Fisica Sperimentale

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Misure

1.1 Unità di misura-grandezze fondamentali

1. **Lunghezza (m)**: Misura l'estensione di un oggetto in una direzione specifica.
2. **Massa (kg)**: Misura la quantità di materia in un corpo.
3. **Tempo (s)**: Misura la durata di un evento o intervallo tra due istanti.
4. **Densità ($\frac{kg}{m^3}$)**: Misura la quantità di massa contenuta in un certo volume.
5. **Corrente elettrica (A)**: Misura la quantità di carica elettrica che fluisce attraverso un circuito in un certo tempo.

Il sistema che ha definito le precedenti unità di misura come fondamentali è il **Sistema Internazionale (SI) (MKSA)**.

1.2 Velocità

$$\text{Velocità} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}}$$

L'unità di misura della velocità è il $\frac{m}{s}$ ed è detta unità di misura derivata in quanto è ottenuta da unità di misura fondamentali.
La fisica è fatta di misurazioni, ma le misurazioni comportano errori e quindi è necessario definire la precisione di una misurazione.

1.3 Notazione scientifica

Fondamentale per esprimere numeri molto grandi o molto piccoli.

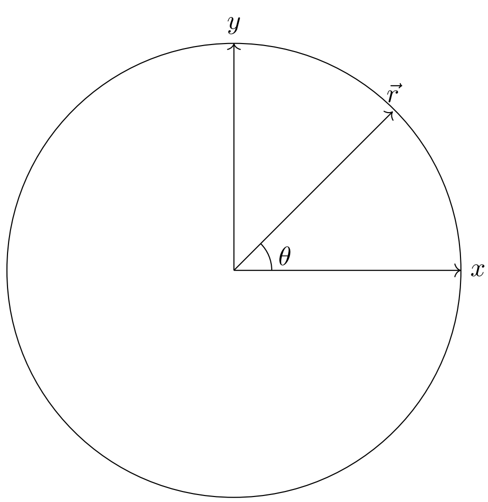
1.4 Multipli e sottomultipli

- 10^15 = Peta (P)
- 10^12 = Tera (T)
- 10^9 = Giga (G)
- 10^6 = Mega (M)
- 10^3 = Kilo (K)
- 10^{-3} = Milli (m)
- 10^{-6} = Micro (μ)
- 10^{-9} = Nano (n)
- 10^{-12} = Pico (p)
- 10^{-15} = Femto (f)
- 10^{-18} = Atto (a)

1.5 Grandezze fisiche

Grandezza	**Simbolo**	**Unità di misura**	**Dimensioni**	**Unità SI**
Velocità	$\bar{v}$	$\frac{m}{s}$	$L \cdot T^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
Accelerazione	$\bar{a}$	$\frac{m}{s^2}$	$L \cdot T^{-2}$	$m \cdot s^{-2}$
Accelerazione angolare	α	$\frac{rad}{s^2}$	T^{-2}	$rad \cdot s^{-2}$
Densità	ρ	$\frac{kg}{m^3}$	$M \cdot L^{-3}$	$kg \cdot m^{-3}$
Lunghezza	L	m	L	m
Massa	m	kg	M	kg
Tempo	t	s	T	s
Energia	$E,\ U,\ K$	J	$\dfrac{M \cdot L^2}{T^2}$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Frequenza	f	Hz	T^{-1}	s^{-1}
Forza	$\bar{F}$	N	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Volume	V	m^3	L^3	m^3

1.6 Angolo



Gli angoli non hanno dimensioni, si misurano in radianti.

$$\theta = \frac{L}{R} \implies \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} \implies \text{Radianti}$$

1.7 Densità di massa

La densità è il rapporto tra la massa e il volume.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Per definizione la densità dell'acqua è $1 \frac{g}{cm^3} = 1000 \frac{kg}{m^3}$.

1.7.1 Esercizio

Quale è la massa in chilogrammi di due litri di elio, dove $1.00l = 1.00 \cdot 10^3 cm^3$ e la densità dell'elio è $0.1785 \frac{kg}{m^3}$?

$$\rho = \frac{m}{V} \implies m = \rho \cdot V \implies m = 0.1785 \frac{kg}{m^3} \cdot 2 \cdot 10^3 cm^3 \implies 10^{-6} m^3 = 3.57 \cdot 10^{-4} kg$$

2 Variabili cinematiche

La **traiettoria** di un punto P in moto, è in generale una *linea curva*.

2.1 Posizione

Dato un sistema di riferimento cartesiano con origine in O e assi x, y, z, la posizione di un punto P è definita da un vettore $\bar{r}$ che congiunge l'origine con un punto P. Dato che il punto P si muove, la posizione è una funzione del tempo:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

r può essere espresso in forma cartesiana attraverso le sue componenti x, y, z:

$$\bar{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z$$

Conoscere $r(t)$ signifca conoscere $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$: le leggi orarie.

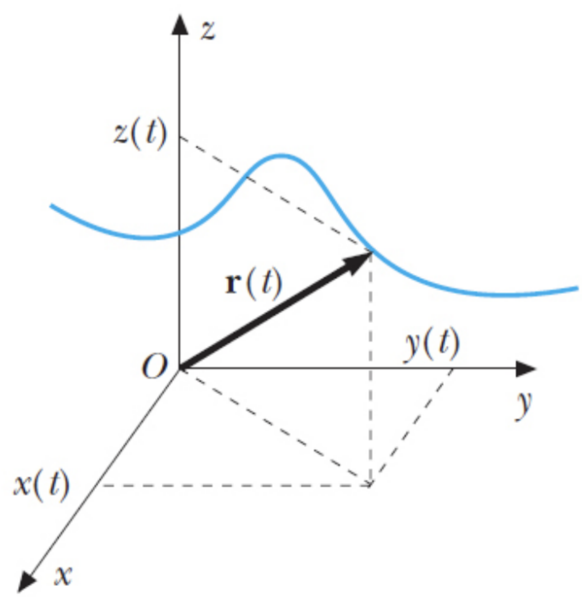


Figure 1: Traiettoria di un punto

$\bar{r}(t)$ o $\overline{OP}$ vettore posizione o raggio vettore.

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z \quad \textit{Legge oraria}$$

2.2 Velocità

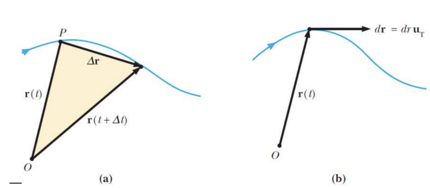
Consideriamo due posizioni occupate dal punto P in due istanti di tempo diversi t e $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$. Il vettore:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

è il **vettore spostamento** del punto P nell'intervallo di tempo Δt.
La velocità media è definita come:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

La velocità media è un vettore parallelo allo spostamento, ed esprime la rapidità con cui il punto P si sposta da un punto all'altro. Essa dà informazioni complessive senza fornire nessuna indicazione di come avviene il moto nell'intervallo di tempo Δt.
Per ovviare a questa indeterminazione si può ridurre l'intervallo di tempo Δt fino a renderlo infinitesimo, ottenendo la



◀ Figura 1.2 Spostamento finito (a) e spostamento infinitesimo (b) di un punto.

velocità istantanea:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

La velocità è anch'essa un vettore e rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t.

