Analisi I

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Assiomi dei numeri reali

- Assiomi relativi alle operazioni
- Assiomi relativi all'ordinamento
- Assioma di completezza

1.1 Assiomi relativi alle operazioni

Sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione tra coppie di numeri reali e valgono le proprietà:

- **Proprietà associativa**
- **Proprietà commutativa**
- **Proprietà distributiva**
- **Esistenza degli elementi neutri**
- **Esisstenza degli opposti**
- **Esistenza degli inversi**

1.2 Assiomi relativi all'ordinamento

E' definita la relazione di Minore o Uguale $\leq$.

- **Dicotomia**
- **Proprietà Assimetrica**
- **Assioma di completezza**

1.2.1 Assioma di completezza

$$\forall a \in A, \forall b \in A, a \leq b \implies \exists c \in A : a \leq c \leq b$$

Esempi:

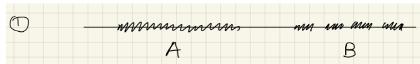


Figure 1: Esempio 1

Esistono infiniti c.

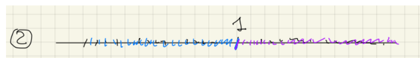


Figure 2: Esempio 2

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \implies c = 1$$

Osservazione: Non tutti gli insiemi hanno il più grande o il più piccolo elemento. Ad esempio:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

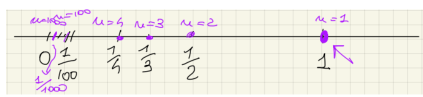


Figure 3: Esempio 3

Non ha un elemento più piccolo. (Invece c'è il più grande che è 1).

1.3 Denso

Si dimostra che $\mathbb{Q}$ è denso sulla retta reale (nel senso che fra due numeri razionali è sempre possibile trovare un terzo, anzi infiniti).

$$a = \frac{m_1}{n_1} \quad b = \frac{m_2}{n_2}$$

faccio la media $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}{2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{2 n_1 n_2} \implies \in \mathbb{Q}$

1.3.1 $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ non si può rappresentare come numero razionale.
Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo, supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ posso supporre che $m.n$ siano primi tra loro e che al più uno tra loro sia pari. Allora $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2 (\star)$
$\implies m^2$ deve essere pari e quindi m è pari.
Posso esprimere m nella forma: $m = 2k$ con k intero.
Ricavo che $\implies 2n^2 = m^2 = 4k^2$ semplifico per 2 e ottengo $n^2 = 2k^2$
Ripeto il ragionamento precedente $\implies n^2$ pari e quindi anche n pari. Ma allora sia m che n risultano pari, ASSURDO!
Avevo supposto che fossero primi ed (al più) uno dei due pari. ♣

Per capire meglio guarda esempi della Francy nella prima lezione.

2 Complementi ai numeri reali

2.1 Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore

$$\text{Def: M è il massimo di A} \begin{cases} M \in A & (1) \\ M \geq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il massimo di un insieme di numeri reali A quindi, se esiste, è un numero M dell'insieme A, che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme A.

$$\text{Def: m è il minimo di A} \begin{cases} m \in A & (1) \\ m \leq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il minimo di A analogamente, se esiste, è un numero m di A, che è minore o uguale ad ogni altro elemento di A.

2.1.1 Il massimo e il minimo sono unici

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.
Dimostrazione: Siano M_1 e M_2 due massimi di A.
Ma allora per definizione di massimo,

$$(1)\ M_1 \geq a \qquad (2)\ M_2 \geq a \qquad \forall a \in A$$

Sempre per definizione, M_1, M_2 sono elementi di A.
Quindi da (1) se $a = M_2$, ottengo $M_1 \geq M_2$
Da (2) se $a = M_1$, ottengo $M_2 \geq M_1$
Segue che $M_1 = M_2$ ♣.

2.1.2 Osservazione

Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più grande elemento di A è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.
- $B = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più piccolo elemento di B è 0, che è il minimo, il più grande non c'è.

2.2 Maggiorante e Minorante

L si dice **maggiorante** per un insieme A se

$$L \geq a \qquad \forall a \in A$$

l si dice **minorante** per un insieme A se

$$l \leq a \qquad \forall a \in A$$

Non sempre un insieme A ammette maggioranti e minoranti.
L'insieme A si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.
L'insieme A si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.
L'insieme A si dice **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente, in simboli:

$$l \leq a \leq L \qquad \forall a \in A \implies \exists M : |a| \leq M \qquad \forall a \in A$$

2.3 Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

$$A = \{a \in A\} \qquad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

Applichiamo l'assioma di completezza di due insiemi A e B, quindi esiste c numero reale tale che:

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A \qquad \forall b \in B$$

Dato che $c \geq a \quad \forall a \in A$, c è un maggiorante di A, cioè $c \in B$.
Ma c è anche tale che $c \leq b$ (minore o uguale a tutti gli elementi di B). $\implies$ c è un minimo. ♣
Allora possiamo dare la seguente definizione:

2.3.1 Estremo superiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se M è il minimo dei maggioranti di A. In simboli:

$$M \text{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} M \geq a & \forall a \in A \;\; (\mathbf{1}) \text{ (M è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : M - \varepsilon < a \;\; (\mathbf{2}) \text{ (M è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

Analogamente:

2.3.2 Estremo inferiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che m è l'**estremo inferiore** di A se m è il massimo dei minoranti di A. In simboli:

$$m \text{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \;\; (\mathbf{1}) \text{ (m è minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : m + \varepsilon > a \;\; (\mathbf{2}) \text{ (m è il massimo dei minoranti)} \end{cases}$$

$\implies$ Quindi se un insieme è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale. Altrimenti:

- L'estremo superiore è $+\infty$ se A non è limitato superiormente
- L'estremo inferiore è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente

$$\begin{cases} \sup A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : M < a \\ \inf A = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : m > a \end{cases}$$

Ongi insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

2.3.3 Osservazione

Assioma di completezza (punto di partenza) $\implies$ Esistenza dell'estremo superiore.

3 Successioni e Limiti

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n. Una successione è una funzione di $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

- $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- $1 \to a_1$
- $2 \to a_2$
- $3 \to a_3$
- $n \to a_n$

Simbolo: (a_n) oppure più semplicemente a_n
A noi interessa il comportamento della successione per n grande, più precisamente il **limite** della successione a_n, cioè un numero reale ($a \in \mathbb{R}$) che sia "vicino" ai termini della successione che hanno l'indice n "grande".
Consideriamo a_n con a limite della successione ($a \in \mathbb{R}$). a è il limite della successione se comunque si scelga un intervallo

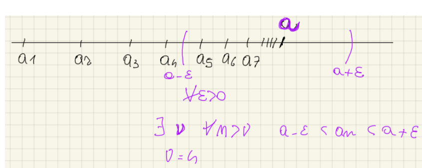


Figure 4: Intorno

di numeri intorno ad a, diciamo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice ν, tale che $\forall n > \nu$ a_n sta nell'intervallo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

3.1 Limiti

Un numero reale a è il limite della succesione a_n (si dice che a_n tende o converge ad a) e si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \text{o } a_n \to_{n\to+\infty} a$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν tale che:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu$$

Osservazione: $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può scrivere $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$.

