Il moto è il movimento dei corpi.

0.1 Moto Rettilineo

Il moto più semplice è il moto rettilineo, ovvero il moto lungo una retta. Inizialmente studiamo il moto di un corpo puntiforme. Quando si parla di moto dobbiamo definire un'origine degli spazi e orientare la retta, in modo da determinare il verso positivo e negativo.
Effettuando delle misurazioni si ottiene un diagramma orario e successivamente si può ottenere il grafico spazio-tempo.

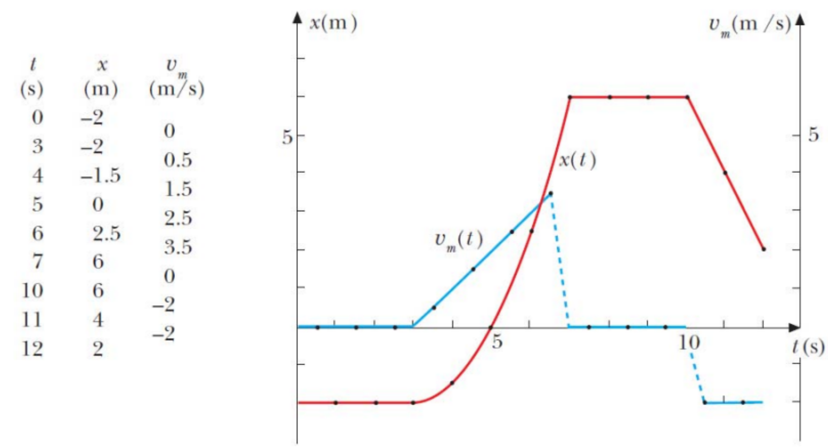


Figure 1: Grafico spazio-tempo

0.1.1 Velocità media

Supponiamo che all'istante $t = t_1$ il punto si trovi nella posizione x_1 e all'istante $t = t_2$ nella posizione x_2. La velocità media v_m del punto è definita come il rapporto tra la variazione di spazio e l'intervallo di tempo in cui si è verificata la variazione di spazio.

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_F - x_I}{t_F - t_I}$$

La velocità media dà un'idea della rapidità con cui si muove il punto in un certo intervallo di tempo, ma non ci fornisce altre informazioni.

0.1.2 Velocità istantanea

Per individuare meglio le variazioni della funzione $x(t)$ si aumenta il numero delle misurazioni, riducendo l'intervallo di tempo. Si divide l'intervallo di spazio Δx in tanti intervalli di spazio Δx_n e l'intervallo di tempo Δt in tanti intervalli di tempo Δt_n. Le corrispondenti velocità medie sono $v_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$; questo processo può essere svolto per intervalli di tempo sempre più piccoli, fino a giungere a un intervallo di tempo infinitesimo $\Delta t \to 0$.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocità istantanea è una variazione piccolissima variazione di spazio in un piccolissimo intervallo di tempo.
Possiamo risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ se conosciamo la dipendenza dal tempo della velocità istantanea $v(t)$. Se il punto si trova nella posizione x al tempo t e nella posizione $x + dx$ al tempo $t + dt$, lo spostamento

infinitesimo dx è uguale al prodotto della velocità istantanea per l'intervallo di tempo infinitesimo dt:

$$dx = v(t) \cdot dt \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt \implies x(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$$

0.1.3 Due punti in moto sullo stesso asse

Due punti materiali si trovano nell'istante iniziale $t = 0$ sullo stesso asse x, rispettivamente nella posizione x_1 con velocità v_1 e nella posizione $x_2 > x_1$ con velocità v_2. Il moto dei punti è uniforme. Discutere quali sono le situazioni in cui i punti ad un certo istante si urtano e determinare dove e quando si urtano.
Moto rettilineo uniforme $\iff$ velocità costante.

