1 Dinamica

1.1 Concetto di forza

La forza è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.

1.2 Primo principio della dinamica: principio d'inerzia

Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme oppure sta fermo se inizialmente era fermo. $\bar{v} =$ costante.

1.3 Secondo principio della dinamica: principio fondamentale della dinamica

La variazione di quantità di moto di un corpo è proporzionale alla forza impressa e avviene nella direzione della forza stessa.

$$\bar{F} = m\bar{a}.$$

L'accelerazione è sempre nella direzione della forza, e il rapporto delle accelerazioni è inverso al rapporto delle masse:

$$\begin{matrix} F = m_1 a_1 \\ F = m_2 a_2 \end{matrix} = m_1 a_1 = m_2 a_2 \implies \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

1.3.1 Massa di un corpo

La massa si misura con la bilancia. La forza della gravità è proporzionale alla massa del corpo:

$$\bar{F} = m\bar{g}$$

1.4 Seconda legge di Newton

Esprime la legge fondamentale della dinamica del punto:

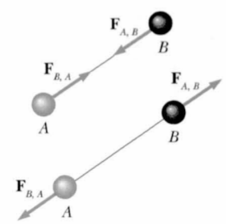
$$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad \star$$

Possiamo scrivere $\star$ scomponendola in tre equazioni relative ai tre moti proiettati sugli assi cartesiani:

$$\begin{cases} F_x = m\bar{a}_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \\ F_y = m\bar{a}_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \\ F_z = m\bar{a}_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

1.5 Terza legge della dinamica

Immaginiamo di avere due corpi A e B: se A esercita una forza su B, allora B esercita una forza uguale e opposta su A, **principio di azione e reazione.**



▲ **Figura 2.3** Principio di azione e reazione delle forze tra due punti materiali.

$$\bar{F}_{AB} = -\bar{F}_{BA}$$

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Se A e B sono la Terra e il sole allora:

$$F = G\frac{M_t M_s}{r^2} \quad \textit{Gravitazione}$$

Per le cariche:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \textit{Elettromagnetica}$$

Questo non significa che i due corpi non si muovano, anzi si muovono in qundo il punto di applicazione è diverso: immagina la roulotte e la macchina.

1.6 Quantità di moto, impulso

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il vettore:

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

Se la massa è costante la seconda legge di Newton diventa:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Da cui si ottiene il teorema dell'impulso:

$$\bar{F}dt = d\bar{p} \implies \int_0^{t_0} \bar{F}dt = \int_{\bar{p}_i}^{\bar{p}_f} d\bar{p} = \bar{p}_f - \bar{p}_i = \Delta\bar{p} = \bar{J}$$

Dove $\bar{J}$ è l'impulso della forza $\bar{F}$ e Δp è la variazione della quantità di moto. . Il teorema dell'impulso dice che:
l'impulso do una forza applicata a un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto
Se la massa è costante:

$$\bar{F}_m \cdot \Delta t = \Delta\bar{p} \implies \bar{F}_m = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t}$$

1.6.1 Unità di misura

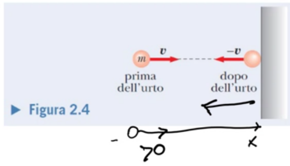
$$[\bar{F}] = [M] \cdot \frac{[L]}{[T^2]} \implies \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$$

$$[\bar{p}] = [M] \cdot \frac{[L]}{[T]} \implies \frac{kg \cdot m}{s} = N \cdot s$$

1.6.2 Esercizio 2.1

Esempio 2.1 Una pallina rimbalza su un muro

Un punto materiale che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ costante urta contro un muro, posto a 90° rispetto alla traiettoria, e rimbalza ripercorrendo l' iniziale traiettoria rettilinea con velocità $-\boldsymbol{v}$, cioè eguale ed opposta alla velocità prima dell' urto. Calcolare la variazione di quantità di moto e, se l' urto ha durata Δt, il valor medio della forza agente durante l' urto. Si ponga $v = 2$ m/s, $m = 0.05$ kg, $\Delta t = 10^{-3}$ s.



