

Analisi I

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1	Assiomi dei numeri reali	5
1.1	Assiomi relativi alle operazioni	5
1.2	Assiomi relativi all'ordinamento	5
1.2.1	Assioma di completezza	5
1.3	Denso	6
1.3.1	$\sqrt{2}$	6
2	Complementi ai numeri reali	6
2.1	Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore	6
2.1.1	Il massimo e il minimo sono unici	6
2.1.2	Osservazione	7
2.2	Maggiorante e Minorante	7
2.3	Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore	7
2.3.1	Estremo superiore	7
2.3.2	Estremo inferiore	8
2.3.3	Osservazione	8
3	Successioni e Limiti	8
3.1	Limiti	9
3.2	Proposizione	9
3.3	Successioni Limitate	10
3.4	Teorema	10
3.5	Operazioni con i limiti	10
3.6	Forme infeterminate o di indecisione	11
3.7	Teoremi di confronto	11
3.7.1	Teorema della permanenza del segno	11
3.7.2	Teorema dei carabinieri	11
3.7.3	Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima	12
3.8	Alcuni limiti notevoli	12
3.9	Limiti relativi alle funzioni trigonometriche	12
3.10	Successione notevole importante	12
3.11	Successioni Monotone	13
3.12	Teorema sulle successioni monotone	13
3.13	Limiti Notevoli	13
3.13.1	Infiniti di ordine crescente	14
3.14	Criterio del rapporto per le successioni	14

3.15	Successioni estratte	14
3.16	Teorema di Bolzano-Weierstrass	14
4	Funzioni	14
4.1	Funzione inversa	15
4.2	Funzione monotona	15
4.3	Criterio di invertibilità	15
4.4	Funzione lineare	15
4.5	Funzione potenza	16
4.6	Funzione esponenziale	16
4.7	Funzione logaritmo	16
4.8	Funzione valore assoluto	17
4.9	Funzioni trigonometriche	17
4.10	Esempio, Introduzione limiti	18
4.11	Definizione di limite	20
4.12	Teorema del legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni	20
4.13	Operazioni con i limiti di funzioni	20
4.14	Limiti Notevoli	20
4.15	Limiti di funzioni composte	21
5	Funzioni continue	21
5.1	Punti di discontinuità	21
5.1.1	Discontinuità eliminabile	21
5.1.2	Discontinuità di prima specie	22
5.1.3	Discontinuità di seconda specie	22
5.2	Teoremi sulle funzioni continue	22
5.2.1	Teorema della permanenza del segno	22
5.2.2	Teorema dell'esistenza degli zeri	22
5.2.3	Teorema dell'esistenza dei valori intermedi	22
5.2.4	Teorema di Weierstrass	23
5.2.5	Teorema di esistenza dei valori intermedi (formulazione II)	23
5.2.6	Criterio di invertibilità	23
6	Derivate	24
6.1	Definizione di derivata	24
6.2	Derivabilità e continuità	24
6.3	Derivate di ordine superiore	24
6.4	Operazioni con le derivate	25
6.4.1	Dimostrazione regola del prodotto	25
6.5	Derivazione delle funzioni composte	25
6.6	Teorema di derivazione delle funzioni composte	25
6.7	Teorema di derivazione delle funzioni inverse	25
6.8	Principali forme di derivazione	26
6.9	Significato geometrico della derivata: retta tangente	26