Osserviamo che (figura 8.2) al limite l'incremento $d\bar{r}$ infinitesimo del raggio vettore risulta in *direzione tangente alla traiettoria nel punto* P.

La velocità è sempre tangente alla traiettoria:

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} \quad \textit{Velocità media}$$

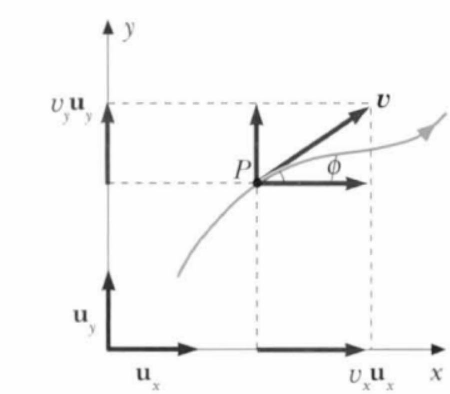
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \textit{Derivata del vettore posizione}$$

2.3 Componenti cartesiane della velocità

Poichè $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$:

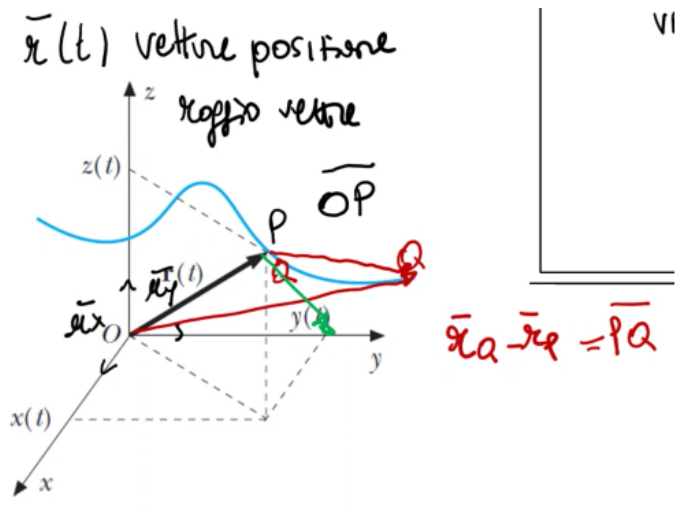
$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z = v_x\bar{u}_x + v_y\bar{u}_y + v_z\bar{u}_z$$

La velocità è determinata se sono note le derivare delle tre coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.



▲ Figura 1.3 Coordinate cartesiane del vettore velocità nel caso bidimensionale.

Per esempio posso ottenere $v_x = v \cos\phi_x$. Nel caso bidimensionale è necessario un solo angolo. Lo spostamento può essere trovato come differenza tra il vettore di posizione finale e quello iniziale:



$$\overline{r_q} - \overline{r_p} = \overline{PQ}$$

Se conosco la velocità posso ricavare il vettore posizione:

$$dr = \bar{v}dt \implies \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} dr = \int_{t_0}^{t} \bar{v}dt = \bar{r} - \bar{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{v}dt \implies$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v_x} dt \bar{u}_x \dots$$

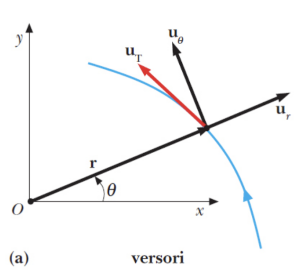
2.4 Accelerazione

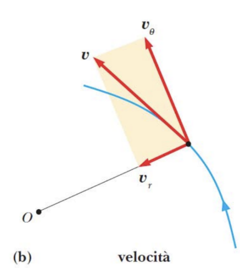
2.5 Componenti cartesiane dell'accelerazione

2.6 Coordinate polari

Nel moto su di un piano la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani, le coordinate cartesiane $x(t)$, $y(t)$ oppure le coordinate polari $r(t)$, $\theta(t)$. Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$





▲ Figura 1.4 Sistema di coordinate polari in un piano (*a*) e componenti polari del vettore velocità (*b*).

2.7 Componenti polari della velocità

I vettori $\bar{u}_r$ e $\bar{u}_\theta$, sono versori della direzione di $\bar{r}$ e versore ortogonale alla stessa: si noti che questi versori cambiano verso durante il moto.
Il raggio vettore $\bar{r}$ può essere espresso come $r\bar{r}_r$ e pertanto:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} \implies \bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

$$u_\theta = \textit{ versore trasverso}$$

$$u_r = \textit{ versore radiale}$$

3 Moto

Il moto è il movimento dei corpi.

3.1 Moto Rettilineo

Il moto più semplice è il moto rettilineo, ovvero il moto lungo una retta. Inizialmente studiamo il moto di un corpo puntiforme. Quando si parla di moto dobbiamo definire un'origine degli spazi e orientare la retta, in modo da determinare il verso positivo e negativo.
Effettuando delle misurazioni si ottiene un diagramma orario e successivamente si può ottenere il grafico spazio-tempo.

t (s)	x (m)	v_m (m/s)
0	−2	
3	−2	0
4	−1.5	0.5
5	0	1.5
6	2.5	2.5
7	6	3.5
10	6	0
11	4	−2
12	2	−2

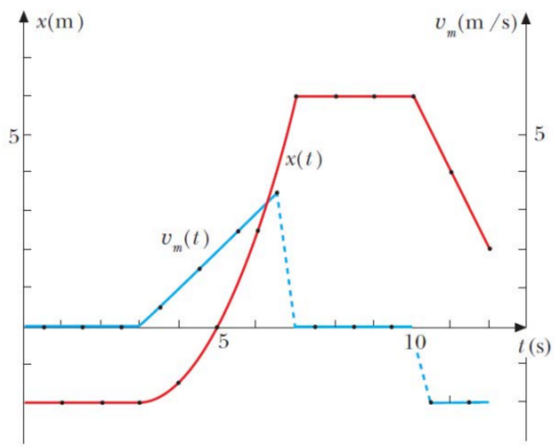


Figure 2: Grafico spazio-tempo

3.1.1 Velocità media

Supponiamo che all'istante $t = t_1$ il punto si trovi nella posizione x_1 e all'istante $t = t_2$ nella posizione x_2. La velocità media v_m del punto è definita come il rapporto tra la variazione di spazio e l'intervallo di tempo in cui si è verificata la variazione di spazio.

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_F - x_I}{t_F - t_I}$$

La velocità media dà un'idea della rapidità con cui si muove il punto in un certo intervallo di tempo, ma non ci fornisce altre informazioni.

