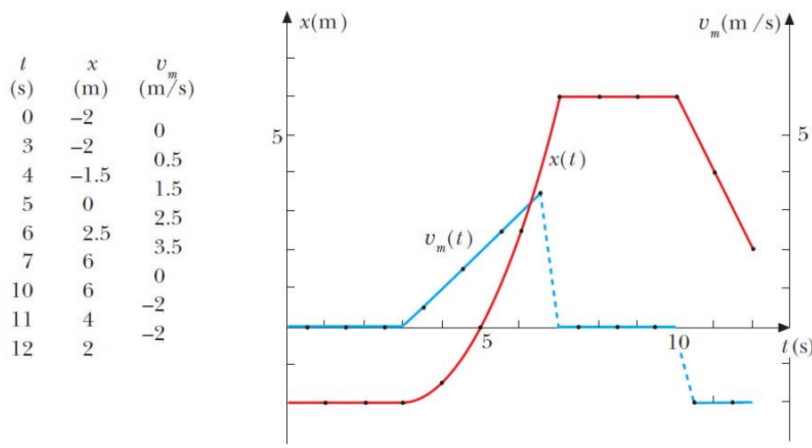
1 Moto

Il moto è il movimento dei corpi.

1.1 Moto Rettilineo

Il moto più semplice è il moto rettilineo, ovvero il moto lungo una retta. Inizialmente studiamo il moto di un corpo puntiforme. Quando si parla di moto dobbiamo definire un'origine degli spazi e orientare la retta, in modo da determinare il verso positivo e negativo.
Effettuando delle misurazioni si ottiene un diagramma orario e successivamente si può ottenere il grafico spazio-tempo.



t (s)	x (m)	v_m (m/s)
0	−2	
3	−2	0
4	−1.5	0.5
5	0	1.5
6	2.5	2.5
7	6	3.5
10	6	0
11	4	−2
12	2	−2

Figure 1: Grafico spazio-tempo

1.1.1 Velocità media

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_F - x_I}{t_F - t_I}$$

1.1.2 Velocità istantanea

La velocità istantanea è una variazione piccolissima variazione di spazio in un piccolissimo intervallo di tempo.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

1.1.3 Due punti in moto sullo stesso asse

Due punti materiali si trovano nell'istante iniziale $t = 0$ sullo stesso asse x, rispettivamente nella posizione x_1 con velocità v_1 e nella posizione $x_2 > x_1$ con velocità v_2. Il moto dei punti è uniforme. Discutere quali sono le situazioni in cui i punti ad un certo istante si urtano e determinare dove e quando si urtano.
Moto rettilineo uniforme $\iff$ velocità costante.

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v \cdot dt \implies \int_0^{t_0} dx = \int_0^{t_0} v(t) \cdot dt$$

$$x(t_0) - x(0) = \int_0^{t_0} v(t) \cdot dt \implies x(t_0) - x(0) = \int_0^{t_0} v \cdot dt \implies x(t_0) - x(0) = v_0(t_0 - 0) \implies x(t_0) = v_0 \cdot t_0$$

$$x_1(t) = v_1 \cdot t \quad x_2(t) = v_2 \cdot t + x_2(0)$$

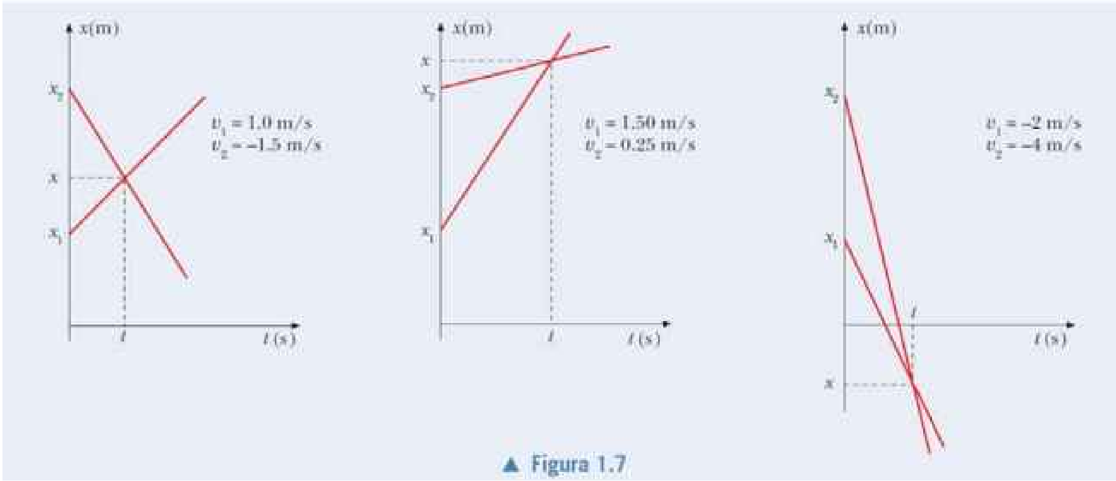


Figure 2: Esempi di grafici di due punti in moto sullo stesso asse

1.2 Accelerazione nel moto rettilineo

Si definisce accelerazione e si indica con $\bar{a}$ il rapporto tra la velocità in un certo istante e l'intervallo di tempo in cui si è verificata la variazione di velocità.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \implies v = \frac{dx}{dt} \implies a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Anche quando la velocità diminuisce si ha un'accelerazione, ma negativa.
Se conosco l'accelerazione posso calcolare la velocità.