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v \cdot dt \implies \int_{0}^{t_0} dx = \int_{0}^{t_0} v(t) \cdot dt$$

$$x(t_0) - x(0) = \int_{0}^{t_0} v(t) \cdot dt \implies x(t_0) - x(0) = \int_{0}^{t_0} v \cdot dt \implies x(t_0) - x(0) = v_0(t_0 - 0) \implies x(t_0) = v_0 \cdot t_0$$

$$x_1(t) = v_1 \cdot t \quad x_2(t) = v_2 \cdot t + x_2(0)$$

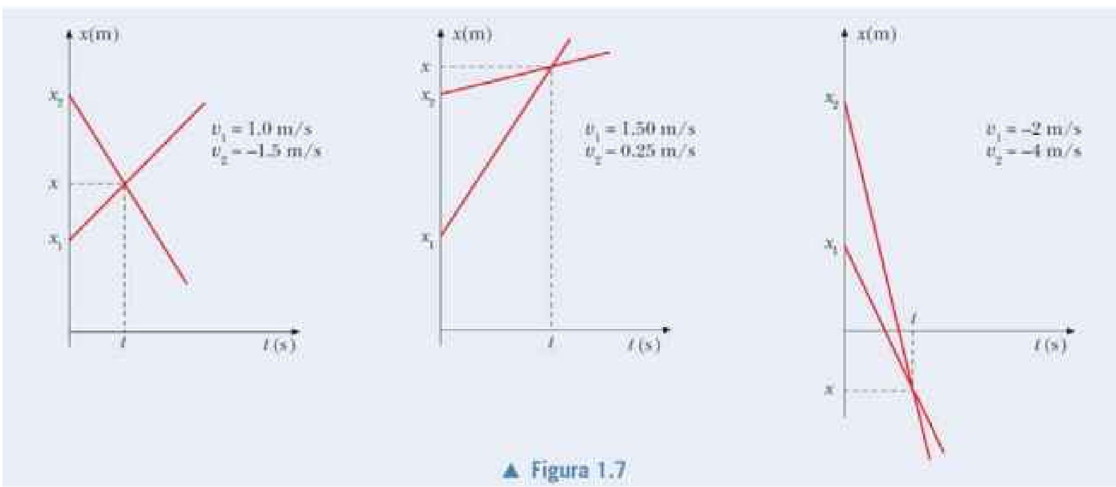


Figure 2: Esempi di grafici di due punti in moto sullo stesso asse

0.2 Accelerazione nel moto rettilineo

Si definisce accelerazione e si indica con $\bar{a}$ il rapporto tra la velocità in un certo istante e l'intervallo di tempo in cui si è verificata la variazione di velocità.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \implies v = \frac{dx}{dt} \implies a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Anche quando la velocità diminuisce si ha un'accelerazione, ma negativa.
Se conosco l'accelerazione posso calcolare la velocità.

$$\frac{dv}{dt} = a \implies \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{0}^{t_1} a \cdot dt \implies v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t) \cdot dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt$$

0.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Moto rettilineo uniformemente accelerato $\iff$ accelerazione costante.
Le equazioni del **moto rettilineo uniformemente accelerato** sono:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a \cdot t \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

$$dv = adt \implies \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \implies v - v_0 = a \int_0^t dt = a \cdot t \implies v = v_0 + a \cdot t$$

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v \cdot dt \implies dx = [v_0 + a(t - t_0)]dt \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0) dt$$

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

0.3.1 Esercizio

Un'automobile è in grado di passare dalla quiete alla velocità di $100 \frac{km}{h}$ in t secondi, muovendosi con moto uniformemente accelerato. Esprimere il valore dell'accelerazione e calcolarlo per $t = t1 = 5s$ e per $t = t2 = 8s$. Quanto vale lo spazio percorso nei due casi? E la velocità media?