3.1.2 Velocità istantanea

Per individuare meglio le variazioni della funzione $x(t)$ si aumenta il numero delle misurazioni, riducendo l'intervallo di tempo. Si divide l'intervallo di spazio Δx in tanti intervalli di spazio Δx_n e l'intervallo di tempo Δt in tanti intervalli di tempo Δt_n. Le corrispondenti velocità medie sono $v_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$; questo processo può essere svolto per intervalli di tempo sempre più piccoli, fino a giungere a un intervallo di tempo infinitesimo $\Delta t \to 0$.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocità istantanea è una variazione piccolissima variazione di spazio in un piccolissimo intervallo di tempo.
Possiamo risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ se conosciamo la dipendenza dal tempo della velocità

istantanea $v(t)$. Se il punto si trova nella posizione x al tempo t e nella posizione $x + dx$ al tempo $t + dt$, lo spostamento infinitesimo dx è uguale al prodotto della velocità istantanea per l'intervallo di tempo infinitesimo dt:

$$dx = v(t) \cdot dt \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt \implies x(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$$

3.1.3 Due punti in moto sullo stesso asse

Due punti materiali si trovano nell'istante iniziale $t = 0$ sullo stesso asse x, rispettivamente nella posizione x_1 con velocità v_1 e nella posizione $x_2 > x_1$ con velocità v_2. Il moto dei punti è uniforme. Discutere quali sono le situazioni in cui i punti ad un certo istante si urtano e determinare dove e quando si urtano.
Moto rettilineo uniforme $\iff$ velocità costante.

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v \cdot dt \implies \int_{0}^{t_0} dx = \int_{0}^{t_0} v(t) \cdot dt$$

$$x(t_0) - x(0) = \int_{0}^{t_0} v(t) \cdot dt \implies x(t_0) - x(0) = \int_{0}^{t_0} v \cdot dt \implies x(t_0) - x(0) = v_0(t_0 - 0) \implies x(t_0) = v_0 \cdot t_0$$

$$x_1(t) = v_1 \cdot t \quad x_2(t) = v_2 \cdot t + x_2(0)$$

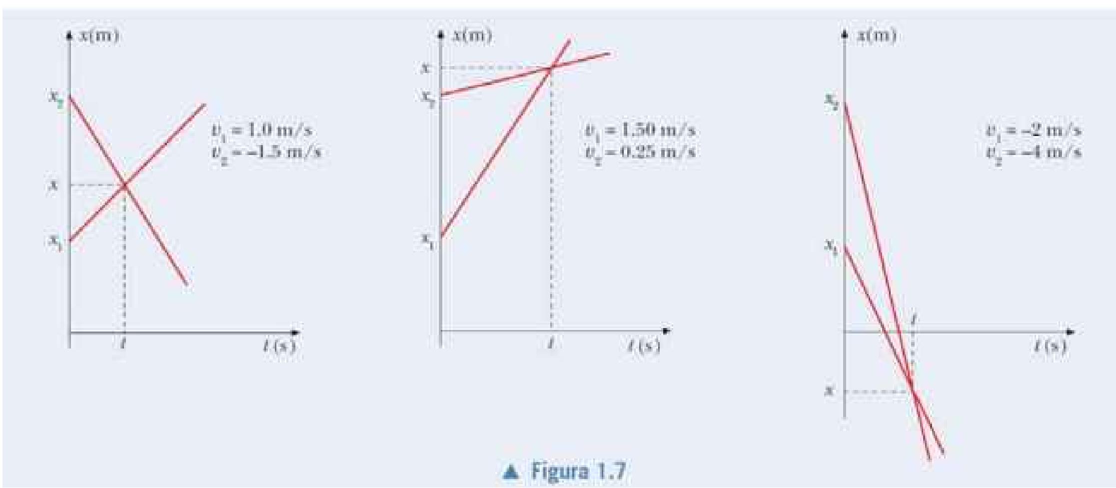


Figure 3: Esempi di grafici di due punti in moto sullo stesso asse

3.2 Accelerazione nel moto rettilineo

Si definisce accelerazione e si indica con $\bar{a}$ il rapporto tra la velocità in un certo istante e l'intervallo di tempo in cui si è verificata la variazione di velocità.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \implies v = \frac{dx}{dt} \implies a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Anche quando la velocità diminuisce si ha un'accelerazione, ma negativa.
Se conosco l'accelerazione posso calcolare la velocità.

$$\frac{dv}{dt} = a \implies \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{0}^{t_1} a \cdot dt \implies v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t) \cdot dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt$$

3.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Moto rettilineo uniformemente accelerato $\iff$ accelerazione costante.
Le equazioni del **moto rettilineo uniformemente accelerato** sono:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a \cdot t \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

$$dv = adt \implies \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt \implies v - v_0 = a \int_{0}^{t} dt = a \cdot t \implies v = v_0 + a \cdot t$$

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v \cdot dt \implies dx = [v_0 + a(t - t_0)]dt \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt$$

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

3.3.1 Esercizio

Un'automobile è in grado di passare dalla quiete alla velocità di $100 \frac{km}{h}$ in t secondi, muovendosi con moto uniformemente accelerato. Esprimere il valore dell'accelerazione e calcolarlo per $t = t1 = 5s$ e per $t = t2 = 8s$. Quanto vale lo spazio percorso nei due casi? E la velocità media?

Risoluzione:
$v = at \implies a = \dfrac{v_f}{t}$

$v_f = 100 \dfrac{km}{h} = 27.78 \dfrac{m}{s}$

$a = \dfrac{27.78 \frac{m}{s}}{5s} = 5.56 \dfrac{m}{s^2}$

$a_2 = \dfrac{27.78 \frac{m}{s}}{8s} = 3.47 \dfrac{m}{s^2}$

$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$

$\implies x_1 = 0 + 0 + \dfrac{1}{2} \cdot 5.56 \dfrac{m}{s^2} \cdot 5^2 s^2 = 69.5m$

$\implies x_2 = 0 + 0 + \dfrac{1}{2} \cdot 3.47 \dfrac{m}{s^2} \cdot 8^2 s^2 = 111m$

$\bar{v}_{m_1} = \dfrac{69.5m}{5s} = 13.9 \dfrac{m}{s}$

$\bar{v}_{m_2} = \dfrac{111m}{8s} = 13.9 \dfrac{m}{s}$

3.3.2 Esercizio accelerazione negativa

Un punto materiale parte dall'origine con velocità iniziale v_0 positiva ed è sottoposto ad un'accelerazione negativa – a costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo, l'istante t_1 in cui si ferma, l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine e la velocità che ha per $t = t_2$.