3.2 Proposizione

Se esiste il limite $a \in \mathbb{R}$ della successione a_n, allora è unico.
Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che:

$$a_n \to a \qquad \text{e} \qquad a_n \to b \qquad \text{con } a \neq b$$

Allora $\forall\varepsilon > 0$

$$\exists\nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_1$$
$$\exists\nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_2$$

Prendo $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$ e ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, (1) e (2) valgono contemporaneamente. Allora:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

Ma allora $|a - b| < |a - b|$, ASSURDO! ♣
Una succesisone a_n ha limite $+\infty$ (si dice anche che tende o diverge a $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

se, qualunque sia $M > 0 \in \mathbb{R}$, esiste un numero ν tale che:

$$a_n > M \qquad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : a_n > M \qquad \forall n > \nu$$

Analogamente si definisce il limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M < 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : a_n < M \qquad \forall n > \nu$$

Osservazione:

- Le successioni che ammettono limite finito si dicono **convergenti**
- Le successioni che ammettono limite infinito si dicono **divergenti**
- Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**
- Una successione che tende a zero si dice anche **infinitesima**
- Una successione divergente si dice anche **infinita**

3.3 Successioni Limitate

a_n si dice **limitata** se $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$|a_n| \leq M$$

Osservazione: In particolare $a_n = (-1)^n$ è un esempio di successione limitata che non ammette limite. Viceversa, ogni successione che ammette limite finito, è limitata. Vale il seguente:

3.4 Teorema

Ogni successione convergente è limitata.
Dimostrazione: Sia a_n una successione convergente e supponiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

Allora $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$
Posso predere $\varepsilon = 1 \implies |a_n - a| < 1$, valuto $|a_n|$:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n > \nu$$

posso prendere $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_\nu|, 1 + |a|\}$ ♣.

3.5 Operazioni con i limiti

Supponiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

- $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ se $b \neq 0$

Si dimostra anche che:

- $a_n \to a \ b_n \to \pm\infty \implies a_n + b_n \to \pm\infty$
- $a_n \to a(\neq 0) \ b_n \to \pm\infty \implies a_n \cdot b_n \to \pm\infty$
- $a_n \to a \ b_n \to \pm\infty$ entrambe con lo stesso segno $\implies a_n + a_b \to \pm\infty$ e $a_n \cdot b_n \to +\infty$
- $a_n \to a \ b_n \to \pm\infty \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to 0$
- $a_n \to \pm a \ b_n \to \pm 0 \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$

3.6 Forme infeteterminate o di indecisione

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$
- ∞^0
- $1^{\pm\infty}$
- 0^0

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che non esiste, ma che occorre togliere, se possibile, l'indeterminazione, mediante semplificazioni o trasformazioni.

3.7 Teoremi di confronto

3.7.1 Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > 0 \quad \forall n > \nu$.
Esempio: $a_n = \dfrac{n-12}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 > 0$, ma i primi termini della successione sono negativi.
$a_n = 0$ per $n = 12$, quindi se prendo $\nu = 12$, e $n > \nu$ allora $a_n > 0$.
Dimostrazione: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$
$a > 0$, quindi posso prendere $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$ e:

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0 \quad \forall n > \nu \quad \clubsuit$$

Corollario (viceversa)

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $a_n \geq 0$ (vale anche $a_n > 0$), allora $a \geq 0$.

3.7.2 Teorema dei carabinieri

Si consideriamo tre successioni a_n, b_n, c_n con la proprietà che:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Se risulta che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$ (per ipotesi $a_n \to a \;\; b_n \to a$).
Dimostrazione:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_1$$
$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_2$$

Definisco $\nu_3 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ e per ipotesi $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \implies |c_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_3 \quad \implies c_n \to a \;\; \clubsuit$
Osservazione: Valgono per i limiti infiniti:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n \to +\infty \implies b_n \to +\infty \\ b_n \to -\infty \implies a_n \to -\infty \end{cases}$$

Dal teorema dei Carabinieri, segue il seguente risultato molto importante per le applicazioni e gli esercizi:

3.7.3 Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se a_n è limitata e b_n è infinitesima, allora $a_n \cdot b_n \to 0$ **Dimostrazione:** Considero $|a_n \cdot b_n| \implies$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$$

Per la proprietà del valore assoluto $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

$$-M|b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M|b_n| \quad \text{per ipotesi } b_n \to 0$$

$\implies$ Per il Teorema dei Carabinieri $a_n \cdot b_n \to 0 \quad \clubsuit$

3.8 Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 11 \quad \text{se } a = 1 \text{non esiste} \quad \text{se } a \leq -1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 00 \quad \text{se } b < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

3.9 Limiti relativi alle funzioni trigonometriche

- $a_n \to 0 \implies \sin a_n \to 0$
- $a_n \to 0 \implies \cos a_n \to 1$

Ad esempio, se $a_n = \frac{1}{n} \implies \sin\frac{1}{n} \to 0$ e $\cos\frac{1}{n} \to 1$.

- $a_n \to 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (1) \dfrac{\sin a_n}{a_n} \to 1$
- $a_n \to 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (2) \dfrac{1-\cos a_n}{a_n^2} \to \dfrac{1}{2}$

Infatti $\dfrac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \dfrac{(1-\cos a_n)(1+\cos a_n)}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \dfrac{1-\cos^2 a_n}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \dfrac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos a_n} = \dfrac{1}{2}$

3.10 Successione notevole importante

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n \qquad 1^{+\infty}$$

Confrontiamola con altre successioni b_n, c_n:

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^3 = (1+\frac{1}{n}) \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (1+\frac{1}{n}) \to 1$$

$$c_n = (1+\frac{1}{10})^n = (\frac{11}{10})^n = a^n \to +\infty \qquad \text{con } a > 1$$

Quindi a_n è una **forma indeterminata** $1^{+\infty}$, che da una parte, vuole tendere ad 1, dall'altra a $+\infty$, arriverà quindi ad un 'punto di mezzo'. Si definisce e il **numero di Nepero** tale che:

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

dove $e \simeq 2,718281828459\ldots$
Si dimsotra che la succesisone a_n è strettamente crescente e limitata.

3.11 Successioni Monotòne

- a_n strettamente crescente $\iff a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n strettamente decrescente $\iff a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n crescente $\iff a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n decrescente $\iff a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione si dice **monotona** se si verifica una delle quattro condizioni.
Una successione si dice **costante** se $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$ con a numero reale. Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

3.12 Teorema sulle successioni monotone

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successio monotona e limitata ammette limite finito.
Osservazione: Naturalmente non è che ogni successione convergente è monotona. Ad esempio $an = \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente ($\to 0$), ma non è monotona.
Dimostrazione: (1) Sia, ad esempio, a_n crescente e limtata.
Poniamo $l = \sup a_n$ (teorema di esistenza dell'estremo superiore: esiste il sup ed è finito perchè a_n è limitata).
Allora, per le proprietà dell'estremo superiore (data che è il minimo dei maggioranti)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : l - \varepsilon < a_\nu \quad (\star)$$

Ma a_n è monotona (crescente), quindi $\forall n > \nu \quad a_\nu \leq a_n$, da $(\star)$

$$l - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq l < l + \varepsilon \qquad \forall n > \nu$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \clubsuit$
(2) Sia ora a_n crescente e non limitata. Fissiamo $M > 0$, allora esiste ν tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente $\forall n > \nu$

$$a_n \geq a_\nu > M$$

$\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \clubsuit$
Osservazione: Assioma di completezza $\implies$ Esistenza dell'estremo superiore $\implies$ Esistenza del limite delle successioni monotone
Osservazione: Si dimostra che $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ è strettamente crescente e limitata. Quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per $n \to +\infty$ di a_n, che è e.