$$\frac{dv}{dt} = a \implies \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_0^{t_1} a \cdot dt \implies v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t) \cdot dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt$$

1.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Moto rettilineo uniformemente accelerato $\iff$ accelerazione costante.

$$dv = adt \implies \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \implies v - v_0 = a\int_0^t dt = a \cdot t \implies v = v_0 + a \cdot t$$

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v \cdot dt \implies dx = [v_0 + a(t - t_0)]dt \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt$$

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

1.3.1 Esercizio

Un'automobile è in grado di passare dalla quiete alla velocità di $100\frac{km}{h}$ in t secondi, muovendosi con moto uniformemente accelerato. Esprimere il valore dell'accelerazione e calcolarlo per $t = t1 = 5s$ e per $t = t2 = 8s$. Quanto vale lo spazio percorso nei due casi? E la velocità media?

Risoluzione:

$v = at \implies a = \frac{v_f}{t}$

$v_f = 100\frac{km}{h} = 27.78\frac{m}{s}$

$a = \frac{27.78\frac{m}{s}}{5s} = 5.56\frac{m}{s^2}$

$a_2 = \frac{27.78\frac{m}{s}}{8s} = 3.47\frac{m}{s^2}$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$\implies x_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5.56\frac{m}{s^2} \cdot 5^2 s^2 = 69.5m$

$\implies x_2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 3.47\frac{m}{s^2} \cdot 8^2 s^2 = 111m$

$\bar{v}_{m_1} = \frac{69.5m}{5s} = 13.9\frac{m}{s}$

$\bar{v}_{m_2} = \frac{111m}{8s} = 13.9\frac{m}{s}$

1.3.2 Esercizio accelerazione negativa

Un punto materiale parte dall'origine con velocità iniziale v_0 positiva ed è sottoposto ad un'accelerazione negativa − a costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo, l'istante t_1 in cui si ferma, l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine e la velocità che ha per $t = t_2$.

$v = v_0 + at \implies v_0 + at,\ a < 0,\ v_0 > 0$

$v_0 + at = 0 \implies t_1 = \frac{-v_0}{a}$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \implies x_1 = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{-v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{-v_0^2}{2a}$

Ora calcoliamo quando il punto ripassa per l'origine $v_0 + \frac{1}{2}at^2 = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t_2 = \frac{2v_0}{-a} \end{cases}$

Velocità in t_2 $v_2 = v_0 + at_2 = v_0 - 2v_0 = -v_0$

2 Valori Medi

2.1 Valore medio di una funzione

$$< f(t) >= \frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

Nel caso della funzione sin, la media su un periodo è nulla:

$$< \sin(t) >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Lo stesso si ottiene per il coseno, ed è evidente, basta osservare il grafico; in un semiperiodo la funzione è positiva, nell'altro è negativa e la loro somma è nulla.
E' diversa la situazione per la funzione $\sin^2$ e $\cos^2$, funzioni che hanno come periodo π, che essendo sempre positive non possono aver valore medio nullo. Osserviamo che:

$$\int_0^\pi (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$$

pertanto

$$\int_0^\pi \int^2(\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos^2(\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$$

2.1.1 Esercizio 1.4 (compito)

3 Moto verticale di un corpo

Un corpo in caduta libera è un corpo che cade sotto l'azione della forza di gravità.

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} v = v_0 - g \cdot t \\ x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

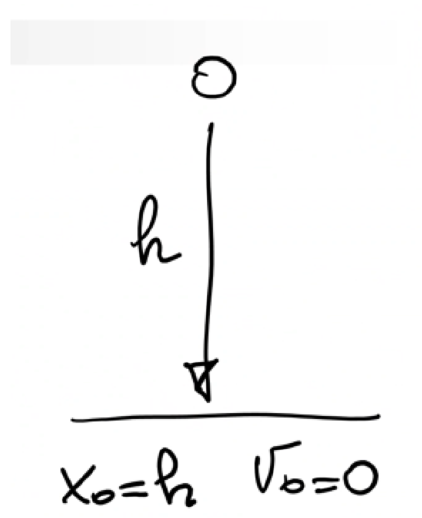


Figure 3: Esercizio 1.6

$$0 = h + v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \implies \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

3.0.1 Esercizio 1.6

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante $t = 0$ con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante $t = t_0 > 0$, con velocità iniziale v_0: riuscirà a raggiungere il primo punto?