$v = v_0 + at \implies v_0 + at,\ a < 0,\ v_0 > 0$

$v_0 + at = 0 \implies t_1 = \dfrac{-v_0}{a}$

$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \implies x_1 = v_0 \cdot t_1 + \dfrac{1}{2}at_1^2 = \dfrac{-v_0^2}{a} + \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{v_0^2}{a^2} = \dfrac{-v_0^2}{2a}$

Ora calcoliamo quando il punto ripassa per l'origine $v_0 + \frac{1}{2}at^2 = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t_2 = \dfrac{2v_0}{-a} \end{cases}$

Velocità in t_2 $\ v_2 = v_0 + at_2 = v_0 - 2v_0 = -v_0$

4 Valori Medi

4.1 Valore medio di una funzione

$$< f(t) >= \frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

Nel caso della funzione sin, la media su un periodo è nulla:

$$< \sin(t) >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Lo stesso si ottiene per il coseno, ed è evidente, basta osservare il grafico; in un semiperiodo la funzione è positiva, nell'altro è negativa e la loro somma è nulla.
E' diversa la situazione per la funzione $\sin^2$ e $\cos^2$, funzioni che hanno come periodo π, che essendo sempre positive non possono aver valore medio nullo. Osserviamo che:

$$\int_0^{\pi} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))d\theta = \int_0^{\pi} 1d\theta = \pi$$

pertanto

$$\int_0^{\pi} \int^2 (\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2(\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$$

4.1.1 Esercizio 1.4 (compito)

5 Moto verticale di un corpo

Un corpo in caduta libera è un corpo che cade sotto l'azione della forza di gravità.

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} v = v_0 - g \cdot t \\ x = x_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

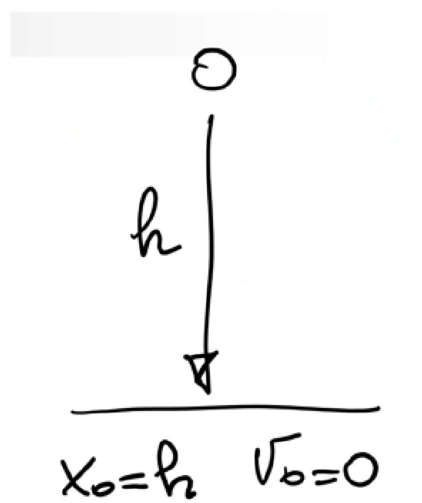


Figure 4: Esercizio 1.6

$$0 = h + v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \implies \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

5.0.1 Esercizio 1.6

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante $t = 0$ con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante $t = t_0 > 0$, con velocità iniziale v_0: riuscirà a raggiungere il primo punto?

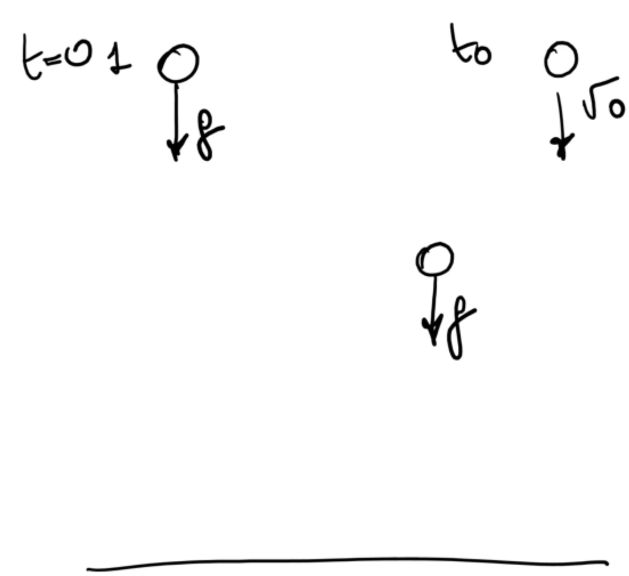


Figure 5: Esercizio 1.6

$x_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$ *perchè abbiamo considerato il punto di partenza h come l'origine*

$x_2(t) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ *perchè il secondo corpo viene lasciato cadere in un secondo istante* t_0

si incontrano a $\bar{t} = x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) \implies \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0(\bar{t} - t_0) + \frac{1}{2}g(\bar{t} - t_0)^2$

$\bar{t} = \frac{t_0}{2}\left(1 + \frac{v_0}{v_0 - gt_0}\right)$

6 Moto Armonico

6.1 Moto armonico semplice

Un corpo si muove di moto armonico se la sua posizione in funzione del tempo è descritta da:

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi t)$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Periodo della funzione: quale è il valore di $t : x(t) = x(t+T)$?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \textit{ è il periodo}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \textit{ è la pulsazione angolare}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = x(t+T) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\omega 2\pi}{\omega} + \phi)$$

La frequenza del moto misura il numero di cicli che si compiono in un secondo:

$$f,\ \nu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \textit{ è l'inverso del periodo e si misura in } s^{-1} \textit{ o } Hz$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathbf{A} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \mathbf{t} + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\mathbf{A} \cdot \omega^{\mathbf{2}} \cdot \sin(\omega \mathbf{t} + \phi)$$

oppure

$$a = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$$\int_{x_0}^{x} -\omega^2 x dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \implies -\omega^2[\frac{1}{2}x^2]_{x_0}^{x}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2\omega^2(x - x_0)$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad t = 0 \quad x(0) = A\sin(\phi)$
$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad t = 0 \quad v(0) = A\omega\cos(\phi)$
In base alla velocità iniziale a alla posizione iniziale possiamo determinare ϕ: $x(0) = x_0 = A$
$v(0) = 0 \implies \begin{cases} A\sin(\phi) = A \\ A\omega\cos(\phi) = 0 \end{cases} \implies \phi = \frac{\pi}{2}$ Omega invece è legato a come è impostato il sistema.

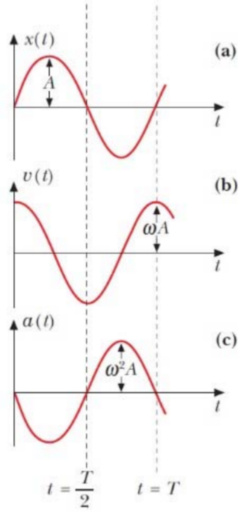
7 Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv[x(t)]}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

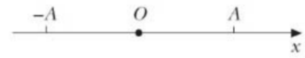
$$\implies \int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \implies \int_{x_0}^{x} adx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

7.0.1 Un particolare moto vario esempio 1.7

Un punto materiale risente, lungo l'asse x positivo, della seguente accelerazione: $a = 0 per 0 \leq x \leq x0$, a = – k/x 2 per x ¿ x0. Il punto viene lanciato dall'origine lungo il verso positivo dell'asse con velocità iniziale v0. Calcolare in quale



▲ Figura 1.13 Diagramma dello spostamento (a), della velocità (b) e dell'accelerazione (c) di un moto armonico semplice.



▲ Figura 1.12 Ampiezza dell'oscillazione di un moto armonico semplice.

