

# Algebra Lineare e Geometria Analitica

Andrea Bellu

2023/2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Spazi Vettoriali</b>	<b>2</b>
2.0.1	Nota bene . . . . .	3
2.1	Vettori . . . . .	3
2.1.1	Esercizio . . . . .	3
2.2	Combinazione Lineare . . . . .	3
2.3	Applicazione Lineare . . . . .	4
2.4	Sottospazio Vettoriale . . . . .	4
2.4.1	Teorema 1 . . . . .	4
2.4.2	Teorema 2 . . . . .	4
2.5	Condizioni per sottospazio . . . . .	5
2.6	Indipendenza e dipendenza lineare . . . . .	5
2.6.1	Sistema Libero o Legato . . . . .	5
2.7	Sistema di generatori di uno spazio vettoriale . . . . .	5
2.7.1	Copertura Lineare = Sottospazio . . . . .	5
2.8	Insieme di generatori . . . . .	6
2.8.1	Lemma . . . . .	6
2.8.2	Teorema . . . . .	6
2.9	Lemma di Steinitz . . . . .	6
2.10	Base . . . . .	6
2.10.1	Dimostrazione . . . . .	6
2.11	Metodo degli scarti successivi . . . . .	6
2.11.1	Lemma . . . . .	7
2.12	Dimensione . . . . .	7
2.12.1	Corollario . . . . .	7
2.12.2	Proposizione . . . . .	7
2.12.3	Proposizione . . . . .	7
2.13	Componenti . . . . .	7
2.14	Teorema del completamento di una base . . . . .	7
2.15	Legami fra sequenze libere, basi e matrici . . . . .	8
2.15.1	Dimostrazione . . . . .	8
2.16	Teorema . . . . .	8
2.16.1	Dimostrazione . . . . .	8
2.17	Intersezione e somma di sottospazi . . . . .	8
2.17.1	Proposizione . . . . .	8
2.18	Somma . . . . .	9
2.18.1	Proposizione . . . . .	9
2.19	Somma diretta . . . . .	9
2.19.1	Proposizione . . . . .	9
2.19.2	Corollario . . . . .	9
2.20	Formula di Grassmann . . . . .	9
2.20.1	Conseguenza del teorema di Grassmann . . . . .	9
2.20.2	Dimostrazione . . . . .	10
2.21	Definizione . . . . .	10

<b>3</b>	<b>Sistemi Lineari</b>	<b>10</b>
3.1	Determinante . . . . .	10
3.1.1	Proprietà . . . . .	10
3.2	Eliminazione di Gauss . . . . .	11
3.3	Complemento algebrico . . . . .	12
3.4	Teorema di Laplace I . . . . .	12
3.5	Teorema di Laplace II . . . . .	12
3.6	Teorema di Binet . . . . .	12
3.7	Matrici Invertibili . . . . .	12
3.7.1	Teorema . . . . .	12
3.8	Dipendenza lineare e determinanti . . . . .	12
3.8.1	Teorema . . . . .	12
3.9	Rango . . . . .	12
3.9.1	Osservazioni . . . . .	13
3.10	Kronecker . . . . .	13
3.11	Osservazione . . . . .	13
3.11.1	Corollario . . . . .	13
3.12	Teorema degli orlati . . . . .	13
3.13	Sistemi Lineari . . . . .	13
3.13.1	Sistema omogeneo . . . . .	14
3.13.2	Sistema compatibile . . . . .	14
3.14	Rouché-Capelli . . . . .	14
3.14.1	Dimostrazione . . . . .	14
3.15	Cramer . . . . .	15
3.15.1	Dimostrazione . . . . .	15
3.16	Sistema principale equivalente . . . . .	15
3.16.1	Teorema . . . . .	15
3.16.2	Teorema . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Forme Bilineari e Prodotti Scalari</b>	<b>15</b>
4.1	Forme Bilineari . . . . .	15
4.2	Forma bilineare simmetrica . . . . .	16
4.3	Prodotti scalari e ortogonalità . . . . .	16
4.4	Complemento ortogonale . . . . .	16
4.4.1	Proposizione . . . . .	16
4.5	Coefficiente di Fourier . . . . .	16
4.6	Forme Quadratiche . . . . .	16
4.7	Spazi con prodotto scalare definito positivo . . . . .	16
4.8	Norma . . . . .	16
4.9	Versore . . . . .	17
4.10	Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz . . . . .	17
4.10.1	Dimostrazione . . . . .	17
4.11	Disuguaglianza triangolare . . . . .	17
4.11.1	Dimostrazione . . . . .	17

## 1 Introduzione

Riassunto del libro di Algebra Lineare e Geometria Analitica di Silvia Pellegrini. Al riassunto si aggiungono anche alcuni appunti presi alle lezioni tenute dal prof. Giuzzi.

## 2 Spazi Vettoriali

Siano  $K$  un campo e  $V$  un insieme. Si dice che  $V$  è uno spazio vettoriale sul campo  $K$ , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su  $V$ , detta somma,  $+: V \times V \rightarrow V$  e un'operazione esterna, detta prodotto esterno o prodotto per scalari,  $\bullet: K \times V \rightarrow V$ , tali che:

1.  $(V, +)$  sia un gruppo abeliano;
2. il prodotto esterno  $\bullet$  soddisfi le seguenti proprietà:

- (a)  $(h \cdot k) \bullet \bar{v} = h \bullet (h \bullet \bar{v}) \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$   
 (b)  $(h + k) \bullet \bar{v} = h \bullet \bar{v} + k \bullet \bar{v} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$   
 (c)  $h \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = h \bullet \bar{v} + h \bullet \bar{w} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$   
 (d)  $1 \bullet \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$  ove 1 è l'unità del campo  $K$

$V(K) = (V, K, + : V \times V \rightarrow V, \bullet : K \times V \rightarrow V) \implies$  struttura algebrica

Gli elementi dell'insieme  $V$  sono detti **vettori** gli elementi del campo  $K$  sono detti **scalari**.

### 2.0.1 Nota bene

Sia  $\mathbb{K}$  un campo, indichiamo con  $\mathbb{K}_{[x]} = \{a_0 + a_1x + \dots \mid a_i \in \mathbb{K}\}$  l'insieme di tutti i polinomi in  $x$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ .

## 2.1 Vettori

I vettori sono segmenti orientati con **verso**, **direzione** e **lunghezza**.