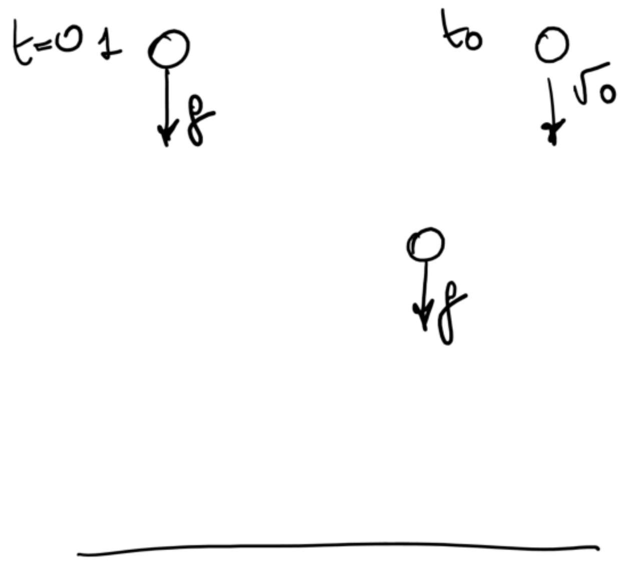


Figure 4: Esercizio 1.6

$x_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$ *perchè abbiamo considerato il punto di partenza h come l'origine*
$x_2(t) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ *perchè il secondo corpo viene lasciato cadere in un secondo istante* t_0
si incontrano a $\bar{t} = x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) \implies \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0(\bar{t} - t_0) + \frac{1}{2}g(\bar{t} - t_0)^2$
$\bar{t} = \frac{t_0}{2}\left(1 + \frac{v_0}{v_0 - gt_0}\right)$

4 Moto Armonico

4.1 Moto armonico semplice

Un corpo si muove di moto armonico se la sua posizione in funzione del tempo è descritta da:

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi t)$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Periodo della funzione: quale è il valore di $t : x(t) = x(t + T)$?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ \textit{è il periodo}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ \textit{è la pulsazione angolare}}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = x(t + T) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\omega 2\pi}{\omega} + \phi)$$

La frequenza del moto misura il numero di cicli che si compiono in un secondo:

$$f,\ \nu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \text{ \textit{è l'inverso del periodo e si misura in} } s^{-1} \text{ \textit{o} } Hz$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathbf{A} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \mathbf{t} + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\mathbf{A} \cdot \omega^{\mathbf{2}} \cdot \sin(\omega \mathbf{t} + \phi)$$

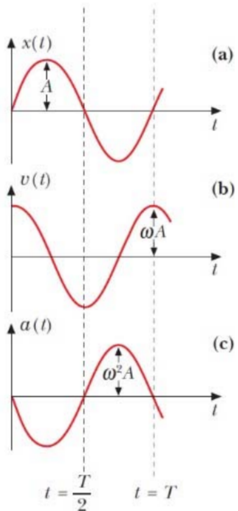
oppure

$$a = -\omega^2 \cdot x(t)$$

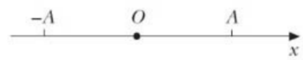
$$\int_{x_0}^{x} -\omega^2 x dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \implies -\omega^2[\frac{1}{2}x^2]_{x_0}^{x}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2\omega^2(x - x_0)$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad t = 0 \quad x(0) = A\sin(\phi)$



▲ Figura 1.13 Diagramma dello spostamento (a), della velocità (b) e dell'accelerazione (c) di un moto armonico semplice.



▲ Figura 1.12 Ampiezza dell'oscillazione di un moto armonico semplice.

Figure 5: Moto armonico

$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad t = 0 \quad v(0) = A\omega\cos(\phi)$

In base alla velocità iniziale a alla posizione iniziale possiamo determinare ϕ: $x(0) = x_0 = A$

$v(0) = 0 \implies \begin{cases} A\sin(\phi) = A \\ A\omega\cos(\phi) = 0 \end{cases} \implies \phi = \frac{\pi}{2}$ Omega invece è legato a come è impostato il sistema.

5 Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv[x(t)]}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\implies \int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \implies \int_{x_0}^{x} adx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

5.0.1 Un particolare moto vario esempio 1.7

Un punto materiale risente, lungo l'asse x positivo, della seguente accelerazione: $a = 0 per 0 \leq x \leq x0$, a = − k/x 2 per x ¿ x0. Il punto viene lanciato dall'origine lungo il verso positivo dell'asse con velocità iniziale v0. Calcolare in quale posizione il punto si ferma e discutere il risultato.

$$\int_{x_0}^{x} adc = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \quad a = \ costante \quad a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$g(x - h) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v(x) = \sqrt{2g(x - h) + v_0^2}$$