Figure 6: Moto armonico

posizione il punto si ferma e discutere il risultato.

$$\int_{x_0}^{x} adc = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \quad a = \ costante \quad a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$g(x - h) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v(x) = \sqrt{2g(x - h) + v_0^2}$$

8 Variabili cinematiche

La **traiettoria** di un punto P in moto, è in generale una *linea curva.*

8.1 Posizione

Dato un sistema di riferimento cartesiano con origine in O e assi x, y, z, la posizione di un punto P è definita da un vettore $\bar{r}$ che congiunge l'origine con un punto P. Dato che il punto P si muove, la posizione è una funzione del tempo:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

r può essere espresso in forma cartesiana attraverso le sue componenti x, y, z:

$$\bar{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z$$

Conoscere $r(t)$ significa conoscere $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$: le leggi orarie.

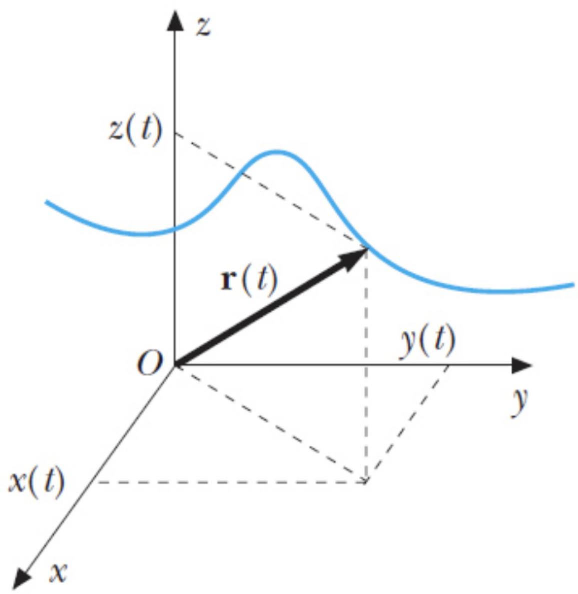


Figure 7: Traiettoria di un punto

$\bar{r}(t)$ o $\overline{OP}$ vettore posizione o raggio vettore.

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z \quad \textit{Legge oraria}$$

8.2 Velocità

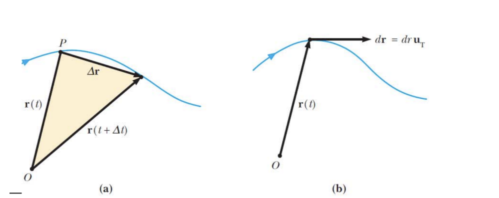
Consideriamo due posizioni occupate dal punto P in due istanti di tempo diversi t e $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r}$. Il vettore:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

è il **vettore spostamento** del punto P nell'intervallo di tempo Δt.
La velocità media è definita come:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

La velocità media è un vettore parallelo allo spostamento, ed esprime la rapidità con cui il punto P si sposta da un punto



◀ Figura 1.2 Spostamento finito (a) e spostamento infinitesimo (b) di un punto.

all'altro. Essa dà informazioni complessive senza fornire nessuna indicazione di come avviene il moto nell'intervallo di tempo Δt.
Per ovviare a questa indeterminazione si può ridurre l'intervallo di tempo Δt fino a renderlo infinitesimo, ottenendo la **velocità istantanea**:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

La velocità è anch'essa un vettore e rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t.

Osserviamo che (figura 8.2) al limite l'incremento $d\bar{r}$ infinitesimo del raggio vettore risulta in *direzione tangente alla traiettoria nel punto* P.

La velocità è sempre tangente alla traiettoria:

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} \quad \textit{Velocità media}$$

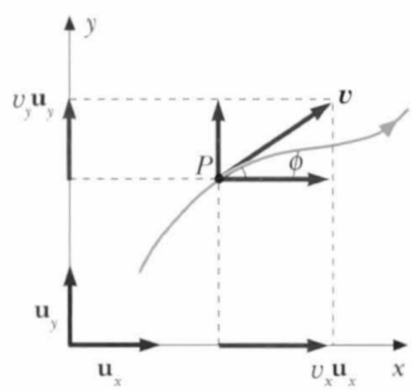
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \textit{Derivata del vettore posizione}$$

8.3 Componenti cartesiane della velocità

Poichè $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$:

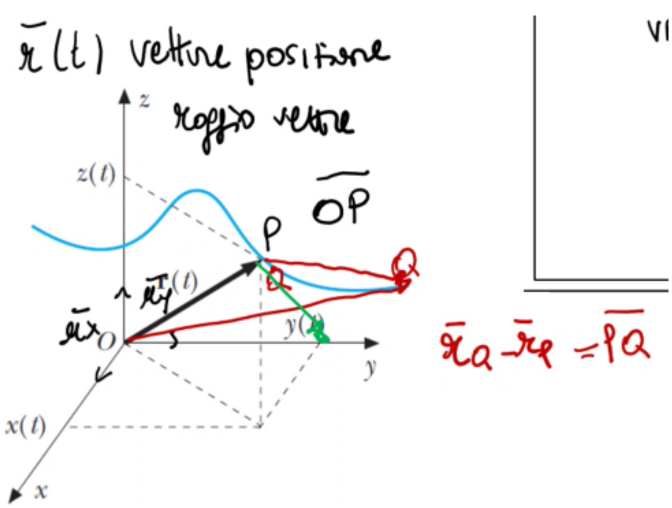
$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z = v_x\bar{u}_x + v_y\bar{u}_y + v_z\bar{u}_z$$

La velocità è determinata se sono note le derivare delle tre coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.



▲ **Figura 1.3** Coordinate cartesiane del vettore velocità nel caso bidimensionale.

Per esempio posso ottenere $v_x = v\cos\phi_x$. Nel caso bidimensionale è necessario un solo angolo. Lo spostamento può essere trovato come differenza tra il vettore di posizione finale e quello iniziale:



$$\overline{r_q} - \overline{r_p} = \overline{PQ}$$

Se conosco la velocità posso ricavare il vettore posizione:

$$dr = \bar{v}dt \implies \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} dr = \int_{t_0}^{t} \bar{v}dt = \bar{r} - \bar{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{v}dt \implies$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v_x} dt \bar{u}_x \dots$$

8.4 Accelerazione

8.5 Componenti cartesiane dell'accelerazione

8.6 Coordinate polari

Nel moto su di un piano la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani, le coordinate cartesiane $x(t)$, $y(t)$ oppure le coordinate polari $r(t)$, $\theta(t)$. Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

▲ Figura 1.4 Sistema di coordinate polari in un piano (*a*) e componenti polari del vettore velocità (*b*).

8.7 Componenti polari della velocità

I vettori $\bar{u}_r$ e $\bar{u}_\theta$, sono versori della direzione di $\bar{r}$ e versore ortogonale alla stessa: si noti che questi versori cambiano verso durante il moto.
Il raggio vettore $\bar{r}$ può essere espresso come $r\bar{r}_r$ e pertanto:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} \implies \bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

$$u_\theta = \textit{ versore trasverso}$$

$$u_r = \textit{ versore radiale}$$

9 Calcolo vettoriale

9.1 Grandezze scalari e vettoriali

Le grandezze scalari sono quelle che si possono rappresentare con un numero (temperatura, numero dei piedi), mentre quelle vettoriali sono grandezze che esprimono con tre numeri uno spostamento per esempio.