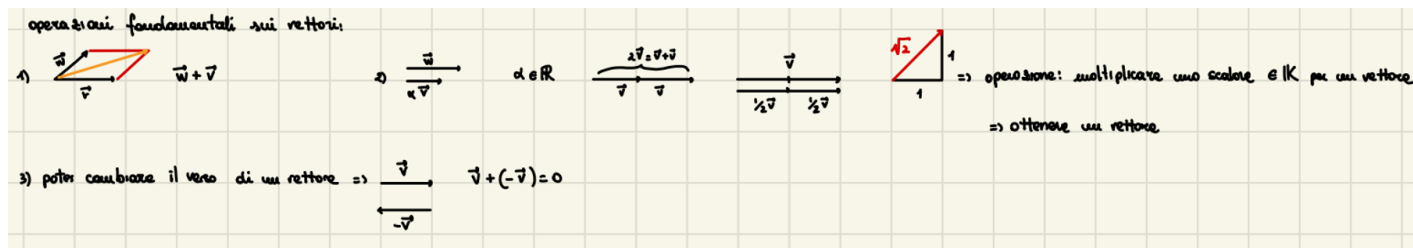


Figure 1: Vettori

### 2.1.1 Esercizio

Sia  $\mathbb{R}^2$  con le operazioni di somma componente per componente  $\implies (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  e prodotto per scalare campo per campo  $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$  è uno spazio vettoriale reale.

1. Far vedere che  $(\mathbb{R}^2, +)$  è un gruppo abeliano:

- (a)  $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (0, 0) + (a, b)$   
 (b)  $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \exists (-a, -b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = (-a + a, -b + b) = (-a, -b) + (a, b)$   
 (c)  $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$   
 (d)  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$

Abbiamo verificato che  $(\mathbb{R}^2, +)$  è un gruppo abeliano.

NB: abbiamo usato solamente che  $\mathbb{R}$  è un campo  $\implies$  abbiamo usato solo le proprietà della somma

1. Ora dobbiamo verificare che il prodotto esterno soddisfi le proprietà dello spazio vettoriale:

- (a)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2 : 1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) \implies$  elemento neutro  
 (b)  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 : (\alpha\beta) \cdot (a, b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) = (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) = \alpha(\beta a, \beta b) = \alpha(\beta \cdot (a, b)) \implies$  pseudo associativa  
 (c)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta)(a, b) = ((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = \alpha(a, b) + \beta(a, b) \implies$  pseudo distributiva  
 (d)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 : \alpha((a, b) + (c, d)) = \alpha(a + c, b + d) = (\alpha a, \alpha c, \alpha b, \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \alpha(a, b) + \alpha(c, d)$

## 2.2 Combinazione Lineare

Siano  $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \in V(\mathbb{K})$  vettori,  $\alpha_1, \alpha_n$  scalari, si dice combinazione lineare di  $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$  con  $\alpha_1, \alpha_k$  il vettore  $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_k$ .

## 2.3 Applicazione Lineare

Siano  $V(\mathbb{K})$  e  $W(\mathbb{K})$  due spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Si dice applicazione lineare da  $V(\mathbb{K})$  in  $W(\mathbb{K})$  una funzione  $f : V \rightarrow W$  tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \bar{w} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{w}) + \beta f(\bar{v})$$

Un'applicazione lineare è una funzione che manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari con i medesimi coefficienti. Se  $V(\mathbb{K})$  è spazio vettoriale e  $f : V \rightarrow W$  è applicazione lineare  $\implies f(V)$  immagine di  $V$  mediante  $f$  è uno spazio vettoriale.

## 2.4 Sottospazio Vettoriale

Sia  $W(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale, sia anche  $X \subseteq W$  sottoinsieme  $x \neq 0$ , allora  $X$  è detto **sottospazio** di  $W$  se  $X$  rispetta le operazioni di somma di vettori ristretta ad  $X \times X$  e troncata ad  $X$  e di prodotto per scalari di  $W$  ristretta a  $\mathbb{K} \times X$  e troncata ad  $X$  soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

In tale caso scriviamo  $X \leq W$ .  $X$  è sottospazio vettoriale se:

1. la somma di due qualsiasi vettori di  $X$  è un vettore di  $X$
2. il prodotto di un qualsiasi vettore di  $X$  per uno scalare è ancora un vettore di  $X$

### 2.4.1 Teorema 1

Sia  $V(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , allora:

1.  $\forall \bar{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \iff \alpha = 0 \vee \bar{v} = \underline{0}$
2.  $\forall \bar{v} \in V \quad (-1)\bar{v} = -\bar{v}$

**Dimostrazione:**

1. Consideriamo  $0 \cdot \bar{v} = (0 + 0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0$  sommando a destra e a sinistra  $-(0 \cdot \bar{v})$  si ottiene  $-(0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) = -(0 \cdot \bar{v}) + 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 + 0 + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} \quad \alpha = 0 \implies \alpha \bar{v} = \underline{0}$ .  
Supponiamo  $\alpha \bar{v} = \underline{0}$  con  $\alpha \neq 0 \implies \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \text{ e } \alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$   
 $\alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$   
 $\alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \alpha^{-1}(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$  sommando come prima  $-(\alpha^{-1} \underline{0})$  a dx e sx  
 $\alpha^{-1} \underline{0} = \underline{0} \implies$  in particolare  $\bar{v} = \underline{0}$
2.  $(-1)\bar{v} + \bar{v} = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = (-1+1)\bar{v} = 0 \cdot \underline{0} = \underline{0}$  pertanto sommando a dx e sx  $(-\bar{v})$  otteniamo  $-1\bar{v} = -1\bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v} = \underline{0} + (-\bar{v}) = \underline{0} + (-\bar{v}) = -\bar{v}$

### 2.4.2 Teorema 2

$X \leq V(\mathbb{K}) \iff X \subseteq V(\mathbb{K})$  ed  $X$  è chiuso rispetto le combinazioni lineari di suoi elementi mediante le equazioni di  $V$ . In altre parole:

$$\star) \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$$

**Osservazione:**  $\star$  è equivalente a dire:

$$\bullet) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in X : \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X \text{ \& } \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{v} + \bar{w} \in X$$

Verifichiamo che se vale  $\star$  allora  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v} + \underline{0} = \alpha \bar{v} \in X$  e  $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X : 1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} \in X$ .

Viceversa se vale  $\bullet \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v}, \beta \bar{w} \in X \implies \bar{v}' = \alpha \bar{v}, \bar{w}' = \beta \bar{w} \in X \quad \bar{v}' + \bar{w}' \in X \implies \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$

Se vale  $\bullet$  o  $\star$  (stessa cosa) allora  $X$  è sottospazio. Osserviamo che molte delle proprietà di spazio vettoriale valgono automaticamente per le restrizioni applicate a qualsiasi  $X \subseteq V(\mathbb{K})$ :

1. se  $\forall \bar{v} \in V : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \implies \forall \bar{v} \in X : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
2.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in V : (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v}) \implies$  vale anche per  $\forall \bar{v} \in X$
3.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in V : (\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$
4.  $\forall \bar{v}, \bar{w} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha(\bar{v} + \bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w}$

1, 2, 3, 4 valgono tutte anche sulla restrizione. Vale anche sulle restrizioni che  $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \implies \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$  e similmente:  $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} \implies \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

**Cosa potrebbe non funzionare?**

1.  $\underline{0} \in X$
2.  $\forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} \in X$
3.  $(-\bar{u}) \in X$  se  $\bar{u} \in X$
4.  $\alpha \bar{u} \in X$  se  $\bar{u} \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Se valgono a, b, c, d possiamo troncare le operazioni ad  $X \implies$  abbiamo un sottospazio.

b+d  $\implies$  significa che si può troncare.

a+b+c  $\implies (X, +)$  un gruppo.

