Exercício 3 - Aplicações de Problemas de Valor no Contorno

Equação do Calor Unidimensional Transiente

Data de entrega:18/05/2016

Considerar os algoritmos explícitos, implícito e Crank-Nicolson para resolver a equação do calor unidimensional pelo método das diferenças finitas. Desejamos encontrar $u(x, t)$ que satisfaça a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{1}$$

onde $0 < x < l$, $a(x, t) > 0$ e $t > 0$. A equação diferencial (1) satisfaz a condições do tipo:

- Condições de Contorno:

$$\begin{array}{rrr} u(0) = u_0(t) & u(l) = u_l(t) & ou \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma_0(t) & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \sigma_l(t) & ou \\ \alpha_0 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) = \gamma_0(t) & \alpha_l \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_b u(l,t) = \gamma_l(t) & \end{array}$$

  onde u_0, u_l, σ_0, σ_l, α_0, β_0, α_l, β_l, γ_0 e γ_l são conhecidas.

- Condições Iniciais:
  $u(x, 0) = g(x)$ em $(0, l)$

Deseja-se obter a solução $u(x, t)$ no interior de $(0, l)$ para $t \in (0, T)$. Considere uma subdivisão do intervalo $(0, l)$ em $n - 1$ subintervalos de tamanho h e uma divisão no tempo $t_k = k\Delta t$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Faça uma implementação em Octave (ou MatLab) para os esquemas explícito, implícito e Crank-Nicolson de diferenças finitas para resolver a equação (1). Para cada caso analise qual seria a melhor escolha, considerando tamanho do Δt, acuidade, e tempo computacional.

Testes Numéricos

1. Equação do calor com condutividade térmica $a(x,t) = 0.835\ cm^2/s$ e fonte de calor nula:

   - Parâmetros básicos:
     $a(x,t) = 0.835$, $f(x,t) = 0$, $(0,l) = (0,10)$ e número de passos no tempo igual a 60.
   - Condições de contorno e iniciais:
     $u(0,t) = 100^0 C$, $u(10,t) = 50^0 C$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10)$
   - Parâmetros dos métodos de aproximação:
     - $h = 1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2a}$, $\Delta t_2 = \frac{h^2}{2a}$ e $\Delta t_3 > \frac{h^2}{2a}$
     - $h = 0.1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2a}$, $\Delta t_2 = \frac{h^2}{2a}$ e $\Delta t_3 > \frac{h^2}{2a}$

2. Equação do calor com condutividade térmica $a(x,t) = 0.835\ cm^2/s$ e fonte de calor nula:

   - Parâmetros básicos:
     $a(x,t) = 0.835$, $f(x,t) = 0$, $(0,l) = (0,10)$ e número de passos no tempo igual a 60.
   - Condições de contorno e iniciais:
     $u(0,t) = 100^0 C$, $\frac{\partial u(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
   - Parâmetros dos métodos de aproximação:
     - $h = 1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2a}$, $\Delta t_2 = \frac{h^2}{2a}$ e $\Delta t_3 > \frac{h^2}{2a}$
     - $h = 0.1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2a}$, $\Delta t_2 = \frac{h^2}{2a}$ e $\Delta t_3 > \frac{h^2}{2a}$

3. Equação do calor com condutividade térmica $a(x,t) = 0.835\ cm^2/s$ e fonte de calor unitária:

   - Parâmetros básicos:
     $a(x,t) = 0.835$, $f(x,t) = 1$, $(0,l) = (0,10)$ e número de passos no tempo igual a 60.
   - Condições de contorno e iniciais:
     $u(0,t) = 100^0 C$, $\frac{\partial u(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
   - Parâmetros dos métodos de aproximação:
     - $h = 1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2a}$, $\Delta t_2 = \frac{h^2}{2a}$ e $\Delta t_3 > \frac{h^2}{2a}$
     - $h = 0.1$ e $\Delta t_1 < \frac{h^2}{2a}$, $\Delta t_2 = \frac{h^2}{2a}$ e $\Delta t_3 > \frac{h^2}{2a}$

Faça um relatório suscinto, apresente gráficos da solução para alguns testes e apresente suas conclusões sobre métodos de avanço no tempo para problemas transientes.