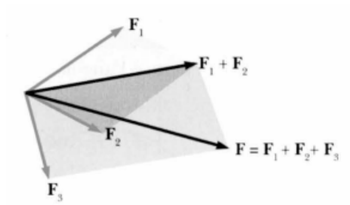
▶ Figura 2.4

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_F - \bar{p}_I = -m\bar{v} - m\bar{v} = -2m\bar{v}$$

$$\bar{J} = \int \bar{F}dt = \bar{F}_m \cdot \Delta t = \Delta\bar{p} \quad , \quad \bar{F}_M = \frac{\int_{t_I}^{t_F} \bar{F}dt}{\Delta t}$$

$$\bar{F}_m = \frac{-2m\bar{v}}{\Delta t} = -\frac{2m}{\Delta t}\bar{v} = 200N$$

1.7 Risultante delle forze, equilibrio statico



▲ Figura 2.5 Risultante di tre forze in un piano.

Principio di sovrapposizione:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

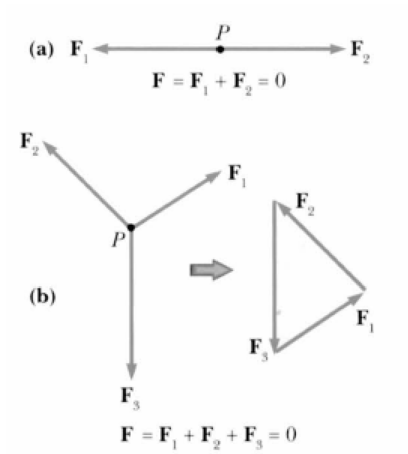
e l'accelerazione del punto è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto avrebbe se agisse ciascuna forza separatamente:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

indipendenza delle azioni simultanee.

Se $\bar{F} = 0$ e $\bar{v} = 0$ allora il punto rimane in quiete: sono realizzate le condizioni di equilibrio statico. Devono quindi essere nulle tutte le componenti della risultate ovvero con riferimento a un sistema di assi cartesiani:

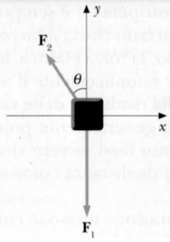
$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = 0 \implies \begin{cases} F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \\ F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \\ F_z = \sum_i F_{iz} = 0 \end{cases}$$



▲ Figura 2.6 Risultante nulla del sistema di due forze (a) e di tre forze (b).

1.7.1 Esercizio 2.2

Un punto P è sottoposto a una forza $F_1 = 34$ N lungo il verso negativo dell'asse y e a una forza $F_2 = 25$ N che forma un angolo $\theta = 30°$ con l'asse y, vedi **Figura 2.7**. Calcolare modulo, direzione e verso della forza $\mathbf{F}_3$ che occorre applicare al punto P per mantenerlo in equilibrio statico.



► **Figura 2.7**

Soluzione

All'equilibrio deve valere la relazione (2.4)

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0,$$

che equivale alle due equazioni

$$F_{2,x} + F_{3,x} = 0, \qquad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0.$$

Infatti $F_{1,x} = 0$ e non ci sono componenti lungo l'asse z; $\mathbf{F}_3$ deve stare nel piano x,y individuato da $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ dato che sommata a esse deve dare risultante nulla.

46 CAPITOLO 2 Dinamica del punto: le leggi di Newton

ESEMPIO 2.2 *continua*

Pertanto, detto ϕ l'angolo formato da $\mathbf{F}_3$ con l'asse y, si ha:

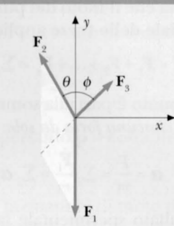
$$\begin{cases} -F_2 \operatorname{sen}\theta + F_3 \operatorname{sen}\phi = 0, \\ -F_1 + F_2 \cos\theta + F_3 \cos\phi = 0. \end{cases}$$

Risolvendo si trova:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{F_1 - F_2 \cos\theta}, \quad \phi = 45.4°,$$

$$F_3 = F_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi} = 17.6 \text{ N}.$$

La soluzione è mostrata in **Figura 2.8**; qualitativamente era evidente che $\mathbf{F}_3$ doveva giacere nel primo quadrante.