## 2.5 Condizioni per sottospazio

Se vale la condizione  $\star$ :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in X$

1.  $0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in X$
2.  $1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \in X$
3.  $(-1)\bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = -\bar{u} + \underline{0} = -\bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$
4.  $\alpha \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \alpha \bar{u} + \underline{0} = \alpha \bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$

$X$  è un sottospazio, viceversa se  $X$  sottospazio allora ogni combinazione lineare di suoi vettori deve stare in  $X \implies$  vale  $\star$ .

## 2.6 Indipendenza e dipendenza lineare

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vettori di uno spazio vettoriale e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elementi del campo  $\mathbb{K}$ . Si dice **combinazione lineare** dei vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  con coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  il vettore di  $\mathbb{V}$ .

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

### 2.6.1 Sistema Libero o Legato

$\mathbb{V}(\mathbb{K})$  spazio vettoriale e un sistema  $\mathbb{A} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  si dice **libero**, ovvero i suoi vettori sono **linearmente indipendenti**, se l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli. Viceversa il sistema è **legato** e i suoi vettori sono **linearmente dipendenti**.

## 2.7 Sistema di generatori di uno spazio vettoriale

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale e sia  $\mathbb{A}$  un sistema o un insieme non vuoto di vettori di  $\mathbb{V}$ . Si dice **copertura lineare** di  $\mathbb{A}$ , e si indica  $\text{span}(\mathbb{A})$ , l'insieme dei vettori di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  che si possono esprimere come combinazioni lineari, di un numero finito, di vettori di  $\mathbb{A}$  (tutte le possibili combinazioni lineari).

$$\text{span}(\mathbb{A}) = \{v \in \mathbb{V} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, a_i v_n, a_1 \in \mathbb{K}, v_i \in \mathbb{A}\}$$

### 2.7.1 Copertura Lineare = Sottospazio

La copertura lineare  $\text{span}(\mathbb{A})$  di un sistema o di un insieme  $\mathbb{A}$ , non vuoto, di vettori  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ .

**Dimostrazione:** si osserva che la somma di un numero finito di vettori di  $\mathbb{A}$  è sempre una combinazione lineare di un numero finito di vettori a  $\mathbb{A}$  e, analogamente, il prodotto di un elemento del campo  $\mathbb{K}$ , per una combinazione lineare di vettori di  $\mathbb{A}$ , è ancora una combinazione lineare di un numero finito di vettori di  $\mathbb{A}$ . Quindi,  $\text{span}(\mathbb{A})$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ . Pertanto, dire che  $\text{span}(\mathbb{A})$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , la copertura lineare di un insieme o di un sistema  $\mathbb{A}$  di vettori si suole chiamare **spazio generato** da  $\mathbb{A}$ .

**Osservazione:** Diremo, talvolta, che la copertura lineare  $\text{span}(\mathbb{A})$  di un sistema o di un insieme  $\mathbb{A}$ , non vuoto, di vettori di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  è il **più piccolo sottospazio vettoriale** che contiene  $\mathbb{A}$ , nel senso che  $\text{span}(\mathbb{A})$  è contenuto in ogni sottospazio

vettoriale che contenga  $\mathbb{A}$ . E' immediato, infatti osservare che, ogni sottospazio vettoriale che contiene  $\mathbb{A}$  deve contenere tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di vettori di  $\mathbb{A}$  e, quindi, anche  $\text{span}(\mathbb{A})$ .

Si può facilmente dimostrare che:

1.  $\text{span}(\text{span}(\mathbb{A})) = \text{span}(\mathbb{A})$
2.  $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \iff \mathbb{A}$  è un sottospazio vettoriale.

## 2.8 Insieme di generatori

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale e sia  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{V}$ . Il sottoinsieme  $\mathbb{A}$  si dice **sistema o insieme di generatori** di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  se la sua copertura lineare  $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{V}(\mathbb{K})$ , cioè se **ogni vettori di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  si può esprimere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di  $\mathbb{A}$** . (Si dice che  $X$  è un **insieme di generatori** per  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  se  $\text{span}(X) = V$ ). Ogni spazio vettoriale ammette un insieme di generatori, ma si distinguono due casi:

1. **finitamente generato:** se  $\exists$  un almeno un sistema di generatori con un numero finito di vettori;

$$\exists X \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{K}) \quad |X| = n : \text{span}(X) = V$$

2. **non finitamente generato:** se ogni sistema di generatori ha un numero infinito di vettori.

### 2.8.1 Lemma

Se  $S = [v_1, v_2, \dots, v_m]$  è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  e uno dei suoi vettori  $v_i$ , dipende linearmente dagli altri, allora  $S \setminus v_i$  è ancora un sistema di generatori di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ .

### 2.8.2 Teorema

Ogni spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  finitamente generato non banale ammette almeno un sistema libero di generatori.

## 2.9 Lemma di Steinitz

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale f.g., sia  $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un suo sistema di generatori e sia  $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  un sistema libero di vettori di  $\mathbb{V}$ . Allora  $m \leq n$ , cioè  $|A| \leq |B|$ .

**NB:** fra i vettori di  $A$  e quelli di  $B$  non c'è nessuna relazione.

La dimostrazione non va studiata.

## 2.10 Base

Si dice **base** di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  f.g. una **sequenza** libera di generatori di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ .

Tutte la basi di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  hanno la stessa *cardinalità*.

### 2.10.1 Dimostrazione

Ci basta far vedere che ogni vettori si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base.

Supponiamo  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  e  $B$  sequenza libera di generatori.

$$\bar{v} \in \text{span}(B) \quad \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n.$$

$$\text{Supponiamo anche } \bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n.$$

Allora  $\bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n) - (\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n) = (\alpha_1 - \beta_1) \bar{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \bar{b}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{b}_n$ . Se  $B$  libera  $\implies$  deve essere  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_n = \beta_n$  perchè tutti i coefficienti sono necessariamente 0

$\implies B$  libera e di generatori  $\iff B$  base.