7 Applicazioni alle derivate	27
7.1 Studio di funzioni	27
7.2 Teorema di Fermat	28
7.3 Teorema di Rolle	28
7.4 Interpretazione geometrica	29
7.5 Teorema di Lagrange	29
7.6 Conseguenze del teorema di Lagrange	30
7.6.1 Criterio di monotonia	30
7.6.2 Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo	30
7.7 Funzioni concave e convesse	30
7.7.1 Criterio di convessità	31
7.8 Criterio per determinare se un punto è di massimo o minimo relativo per una funzione derivabile due volte	31
7.9 Metodo di Newton per il calcolo delle radici di un'equazione	31
7.10 Metodo di Newton per il calcolo numerico approssimato degli zeri di una funzione	31
7.11 Applicazione del metodo di Newton	32
7.11.1 Step 1	32
7.11.2 Step 2	32
7.11.3 Step n	32
7.12 Teorema	32
7.13 Teorema di l'Hôpital	33
7.14 Studio del grafico di una funzione	33
7.14.1 Asintoti Verticali	33
7.14.2 Asintoti Orizzontali	34
7.14.3 Asintoti Obliqui	34
8 Partizioni	34
8.1 Osservazione	35
9 Integrale definito	36
9.1 Funzione non integrabile secondo Riemann	36
9.2 Proprietà	38
9.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo	38
9.2.2 Linearità dell'integrale	38
9.2.3 Confronto tra gli integrali	38
9.2.4 Integrabilità delle funzioni continue	38
9.3 Teorema della media	38
9.4 Interpretazione geometrica del teorema della media	39
9.4.1 Dimostrazione del teorema della media	39
9.5 Integrabilità delle funzioni monotone	40
9.5.1 Osservazioni	41
10 Integrali Indefiniti	41
10.1 Funzione integrale	41
11 Serie Numeriche	41
11.1 Somma parziale	42
11.1.1 Esempio 1	42
11.1.2 Esempio 2	42

11.2	Definizione di Serie Numerica Astratta	43
11.2.1	Osservazione	43
11.3	Condizione necessaria di convergenza di una serie	43
11.3.1	Dimostrazione	43
11.4	Serie geometrica	44
11.4.1	Osservazione	44
11.4.2	Esercizio del compito (21/06/21)	44
11.5	La serie armonica	45
11.6	La serie armonica generalizzata (con esponente)	45
11.7	Serie a termini non negativi	45
11.7.1	Teorema sulle serie a termini non negativi	45
11.8	Criteri di convergenza per serie a termini non negativi	45
11.8.1	Criterio del rapporto:	46
11.8.2	Criterio della radice:	46
11.8.3	Criterio del confronto mediante i limiti	46
11.8.4	Esempi	47
11.9	Serie alternate	48
11.10	Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)	48
11.10.1	Esempi	49
11.10.2	Esercizio del compito 20 07 21	49
11.11	Convergenza Assoluta	49
11.12	Teorema	49
11.12.1	Esercizio del compito (precedente)	49
11.12.2	Esercizi di compito a fine pdf (da fare)	49
12	Equazioni differenziali	49
12.1	Osservazione	50
12.2	Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine	50
12.2.1	Domanda	51
12.3	Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico	51
12.4	Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale	51
12.5	51
12.6	Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare	51
12.7	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	51
12.8	Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti	52
12.9	Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti	52
12.9.1	Esempio	52
12.9.2	Esempio 2	53
12.10	Esempio 3	53
12.11	Equazioni differenziali lineari non omogenee	53
12.11.1	Esempio	54
12.11.2	Esempio 2	54
12.11.3	Osservazione	55
12.11.4	Esempio	55

1 Assiomi dei numeri reali

- Assiomi relativi alle operazioni
- Assiomi relativi all'ordinamento
- Assioma di completezza

1.1 Assiomi relativi alle operazioni

Sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione tra coppie di numeri reali e valgono le proprietà:

- Proprietà associativa
- Proprietà commutativa
- Proprietà distributiva
- Esistenza degli elementi neutri
- Esistenza degli opposti
- Esistenza degli inversi

1.2 Assiomi relativi all'ordinamento

E' definita la relazione di Minore o Uguale \leq .

- Dicotomia
- Proprietà Assimetrica
- Assioma di completezza

1.2.1 Assioma di completezza

$$\forall a \in A, \forall b \in A, a \leq b \implies \exists c \in A : a \leq c \leq b$$

Esempi:

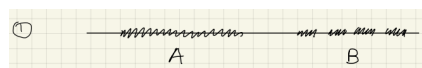


Figure 1: Esempio 1

Esistono infiniti c.