3.13 Limiti Notevoli

- $\lim_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n\to+\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$

Più in generale:

- $\lim_{n\to+\infty}(1+\dfrac{x}{a_n})^a_n = e^x$ con $a_n \to +\infty$, $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to+\infty}(1+\varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ con $\varepsilon \to 0$
- $\lim_{n\to+\infty}(1+x\varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e^x$ con $\varepsilon \to 0$, $x \in \mathbb{R}$

Osservazione: Abbiamo visto, nell'ambito dei **limiti notevoli**, la successione esponenziale a^n, con $a > 1$ e la successione potenza n^b, con $b > 0$.
Entrambe divergono a $+\infty$. Spesso tali successioni vengono confrontate con $\log n, n!$ e con n^n, che pure divergono a $+\infty$.

3.13.1 Infiniti di ordine crescente

$\log n$, n^b, a^n, $n!$, n^n, da cui:

- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n^b} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = 0$

3.14 Criterio del rapporto per le successioni

Sia a_n una successione a termini positivi.
Sia $\dfrac{a_n+1}{a_n} \to a$, se $a \in [0,1)$, allora la successione a_n converge a zero.
Se $a \in (1,+\infty)$, allora la successione a_n diverge a $+\infty$.
Osservazione: Il caso $a = 1$ non è contemplato nell'enunciato.

3.15 Successioni estratte

Considero a_n successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali.
La successione a_{nk}

$$k \in \mathbb{N} \to a_{n_k}$$

prende il nome di **successione estratta da** a_n di inidici n_k.
Osservazione: Si dimostra che se a_n converge ad a, allora ogni successione estratta a_{n_k} converge ad a.
Osservazione: Abbiamo dimostrato che ogni successione a_n convergente è limitata. Il viceversa non è vero, ma vale il seguente notevole risultato:

3.16 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.

4 Funzioni

Dati A, B insieme di numeri reali, una **funzione** da A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrsipondere uno ed un solo elemento di B.

$$f : A \to B \quad A \text{ dominio o insieme di definizione} \quad f(A) \text{ codominio}$$

$$y = f(x) \iff textadognielementox \in A \text{ corrispone tramite la funzione f, l'elemento } y = f(x) \in B$$

Valgono le seguenti:

- f si dice **suriettiva** se $\forall y \in B$, esiste almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$, ovvero $f(A) = B$
- f si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- f si dice **biunivoca** se è sia suriettiva che iniettiva

4.1 Funzione inversa

$f : A \to B$ biunivoca. Allora esiste una funzione **inversa**:

$$f^{-1} : B \to A$$

è la funzione che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

4.2 Funzione monotona

f si dice **monotona** in un insieme A, se verifica una delle seguenti condizioni:
$\forall x_1, x_2 \in A$:

- f strettamente crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- f strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- f decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

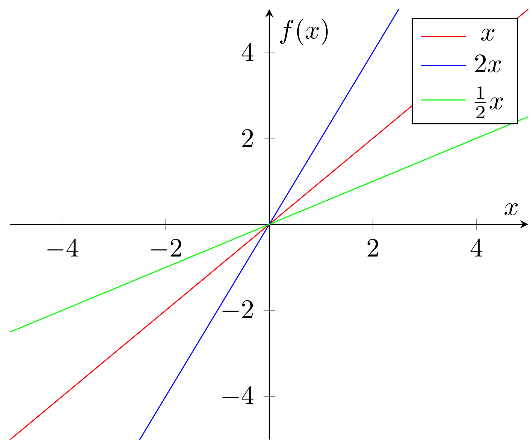
4.3 Criterio di invertibilità

f è strettamente monotona, allora è anche invertibile.

4.4 Funzione lineare

$y = mx + q$

- m è il coefficiente angolare
- se $m = 0$, risulta $y = q$ costante



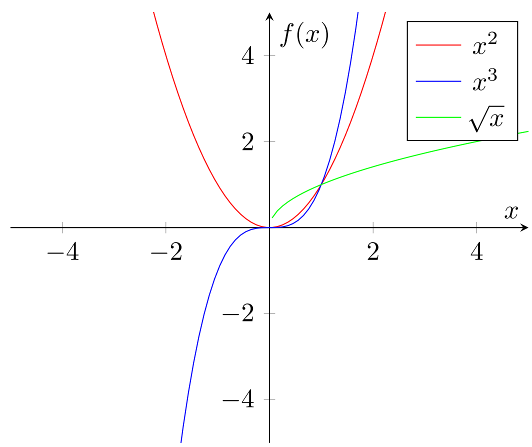
4.5 Funzione potenza

$y = x^n$ con $n \in \mathbb{R}$
Strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$$

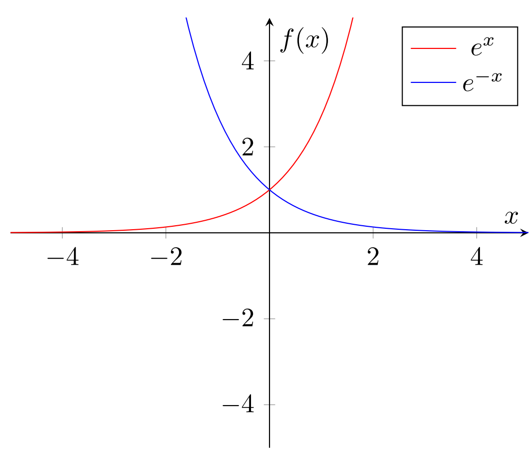
(Ad esempio per $n = 2$ se $0 \leq x_1 \leq x_2$ moltiplicando per x_1 e x_2 si ha $x_1^2 < x_1 x_2$ e $x_1 x_2 < x_2^2 \implies x_1^2 < x_2^2$) e quindi è invertibile e l'inversa è:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad x \geq 0$$



4.6 Funzione esponenziale

$f(x) = a^x$ con a numero reale positivo, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

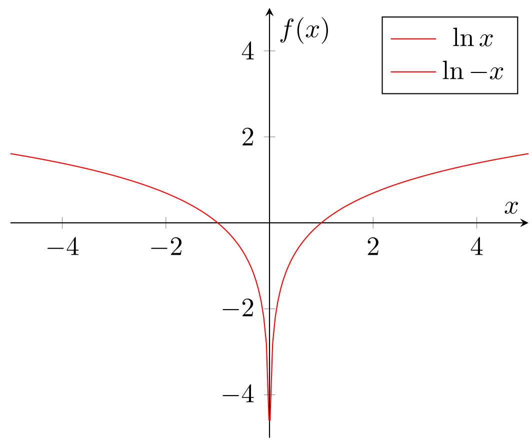


Se $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale è invertibile, la funzione inversa è:

4.7 Funzione logaritmo

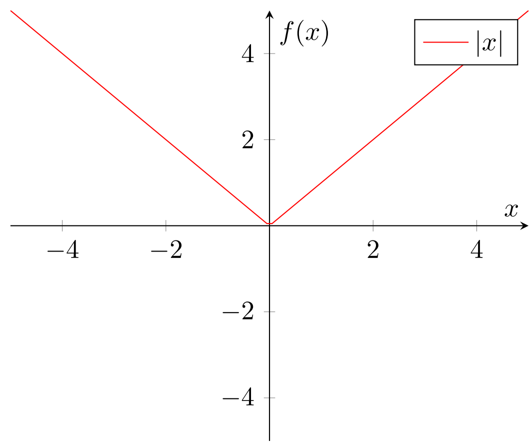
$f(x) = \log_a x$.