◄ **Figura 2.8**

Come verifica del risultato trovato per il modulo di $\mathbf{F}_3$ si provi a calcolare il modulo della risultante di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ applicando il teorema del coseno (appendice C).

1.8 "Equilibrio dinamico"

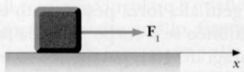
1. moto rettilineo uniforme, $a = 0$, $\bar{F} = m\bar{a} = 0$
2. moto rettilineo uniformemente accelerato, $a =$ costante
3. moto curvilineo $\bar{F} = m\bar{a}_T + m\bar{a}_N = m\dfrac{dv}{dt}\bar{u}_T + m\dfrac{v^2}{R}\bar{u}_N$

Si parla di equilibrio dinamico quando le forze che agiscono sul corpo provocano un moto uniforme e non accelerato.

1.8.1 Esercizio 2.3

ESEMPIO 2.3 **Un corpo in frenata**

Un punto di massa $m = 0.8$ kg, inizialmente in quiete, è sottoposto all'azione di una forza costante $\mathbf{F}_1$, avente la direzione e il verso dell'asse x e modulo $F_1 = 16$ N, **Figura 2.10**. Dopo un tempo $t_1 = 3$ s cessa l'azione di $\mathbf{F}_1$ e si osserva che il punto rallenta uniformemente, fermandosi all'istante $t_2 = 9$ s. Calcolare la forza $\mathbf{F}_2$ parallela all'asse x che agisce durante la frenata e lo spazio totale percorso.



▶ **Figura 2.10**

Soluzione

Sotto l'azione di $\mathbf{F}_1$ il punto accelera con $a_1 = F_1/m = 20\ \mathrm{m/s^2}$ e all'istante t_1 ha velocità $v_1 = a_1 t_1 = 60$ m/s e ha percorso lo spazio $x_1 = ½\, a_1 t_1^2 = 90$ m. Nella fase di decelerazione, alla fine della quale $v = 0$, si ha

$$v = v_1 - a_2(t - t_1) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{v_1}{t_2 - t_1} = 10\ \mathrm{m/s^2},$$

e quindi la forza frenante vale $F_2 = ma_2 = 8$ N, discorde all'asse x.

Lo spazio percorso durante la frenata è

$$x_2 = v_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 = 180\ \mathrm{m}$$

o, alternativamente, da $v_2 = v_1^2 - 2\, a_2 x$ con $v = 0$,

$$x_2 = \frac{v_1^2}{2\, a_2} = 180\ \mathrm{m}.$$

Lo spazio totale percorso è $x_1 + x_2 = 270$ m.

Per il calcolo di F_2 si può anche usare il teorema dell'impulso, tenendo conto che le forze sono costanti e che la velocità iniziale è nulla. In modulo

$$F_1 t_1 = m v_1, \qquad F_2(t_2 - t_1) = m v_1,$$

combinando le due equazioni si ottiene:

$$F_2 = \frac{F_1 t_1}{t_2 - t_1} = 8\ \mathrm{N}.$$

Ovvero: l'impulso $\mathbf{J}_1$ di $\mathbf{F}_1$ porta il punto con quantità di moto nulla (fermo) ad assumere la quantità di moto mv_1 e l'impulso $\mathbf{J}_2$ di $\mathbf{F}_2$ riporta la quantità di moto a zero, per cui in modulo $J_1 = J_2$.

Si noti come nella fase iniziale abbiamo dedotto l'accelerazione dalla forza nota e invece nella fase finale dall'accelerazione abbiamo calcolato la forza frenante; in ogni caso abbiamo utilizzato le relazioni cinematiche sviluppate nel primo capitolo. Si rivedano a questo proposito gli esempi del paragrafo 1.3, cercando di capire quali forze debbano agire nelle varie situazioni.