9.1.1 Richiami di Analisi

Differenziale:

$$df = f'(x)dx$$

Svilippi di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0) + \dots \quad \textit{che solitamente in fisica si rimuovo perchè piccolossimi}$$

Integrali doppi e equazioni differenziali.

9.2 Vettori

Quando si parla di vettori è importante indicare la **direzione** (la retta sulla quale ci si muove), il **verso** (la freccia) e il **modulo** (la lunghezza). Il vettore si chiama **applicato** se si indica la sua origine.

9.2.1 Operazioni con i vettori

- **Prodotto di un vettore per uno scalare**: stessa direzione, stesso verso e modulo moltiplicato per lo scalare. $\vec{a} = \lambda\vec{b} : \lambda \in \mathbb{R}$
- **Versore**: vettore che ha la stessa direzione e verso di un vettore $\vec{a}$ ma modulo 1. Si indica con $\bar{u}_a$
- **Vettore nullo**: vettore con modulo 0, di cui non si può dire né direzione né verso. Si può ottenere sommando un vettore con il suo opposto. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- **Vettore opposto**: vettore con la stessa direzione e verso ma modulo opposto. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- **Regola del parallelogramma (somma)**: se si sommano due vettori si può ottenere il vettore risultante disegnando un parallelogramma con i due vettori come lati.

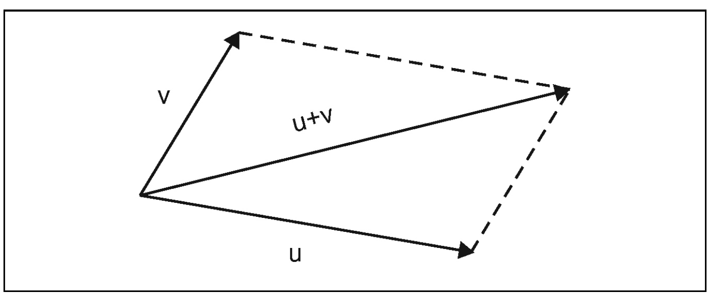


Figure 8: Regola del parallelogramma

9.2.2 Proprietà dei vettori

- **Commutativa**: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- **Differenza di vettori**: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Per sottrarre un vettore devo cambiare il verso del vettore che sto sottraendo.
- **Somma di più vettori**: vale la proprietà **associativa**. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- **?**: $\vec{a_1} = a_1 \cdot \bar{u}_a$, $\vec{a} = a_2 \cdot \bar{u}_{a_2}$, $\vec{a_1} + \vec{a_2} = (a_1 + a_2) \cdot \bar{u}_a$

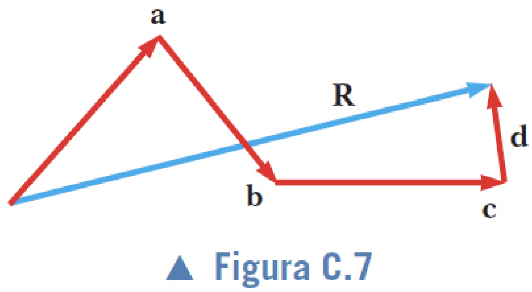


Figure 9: Somma di più vettori

9.2.3 Scomposizione di un vettore

Ho un vettore che non è applicato in nessun punto, ponendolo all'interno del piano cartesiano posso scomporlo.

$$\vec{v} = \vec{v}_{xy} + \vec{v}_z = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \cdot \bar{u}_x + v_y \cdot \bar{u}_y + v_z \cdot \bar{u}_z$$

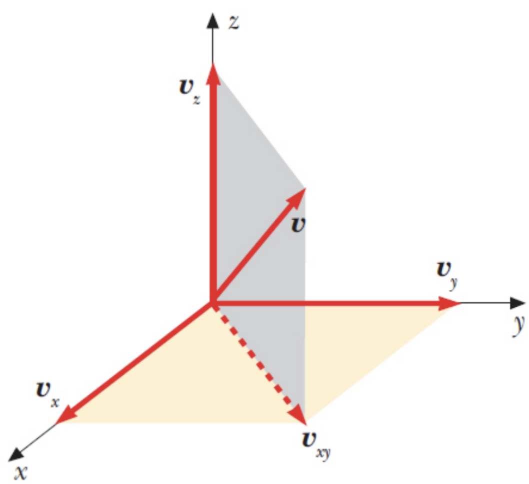


Figure 10: Scomposizione di un vettore

Il vettore iniziale viene scomposto in componenti e ottengo una scrittura cartesiana del vettore.

- **Vettore componente lungo l'asse** x: $\vec{v}_x$
- **Componente lungo l'asse** x: v_x

Una volta scomposto il vettore si può effettuare la somma dei vettori in maniera analitica. Per ciascuno ottengo le sue componenti cartesiane e successivamente sommo le componenti.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \cdot \bar{u}_x + a_y \cdot \bar{u}_y + a_z \cdot \bar{u}_z) + (b_x \cdot \bar{u}_x + b_y \cdot \bar{u}_y + b_z \cdot \bar{u}_z) = (a_x + b_x) \cdot \bar{u}_x + (a_y + b_y) \cdot \bar{u}_y + (a_z + b_z) \cdot \bar{u}_z$$

9.2.4 Prodotto scalare

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \ \textit{Scalare} \qquad |\vec{a}| = \ \textit{Modulo} = ab\cos(\theta)$$

Prodotto scalare tra due vettori:

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta)$$

Il prodotto scalare è nullo quando i due vettori sono perpendicolari, il $\cos(\theta)$ è 0.

1. **Proprietà commutativa**: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
2. $\vec{a} = \vec{b} \implies \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|^2$
3. La proprietà associativa non vale perchè il prodotto scalare è definito solo tra vettori.
4. **Proprietà distributiva**: $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
5. $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} \implies$ Teorema di Carnot.
6. $\vec{a} \bullet \vec{b} = (a_x \cdot \bar{u}_x + a_y \cdot \bar{u}_y + a_z \cdot \bar{u}_z) \bullet (b_x \cdot \bar{u}_x + b_y \cdot \bar{u}_y + b_z \cdot \bar{u}_z) = FINIRE$
7. $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \implies \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

9.2.5 Prodotto vettoriale

Il prodotto tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore che giace al piano perpendicolare individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|c| = |a||b|\sin(\theta)$$

Regola della mano destra oppure vite destrorsa.