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$



4.8 Funzione valore assoluto

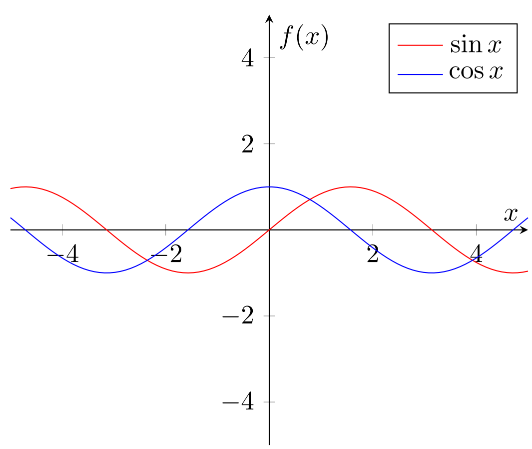
- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2$



4.9 Funzioni trigonometriche

$y = \sin x, \cos x$

- $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

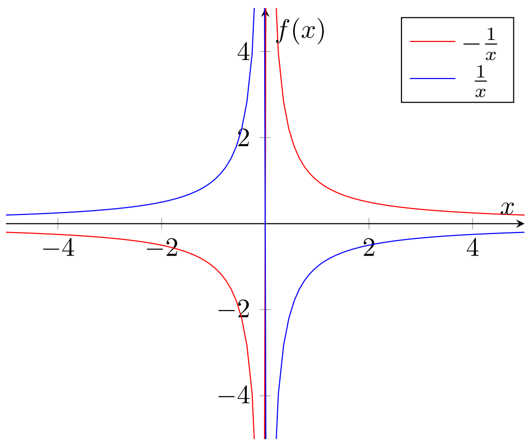


E' interessante vedere la combinazione di funzioni elementari.
Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ definita per $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. E' una funzione **pari**, cioè $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in$ dominio, simmetrica rispetto all'asse y.
(**Dispari** se $f(x) = -f(-x)$, simmetrica rispetto all'origine).

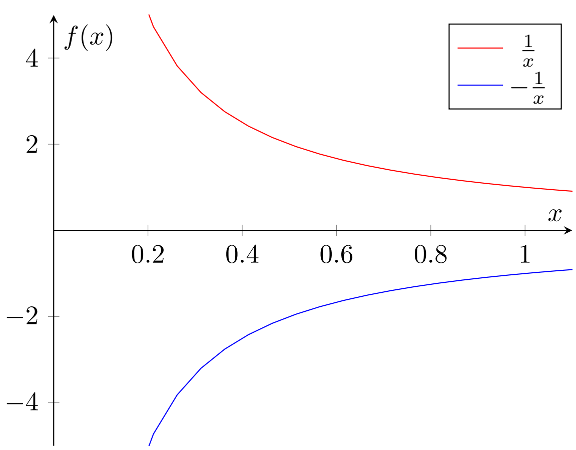
4.10 Esempio, Introduzione limiti

- $y = x$, $y = \sin x$ sono funzioni Dispari
- $y = \cos x$ è una funzione Pari

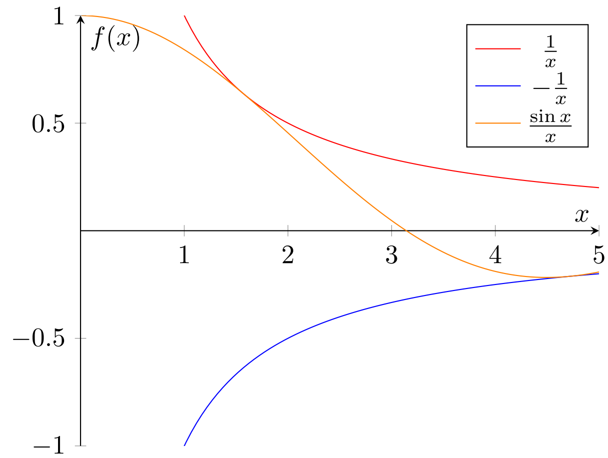
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è una funzione pari, la disegniamo per $x \geq 0$.
Osserviamo che $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e dividendo per x: $\implies -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \quad \forall x > 0$



e $y = \dfrac{\sin x}{x}$ sarà compresa tra i due rami di iperbole per $x > 0$:



per $x > 0$, $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ha lo stesso segno di $\sin x$:



$x_n \to 0 \quad f(x_n) \to ?$
Non è definita per $x = 0$. Cosa succede per $x \to 0$?

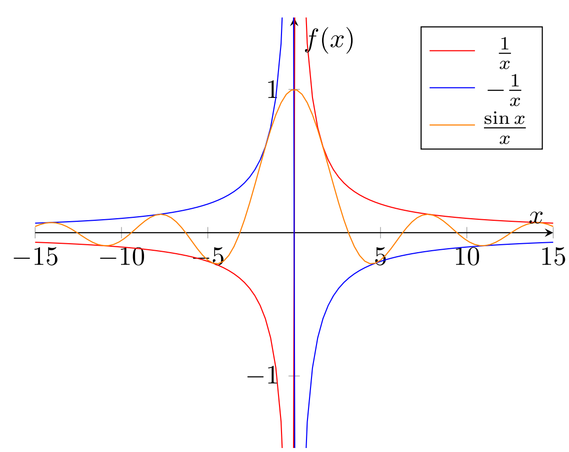
- Tende a zero?
- Tende a $+\infty$?
- O tende a un valore intermedio?

Una formulazione rigorosa del comportamento di una funzione $f(x)$, per x vicino ad un punto x_0, in questo caso $x_0 = 0$, è quella di considerare una generica successione x_n che converge ad x_0 (x_n è "vicino" ad x_0 se n è grande) e la corrispondente successione y_n costutuita dai valori assunti dalla funzione $f(x)$ ($y_n = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$).
Se $y_n = f(x_n)$ converge ad un numero l (che è lo stesso $\forall x_n \to x_0$), allora si dice che $f(x)$ ammette limite uguale a l per $x \to x_0$.

Tornando all'esempio di $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, calcolo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x_n}{x} =?$$

è il limite notevole per le successioni, che sappiamo valere 1.
$\implies \lim_{x\to+\infty} \ f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \iff \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



4.11 Definizione di limite

Sia A un intervallo, o unione finita di intervalli e sia $x_0 \in A$ (anche all'estremo).
Si dice che $f(x)$ ha limite uguale ed l (tende o converge ad l) per $x \to x_0$ se qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$ risulta che $f(x_n) \to l$.
Si dimostra che questa definizione è equivalente alla seguente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \ : \ 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

4.12 Teorema del legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, l \in \mathbb{R}$).

- $\forall x_n \to x_0 \ x_n \in A \setminus \{x_0\} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ 0 \neq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Valgono anche le definizioni con i limiti infiniti:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to x_0 \ x_n \in A \setminus \{x_0\} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to +\infty / iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ : f(x) > M \quad \forall x \in A \ : \ 0 \neq |x - x_0| < \delta$
- $\lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff \forall x_n \to +\infty, \ x_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \ : \ |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \ : \ x > k$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to +\infty \ x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists k \ : \ f(x) > M \quad \forall x \in A \ : \ x > k$

Osservazione: è utile considerare il **limite destro** $x \to x_0^+$ e il **limite sinistro** $x \to x_0^-$, quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0, o solo minori.

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \ : \ |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \ : \ 0 < x - x_0 < \delta$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \ : \ |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \ : \ -\delta < x - x_0 < 0$

4.13 Operazioni con i limiti di funzioni

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente, di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quazionete (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle forme indeterminate.

