1 Complementi ai numeri reali

1.1 Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore

$$\text{Def: M è il massimo di A} \begin{cases} M \in A \quad (1) \\ M \geq a \quad \forall a \in A \quad (2) \end{cases}$$

Il massimo di un insieme di numeri reali A quindi, se esiste, è un numero M dell'insieme A, che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme A.

$$\text{Def: m è il minimo di A} \begin{cases} m \in A \quad (1) \\ m \leq a \quad \forall a \in A \quad (2) \end{cases}$$

Il minimo di A analogamente, se esiste, è un numero m di A, che è minore o uguale ad ogni altro elemento di A.

1.1.1 Il massimo e il minimo sono unici

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.
Dimostrazione: Siano M_1 e M_2 due massimi di A.
Ma allora per definizione di massimo,

$$(1)\ M_1 \geq a \quad (2)\ M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Sempre per definizione, M_1, M_2 sono elementi di A.
Quindi da (1) se $a = M_2$, ottengo $M_1 \geq M_2$
Da (2) se $a = M_1$, ottengo $M_2 \geq M_1$
Segue che $M_1 = M_2$ ♣.

1.1.2 Osservazione

Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più grande elemento di A è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.
- $B = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più piccolo elemento di B è 0, che è il minimo, il più grande non c'è.

1.2 Maggiorante e Minorante

L si dice **maggiorante** per un insieme A se

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$

l si dice **minorante** per un insieme A se

$$l \leq a \quad \forall a \in A$$

Non sempre un insieme A ammette maggioranti e minoranti.
L'insieme A si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.
L'insieme A si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.
L'insieme A si dice **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente, in simboli:

$$l \leq a \leq L \quad \forall a \in A \implies \exists M : |a| \leq M \quad \forall a \in A$$

1.3 Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

$$A = \{a \in A\} \quad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

Applichiamo l'assioma di completezza di due insiemi A e B, quindi esiste c numero reale tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Dato che $c \geq a \quad \forall a \in A$, c è un maggiorante di A, cioè $c \in B$.
Ma c è anche tale che $c \leq b$ (minore o uguale a tutti gli elementi di B). $\implies$ c è un minimo. ♣
Allora possiamo dare la seguente definizione:

1.3.1 Estremo superiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se M è il minimo dei maggioranti di A. In simboli:

$$M \text{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} M \geq a \quad \forall a \in A \ \ (\mathbf{1}) \text{ (M è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : M - \varepsilon < a \ \ (\mathbf{2}) \text{ (M è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

Analogamente:

1.3.2 Estremo inferiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che m è l'**estremo inferiore** di A se m è il massimo dei minoranti di A. In simboli:

$$m \text{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} m \leq a \quad \forall a \in A \ \ (\mathbf{1}) \text{ (m è minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : m + \varepsilon > a \ \ (\mathbf{2}) \text{ (m è il massimo dei minoranti)} \end{cases}$$

$\implies$ Quindi se un insieme è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale. Altrimenti:

- L'estremo superiore è $+\infty$ se A non è limitato superiormente
- L'estremo inferiore è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente

$$\begin{cases} \sup A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : M < a \\ \inf A = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : m > a \end{cases}$$

Ongi insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

1.3.3 Osservazione

Assioma di completezza (punto di partenza) $\implies$ Esistenza dell'estremo superiore.