1.9 Forza Peso

Il peso è la forza con cui la Terra attrae un corpo.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

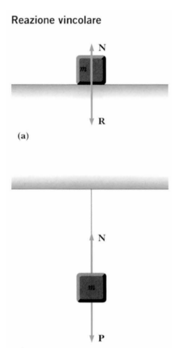
$1kg$ peso $\implies$ la forza con cui viene attratta la massa di $1kg$:

$$1Kg_p = 1Kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 9.81N$$

1.10 Reazione vincolare

Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un'insieme di forze rimane fermo, dobbiamo dedurre da quanto detto precendentemente che l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante, detta **reazione vincolare**, che si esprime tramite una forza, eguale e contraria alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata al corpo stesso in modo tale che esso rimanga in quiete. Se prendiamo un oggetto che poggia su un tavolo, il tavolo esercita una forza uguale e contraria al peso del corpo, che si chiama reazione vincolare normale $\bar{N}$. Se si applicano ulteriori forze al corpo, la reazione vincolare deve equilibrare la risultante $\bar{R}$ di tutte le forze applicate al corpo.

$$\bar{R} + \bar{N} = 0$$



▲ Figura 2.12 Reazione vincolare su un punto materiale posto su un piano orizzontale (*a*) e sospeso (*b*).

1.11 Sensazione di peso

Come abbiamo appena visto, quando un corpo di massa m è poggiato su un pavimento orizzontale, esso risente di una reazione vincolare $\bar{N}$ che in modulo vale mg. E' proprio questa reazione applicata al corpo che dà la *sensazione di peso*. Prendiamo un corpo posato su una superficie che può muoversi verticalmente con un'accelerazione $\bar{a}$. Se il corpo rimane appoggiato sulla superficie la sue accelerazione è $\bar{a}$ e la sua equazione è:

$$\bar{N} + \bar{P} = m\bar{a} \quad \implies \quad \bar{N} + m\bar{g} = m\bar{a} \quad \implies \quad \bar{N} = m(\bar{a} - \bar{g})$$

perchè al corpo sono applicate sia la forza peso che la reazione dovuta al contatto con la superficie. Ora abbiamo quattro casi da esaminare; come asse di riferimento prendiamo un asse z verticale orientato verso l'alto, per cui $\bar{g} = -g\bar{u}_z$:

1. $\bar{a}$ discordante con $\bar{g}$, la superficie su cui è appogiato il corpo accelera verso l'alto

$$\bar{N} = m[a\bar{u}_z - (-g\bar{u}_z)] = m(a+g)\bar{u}_z \quad \Longrightarrow \quad N > mg$$

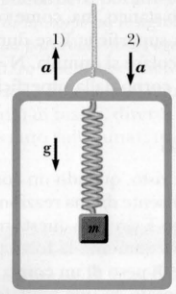
2. $\bar{a}$ concorde con $\bar{g}$, la superficie su cui è appogiato il corpo accelera verso il basso, con $a < g$:

$$\bar{N} = m[-a\bar{u}_z - (-g\bar{u}_z)] = m(a-g)\bar{u}_z \quad \Longrightarrow \quad N > mg$$

3. $\bar{a} = \bar{g} \quad \Longrightarrow \quad \bar{N} = 0$: non c'è reazione e non c'è sensazione di peso

4. $\bar{a}$ concorde con $\bar{g}$ con $a > g$: si ha il distacca del corpo dalla superficie.

1.11.1 Esercizio 2.5



ESEMPIO 2.5 Un corpo appeso a un dinamometro in un ascensore

Un corpo di massa $m = 4$ kg pende al capo di un dinamometro che è appeso al soffitto di un ascensore, Figura 2.14. Calcolare il peso del corpo misurato dal dinamometro quando l'ascensore è fermo, quando sale con un'accelerazione $\boldsymbol{a} = 2$ m s^{-2} e quando scende con la stessa accelerazione in modulo.

Soluzione

Quando l'ascensore è fermo il dinamometro deve equilibrare la forza peso applicata al corpo, pertanto $N = P = mg = 39.2$ N.