4.14 Limiti Notevoli

Valgono i limiti notevoli visti per le successioni:

- $\lim_{x \to 0} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
  In particolare $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{b}{x})^x = e^b \quad \forall b \in \mathbb{R}$
  In generale $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \to e \quad$ per $f(x) \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

4.15 Limiti di funzioni composte

Siano $g : x \to y$ e $f : y \to \mathbb{R}$ due funzioni, tali che:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \to y_0} f(y) = l$$

ed esiste $\delta > 0$ tale che risulti $g(x) \neq y_0 \forall x \neq x_0$ dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, allora:

$$f \circ g : x \to \mathbb{R} \quad [f \circ g](x) = f(g(x))$$

si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = l$$

segue che:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = l$$

Esempio: Applichiamo il precedente risultato:
$\lim_{x \to \pm\infty} x \log(1 + \frac{1}{x}) = 1$
Si può scrivere anche $1 + y = t \implies \lim_{t \to 1} \dfrac{\log t}{t - 1} = 1$

5 Funzioni continue

Una funzione f è continua in un punto x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(cioè se il valore limite, per x che tende a x_0, è uguale al valore della funzione in x_0).
Una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$. (se $x_0 = a$ si considera il limite destro, se $x_0 = b$ si considera il limite sinistro).
Abbiamo visto, ad esempio, che $\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$ e $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$; $\implies$ le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue per $x = 0$ ed anche per ogni altro $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si dimostra anche che tutte le funzioni elementari sono continue. Potrei avere una discontinuità quando ho un denominatore come $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ che non è definita in $x = 0$.

5.1 Punti di discontinuità

I punti di discontinuità sono i punti in cui la funzione non è continua.

5.1.1 Discontinuità eliminabile

x_0 è il punto di **discontinuità eliminabile** se esiste il limite di f in x_0 e risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

5.1.2 Discontinuità di prima specie

$f(x)$ presenta in x_0 una **discontinuità di prima specie** se esistono finiti i limiti destro e sinistro di f in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

5.1.3 Discontinuità di seconda specie

$f(x)$ presenta in x_0 una **discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti non esiste o è infinito.

5.2 Teoremi sulle funzioni continue

5.2.1 Teorema della permanenza del segno

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0 ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$).
Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Dimostrazione: la funzione è continua in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ quindi per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

scelgo $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, quindi:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \implies -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Corollario: Se $f(x)$ è continua in x_0 e $f(x) \geq 0$ o $f(x) > 0$ $\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ allora $f(x_0) \geq 0$.

5.2.2 Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$.
Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.
Dimostrazione: troppo lunga guarda pagine 11-25 lez 06.

5.2.3 Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continuia in un intervallo $[a, b]$ assume tutti valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. **Dimostrazione:** Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$.
Dobbiamo provare che $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]\ \exists x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

- Se $y_0 = f(a)$, possiamo prendere $x_0 = a$ e analogamente se $y_0 = f(b)$ possiamo prendere $x_0 = b$.
- Se $y_0 \in (f(a), f(b))$, consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - y_0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e calcolata in $x = a$ e $x = b$

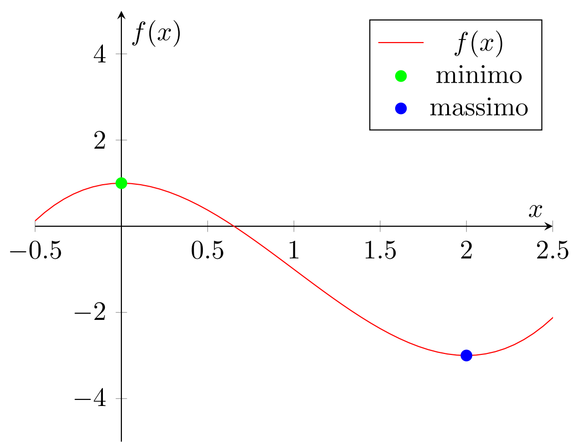
$$g(a) = f(a) - y_0 \qquad g(b) = f(b) - y_0 \implies g(a) < 0 \qquad g(b) > 0$$

Applicando quindi il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione $g(x) \implies$

$$\exists x_0 \in (a, b) \ : \ g(x_0) = 0 \implies f(x_0) = y_0 \quad \clubsuit$$

5.2.4 Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume minimo e massimo in $[a, b]$. Cioè esistono x_1, x_2 in $[a, b]$ che sono detti rispettivamente punti di minomo e di massimo per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. I corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti **minimo** e **massimo** di $f(x)$ in $[a, b]$.



Dimostrazione: Hp: funzione continua in un intervallo chiuso e limitato.
Poniamo $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ esiste, potrebbe essere $M < +\infty$ o $M = +\infty$.
Verifichiamo ora che $\exists x_n \in [a, b] \ : \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M(\star)$.

- Se $M = +\infty$, per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] \ : \ f(x_n) > n$. Per il teorema di confronto $f(x_n) \to M = +\infty$.
- Se invece $M < +\infty$, sempre per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a, b]$ tale che $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ e quindi $f(x_n) \to M$ per il teorema dei carabinieri. $(\star)\ \ \lim_{m \to +\infty} f(x_n) = M$
- Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, da $x_n \subset [a, b]$ (limitate), esiste una estratta x_{nk} convergente ad un punto $x_0 \in [a, b]$.

$$x_{nk} \to x_0$$

  Ma poichè la funzione è continua:

$$f(x_{nk}) \to f(x_0) \quad (n \to +\infty)$$

Allora

$$M = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{nk}) = f(x_0) \implies M = f(x_0)$$

Quindi abbiamo dimostrato che M è un massimo perchè:

$$f(x_0) = M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \text{ è un massimo } \clubsuit$$

Conseguenza: La funzione è limitata, dal massimo e minimo.

Possiamo ora dare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

5.2.5 Teorema di esistenza dei valori intermedi (formulazione II)

Una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ ammette tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo. Tra i risultati sulle funzioni continue, si dimostra come applicazione, anche il seguente:

5.2.6 Criterio di invertibilità

Una funzione continua e stretteamente monotona in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.

6 Partizioni

Quindi per ogni partizione P, poniamo

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

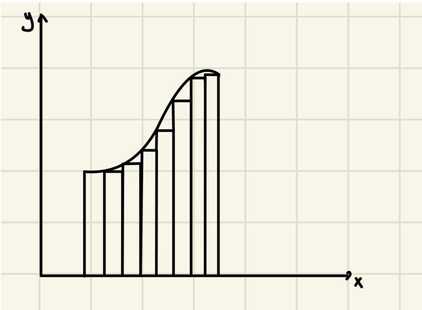


Figure 5: Inf

(In questo caso è un minimo)
e poniamo

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

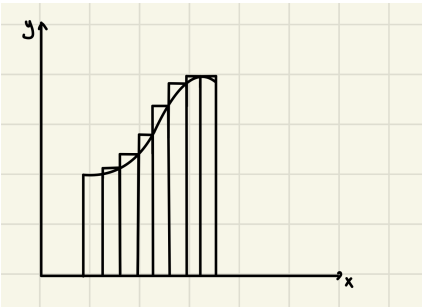
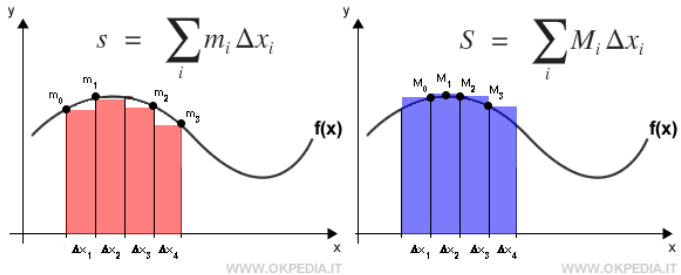