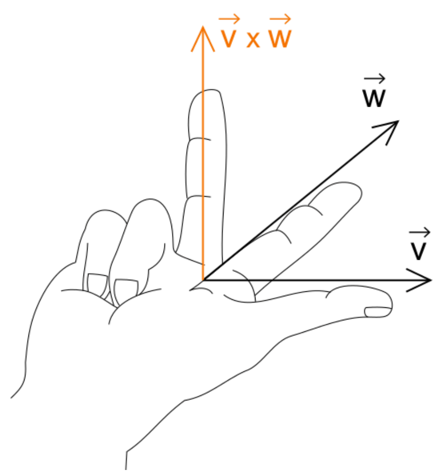


Figure 11: Regola della mano destra

Il prodotto vettoriale non è commutitativo. E' **anticommutativo**; il vettore risultante ha la stessa direzione e lo stesso modulo ma verso opposto.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Vale la **proprietà distributiva**.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Non vale la proprietà **associativa**.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$\star$ Vedi il prodotto vettoriale di versori.

9.3 Formuletta del profe

Il prodotto vettoriale si può calcolare utilizzando le matrici.

$$A = \vec{c} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\det A = \vec{c} = \bar{u}_x(-1)^2(a_y b_z - a_z b_y) + \bar{u}_y(-1)^3(a_x b_z - a_z b_x) + \bar{u}_z(-1)^4(a_x b_y - a_y b_x)$$

9.4 Derivata di un vettore

Per continuità possiamo definire la derivata di un vettore come la derivata a cui siamo abituati.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \textit{per gli scalari}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \textit{per i vettori}$$

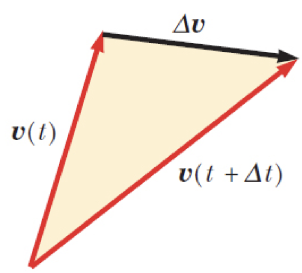


Figure 12: Derivata di un vettore

- $\frac{d(\vec{a}+\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}k\vec{a} = k\frac{d\vec{a}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(k\vec{a}) = \frac{dk}{dt}\vec{a} + k\frac{d\vec{a}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \bullet \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \frac{d\vec{b}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$
- se ho la scrittura cartesiana del vettore $\vec{a} = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$ allora $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\bar{u}_x + \frac{da_y}{dt}\bar{u}_y + \frac{da_z}{dt}\bar{u}_z$

9.5 Derivata di un versore

La derivata del versore è differente in quanto nel tempo solo la direzione e il verso cambiano, non il modulo.

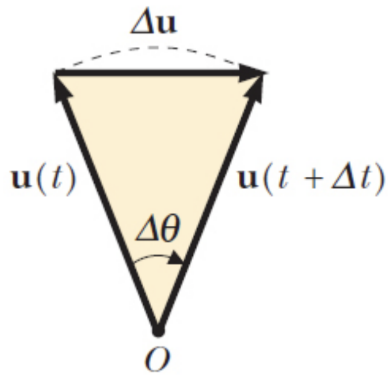


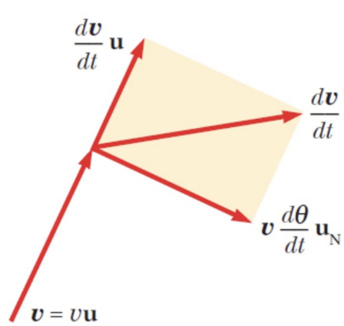
Figure 13: Derivata di un versore

$$\Delta\bar{u} = \bar{u}(t+\Delta t) - \bar{u}(t)$$

$$du = d\theta \cdot |u(t)|$$

$$d\bar{u} = d\theta \cdot \bar{u}_n$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{u}_n$$



$$\vec{v} = v \cdot \bar{u} \implies \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\bar{u})}{dt} + v\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d(v\bar{u})}{dt} + v\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_n$$

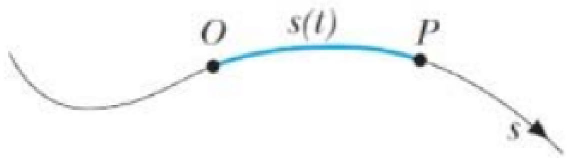
$$|\frac{d\vec{v}}{dt}| = \sqrt{(\frac{dv}{)}dt)^2 + (\frac{vd\theta}{dt})^2}$$

9.6

10 Moti su traiettoria curvilinea

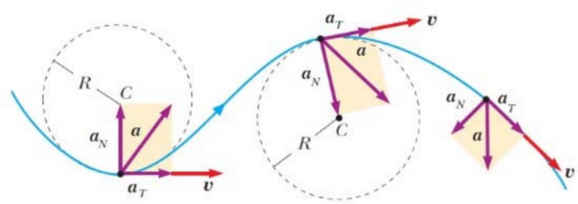
10.1 Accelerazione tangenziale e normale

Quando conosco la traiettoria conosco anche il versore tangente e il versore normale. Il versore tangente è diretto nella direzione della velocità e il versore normale è diretto verso la concavità della traiettoria. $s(t)$ è la posizione P, $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds\bar{u}_t}{dt} = \frac{ds}{dt}\bar{u}_t = v_s\bar{u}_t$ dove v_s è la velocità scalare.



▲ Figura 1.14 Ascissa curvilinea del punto P (O è l'origine fissata sulla traiettoria).

Figure 14: $d\bar{r} = ds \cdot \bar{u}_t$

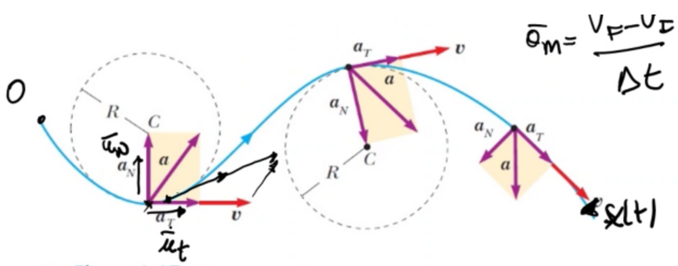


▶ Figura 1.15 Componenti dell'accelerazione di un punto lungo una traiettoria.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\bar{a}_m = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_i}{\Delta t}$$

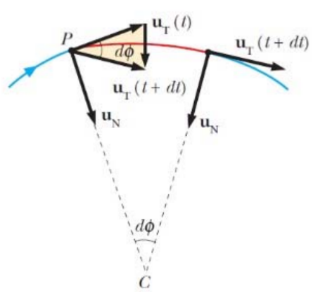
$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\bar{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\bar{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\bar{u}_z = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$$



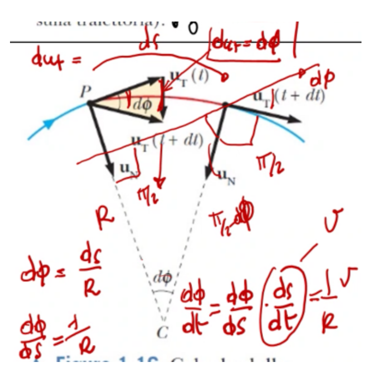
▶ Figura 1.15 Componenti dell'accelerazione di un punto lungo una traiettoria.