Quando sale l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è discorde a $\mathbf{g}$ quindi il dinamometro deve equilibrare la forza:

$$N = m(g + a) = 47.2 \text{ N} > P.$$

Quando l'ascensore è in discesa $\boldsymbol{a}$ è concorde con $\mathbf{g}$ quindi il dinamometro deve equilibrare la forza:

$$N = m(g - a) = 31.2 \text{ N} < P.$$

◀ Figura 2.14

È interessante notare che la variazione di peso è di ±8 N, ovvero di circa ±20%.

1.12 Forza di attrito

1.12.1 Forza di attrito radente

Forza di attrito statico F_s: ci interessa il suo massimo in quanto è la forza che ostacola il moto.

$$F_{smax} = \mu_s N \;\; \text{coefficiente di attrito statico}$$

Quando il nostro corpo è già in movimento si parla di **attrito dinamico**:

$$F_d = \mu_d N$$

dove $N = mg$. F_d è costante fino a che si muove e $\mu_d < \mu_s$. La forza di attrito è sempre diretta in verso opposto alla velocità $\bar{v}$.
Una superficie si chiama **scabra** se c'è attrito o **liscia** se non c'è attrito.
Sul punto in movimento agisce una forza di attrito

$$F_{ad} = -\mu N$$

1.12.2 Esercizio 2.6

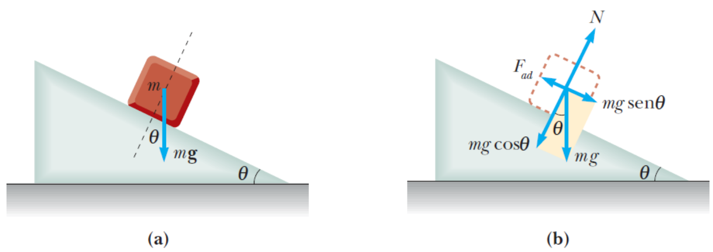
1.12.3 Esercizio 2.8

1.12.4 Esercizio 2.9

1.13 Piano inclinato

Consideriamo un corpo, assimilabile a un punto materiale di mass m, che possa muoversi sotto l'azione della forza peso e di altre forze, su una **piano inclinato** di angolo θ rispetto all'orizzontale.
Se consideriamo solo la forza peso $\bar{P}$, secondo la legge di Newton:

$$\bar{P} + \bar{R} = m\bar{a}$$



$$N = mg\cos\theta \implies N - mg\cos\theta = 0$$

Il corpo sta fermo fin quando la $\tan\theta < F_f$ (vedi da dove deriva)
La forza che fa scivolare il corpo è descritta da:

$$mg\sin\theta$$

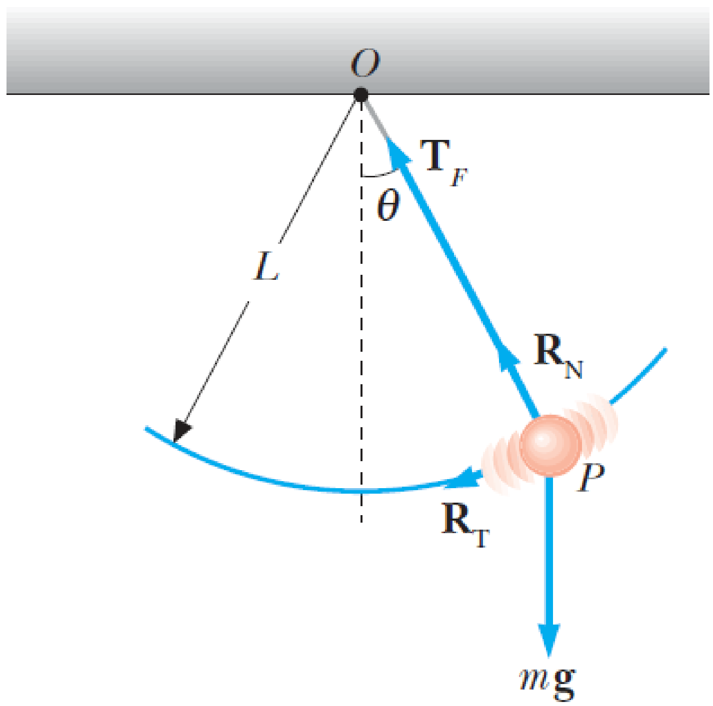
Mentre la forza di attrito:

$$F = \mu_d N \implies \mu_d \cdot mg\cos\theta$$

1.13.1 Esercizio 2.10

1.13.2 Esercizio 2.11

1.14 Pendolo semplice



Il pendolo è costituito da un punto materiale attaccato a un filo. Sul punto agisce la forza peso e sulla corda una forza T. Inoltre consideriamo la forza normale e tangenziale.