Figure 6: Sup

(In questo caso è un massimo)

Ad esempio:



In entrambe le figure sono rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Sono aree per difetto e per eccesso della regione che voglio stimare.
Definisco le SOMME INTEGRALI INFERIORI: Somma delle aree dei rettangoli inscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

e le SOMME INTEGRALI SUPERIORI: Somma delle aree dei rettangoli circoscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

6.1 Osservazione

Se $f(x)$ è positiva, queste somme integrali sono la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (sono definite a prescindere dal segno)

Si dimostra che:

$$S(P) \leq S(P)$$

e indicando con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori (P) al variare delle partizioni P dell'intervallo $[a, b]$ e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\} \quad B = \{S(P)\}$$

si dimostra che A e B sono insiemi SEPARATI, cioè $A \leq B$:

$$a \leq b \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall b \in B$$

$\Longrightarrow$ Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

$$a \leq c \leq b$$

In generale questo elemento non è unico, e vale la seguente:

7 Integrale definito

Se l'elemento di separazione tra A e B è unico, allora si dice che f(x) è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in $[a, b]$ e l'elemento si chiama con:

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si chiama INTEGRALE DEFINITO di f in $[a, b]$. Quindi posto:

$$S(f) = sup\{s(P) : P \quad partizione \quad di \quad [a, b]\}$$

$$S(f) = inf\{S(P) : P \quad partizione \quad di \quad [a, b]\}$$

se $s(f) = S(P) \rightarrow$ allora f(x) è integrabile secondo Riemann.

7.1 Funzione non integrabile secondo Riemann

Funzione di Dirichlet:

$$f(x)\colon \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

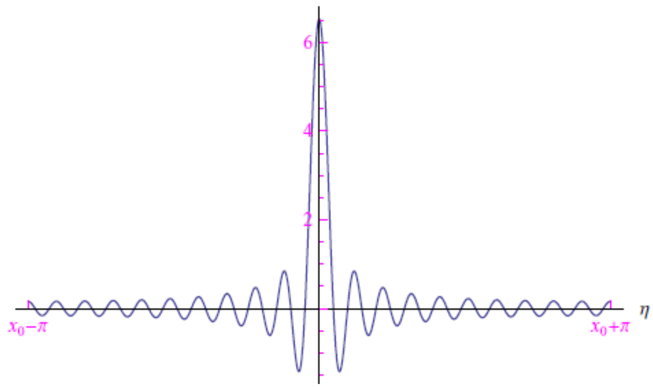


Figure 7: Funzione di Dirichlet

In ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ cadono sia punti razionali che irrazionali:

$$m_k = inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

Allora: (somma integrali inferiori)

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = b - a \end{aligned}$$

$\rightarrow S(P) = 0 \; \forall \; P \wedge S(P) = b - a \; \forall P$
Non è integrabile secondo Riemann. (lo sarà secondo LEBESGUE)

7.2 Proprietà

7.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo

Se a,b,c sono tre punti di un intervallo dove la funzione f(x) è integrabile, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

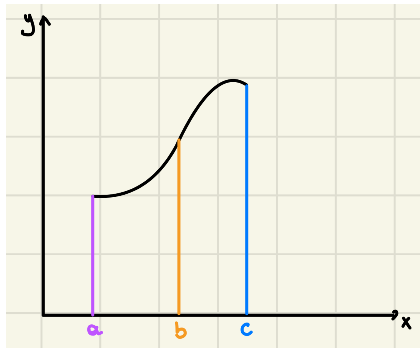


Figure 8: Grafico additività integrale

7.2.2 Linearità dell'integrale

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$, anche $f + g$ è integrabile in $[a, b]$. Dato c numero reale, anche $c \cdot f$ è integrabile in $[a, b]$.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

7.2.3 Confronto tra gli integrali

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

7.2.4 Integrabilità delle funzioni continue

Sia f(x) una funzione continua in $[a, b]$. Allora f(c) è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

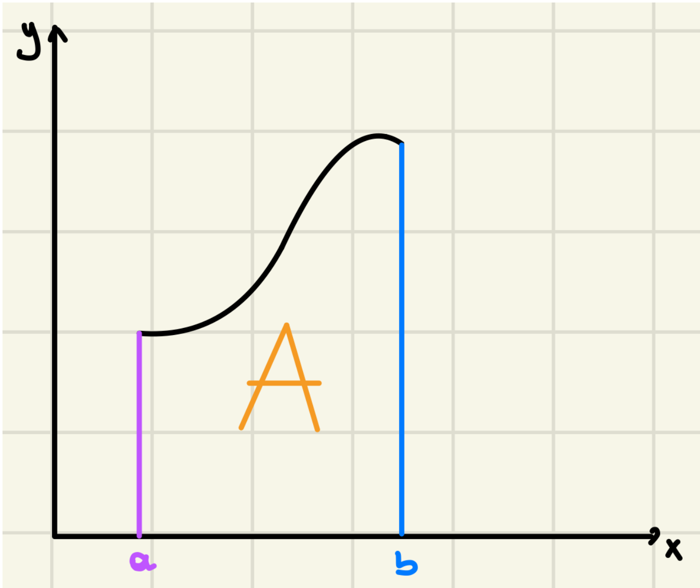
7.3 Teorema della media

Se f(x) è continua in $[a, b]$, esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

7.4 Interpretazione geometrica del teorema della media

f(x) continua in $[a,b]$, ad esempio:



Voglio calcolare l'area del rettangolo A. Il teorema della media afferma che $\exists$ un valore opportuno (cioè un valore non scelto a caso, ma in base alla particolare funzione considerata) f(x_0), tale che:

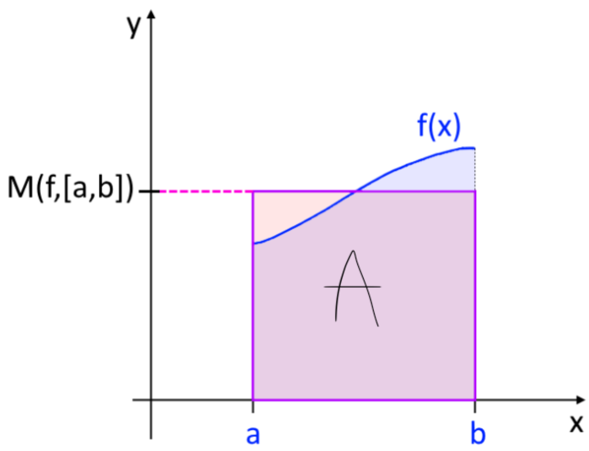


Figure 9: Teorema della media

Per cui area A = area B, dove B è un rettangolo che ha per base l'intervallo $[a,b]$ e per altezza $f(x_0)$.

