1 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \ \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.
Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

Ovvio che il risultato è...?
Potrebbe essere:

$$\textbf{(1-1)} + \textbf{(1-1)} + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

oppure:

$$\textbf{1} + \textbf{(-1+1)} + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.
Allora come si procede?
Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

1.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

1.1.1 Esempio 1

$a_k = 1 \ \forall k$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \ldots, S_n = n$$

$\implies S_n \to \infty$

1.1.2 Esempio 2

$a_k = (-1)^{k+1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \ldots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste!.

1.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k. Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \to \infty$ di S_n, si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamtento della seria si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una seria è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

1.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \ldots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo èer escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

1.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

1.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n\to\infty} S_= S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star)\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1}, ottengo la successione S_{n+1}. (Per definizione di successione di somme parziali)
Allora da $(\star)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$
$$\implies a_n \to 0$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.
Vediamo due esempi di serie modello:

1.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).
Calcoliamo la somma parziale S_n:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e $\lim_{n\to\infty} S_n =?$.
Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

1.4.1 Osservazione

La formual vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \ (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

1.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di x, calcolare la somma della serie.
! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.
! Capisco che è geometrica perchè dipende da $x - 4$
Risoluzione:

- è una serie geometrica di ragione $x - 4$.
- la serie geometrica data converge per:

$$|x - 4| < 1 \iff -1 < x - 4 < 1 \iff 3 < x < 5$$

- la somma della serie è data da: $\dfrac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2 - 8x + 16}{5 - x}$$

$$-1 = \text{ I° termine della serie } = (x-4)^0 = 1$$

1.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.

! Non si conosce la somma.

Osservazione E' un esempio di serie dove $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è **divergente.**

1.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la seria armonica generalizzata è:

- **convergente** per $p > 1$
- **divergente** per $p \leq 1$

1.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini non negativi se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 0$.
Diremo che una serie è a termini positivi se $a_n > 0, \forall n$.

1.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente poisitivamente.
Dimostrazione: La successione delle somme parziali S_n di una seria a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).
Infatti, poichè $a_{n+1} \geq 0, \forall n$, risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

$\Longrightarrow$ Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:
"Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito."
$\Longrightarrow$ S_n ammette limite (eventualmente a $+\infty$) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

1.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni **criteri** per stabilire il **carattere** di una serie: (non sempre si risce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

1.8.1 Criterio del rapporto:

Si utilizza solitamente per il fattoriale.
Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L \leq 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \geq +\infty$, la serie diverge.

Osservazione Nel caso: $0 \leq L \leq 1$ quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
Esempi:
da fare

1.8.2 Criterio della radice:

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L < 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \leq +\infty$, la serie diverge.

Esempi:
da fare
Esercizio appello

1.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$:

- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

1.8.4 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ quindi $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ e considero $b_n = \frac{1}{n^p}$ con p?
  valuto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
  - $b_n = \frac{1}{n^2} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è una serie convergente, quindi non riesco a concludere.
  - $b_n = \frac{1}{n^3} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^3 = +\infty$, stesso problema di prima e non riesco a concludere.
  - $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge e quindi concludo con il criterio del **confronto mediante limiti** e la serie data converge.

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3})$$

$$a_n = \sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3} \cdot \frac{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{6n^3+1-6n^3}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}}$$

  Utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti e prendiamo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies \frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (per $n \to +\infty$) quindi la serie data si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(1 - \cos\frac{1}{n^3})$$

$$a_n = n^3(1-\cos\frac{1}{n^3}) = \frac{1-\cos\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$

  prendiamo $b_n = \frac{1}{n^3}$ e utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti. Allora, cerchiamo di ricondurci al limite notevole $\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1-\cos\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}} \to \frac{1}{2}$$

- Stabilire, per $x \geq 0$, il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

  Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x^n(n-1)!}{(n-1)!nx^nx^{-1}} = \frac{x}{n} \to 0 \quad \forall x > 0 \implies \quad \text{la serie converge } \forall x > 0$$

- Stabilire, per $x > 0$ il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(\frac{n+1}{2n-1})^{2n}$$

utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} x \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \to \frac{x}{4} \ (n \to +\infty)$$

Quindi se $0 < x < 4$, allora la serie converge. Se $x > 4$, allora la serie diverge a $+\infty$.
Se $x = 4$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n} = 1^\infty = \lim_{n\to+\infty} \left[(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right]^{\varepsilon_n \cdot 2n} = \cdots = e^3$$

$a_n \not\to 0$ e poichè è una serie a termini positivi $\implies$ diverge a $+\infty$.

- Stabilire per quali valori di α la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot (\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} - 1)$$

Utilizziamo lo sviluppo (Taylor):

$$\sin \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

Inoltre:

$$\sqrt{1+\varepsilon_n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

$$\implies \sin\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} = \left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\implies a_n = n^\alpha(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} - 1) = n^\alpha \left(\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$

a_n si comporta come $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ converge $\iff 2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$. Per il criterio del confronto mediante i limiti, la serie data converge $\iff \alpha < 1$.

1.9 Serie alternate

Consideriamo serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{con } a_n > 0$$

Vale il seguente criterio:

1.10 Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)

Sia a_n una sucessione tale che:

- $a_n \geq 0$
- infinitesima ($a_n \to 0$)
- decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$)$\forall n$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ a_n \text{ converge}$$

1.10.1 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1.10.2 Esercizio del compito 20 07 21

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3+5}$$

La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \to 0$
- a_n decrescente, infatti $\dfrac{1}{n^3+5}$ è decrescente e la funzione $g(x) = \sin x$ è crescente per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1.11 Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se risulta convergente la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. In generale, una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente.
Ad esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è la serie armonica che diverge.

1.12 Teorema

Una serie assolutamente convergenete, è convergente.

1.12.1 Esercizio del compito (predcedente)

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \sin \dfrac{1}{n^3+5}$ è anche assolutamente convergente. Infatti:

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n^3+5}\right) \cong \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$ converge.

1.12.2 Esercizi di compito a fine pdf (da fare)