$$\begin{cases} (\star) \quad mg\sin\theta = m\bar{a}_T \\ R_N = T - mg\cos\theta = m\bar{a}_N \text{ dove} a_n = \omega^2 L \implies R_N = m\omega^2 L \end{cases}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\omega L = \omega\frac{dL}{dt} = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_N = \omega^2 L$$

da $(\star)$ dopo aver semplificato la m e trovato la a_T ricaviamo la legge che regola il moto:

$$-g\sin\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \implies \theta(t) = \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Il pendolo per piccole oscillazioni si può descrivere con:

$$\frac{-g\theta}{L} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \implies \theta(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Il periodo dipende **solo dalla lunghezza del filo** e non dalla massa del corpo attaccato. Se vogliamo trovare la coordinata del punto materiale:

$$s(t) = L\theta$$

1.15 Forza di attrito viscoso

La forza di attrito viscoso è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\bar{F} = -b\bar{v}$$

dove b è una costante che dipende dalla forma e dal mezzo.

$$m\frac{dv}{dt} = -bv \implies \int_{v_0}^{v} \frac{m}{v} dv = \int_0^t -bdt \implies \ln\frac{v}{v_0} = \frac{-b}{m}t \implies \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{b}{m}t} \implies v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \implies v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{m}{b}$$

Applicando la seconda legge di Newton

$$P + F = m\bar{g} - b\bar{v} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

La posizione iniziale del moto è nulla quindi il moto avviene solo lungo l'asse z, proiettiamo l'equazione su z:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{bv}{m} \implies \frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{\tau} \implies \frac{dv}{g - \frac{v}{\tau}} = dt \implies \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - \frac{v}{\tau}} = \int_0^t dt \implies \ln\left(\frac{g - \frac{v}{\tau}}{g}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Passando alle esponenziali otteniamo la velocità:

$$v(t) = g\tau\left(1 - e^{d} frac{-1}\tau\right)$$

Inserisci le immagini per completezza

1.16 Tensione dei fili

Un filo può essere fissato in un estremo a un punto fisso e nell'altro a un punto materiale oppure può collegare due punti materiali. La forza che il filo esercita su qualisasi punto materiale è detta tensione del filo. Suporremo che la sua massa sia trascurabile e la lunghezza sia costante.

1.17 Forza elastica, Oscillatore armonico semplice

La molla è diversa dal filo.
Si definisce **forza elastica** una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre a un centro O e con modulo proporzionale alla distanza r da O. Assumiamo come l'asse x la direzione della forza e come origine il centro:

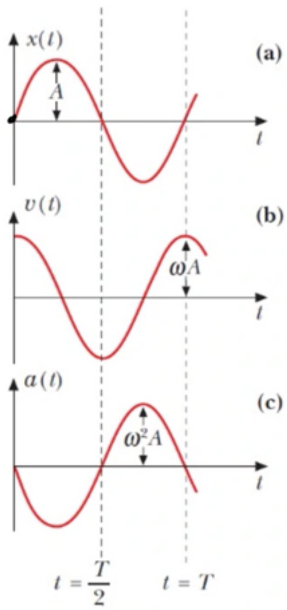
$$F = -kx \quad \text{dove} \quad k = \text{costante di molla}$$

$$F = -ku_x x$$

Limite di elasticità oltre il quale la molla si rompe/deforma.

$$m\bar{a} = -kx \implies m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \implies \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \implies x = A\sin(\omega t + \phi)\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ \text{ moto armonico}$$

Le molle si muovono in moto armonico semplice



$$A\sin(\omega t)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$$

$$a = \frac{F}{m} = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

1.18 Esercizio 2.19

1.19 Esercizio 2.20