Algoritmos Numéricos II

Problema de Valor no Contorno (PVC)
Método das Diferenças Finitas

Lucia Catabriga [1]

[1]DI/UFES - Brazil

Março 2015

Introdução

- A solução de Problemas de Valor no Contorno (PVC) pelo método das Diferenças Finitas consiste em:
  - Discretizar o domínio;
  - Aplicar aproximações de diferenças finitas nas derivadas da equação diferencial;
  - Aplicar condições de contorno.

PVC - 1D

Dadas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ contínuas em (a,b), encontrar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad a < x < b$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{array}{rcl} u(a) = u_a & u(b) = u_b & ou \\ \dfrac{du(a)}{dx} = \sigma_a & \frac{du(b)}{dx} = \sigma_b & ou \\ \alpha_a \dfrac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) = \gamma_a & \alpha_b \frac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) = \gamma_b & \end{array}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são constantes conhecidas do problema.

Discretização do Domínio

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{(b-a)}{(n-1)} \\
x_i &= a + (i-1)h, \text{ sendo } a = x_1, b = x_n \text{ e } n \text{ número de incógnitas}
\end{aligned}
$$

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

Objetivo:

obter aproximações $u_i \approx u(x_i) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$

Diferenças finitas

$$
\begin{aligned}
u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Adiantada)} \\
u'(x_i) &\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \theta(h) \text{ (Diferença Atrasada)} \\
u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \theta(h^2) \text{ (Diferença Central)} \\
u''(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \quad \theta(h^2)
\end{aligned}
$$

Aplicando as Diferenças finitas na equação diferencial

$$\left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}\right) + p_i \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) + q_i u_i = r_i$$

$$b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

onde:

$$a_i = q_i - (2/h^2) \qquad b_i = (1/h^2) - p_i/(2h) \qquad c_i = (1/h^2) + p_i/(2h)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

Matriz Tridiagonal!!!

Valor Prescrito

A função u é conhecida em $x_1 = a$ e/ou $x_n = b$, ou seja,
$u_1 = u(x_1) = u_a$ e/ou $u_n = u(x_n) = u_b$

Ação:
$a_1 \to \bar{a}_1 = 1, \quad c_1 \to \bar{c}_1 = 0, \quad r_1 \to \bar{r}_1 = u_a$ e/ou
$a_n \to \bar{a}_n = 1, \quad b_1 \to \bar{b}_1 = 0, \quad r_n \to \bar{r}_n = u_b$

Supondo valor prescrito em $x_1 = a$ e $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ u_b \end{bmatrix}$$

Fluxo Prescrito

A derivada de u é conhecida: $\frac{du(a)}{dx} = \sigma_a$ ou $\frac{du(b)}{dx} = \sigma_b$
A variável u_{i-1} (para $i = 1$) ou a variável u_{i+1} (para $i = n$) deve ser substituida na equação linear $b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i$. Para isso, deve ser usado aproximações de diferenças finitas convenientes na condição de derivada conhecida no contorno:
Para $i = 1 \Rightarrow u_i' \approx \frac{u_1 - u_0}{h} = \sigma_a \Rightarrow u_0 = u_1 - h\sigma_a$
Para $i = n \Rightarrow u_n' \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \sigma_b \Rightarrow u_{n+1} = u_n + h\sigma_b$
Ação:
$a_1 \rightarrow \bar{a}_1 = a_1 + b_1, \quad r_1 \rightarrow \bar{r}_1 = r_1 + b_1 h\sigma_a$ ou
$a_n \rightarrow \bar{a}_n = a_n + c_n, \quad r_n \rightarrow \bar{r}_n = r_n - c_n h\sigma_b$

Supondo valor prescrito em $x_1 = a$ e derivada prescrita em $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & b_n & a_n + c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n - c_n h\sigma_b \end{bmatrix}$$

Condição mista

Um combinação linear entre u e u' é conhecida: $\alpha_a u'(a) + \beta_a u(a) = \gamma_a$ ou $\alpha_b u'(b) + \beta_b u(b) = \gamma_b$

A variável u_{i-1} (para $i = 1$) ou a variável u_{i+1} (para $i = n$) deve ser substituida na equação linear $b_i u_{i-1} + a_i u_i + c_i u_{i+1} = r_i$. Para isso, deve ser usado aproximações de diferenças finitas convenientes na condição no contorno:

$i = 1 \Rightarrow \alpha_a \frac{u_1 - u_0}{h} + \beta_a u_1 = \gamma_a \Rightarrow u_0 = (1 + h\beta_a/\alpha_a)u_1 - h\gamma_a/\alpha_a$

$i = n \Rightarrow \alpha_b \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \beta_b u_n = \gamma_b \Rightarrow u_{n+1} = (1 - h\beta_b/\alpha_b)u_n + h\gamma_b/\alpha_b$

Ação:

$a_1 \to \bar{a}_1 = a_1 + b_1(1 + h\beta_a/\alpha_a), \quad r_1 \to \bar{r}_1 = r_1 + b_1 h\gamma_a/\alpha_a$ ou

$a_n \to \bar{a}_n = a_n + c_n(1 - h\beta_b/\alpha_b), \quad r_n \to \bar{r}_n = r_n - c_n h\gamma_b/\alpha_b$

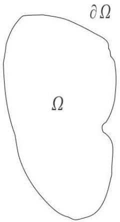
Supondo condição mista em $x_1 = a$ e valor prescrito em $x_n = b$:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & c_1 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ u_b \end{bmatrix}$$

PVC - 2D

Supor k, $\beta_x(x,y)$, $\beta_y(x,y)$, $\gamma(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ e $f(x,y)$ conhecidas, encontrar $u(x,y)$ em $\Omega \in \Re^2$ tal que:

$$\begin{aligned}
-k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u &= f \text{ em } \Omega \\
u &= g \text{ em } \Gamma_g \\
-k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= h \text{ em } \Gamma_h
\end{aligned}$$



$$\partial\Omega = \Gamma_g + \Gamma_h$$

Discretização do Domínio

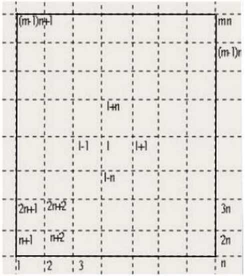
$$\Omega = \{(x, y), a < x < b, c < y < d\}$$

$$h_x = \frac{(b-a)}{(n-1)} \quad x_i = a + (i-1)h_x, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$h_y = \frac{(d-c)}{(m-1)} \quad y_j = c + (j-1)h_y, \quad j = 1, \ldots, m$$

Objetivo:

obter aproximações $u_{ij} \approx u(x_i, y_j) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$



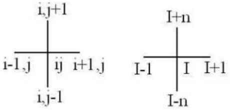
Diferenças finitas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} = \frac{u_{I+1} - u_{I-1}}{2h_x}, \quad \theta(h_x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} = \frac{u_{I+n} - u_{I-n}}{2h_y} \quad \theta(h_y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} = \frac{u_{I-1} - 2u_I + u_{I+1}}{h_x^2}, \quad \theta(h_x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = \frac{u_{I-n} - 2u_I + u_{I+n}}{h_y^2}, \quad \theta(h_x^2)$$



$I = 1, 2, \ldots, m * n$

Aplicando as diferenças finitas na equação diferencial

$$
\begin{aligned}
-k\left(\frac{u_{I-1}-2u_I+u_{I+1}}{h_x^2}+\frac{u_{I-n}-2u_I+u_{I+n}}{h_y^2}\right) & + \\
(\beta_x)_I\left(\frac{u_{I+1}-u_{I-1}}{2h_x}\right)+(\beta_y)_I\left(\frac{u_{I+n}-u_{I-n}}{2h_y}\right) & + \\
\gamma_I u_I & = f_I
\end{aligned}
$$

$$
d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I \quad \forall I = 1, \ldots, m*n
$$

$$
\begin{aligned}
a_I &= \gamma_I + 2k\left(1/h_x^2 + 1/h_y^2\right) \\
b_I &= \left(-k/h_x^2\right) - (\beta_x)_I/(2h_x) \\
c_I &= \left(-k/h_x^2\right) + (\beta_x)_I/(2h_x) \\
d_I &= \left(-k/h_y^2\right) - (\beta_y)_I/(2h_y) \\
e_I &= \left(-k/h_y^2\right) + (\beta_y)_I/(2h_y)
\end{aligned}
$$

Sistema Resultante - Matriz Pentadiagonal

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & & e_1 & & & & & \\
b_2 & a_2 & c_2 & & e_2 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\
d_{n+1} & & b_{n+1} & a_{n+1} & c_{n+1} & & e_{n+1} & & \\
 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & d_l & & b_l & a_l & c_l & & e_l \\
 & & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & d_{N-1} & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\
 & & & & & d_N & & b_N & a_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_l \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ u_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_l \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N
\end{bmatrix}
$$