## 2.11 Metodo degli scarti successivi

Algoritmo che data una sequenza finita dei generatori per uno spazio vettoriale produce  $\emptyset$  oppure una sottosequenza libera di generatori.  $S$  è di generatori se  $S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$  ed ogni  $\bar{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$  si scrive come combinazione lineare di un numero finito di vettori di  $S$ .  $V = \text{span}(S)$

### 2.11.1 Lemma

Sia  $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una sequenza di generatori per uno spazio vettoriale  $W$  legato, allora esiste  $\bar{v}_i \in S : S \setminus \{\bar{v}_i\}$  genera  $W$  (“Possiamo sempre scartare almeno un vettore da  $S$  ed otteniamo ancora una sequenza di generatori”).

**Dimostrazione:**  $S$  legata  $\implies \exists \bar{v}_i \in S : \bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j$

Sia  $\bar{w} \in \text{span}(S) \implies \exists \beta_j \dots j = 1 \dots n$  tali che  $\bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \sum_{j \neq i} (\beta_j + \beta_i \alpha_j) \bar{v}_j$ .

$\implies \bar{w}$  è combinazione lineare di un numero finito di vettori di  $S \setminus \{\bar{v}_i\}$

$\implies \text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \text{span}(S)$

Viceversa ogni vettore di  $\text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$  è anche un vettore di  $\text{span}(S) \implies \text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \text{span}(S) \implies$

$\text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \text{span}(S)$ .

## 2.12 Dimensione

Uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  ha **dimensione**  $n$ , e scriveremo  $\dim \mathbb{V}(\mathbb{K}) = n$ , se  $n$  è il numero di vettori che compongono una sua qualunque base.

### 2.12.1 Corollario

In  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ , spazio vettoriale di dimensione  $n$ ,

1.  $m$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_m$  con  $m > n$  sono l.d.;
2.  $m$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_m$  con  $m < n$  non possono generare  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ ;
3. una sequenza di  $n$  generatori di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  risulta essere anche libera, e quindi, individua una base di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ ;
4. una sequenza libera di  $n$  vettori risulta essere anche un sistema di generatori e, quindi, individua una base di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ .

**Dimostrazione:**

1. Dal lemma di Steinitz, se uno spazio vettoriale ha dimensione  $n$ , **il massimo numero di vettori l.d.** che si possono trovare in  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  è proprio  $n$ .
2. Il **minimo numero di vettori che occorrono per generare**  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  è proprio  $n$ .

### 2.12.2 Proposizione

Ogni spazio vettoriale  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  di dimensione  $n$  contiene sottospazi di dimensione  $m \forall 0 \leq m \leq n$ .

### 2.12.3 Proposizione

Se  $U$  e  $W$  sono due sottospazi di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  e  $U$  è contenuto in  $W$ , allora:

1.  $\dim U \leq \dim W$ ;
2.  $U = W \iff \dim U = \dim W$

## 2.13 Componenti

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale e  $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  una sua base.  $\forall v \in \mathbb{V}$  si dicono **componenti di**  $v$ , rispetto alla base  $B$ , i coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tali che:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Cambiando l'ordine dei vettori che compaiono in una base, anche se si ottiene ancora una bse, si tratta di una base diversa.

## 2.14 Teorema del completamento di una base

Sia  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $A = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ , ove  $m \leq n$ , una sequenza libera di vettori di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ . Allora, in una qualunque base  $B$  di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ , esiste una sequenza  $B'$  di vettori, tale che  $A \cup B'$  è base di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ .

## 2.15 Legami fra sequenze libere, basi e matrici

Se  $B = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n]$  e  $B' = [\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n]$  sono due basi di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  allora:

1. Esse hanno la stessa cardinalità [per Steinitz  $n \leq m$  e  $m \leq n \implies m = n$  prendendo prima  $B$  come libera e  $B'$  come di generatori e poi viceversa].

**Definizione:** si dice dimensione di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  il numero di vettori di qualunque base.

2. Ogni vettori di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  si scrive in modo unico in componenti rispetto una fissata base

$$B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \forall \bar{v} \in \mathbb{V}_n(\mathbb{K}) \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

$$3. \text{ Posto } E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \text{ e } E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ tale che } \implies E' = AE \implies .$$

(a) la matrice  $A$  è invertibile  $\implies \det(A) \neq 0$

(b) se  $\bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)E = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)E' \implies {}^tX = {}^tA {}^tX'$  cambiamento di base  
 $[XE \implies X'E' = X'AE = {}^tX = {}^tA {}^tX']$

**Osservazione:**

1. Sia  $S = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  una sequenza libera  $\implies$  ogni sottosequenza di  $S$  è libera
  2. Sia  $T = (g_1, g_2, \dots, g_k)$  una sequenza di generatori  $\implies$  ogni sovrasequenza di  $T$  è di generatori.
- Se **aggiungo** vettori ad una **sequenza libera** ottengo ancora una sequenza libera (Teorema di completamento della base);
  - Se **tolgo** vettori ad una **sequenza libera** ottengo ancora una sequenza libera;
  - Se **aggiungo** vettori ad una **sequenza di generatori** ottengo una sequenza di generatori;
  - Se **tolgo** vettori ad una **sequenza di generatori** ottengo una sequenza di generatori (Metodo degli scarti successivi).

### 2.15.1 Dimostrazione

1. Sia  $S$  libera, supponiamo  $S' \leq S$  legata  $\implies S' = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_t) \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  tali che  $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_t \bar{e}_t = \underline{0}$   
 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) \neq (0 \dots 0) \implies \alpha \bar{e}_1 + \dots + \alpha_t \bar{e}_t + 0e_{t+1} + \dots + 0\bar{e}_n = \underline{0}$  con  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, 0 \dots 0) \neq \underline{0} \implies S$  legata, **assurdo**.
2. Sia  $T = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_k)$  di generatori e  $U = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_r)$  vettori  $\implies T \cup S$  è di generatori, perchè  $\forall$  vettore di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  si scrive come  $\beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_k \bar{g}_k = \beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_k \bar{g}_k + 0\bar{h}_1 + \dots + 0\bar{h}_r$

## 2.16 Teorema

Sia  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con  $\dim(V) = n$ . Sia  $X \subseteq \mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  con  $|X| = n$ . Allora  $X = V$ .

### 2.16.1 Dimostrazione

$X$  ammette una base  $B'$  di  $n$  vettori  $\implies$  tale base cobsta di  $n$  vettori di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  liberi  $\implies$  per le conseguenze di Steinitz take sequenza deve essere di generatori per  $V \implies \text{span}(B')X \subseteq \mathbb{V}_n(\mathbb{K}) = \text{span}(B')$  ne segue  $X = V$ .

**La nozione di dimensione ci dice “quanto è grande” uno spazio vettoriale.**

## 2.17 Intersezione e somma di sottospazi

Dati due sottospazi  $U$  e  $W$  di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , la loro **intersezione** e la loro **unione** sono, rispettivamente

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ and } v \in W\} \text{ e } U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \text{ or } v \in W\}$$

### 2.17.1 Proposizione

Se  $U, W$  sono sottospazi di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ ,  $U \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ .



