

1 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la “somma” di infiniti termini della successione, cioè: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \quad \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.

Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

Ovvio che il risultato è...?

Potrebbe essere:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

oppure:

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.

Allora come si procede?

Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

1.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

1.1.1 Esempio 1

$$a_k = 1 \quad \forall k$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \dots, S_n = n$$

$$\implies S_n \rightarrow \infty$$

1.1.2 Esempio 2

$$a_k = (-1)^{k+1}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \dots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ non esiste!.

1.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k . Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

- Se il limite per $n \rightarrow \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \rightarrow \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ di S_n , si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamentto della serie si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

1.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \dots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo per escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

1.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \rightarrow \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

1.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star) \quad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1} , ottengo la successione S_{n+1} . (Per definizione di successione di somme parziali)

Allora da (\star) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0 \\ &\implies a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.

Vediamo due esempi di serie modello:

1.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).

Calcoliamo la somma parziale S_n :

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$.

Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

1.4.1 Osservazione

La formula vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \text{ (} |x| < 1 \text{) convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$