Valor Prescrito

A função u é conhecida em I, ou seja, $u_I = u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) = g_I$

Ação:

$a_I \rightarrow \bar{a}_I = 1, \quad d_I \rightarrow \bar{d}_I = 0, \quad b_I \rightarrow \bar{b}_I = 0, \quad c_I \rightarrow \bar{c}_I = 0, \quad e_I \rightarrow \bar{e}_I = 0,$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = g_I$

Representando a linha I do sistema:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
 & n-1 & & I-1 & I & I+1 & & I+n & \\
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
\dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix} \vdots \\ u_{n-I} \\ \vdots \\ u_{I-1} \\ u_I \\ u_{I+1} \\ \vdots \\ u_{I+n} \\ \vdots \end{bmatrix} = g_I
$$

Fluxo Prescrito

A derivada de u é conhecida em I, ou seja, $-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = h(x_i, y_j) = h_I$
O domínio Ω é retangular, portanto a derivada com relação a normal exterior unitária ($\mathbf{n}$) é definida por:

$$\frac{du}{d\mathbf{n}} = \begin{cases} -\frac{du}{dy} \text{ para } & I = 1, 2, \ldots, n \quad (1) \\ \frac{du}{dx} \text{ para } & I = n, 2*n, \ldots, m*n \quad (2) \\ \frac{du}{dy} \text{ para } & I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \ldots, m*n \quad (3) \\ -\frac{du}{dx} \text{ para } & I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1 \quad (4) \end{cases}$$

Dependendo da posição I no contorno, uma das variáveis $I-n$, $I-1$, $I+1$, $I+n$ estará fora do domínio, portanto a equação:
$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + a_I u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I$
deverá sofrer as modificações necessárias considerando uma das possibilidades descritas de (1)-(4).

$I = 1, 2, \ldots, n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(-\frac{du}{dy}\right)|_I \approx \frac{u_I - u_{I-n}}{h_y} = h_I \Rightarrow u_{I-n} = u_I + \frac{h_y}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$b_I u_{I-1} + (a_I + d_I)u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I - d_I\frac{h_y}{k}h_I$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + d_I$, $d_I \to \bar{d}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I - d_I\frac{h_y}{k}h_I$

$I = n, 2 * n, \ldots, m * n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(\frac{du}{dx}\right)|_I \approx \frac{u_{I+1} - u_I}{h_x} = h_I \Rightarrow u_{I+1} = u_I - \frac{h_x}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + (a_I + c_I)u_I + e_I u_{I+n} = f_I + c_I\frac{h_x}{k}h_I$$

Ação:

$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + c_I, \quad c_I \rightarrow \bar{c}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I + c_I\frac{h_x}{k}h_I$

$I = (m-1)*n+1, (m-1)*n+2, \ldots, m*n$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(\frac{du}{dy}\right)|_I \approx \frac{u_{I+n}-u_I}{h_y} = h_I \Rightarrow u_{I+n} = u_I - \frac{h_y}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + b_I u_{I-1} + (a_I + e_I)u_I + c_I u_{I+1} = f_I + e_I\frac{h_y}{k}h_I$$

Ação:

$a_I \to \bar{a}_I = a_I + e_I, \quad e_I \to \bar{e}_I = 0$ e $f_I \to \bar{f}_I = f_I + e_I\frac{h_y}{k}h_I$

$$I = 1, n+1, \ldots, (m-1)*n+1$$

$$-k\frac{du}{d\mathbf{n}}|_I = -k\left(-\frac{du}{dx}\right)|_I \approx \frac{u_I - u_{I-1}}{h_x} = h_I \Rightarrow u_{I-1} = u_I + \frac{h_x}{k}h_I$$

Substituindo na equação I:

$$d_I u_{I-n} + (a_I + b_I)u_I + c_I u_{I+1} + e_I u_{I+n} = f_I - b_I \frac{h_x}{k} h_I$$

Ação:

$a_I \rightarrow \bar{a}_I = a_I + b_I, \quad b_I \rightarrow \bar{b}_I = 0$ e $f_I \rightarrow \bar{f}_I = f_I - b_I \frac{h_x}{k} h_I$