7.4.1 Dimostrazione del teorema della media

f una funzione continua in $[a,b]$ per ipotesi. Per il teorema di Weierstrass f(x) assume massimo e minimo in $[a,b]$, cioè esistono m e M tali che: (teo esistenza valori intermedi)

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a,b]$$

Consideriamo ora una partizione P di $[a,b]$, la più semplice possibile, cioè:

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

Le relative somme integrali inferiori e superiori sono date quindi da:

$$s(P) = m(b-a)$$

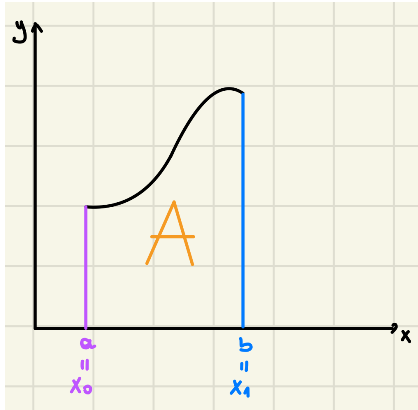


Figure 10: Enter Caption

$$S(P) = M(b-a)$$

// grafico

L'integrale definito è, per definizione, l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori (qualunque sia la partizione P di $[a,b]$). Quindi:

$$s(P) \leq \int_b^a f(x)dx \leq S(P)$$

$$\rightarrow m(b-a) \leq \int_b^a f(x)dx \leq M(b-a)$$

se e solo se

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = y_0$$

y_0 è un numero compreso tra m ed M, minimo e massimo di f(x) $\implies$ per il teorema di esistenza dei valori intermedi, $\exists x_0 \in [a,b]\ t.c.$

$$f(x_0) = y_0$$

$$\implies f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = y_0$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$$

7.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Sia f(x) una funzione monotona in $[a,b]$. Allora f(x) è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ (indipendente dalle discontinuità)

7.5.1 Osservazioni

In vista di andare a definire gli **INTEGRALI INDEFINITI**, concludiamo con alcune notazioni e definizioni. Abbiamo definito l'integrale definito come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove a e b sono gli estremi di integrazione, la funzione f si dice funzione **integranda**, la variabile x, si dice **variabile di integrazione**.

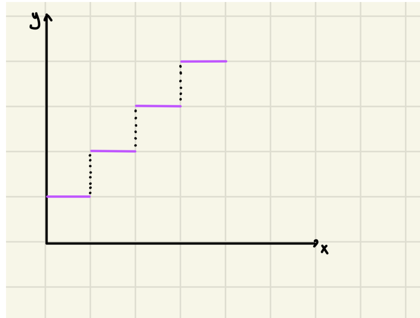


Figure 11: funzione a scalini

Notiamo che il risultato dell'integrazione non dipende da x, ma è un numero reale. Poniamo inoltre per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

e

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

8 Integrali Indefiniti

Mettiamo ora in evidenza, ma dei risultati più importati che lega le derivate con gli integrali. Preliminarmente definiamo la FUNZIONE INTEGRALE.

8.1 Funzione integrale

Data f una funzione continua in $[a, b]$, definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f()$$

qui "x" è impegnato.

$$\implies F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

9 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \ \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.
Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

Ovvio che il risultato è...?
Potrebbe essere:

$$\textbf{(1-1)} + \textbf{(1-1)} + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

oppure:

$$\textbf{1} + \textbf{(-1+1)} + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.
Allora come si procede?
Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

9.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

9.1.1 Esempio 1

$a_k = 1 \ \forall k$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \dots, S_n = n$$

$\implies S_n \to \infty$

9.1.2 Esempio 2

$a_k = (-1)^{k+1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \dots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste!.

9.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k. Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \to \infty$ di S_n, si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamtento della seria si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una seria è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

9.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \dots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo èer escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

9.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

9.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n\to\infty} S_=S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star)\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1}, ottengo la successione S_{n+1}. (Per definizione di successione di somme parziali)
Allora da $(\star)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$
$$\implies a_n \to 0$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.
Vediamo due esempi di serie modello:

9.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).
Calcoliamo la somma parziale S_n:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e $\lim_{n\to\infty} S_n =?$.
Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

9.4.1 Osservazione

La formual vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \Big\{ \dots$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1\ (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

9.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di x, calcolare la somma della serie.
! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.
! Capisco che è geometrica perchè dipende da $x - 4$
Risoluzione:

- è una serie geometrica di ragione $x - 4$.

- la serie geometrica data converge per:

$$|x-4|<1 \iff -1<x-4<1 \iff 3<x<5$$

- la somma della serie è data da: $\dfrac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2-8x+16}{5-x}$$

$$-1 = \text{ I° termine della serie } = (x-4)^0 = 1$$

9.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.
! Non si conosce la somma.
Osservazione E' un esempio di serie dove $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ è **divergente.**

9.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{n^p} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la seria armonica generalizzata è:

- **convergente** per $p>1$
- **divergente** per $p \leq 1$

9.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini non negativi se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 0$.
Diremo che una serie è a termini positivi se $a_n > 0, \forall n$.

9.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente poisitivamente.
Dimostrazione: La successione delle somme parziali S_n di una seria a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).
Infatti, poichè $a_{n+1} \geq 0, \forall n$, risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

$\implies$ Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:
"Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito."
$\implies$ S_n ammette limite (eventualmente a $+\infty$) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

9.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni **criteri** per stabilire il **carattere** di una serie: (non sempre si risce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

9.8.1 Criterio del rapporto:

Si utilizza solitamente per il fattoriale.
Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L \leq 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \geq +\infty$, la serie diverge.

Osservazione Nel caso: $0 \leq L \leq 1$ quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
Esempi:
da fare

9.8.2 Criterio della radice:

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L < 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \leq +\infty$, la serie diverge.

Esempi:
da fare
Esercizio appello

9.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$:

- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

9.8.4 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ quindi $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ e considero $b_n = \frac{1}{n^p}$ con p?
  valuto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
  - $b_n = \frac{1}{n^2} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è una serie convergente, quindi non riesco a concludere.
  - $b_n = \frac{1}{n^3} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^3 = +\infty$, stesso problema di prima e non riesco a concludere.
  - $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge e quindi concludo con il criterio del **confronto mediante limiti** e la serie data converge.
- **Determinare il carattere della serie:**
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3})$$
$$a_n = \sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3} \cdot \frac{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{6n^3+1-6n^3}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}}$$
  Utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti e prendiamo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies \frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (per $n \to +\infty$) quindi la serie data si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$
- **Determinare il carattere della serie:**
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3})$$
$$a_n = n^3(1 - \cos \frac{1}{n^3}) = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$
  prendiamo $b_n = \frac{1}{n^3}$ e utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti. Allora, cerchiamo di ricondurci al limite notevole $\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}} \to \frac{1}{2}$$
- Stabilire, per $x \geq 0$, il carattere della serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$
  Utilizziamo il criterio del rapporto:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x^n (n-1)!}{(n-1)! n x^n x^{-1}} = \frac{x}{n} \to 0 \ \ \forall x > 0 \implies \text{ la serie converge } \forall x > 0$$
- Stabilire, per $x > 0$ il carattere della serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n (\frac{n+1}{2n-1})^{2n}$$
  utilizziamo il criterio della radice:
$$\sqrt[n]{a_n} x \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \to \frac{x}{4} \ (n \to +\infty)$$

Quindi se $0 < x < 4$, allora la serie converge. Se $x > 4$, allora la serie diverge a $+\infty$.
Se $x = 4$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n} = 1^{\infty} = \lim_{n\to+\infty} \left[(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right]^{\varepsilon_n \cdot 2n} = \cdots = e^3$$

$a_n \not\to 0$ e poichè è una serie a termini positivi $\implies$ diverge a $+\infty$.

- Stabilire per quali valori di α la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \cdot (\sqrt{1 + \sin\frac{1}{n^2}} - 1)$$

Utilizziamo lo sviluppo (Taylor):

$$\sin\varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

Inoltre:

$$\sqrt{1+\varepsilon_n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

$$\implies \sin\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\implies a_n = n^{\alpha}(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} - 1) = n^{\alpha}\left(\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$

a_n si comporta come $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ converge $\iff 2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$. Per il criterio del confronto mediante i limiti, la serie data converge $\iff \alpha < 1$.