Risoluzione:

$v = at \implies a = \dfrac{v_f}{t}$

$v_f = 100 \dfrac{km}{h} = 27.78 \dfrac{m}{s}$

$a = \dfrac{27.78 \frac{m}{s}}{5s} = 5.56 \dfrac{m}{s^2}$

$a_2 = \dfrac{27.78 \frac{m}{s}}{8s} = 3.47 \dfrac{m}{s^2}$

$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$

$\implies x_1 = 0 + 0 + \dfrac{1}{2} \cdot 5.56 \dfrac{m}{s^2} \cdot 5^2 s^2 = 69.5m$

$\implies x_2 = 0 + 0 + \dfrac{1}{2} \cdot 3.47 \dfrac{m}{s^2} \cdot 8^2 s^2 = 111m$

$\bar{v}_{m_1} = \dfrac{69.5m}{5s} = 13.9 \dfrac{m}{s}$

$\bar{v}_{m_2} = \dfrac{111m}{8s} = 13.9 \dfrac{m}{s}$

0.3.2 Esercizio accelerazione negativa

Un punto materiale parte dall'origine con velocità iniziale v_0 positiva ed è sottoposto ad un'accelerazione negativa – a costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo, l'istante t_1 in cui si ferma, l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine e la velocità che ha per $t = t_2$.

$v = v_0 + at \implies v_0 + at,\ a < 0,\ v_0 > 0$

$v_0 + at = 0 \implies t_1 = \dfrac{-v_0}{a}$

$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \implies x_1 = v_0 \cdot t_1 + \dfrac{1}{2}at_1^2 = \dfrac{-v_0^2}{a} + \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{v_0^2}{a^2} = \dfrac{-v_0^2}{2a}$

Ora calcoliamo quando il punto ripassa per l'origine $v_0 + \frac{1}{2}at^2 = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t_2 = \dfrac{2v_0}{-a} \end{cases}$

Velocità in t_2 $\ v_2 = v_0 + at_2 = v_0 - 2v_0 = -v_0$

1 Valori Medi

1.1 Valore medio di una funzione

$$< f(t) >= \frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

Nel caso della funzione sin, la media su un periodo è nulla:

$$< \sin(t) >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Lo stesso si ottiene per il coseno, ed è evidente, basta osservare il grafico; in un semiperiodo la funzione è positiva, nell'altro è negativa e la loro somma è nulla.
E' diversa la situazione per la funzione $\sin^2$ e $\cos^2$, funzioni che hanno come periodo π, che essendo sempre positive non possono aver valore medio nullo. Osserviamo che:

$$\int_0^\pi (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$$

pertanto

$$\int_0^\pi \int^2(\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos^2(\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$$

1.1.1 Esercizio 1.4 (compito)

2 Moto verticale di un corpo

Un corpo in caduta libera è un corpo che cade sotto l'azione della forza di gravità.

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} v = v_0 - g \cdot t \\ x = x_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$0 = h + v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \implies \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

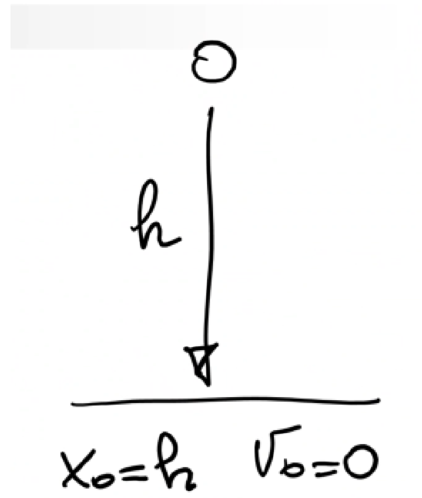


Figure 3: Esercizio 1.6

2.0.1 Esercizio 1.6

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante $t = 0$ con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante $t = t_0 > 0$, con velocità iniziale v_0: riuscirà a raggiungere il primo punto?