## 2.18 Somma

Siano  $U, W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ . Si dice **somma**  $S$  di  $U, W$

$$S = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

### 2.18.1 Proposizione

La somma  $S$  di due sottospazi  $U, W$  di uno spazio  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  è uno spazio vettoriale di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ .

**Dimostrazione:** basta osservare che se  $v_1, v_2$  sono vettori di  $U + W$  anche  $\alpha v_1 + \beta v_2$  appartiene a  $U + W$ . Infatti se  $v_1 = u_1 + w_1$  e  $v_2 = u_2 + w_2$  allora  $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2)$  e ciò dimostra l'asserto.

## 2.19 Somma diretta

La somma  $S$  di due sottospazi  $U, W$  di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  si dice **diretta**, e si scrive  $U \oplus W$ , se ogni vettore di  $S$  si può esprimere in modo unico, come somma di un vettore di  $U$  e di uno di  $W$ .

### 2.19.1 Proposizione

La somma di due sottospazi  $U, W$  di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  è diretta  $\iff U \cap W = \{0\}$

**Dimostrazione:** supponiamo che la somma di  $U, W$  sia diretta e sia, per assurdo,  $0 \neq x \in U \cap W$ . Un qualunque vettore  $v$  di  $U + W$  è  $v = u + w$  ove  $u \in U$  and  $w \in W$ , ma anche  $v = (u + x) + (w - x)$  ove  $u + x \in U$  e  $w - x \in W$ . Pertanto,  $v$  può essere espresso in più modi come somma di un elemento di  $U$  e di uno di  $W$ , e questo è assurdo.

Viceversa, sia  $U \cap W = \{0\}$  e, per assurdo, esista un vettore  $v$  esprimibile in due modi diversi come somma di vettori di  $U$  e  $W$ ,

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

in questo caso il vettore  $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$  sarebbe un vettore non nullo di  $U \cap W$  e ciò è contro l'ipotesi.

### 2.19.2 Corollario

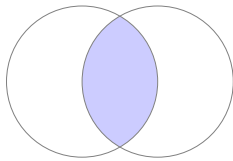
Uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  è somma diretta di due suoi sottospazi  $U, W \iff V = U + W$  and  $U \cap W = \{0\}$

## 2.20 Formula di Grassmann

Siano  $U, W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  f.g. Allora:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

La formula di Grassmann richiama il cosiddetto principio di induzione/esclusione. Siano  $A$  e  $B$  due insiemi finiti,  $\rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .



$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \\ |A \setminus B| &= |A| - |A \cap B| \\ |B \setminus A| &= |B| - |A \cap B| \\ \implies |A \cup B| &= |A \cap B| + |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

In generale se  $B_u$  base di  $U$  e  $B_w$  base di  $W$  allora  $B_u \cup B_w =$  generatori di  $U + W$ . Ma **non è vero** che  $B_u \cap B_w$  base di  $U \cap W$ . Al massimo  $B_u \cap B_w$  è una sequenza libera di generatori di  $U \cap W$ .

### 2.20.1 Conseguenza del teorema di Grassmann

Il  $\max(\dim(U), \dim(W)) \leq \dim(U + W) \leq \min(\dim(U) + \dim(W), \dim(V_n))$   
 $\max(0, \dim(U) + \dim(W) - \dim(V_n)) \leq \dim(U \cap W) \leq \min(\dim(U), \dim(W))$   
 $U \cap W \leq U, W \leq U + W$

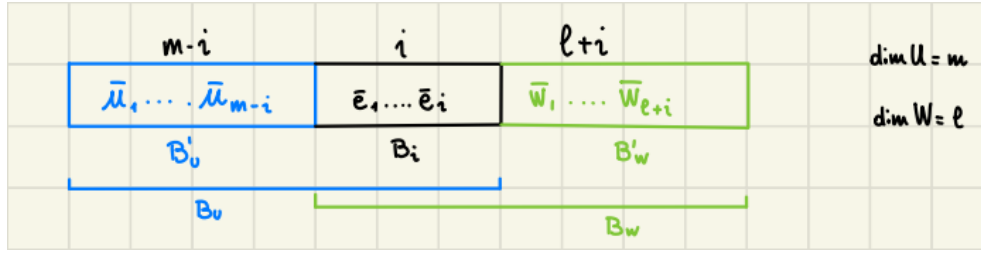


Figure 2: Grassman

### 2.20.2 Dimostrazione

Idea: se  $U \oplus W$  cioè  $\dim(U \cap W) = 0$  allora  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - 0 = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ . Supponiamo  $\dim(U \cap W) = i > 0 \implies \exists$  una base  $B_i$  di  $U \cap W$ , formata da vettori che stanno sia in  $U$  che in  $W$  e sono una sequenza libera. Applicando il teorema del completamento della base con vettori di  $U$  estendiamo  $B_i$  ad una base  $B_u$  di  $U$  (e poniamo  $B_u = B_i \cup B'_u$ ), similmente estendiamo  $B_i$  ad una base  $B_w$  di  $W$  (e poniamo  $B'_w = B_w \setminus B_i$ ).

# totale vettori  $= m - i + i + l - i = m + l - i = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

**Osservazione:**  $B_u \cup B_w = B'_u \cup B_i \cup B'_w$  è una sequenza di generatori di  $U + W$  perchè unione di una base di  $U$  e di una base di  $W$ .

**Dobbiamo dimostrare che è una sequenza libera:** supponiamo esistano  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-i}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{l-i}) \neq \underline{0}$  tali che  $\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{m-i} \bar{u}_{m-i} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i + \dots + \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{l-i} \bar{w}_{l-i} = \underline{0} \implies$  è impossibile che sia  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-i}) = (0 \ 0 \dots 0)$  perchè altrimenti avremmo una combinazione lineare di vettori di  $B_w$  con coefficienti non tutti 0 che dà  $\underline{0} \implies$  possiamo scrivere

$$\underline{\beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i + \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{l-i} \bar{w}_{l-i} =}$$

$$\stackrel{\in}{\text{span}(B_w)=W}$$

$$= \underline{-\alpha_1 \bar{u}_1 - \dots - \alpha_{m-i} \bar{u}_{m-i}}$$

$$\stackrel{\in}{\text{span}(B'_u) \leq U}$$

..... finire

### 2.21 Definizione

Se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  si dice **complemento diretto** di  $U$  in  $V$ , un sottospazio vettoriale  $W$  di  $V_n$ , tale che  $U \oplus W = V$ .