9.9 Serie alternate

Consideriamo serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad \text{con } a_n > 0$$

Vale il seguente criterio:

9.10 Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)

Sia a_n una sucessione tale che:

- $a_n \geq 0$
- infinitesima ($a_n \to 0$)
- decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$)$\forall n$

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\, a_n \text{ converge}$$

9.10.1 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

9.10.2 Esercizio del compito 20 07 21

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^3+5}$$

La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \to 0$
- a_n decrescente, infatti $\dfrac{1}{n^3+5}$ è decrescente e la funzione $g(x) = \sin x$ è crescente per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

9.11 Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se risulta convergente la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. In generale, una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente.
Ad esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|(-1)^n\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

è la serie armonica che diverge.

9.12 Teorema

Una serie assolutamente convergenete, è convergente.

9.12.1 Esercizio del compito (predcedente)

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n^3+5}$ è anche assolutamente convergente. Infatti:

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n^3+5}\right) \cong \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$ converge.

9.12.2 Esercizi di compito a fine pdf (da fare)

10 Equazioni differenziali

Sia

$$y'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

dove $g(x)$ è una funzione di una variabile reale, continua in un intervallo $[a,b] \in \mathbb{R}$.
Per il **teorema fondamentale del calcolo integrale** sappiamo trovare una **primitiva** $G(x)$ di $g(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, data da:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

dove x_0 è un numero reale fissato in $[a,b]$.
Quindi possiamo rappresentare ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b] \quad (\star)$$

Integrando entrambi i membri di $(\star)$ tra x_0 e x otteniamo:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

e rappresentiamo la soluzione nella forma:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad x \in [a,b]$$

Questo è un esempio molto particolare di equazione differenziale, si dice che $y(x)$ è soluzione del **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in quanto $y(x)$ è soluzione ed inoltre soddisfa la **condizione iniziale** nel punto $x = x_0$:

$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} g(t)\,dt = y_0$$

10.1 Osservazione

L'equazione differenziale considerata si dice del **primo ordine**, poichè l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

10.2 Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine

Sia

$$y'(x) = \lambda y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove λ è un parametro reale fissato.
Dobbiamo trovare una soluzione di questa equazione differenziale, cioè una funzione $y = y(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, tale che

$$y'(x) = \lambda y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una soluzione è data da:

$$y(x) = ce^{\lambda x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove c è una costante arbitrariamente fissata in $\mathbb{R}$.
Si verifica subito che è soluzione, infatti derivando si ottiene:

$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

10.2.1 Domanda

Tutte le possibile soluzoni sono della forma $y(x) = ce^{\lambda x}$? Sì, ma non lo dimostriamo.

10.3 Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico

$$y''(x) + \omega^2 y = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove $\omega \neq 0$ è un parametro reale fissato.
Una famiglia di soluzioni è data da:

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti in $\mathbb{R}$.
Verifica:

$$y'(x) = -c_1 \omega \sin \omega x + c_2 \omega \cos \omega x$$
$$y''(x) = -c_1 \omega^2 \cos \omega x - c_2 \omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) = -\omega^2 y(x)$$
$$\Longrightarrow \; y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico sono nella forma $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$? Sì, ma non lo dimostriamo.

10.4 Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

dove $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ sono coefficienti e $g(x)$ è il termine noto. (funzioni continue in un intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$).
Se $g(x) = 0$ l'equazione (1) si dice **omogenea**.

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

10.5

Una soluzione dell'equazione differenziale (1) o (2) è una funzione $y = y(x)$, derivabile n volte in $[a, b]$, che soddisfa la condizione (1) o (2) $\forall x \in [a, b]$. Le soluzioni delle equazioni differenziali lineari sono dette anche **integrali** e l'insieme di tutte le soluzione è detto **integrale generale**.

10.6 Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare

L'integrale generale di un'operazione differenziale **non omogenea** è dato dall'insieme delle soluzione dell'equazione omogenea, sommate ad una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

10.7 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = g(x)$$

con $a(x), b(x), g(x)$ funzioni continue in un intervallo $[a, b]$.
Consideriamo inizialmente l'equzione omogenea associata:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$$

Una soluzione è una funzione $y = y(x)$, derivabile due volte in $[a, b]$, che soddisfa l'equazione differenziale.
Considereremo equazioni differenziali di questo tipo, a coefficienti costanti.

10.8 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti.
Associamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

equazione di secondo grado dove:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \Delta > 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2} \qquad \Delta = 0$$

E se il discriminante è negativo?
Ricordiamoci come si calcola la radice quadrata di un numero negativo:

$$\sqrt{\Delta} \text{ con } \Delta < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1(-\Delta)} = \pm i\sqrt{-\Delta}$$

e quindi le soluzioni complesse nel caso $\Delta < 0$ sono:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

cioè $\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$
$\lambda_1 = \alpha - i\beta$
$\lambda_2 = \alpha + i\beta$
$\alpha = -\frac{a}{2}$
$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

10.9 Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

Tutte le soluzioni sono date da:

- $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \Delta > 0$
- $(c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x} \quad \Delta = 0$
- $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \Delta < 0$

Al variare delle costanti c_1, c_2.

10.9.1 Esempio

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

L'equazione differenziale ha come equazione caratteristica, l'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \implies \lambda_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

$\implies$ L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

10.9.2 Esempio 2

Risolvere l'eqazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

Posso trovare i α e β, ma mi conviene utilizzare direttamente la formula del Δ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i \implies \lambda_1 = 1 - i \quad \lambda_2 = 1 + i$$

L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

10.10 Esempio 3

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

e l'integrale generale è dato da:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$$

10.11 Equazioni differnziali lineari non omogenee

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

L'integrale generale delle soluzioni è dato da:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

al variare delle costanti c_1 e c_2. $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni dell'omogenee associata in $[a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, (che abbiamo visto nel caso di coefficienti costanti) e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.
Ci sono casi particolari in cui è possibile ricavare una soluzione in modo diretto (nel caso di equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti).

10.11.1 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 \quad (\star)$$

Come primo passo consideriamo l'omogenea associata e quindi, essendo a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

per cui l'integral generale dell'omogenea associata è dato da:

$$(c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

al variare delle costanti c_1 e c_2.
Ora ricerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ e poichè il termine noto dell'equazione differenziale è una equazione di secondo grado, la ricerchiamo nella forma:

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + C$$

Sostituendo $\bar{y}(x)$ nell'equazione differenziale $(\star)$ otteniamo:

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = x^2 + 4x - 1 \quad \implies \bar{y}(x) = ax^2 + bx + c \quad \bar{y}' = 2ax + b \quad \bar{y}'' = 2a$$

$$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 4x - 1 \implies ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = x^2 + 4x - 1$$

Quindi occorre che:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 4 \\ 2a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

da cui $a = 1, b = 0, c = -3$.
Quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(x) = x^2 - 3$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale iniziale è dato da:

$$(c_1 + c_2 x)e^{-x} + x^2 - 3$$

10.11.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale non omogenea:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

$\implies$ l'integrale generale dell'omogenea associata è dato quindi da:

$$\ldots$$

10.11.3 Osservazione

Abbiamo visto un metodo per trovare una soluzione, quando il termine noto è un polinomio.
Ora vediamo un esempio, in cui:

$$g(x) = a \sin x + b \cos x$$

10.11.4 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + y' + 2y = 2 \cos x$$

Consideriamo prima l'equazione caratteristica dell'omogenea associata:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \implies \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$
$\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$
L'integrale generale è dato da:

$$c_1 e^{-\dfrac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{-\dfrac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$$