Cerchio osculatore: è il cerchio che meglio approssima la traiettoria in un punto. Più la curva è piana più il cerchio osculatore è grande e viceversa.

$\bar{u}_n$ è diretto verso la concavità

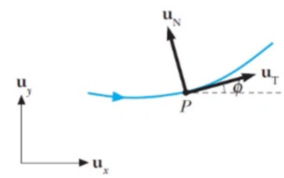


▲ Figura 1.16 Calcolo della componente normale dell'accelerazione.



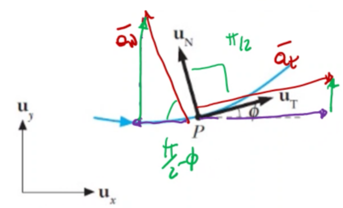
$$\bar{a} = \frac{d(v\bar{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_t + v\frac{d\bar{u}_t}{dt} = \bar{a}_t + v\frac{d_\phi \cdot \bar{u}_n}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_t + \frac{v^2}{R}\bar{u}_n$$

10.2 Accelerazione centripeta



▲ **Figura 1.17** Versori di un sistema di coordinate cartesiane ($\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$) e di un sistema di coordinate tangente-normale ($\mathbf{u}_T$, $\mathbf{u}_N$) per la rappresentazione dell'accelerazione in un moto piano.

vedi cosa è l'accelerazione centripeta, centra con il vettore perpendicolare al punto.



$$\bar{v} = v_s\bar{u}_t = \frac{ds}{dt}\bar{u}_t$$
$$\bar{a} = \frac{dv_s}{dt}\bar{u}_t + \frac{v^2}{R}\bar{u}_n$$

$$\bar{r} = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y$$
$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}\bar{u}_x + \frac{d\bar{y}}{dt}\bar{u}_y$$
$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\bar{u}_x + \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\bar{u}_y + \dots$$
$$\bar{a}_x = a_x \cdot \bar{u}_x$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_s}{dt} \cdot \cos(\phi) - \frac{v^2}{R} \cdot \cos(\pi/2 - \theta) = \frac{dv_s}{dt} - \frac{v^2}{R} \cdot \sin(\phi) \\ a_y = \frac{dv_s}{dt} \cdot \sin(\phi) + \frac{v^2}{R} \cdot \sin(\pi/2 - \theta) = \frac{dv_s}{dt} + \frac{v^2}{R} \cdot \cos(\phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_s \cdot \cos(\phi) \\ v_y = v_s \cdot \sin(\phi) \end{cases}$$

11 Moto Circolare

$$s(t) = \theta(t)R, \begin{cases} x(t) = R\cos(\theta(t)) \\ y(t) = R\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Velocità angolare media $= \omega_m = \dfrac{\theta(t_f) - \theta(t_i)}{t_f - t_i}$

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \implies$ se uniforme ω è **costante**.

$$\bar{v} = v_s \cdot \bar{u}_t = \frac{ds}{dt}\bar{u}_t = R\frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{u}_t$$

$$v_s = R\omega$$

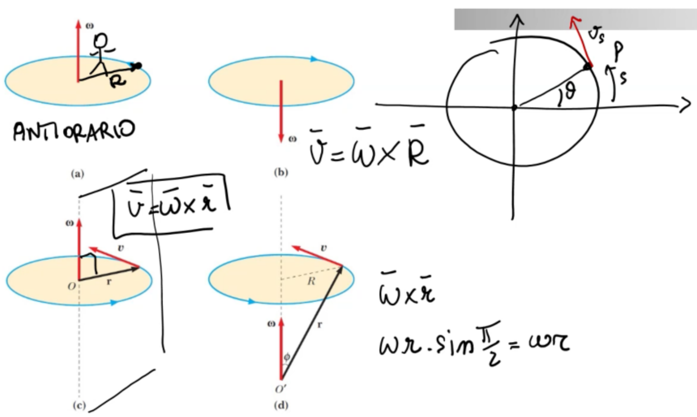
$a_t = 0, \quad a_n = \dfrac{v_s^2}{R} = \dfrac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$ uniforme

$a_t = \frac{dv_s}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt} \quad a_n = \frac{v_s^2}{R} = \omega^2 R$

$$\alpha \ accelerazione \ angolare \ = \frac{d\omega}{dt} \implies a_t = R\alpha \quad a_n = \omega^2 R$$

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

11.1 Notazione vettoriale nel moto circolare



◀ **Figura 1.20** Rappresentazione della velocità angolare di un moto circolare descritto in senso antiorario (a) e in senso orario (b); il vettore velocità angolare applicato al centro della circonferenza (c) e in un punto dell'asse (d).

$$v_s = \omega R$$

$$\bar{v} = v_s \cdot \bar{u}_t$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$wr \cdot \sin\frac{\pi}{2} = wr \quad \bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad \bar{a} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \implies \bar{a} = \alpha \cdot r + \bar{\omega} \times \bar{v}$

$$\bar{a}_t = \bar{\alpha} \times \bar{r}$$

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} \quad accelerazione \ centripeta$$

12 Dinamica del punto

13 Dinamica del punto

13.1 Concetto di forza

La forza è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.

13.2 Primo principio della dinamica: principio d'inerzia

Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme oppure sta fermo se inizialmente era fermo. $\bar{v} =$ costante.

13.3 Secondo principio della dinamica: principio fondamentale della dinamica

La variazione di quantità di moto di un corpo è proporzionale alla forza impressa e avviene nella direzione della forza stessa.

$$\bar{F} = m\bar{a}.$$

L'accelerazione è sempre nella direzione della forza, e il rapporto delle accelerazioni è inverso al rapporto delle masse:

$$\begin{matrix} F = m_1 a_1 \\ F = m_2 a_2 \end{matrix} = m_1 a_1 = m_2 a_2 \implies \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

13.3.1 Massa di un corpo

La massa si misura con la bilancia. La forza della gravità è proporzionale alla massa del corpo:

$$\bar{F} = m\bar{g}$$

13.4 Seconda legge di Newton

Esprime la legge fondamentale della dinamica del punto:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad \star$$

Possiamo scrivere $\star$ scomponendola in tre equazioni relative ai tre moti proiettati sugli assi cartesiani:

$$\begin{cases} F_x = m\bar{a}_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \\ F_y = m\bar{a}_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \\ F_z = m\bar{a}_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

13.5 Terza legge della dinamica

Immaginiamo di avere due corpi A e B: se A esercita una forza su B, allora B esercita una forza uguale e opposta su A, **principio di azione e reazione.**

$$\bar{F}_{AB} = -\bar{F}_{BA}$$

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Se A e B sono la Terra e il sole allora:

$$F = G\frac{M_t M_s}{r^2} \quad \textit{Gravitazione}$$

Per le cariche:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \textit{Elettromagnetica}$$

Questo non significa che i due corpi non si muovano, anzi si muovono in qundo il punto di applicazione è diverso: immagina la roulotte e la macchina.