## 3 Sistemi Lineari

### 3.1 Determinante

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , a elementi in un campo  $\mathbb{K}$ . Si dice **determinante**, e si indica con  $\det(A)$  o  $|A|$ , la somma di tutti i suoi termini presi con il proprio segno. Cioè:

$$\det(A) = \sum_{\alpha \in S_n} \text{sgn}(\alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)}$$

#### 3.1.1 Proprietà

1. Se una colonna (o una riga) di una matrice è nulla, allora il determinante è nullo.
2.  $\det(A) = \det({}^t A)$ , infatti, i termini estratti da  ${}^t A$  sono tutti e soli i termini estratti da  $A$ . Sia  $A = (a_{ij})$  e  $B = ({}^t A) = (b_{ij})$  allora  $b_{ij} = a_{ji}$ . Se:

$$b_{1\alpha(1)} b_{2\alpha(2)} \dots b_{n\alpha(n)}$$

è un termine estratto da  ${}^t A$ , associato alla permutazione  $\alpha$ , esso coincide con:

$$a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \dots a_{\alpha(n)n}$$

che per definizione, è un termine estratto da  $A$  e individuato dalla permutazione  $\alpha^{-1}$ . Dunque, poichè  $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\alpha^{-1})$ , possiamo concludere che  $\det(A) = \det({}^t A)$ .

3. Se  $A'$  è ottenuta da  $A$  scambiando tra loro due righe (o colonne), allora  $\det(A') = -\det(A)$ . Basta osservare che, i termini della matrice  $A'$  si ottengono da quelli di  $A$  scambiando tra loro due termini, e quindi, il segno del determinante cambia. Infatti, se  $A' = (b_{ij})$  è ottenuta da  $A = (a_{ij})$  scambiando la  $k$ -esima riga con l' $h$ -esima, allora ogni termine estratto da  $A'$

$$b_{1\alpha(1)} \cdot \dots \cdot b_{k\alpha(k)} \cdot \dots \cdot b_{h\alpha(h)} \cdot \dots \cdot b_{n\alpha(n)}$$

associato alla permutazione  $\alpha$ , è uguale a:

$$a_{1\alpha(1)} \cdot \dots \cdot a_{h\alpha(k)} \cdot \dots \cdot a_{k\alpha(h)} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha(n)}$$

che risulta un termine di  $A$  associato alla permutazione  $(\sigma \circ \alpha)$ , dove,  $\sigma$  è lo scambio di  $k$  con  $h$ . Ma essendo  $\text{sgn}(\alpha) = -\text{sgn}(\sigma \circ \alpha)$ , risulta  $|A'| = -|A|$

4. Se  $A$  ha due righe (o due colonne) uguali, allora  $\det(A) = 0$ . Infatti, se  $A$  ha due righe uguali, allora, scambiando tra loro queste due righe, non si altera la matrice  $A$ , e per la precedente proprietà,  $\det(A) = -\det(A)$ , da cui  $\det(A) = 0$ .
5. Se in  $A$  una colonna  $C_i$  è la somma di due  $n$ -uple  $X_i, Y_i$ , cioè se  $A$  è del tipo:

$$(C_1 \dots X_i + Y_i \dots C_n)$$

allora  $|A| = |C_1 \dots X_i \dots C_n| + |C_1 \dots Y_i \dots C_n|$ . Analogamente per le righe.

6. Se  $A'$  è una matrice ottenuta da  $A = (C_1 \ C_2 \dots C_n)$  moltiplicando per  $k \in \mathbb{K}$  una sua colonna (o riga), allora

$$|A'| = |C_1 \dots kC_i \dots C_n| = k|C_1 \dots C_i \dots C_n| = k|A|$$

7. Se  $A$  ha due colonne (o due righe) proporzionali, allora  $\det(A) = 0$ .
8. Se  $A$  ha una colonna (o una riga) che è combinazione lineare di altre colonne (o righe), allora  $\det(A) = 0$ .
9. Se  $A'$  è una matrice ottenuta da  $A$  sommando ad una sua colonna (o riga) un multiplo di un'altra colonna (o riga), allora  $|A'| = |A|$ .

## 3.2 Eliminazione di Gauss

L'intento del **metodo di eliminazione di Gauss** è quello di ridurre una matrice  $A$  ad una matrice  $A'$ , detta **ridotta a gradini**, in quanto il determinante di quest'ultima può essere calcolato moltiplicando gli elementi presenti nella diagonale principale, che ha la forma:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Per farlo utilizziamo quelle che si chiamano **Mosse di Gauss**:

1. Scambiare tra loro due righe della matrice;
2. Moltiplicare una riga per un numero diverso da zero;
3. Sostituire ad una riga la somma di essa con un multiplo di un'altra riga.

**Osservazione:** le mosse di Gauss non alterano il determinante della matrice.

Passi dell'algoritmo di Gauss:

Indichiamo con  $A$  una matrice non ridotta a gradini con  $m$  righe e  $n$  colonne.

1. Sia  $C_k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , la prima colonna a partire da sinistra che contiene almeno un termine  $a$  non nullo. Detta  $R_1$  la prima riga della matrice, possono presentarsi **due eventualità**:
  - (a) Se  $a$  è un elemento di  $R_1$ , passiamo al punto 3
  - (b) Se  $a \notin R_1$ . Controlliamo se la matrice ottenuta dopo lo scambio è ridotta a gradini: se lo è possiamo fermarci, in caso contrario procediamo oltre.
2. L'obiettivo è annullare tutti gli elementi della  $k$ -esima colonna al di sotto di  $a$ . Sostituiamo ogni riga  $R_i$ , con  $i > 1$  e con  $k$ -esimo elemento non nullo, con  $R_i + \lambda R_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $R_i + \lambda R_1 = 0$ .
3. Se la matrice risultante è ridotta a gradini, allora l'algoritmo termina, altrimenti ripetiamo i passi precedenti con la matrice ottenuta.

### 3.3 Complemento algebrico

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , a elementi in un campo  $\mathbb{K}$ . Si dice **complemento algebrico** dell'elemento  $a_{hk}$ , e si indica con  $\Gamma_{hk}$ , il determinante della matrice quadrata di ordine  $n - 1$ , ottenuta da  $A$  cancellando la riga  $h$  e la colonna  $k$ , preso con il segno  $(-1)^{h+k}$ .

### 3.4 Teorema di Laplace I

Data una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$ , la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di  $A$ . Pertanto, la formula del calcolo del determinante di  $A = (a_{ij})$  rispetto alla  $i$ -esima riga è:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Rispetto alla  $j$ -esima colonna è:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

L'utilizzo dei complementi algebrici consente, quindi il calcolo del determinante di una matrice di ordine  $n$  calcolando determinanti di matrici di ordine inferiore.

### 3.5 Teorema di Laplace II

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero.

