1 Forme Bilineari e Prodotti Scalari

1.1 Forme Bilineari

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una **forma bilineare** su $\mathbb{V}$ è un'applicazione

$$* : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \times \mathbb{V}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

tale che $\forall$**v,u,w** $\in \mathbb{V}$ e $k \in \mathbb{K}$

1. $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) * \mathbf{w} = (\mathbf{v} * \mathbf{w}) + (\mathbf{u} * \mathbf{w})$
2. $\mathbf{v} * (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} * \mathbf{u}) + (\mathbf{v} * \mathbf{w})$
3. $(k\mathbf{v}) * \mathbf{u} = \mathbf{v} * (k\mathbf{u}) = k(\mathbf{v} * \mathbf{u})$

Si deduce che $0 * \mathbf{v} = \mathbf{v} * 0 = 0, \forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

1.2 Forma bilineare simmetrica

Una forma bilineare $*$, su uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, si dice **forma bilineare simmetrica o prodotto scalare** se, comunque si considerino due vettori **v** e **w** in $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, si ha:

$$\mathbf{v} * \mathbf{w} = \mathbf{w} * \mathbf{v}$$

1.3 Prodotti scalari e ortogonalità

In uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, con prodotto scalare "$\cdot$", due vettori **v** e **w** si dicono **ortogonali** e si scrive $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

1.4 Complemento ortogonale

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$" e sia A un sottoinsieme, non vuoto, di $\mathbb{V}$. Si dice **complemento ortogonale** di A in $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, l'insieme (si legge A ortogonale)

$$A^{\perp} = \mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{w} \in A$$

1.4.1 Proposizione

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$" e sia **w** un vettore di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ tale che $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \neq 0$. Allora, ogni vettore **v** di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si può esprimere come somma di due vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, dove $\mathbf{w}_1$ è ortogonale a **w** e $\mathbf{w}_2$ è proporzionale a **w**.
Dimostrazione: Ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$ si può scrivere come:

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\right) + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}\right)$$

Un calcolo diretto dimostra che $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} - \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}$ è ortogonale **w** mentre, ovviamente, $\mathbf{w}_2 = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}$ è proporzionale a **w**, secondo lo scalare $\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$

1.5 Coefficiente di Fourier

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$" e sia **w** un vettore di $\mathbb{V}$ tale che $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \neq 0$. Se **v** è un vettore di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, si dice **coefficiente** o **componente di Fourier** di **v** lungo **w** il numero reale

$$\mathbf{v}_w = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

e si dice **proiezione** di **v** su **w** il vettore $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_w\mathbf{w}$.

1.6 Forme Quadratiche

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare "$\cdot$". Si dice **forma quadratica**, associata al prodotto scalare "$\cdot$", l'applicazione

$$q : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

1.7 Spazi con prodotto scalare definito positivo

Un prodotto scalare, assegnato in uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ su un campo ordinato, si dice **definito positivo** se $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \underline{0}$

Una forma quadratica si dice **definita positiva** se tale è il prodotto scalare cui essa è associata.

1.8 Norma

Dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^{\circ}(\mathbb{R})$ si dice **norma** di $\mathbf{v}$ il numero reale positivo o nullo

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{q(\mathbf{v})}$$

1.9 Versore

Sia $\mathbf{v} \neq 0$ un vettore di $\mathbb{V}^{\circ}(\mathbb{R})$, si dice **versore** di $\mathbf{v}$ il vettore

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

1.10 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ due vettori di $\mathbb{V}^{\circ}(\mathbb{R})$. Allora

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{u}||$$

ove $|v \cdot u|$ indica il valore assoluto di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

1.10.1 Dimostrazione

1.11 Disuguaglianza triangolare

1.11.1 Dimostrazione