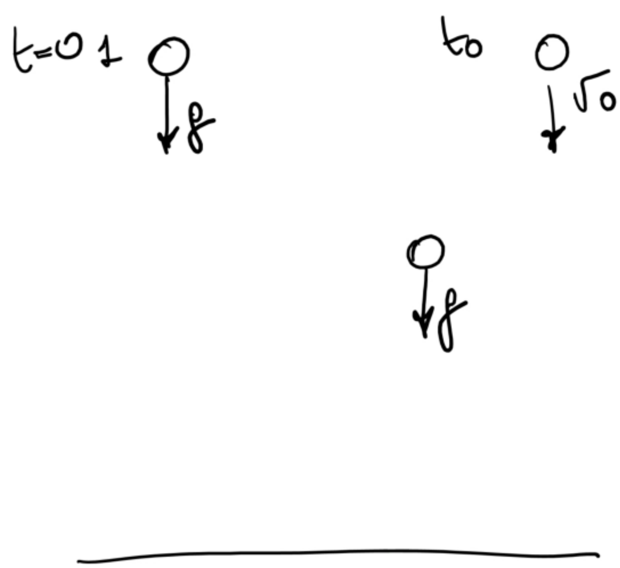


Figure 4: Esercizio 1.6

$x_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$ *perchè abbiamo considerato il punto di partenza h come l'origine*

$x_2(t) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ *perchè il secondo corpo viene lasciato cadere in un secondo istante* t_0

si incontrano a $\bar{t} = x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) \implies \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0(\bar{t} - t_0) + \frac{1}{2}g(\bar{t} - t_0)^2$

$\bar{t} = \frac{t_0}{2}\left(1 + \frac{v_0}{v_0 - gt_0}\right)$

3 Moto Armonico

3.1 Moto armonico semplice

Un corpo si muove di moto armonico se la sua posizione in funzione del tempo è descritta da:

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi t)$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Periodo della funzione: quale è il valore di $t : x(t) = x(t + T)$?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \textit{ è il periodo}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \textit{ è la pulsazione angolare}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = x(t + T) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\omega 2\pi}{\omega} + \phi)$$

La frequenza del moto misura il numero di cicli che si compiono in un secondo:

$$f,\ \nu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \textit{ è l'inverso del periodo e si misura in } s^{-1} \textit{ o } Hz$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathbf{A} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \mathbf{t} + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\mathbf{A} \cdot \omega^{\mathbf{2}} \cdot \sin(\omega \mathbf{t} + \phi)$$

oppure

$$a = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$$\int_{x_0}^{x} -\omega^2 x dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \implies -\omega^2[\frac{1}{2}x^2]_{x_0}^{x}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2\omega^2(x - x_0)$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad t = 0 \quad x(0) = A\sin(\phi)$
$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad t = 0 \quad v(0) = A\omega\cos(\phi)$
In base alla velocità iniziale a alla posizione iniziale possiamo determinare ϕ: $x(0) = x_0 = A$
$v(0) = 0 \implies \begin{cases} A\sin(\phi) = A \\ A\omega\cos(\phi) = 0 \end{cases} \implies \phi = \frac{\pi}{2}$ Omega invece è legato a come è impostato il sistema.

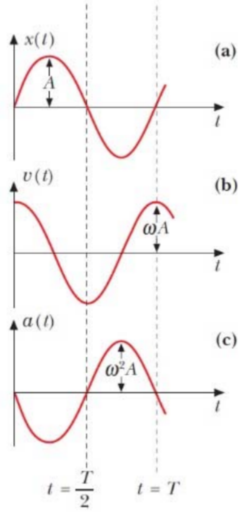
4 Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv[x(t)]}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

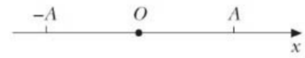
$$\implies \int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \implies \int_{x_0}^{x} adx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

4.0.1 Un particolare moto vario esempio 1.7

Un punto materiale risente, lungo l'asse x positivo, della seguente accelerazione: $a = 0 per 0 \leq x \leq x0$, a = – k/x 2 per x ¿ x0. Il punto viene lanciato dall'origine lungo il verso positivo dell'asse con velocità iniziale v0. Calcolare in quale



▲ **Figura 1.13** Diagramma dello spostamento (*a*), della velocità (*b*) e dell'accelerazione (*c*) di un moto armonico semplice.



▲ **Figura 1.12** Ampiezza dell'oscillazione di un moto armonico semplice.

Figure 5: Moto armonico

posizione il punto si ferma e discutere il risultato.

$$\int_{x_0}^{x} adc = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \quad a = \; costante \quad a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$g(x - h) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v(x) = \sqrt{2g(x - h) + v_0^2}$$