### 3.6 Teorema di Binet

Date due matrici quadrate di ordine  $n$ ,  $A$  e  $B$ , il determinante della matrice prodotto  $AB$  è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici:

$$|AB| = |A||B|$$

### 3.7 Matrici Invertibili

Una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  si dice **invertibile** se esiste una matrice  $B$  quadrata e dello stesso ordine, tale che  $AB = BA = I_n$ , dove  $I_n$  è la matrice identità di ordine  $n$ . In tal caso, la matrice  $B$  si dice **matrice inversa** di  $A$  e si indica con  $A^{-1}$ .

#### 3.7.1 Teorema

Una matrice quadrata  $A = (a_{ij})$ , di ordine  $n$ , è invertibile  $\iff |A| \neq 0$ . In questo caso, la matrice inversa di  $A$  risulta essere  $A^{-1} = |A|^{-1} {}^t A_a$  dove  ${}^t A_a$  è la trasposta dell'aggiunta di  $A$ .

### 3.8 Dipendenza lineare e determinanti

Data una matrice  $A \in \mathbb{K}^{m,n}(K)$  si dice **minore di ordine  $k$** , estratto da  $A$ , una matrice quadrata di ordine  $k$  (ovviaente  $k \leq m$  e  $k \leq n$ ) ottenuta da  $A$  cancellando  $m - k$  righe e  $n - k$  colonne.

#### 3.8.1 Teorema

Una sequenza  $S = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  di  $k$  vettori ( $k \leq n$ ) dello spazio vettoriale  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$  è libera  $\iff$  dalla matrice  $A$ , che ha nelle proprie righe (o colonne) le componenti dei vettori di  $S$  in una base  $B$  di  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ , si può estrarre un minore di ordine  $k$  con determinante non nullo.

### 3.9 Rango

Sia  $A$  una matrice di  $\mathbb{K}^{m,n}(\mathbb{K})$ . Si dice **rango** della matrice  $A$ , e si indica con  $rK(A)$ , il massimo ordine di un minore non nullo estratto da  $A$ .

In modo equivalente, il rango di una matrice  $A$  è  $p$  quando esiste un minore di ordine  $p$  non nullo, ma non esiste alcun minore di ordine  $p + 1$  non nullo.

### 3.9.1 Osservazioni

Data una matrice  $A \in K^{m,n}(\mathbb{K})$

1.  $rK(A) = 0 \iff A$  è la matrice nulla;
2. il rango di  $A$  coincide con il rango della sua trasposta  ${}^tA$ ;
3.  $rK(A) \leq \min\{m, n\}$ ;
4. se  $B$  è una matrice di  $K^{n,p}(\mathbb{K})$ , il rango della matrice prodotto  $AB$  è minore o uguale, sia al rango di  $A$ , che di quello di  $B$ .
5. se  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate dello stesso ordine e  $A$  è invertibile, allora  $rK(AB) = rK(BA) = rK(B)$ .

### 3.10 Kronecker

Gli spazi vettoriali  $\text{span}(R)$  ed  $\text{span}(C)$ , di una matrice  $A \in K^{m,n}(\mathbb{K})$ , hanno la stessa dimensione e tale dimensione coincide con il rango di  $A$ .

### 3.11 Osservazione

Il rango di una matrice  $A$  coincide con il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti estraibili dalla matrice  $A$ .

#### 3.11.1 Corollario

Se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$ , con elementi in un campo  $\mathbb{K}$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $|A| \neq 0$ ;
2.  $A$  è invertibile
3.  $rK(A) = n$ ;
4. le righe sono linearmente indipendenti e, quindi sono base di  $\mathbb{K}^n$ ;
5. le colonne sono linearmente indipendenti e, quindi sono base di  $\mathbb{K}^n$ ;

### 3.12 Teorema degli orlati

Una matrice  $A \in K^{m,n}(\mathbb{K})$  ha rango  $r$  se e solo se esiste un minore  $M$  di ordine  $r$  a determinante non nullo e tutti i minori di ordine  $r+1$ , che contengono  $M$ , hanno determinante nullo.

### 3.13 Sistemi Lineari

Un **sistema lineare** è insieme di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite a coefficienti in un campo  $\mathbb{K}$ , un sistema lineare si può rappresentare come:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ . Gli elementi  $a_{ij}$  si chiamano coefficienti delle incognite, gli elementi  $b_i$  si chiamano termini noti. La matrice  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

è detta matrice dei coefficienti o **matrice incompleta** del sistema.

La matrice  $n \times 1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

è detta matrice delle incognite.

La matrice  $m \times 1$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

è detta matrice dei termini noti.

Infine, la matrice  $m \times (n + 1)$

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

è detta **matrice completa** del sistema.

### 3.13.1 Sistema omogeneo

Un sistema lineare si dice **omogeneo** se tutti i termini noti sono nulli. Utilizzando il prodotto tra matrici, il sistema lineare assume la seguente forma:

$$AX = B$$

In particolare, un sistema lineare omogeneo, in forma matriciale, si scrive

$$AX = \underline{0}$$

Si è soliti chiamare **sistema lineare omogeneo associato** ad  $AX = B$ , il sistema lineare omogeneo ottenuto da  $AX = B$  ponendo  $B = \underline{0}$ .

### 3.13.2 Sistema compatibile

Sia  $AX = B$  un sistema lineare in  $m$  equazioni e  $n$  incognite. Si dice che tale sistema ha soluzione, ovvero che il **sistema è compatibile**, se esiste almeno un  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  di elementi di  $\mathbb{K}$  che risolve tutte le equazioni del sistema. Tale  $n$ -upla è detta **soluzione**.

**Osservazione:** affermare che una  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  di elementi di  $\mathbb{K}$  è soluzione di un sistema  $AX = B$ , pensando tale sistema scritto nella forma, equivale a dire che

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n = B$$

cioè che  $B$  è combinazione lineare delle colonne della matrice  $A$  secondo i coefficienti  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

## 3.14 Rouché-Capelli

Un sistema lineare  $AX = B$ , in  $m$  equazioni e  $n$  incognite, è compatibile  $\iff rk(A) = rk(A|B)$ .

### 3.14.1 Dimostrazione

Se il sistema  $AX = B$  ha soluzione, esiste una  $n$ -upla di  $\mathbb{K}$   $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , che ne soddisfa tutte le equazioni, tale, cioè, che:

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n = B$$

e quindi,  $B$  risulta essere combinazione lineare delle colonne della matrice  $A$ . Pertanto, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, estraibili dalla matrice  $A$ , coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, estraibili dalla matrice  $A|B$ , e  $rk(A) = rk(A|B)$ . Viceversa se  $rk(A) = rk(A|B)$ , allora il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, estraibili dalla matrice  $A$ , coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti,

estraibili dalla matrice  $A|B$ , di conseguenza, la colonna  $B$  risulta una combinazione lineare delle colonne della matrice  $A$ , e quindi, esiste una  $n$ -upla di  $\mathbb{K}$   $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , tale che:

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$$

Pertanto, il sistema  $AX = B$  ha soluzione.

### 3.15 Cramer

Un sistema lineare  $AX = B$ , in  $n$  equazioni ed  $n$  incognite, in cui  $|A| \neq 0$ , ammette una e suna sola soluzione.

#### 3.15.1 Dimostrazione

Proviamo che, se la soluzione esiste, allora è unica. Supponiamo che  $X_1$  e  $X_2$  siano due soluzioni del sistema  $AX = B$ , che sia cioè:

$$AX_1 = B \quad \text{e} \quad AX_2 = B$$

e quindi,  $AX_1 = AX_2$ . Essendo  $|A| \neq 0$ , la matrice  $A$  è invertibile, pertanto, moltiplicando la precedente uguaglianza a sinistra per  $A^{-1}$ , si ottiene appunto che  $X_1 = X_2$  e dunque la soluzione è unica. Dimostriamo ora che la soluzione esiste. Indichiamo con  $B_i$  la matrice ottenuta da  $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  sostituendo la colonna  $i$ -esima con la colonna  $B$  dei termini noti. Sia, cioè,  $B_i = (C_1 \dots C_{i-1} \ B \ C_{i+1} \dots C_n)$ . Verifichiamo che:

$${}^t \bar{X} = \left( \frac{|B_1|}{|A|} \quad \frac{|B_2|}{|A|} \quad \dots \quad \frac{|B_n|}{|A|} \right)$$

è soluzione del sistema  $AX = B$ . Essendo, infatti, la matrice  $A$  quadrata e invertibile, da  $AX = B$ , moltiplicando ambo i membri a sinistra per  $A^{-1}$ , è possibile osservare che  $A^{-1}B$  risolve il sistema  $AX = B$ . Si osserva che  $A^{-1}B$  è proprio la soluzione di  ${}^t \bar{X}$ .

### 3.16 Sistema principale equivalente

Sia  $AX = B$  un sistema lineare in  $m$  equazioni e  $n$  incognite, cioè sia  $rk(A) = rK(A|B) = p$ . Si dice **sistema principale equivalente** ad  $AX = B$ , un sistema  $A'X = B'$  ottenuto estraendo  $p$  equazioni del sistema  $AX = B$ , in modo tale che  $rk(A') = rk(A'|B') = p$ .

#### 3.16.1 Teorema

Ogni sistema compatibile ha le stesse soluzioni di uno suo qualunque sistema principale equivalente.

#### 3.16.2 Teorema

Sia  $AX = 0$  un sistema lineare omogeneo in  $m$  equazioni e  $n$  incognite. L'insieme  $S$  delle sue soluzioni è un sottospazio di  $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$  di dimensione  $n - rK(A)$ .

## 4 Forme Bilineari e Prodotti Scalari

### 4.1 Forme Bilineari

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . Una **forma bilineare** su  $\mathbb{V}$  è un'applicazione

$$* : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \times \mathbb{V}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

tale che  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$  e  $k \in \mathbb{K}$

1.  $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) * \mathbf{w} = (\mathbf{v} * \mathbf{w}) + (\mathbf{u} * \mathbf{w})$
2.  $\mathbf{v} * (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} * \mathbf{u}) + (\mathbf{v} * \mathbf{w})$
3.  $(k\mathbf{v}) * \mathbf{u} = \mathbf{v} * (k\mathbf{u}) = k(\mathbf{v} * \mathbf{u})$

Si deduce che  $0 * \mathbf{v} = \mathbf{v} * 0 = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ .

## 4.2 Forma bilineare simmetrica

Una forma bilineare  $*$ , su uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , si dice **forma bilineare simmetrica o prodotto scalare** se, comunque si considerino due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  in  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , si ha:

$$\mathbf{v} * \mathbf{w} = \mathbf{w} * \mathbf{v}$$

## 4.3 Prodotti scalari e ortogonalità

In uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , con prodotto scalare  $\cdot$ , due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  si dicono **ortogonali** e si scrive  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$  se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ .

## 4.4 Complemento ortogonale

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\cdot$  e sia  $A$  un sottoinsieme, non vuoto, di  $\mathbb{V}$ . Si dice **complemento ortogonale** di  $A$  in  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ , l'insieme (si legge  $A$  ortogonale)

$$A^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{w} \in A\}$$

### 4.4.1 Proposizione

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\cdot$  e sia  $\mathbf{w}$  un vettore di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  tale che  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \neq 0$ . Allora, ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  si può esprimere come somma di due vettori  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ , dove  $\mathbf{w}_1$  è ortogonale a  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}_2$  è proporzionale a  $\mathbf{w}$ .

**Dimostrazione:** Ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$  si può scrivere come:

$$\mathbf{v} = \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} \right) + \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} \right)$$

Un calcolo diretto dimostra che  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}$  è ortogonale a  $\mathbf{w}$  mentre, ovviamente,  $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}$  è proporzionale a  $\mathbf{w}$ , secondo lo scalare  $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$

## 4.5 Coefficiente di Fourier

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\cdot$  e sia  $\mathbf{w}$  un vettore di  $\mathbb{V}$  tale che  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \neq 0$ . Se  $\mathbf{v}$  è un vettore di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , si dice **coefficiente** o **componente di Fourier** di  $\mathbf{v}$  lungo  $\mathbf{w}$  il numero reale

$$\mathbf{v}_w = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

e si dice **proiezione** di  $\mathbf{v}$  su  $\mathbf{w}$  il vettore  $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_w \mathbf{w}$ .

## 4.6 Forme Quadratiche

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\cdot$ . Si dice **forma quadratica**, associata al prodotto scalare  $\cdot$ , l'applicazione

$$q : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

## 4.7 Spazi con prodotto scalare definito positivo

Un prodotto scalare, assegnato in uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  su un campo ordinato, si dice **definito positivo** se  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \underline{0}$

Una forma quadratica si dice **definita positiva** se tale è il prodotto scalare cui essa è associata.

## 4.8 Norma

Dato un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^\circ(\mathbb{R})$  si dice **norma** di  $\mathbf{v}$  il numero reale positivo o nullo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{q(\mathbf{v})}$$



## 4.9 Versore

Sia  $\mathbf{v} \neq 0$  un vettore di  $\mathbb{V}^o(\mathbb{R})$ , si dice **versore** di  $\mathbf{v}$  il vettore

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

## 4.10 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  due vettori di  $\mathbb{V}^o(\mathbb{R})$ . Allora

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$$

ove  $|v \cdot u|$  indica il valore assoluto di  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .

### 4.10.1 Dimostrazione

## 4.11 Disuguaglianza triangolare

### 4.11.1 Dimostrazione