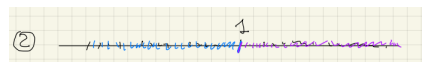


Figure 2: Esempio 2

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \implies c = 1$$

Osservazione: Non tutti gli insiemi hanno il più grande o il più piccolo elemento. Ad esempio:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

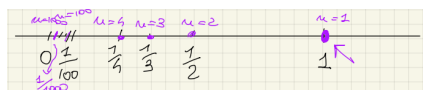


Figure 3: Esempio 3

Non ha un elemento più piccolo. (Invece c'è il più grande che è 1).

1.3 Denso

Si dimostra che \mathbb{Q} è denso sulla retta reale (nel senso che fra due numeri razionali è sempre possibile trovare un terzo, anzi infiniti).

$$a = \frac{m_1}{n_1} \quad b = \frac{m_2}{n_2}$$

faccio la media $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}{2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{2 n_1 n_2} \implies \in \mathbb{Q}$

1.3.1 $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ non si può rappresentare come numero razionale.

Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo, supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ posso supporre che m, n siano primi tra loro e che al più uno tra loro sia pari. Allora $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2 (*)$
 $\implies m^2$ deve essere pari e quindi m è pari.

Posso esprimere m nella forma: $m = 2k$ con k intero.

Ricavo che $\implies 2n^2 = m^2 = 4k^2$ semplifico per 2 e ottengo $n^2 = 2k^2$

Ripeto il ragionamento precedente $\implies n^2$ pari e quindi anche n pari. Ma allora sia m che n risultano pari, ASSURDO! Avevo supposto che fossero primi ed (al più) uno dei due pari. ♣

Per capire meglio guarda esempi della Francy nella prima lezione.

2 Complementi ai numeri reali

2.1 Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore

$$\text{Def: } M \text{ è il massimo di } A \begin{cases} M \in A & (1) \\ M \geq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il massimo di un insieme di numeri reali A quindi, se esiste, è un numero M dell'insieme A , che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme A .

$$\text{Def: } m \text{ è il minimo di } A \begin{cases} m \in A & (1) \\ m \leq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il minimo di A analogamente, se esiste, è un numero m di A , che è minore o uguale ad ogni altro elemento di A .

2.1.1 Il massimo e il minimo sono unici

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.

Dimostrazione: Siano M_1 e M_2 due massimi di A .

Ma allora per definizione di massimo,

$$(1) M_1 \geq a \quad (2) M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Sempre per definizione, M_1, M_2 sono elementi di A .

Quindi da (1) se $a = M_2$, ottengo $M_1 \geq M_2$

Da (2) se $a = M_1$, ottengo $M_2 \geq M_1$

Segue che $M_1 = M_2$ ♣.

2.1.2 Osservazione

Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più grande elemento di A è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.
- $B = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più piccolo elemento di B è 0, che è il minimo, il più grande non c'è.

2.2 Maggiorante e Minorante

L si dice **maggiorante** per un insieme A se

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$

l si dice **minorante** per un insieme A se

$$l \leq a \quad \forall a \in A$$

Non sempre un insieme A ammette maggioranti e minoranti.

L'insieme A si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.

L'insieme A si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.

L'insieme A si dice **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente, in simboli:

$$l \leq a \leq L \quad \forall a \in A \implies \exists M : |a| \leq M \quad \forall a \in A$$

2.3 Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A .

$$A = \{a \in A\} \quad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

Applichiamo l'assioma di completezza di due insiemi A e B , quindi esiste c numero reale tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Dato che $c \geq a \quad \forall a \in A$, c è un maggiorante di A , cioè $c \in B$.

Ma c è anche tale che $c \leq b$ (minore o uguale a tutti gli elementi di B). $\implies c$ è un minimo. ♣

Allora possiamo dare la seguente definizione:

2.3.1 Estremo superiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se M è il minimo dei maggioranti di A . In simboli:

$$M \text{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} M \geq a & \forall a \in A \quad \textbf{(1)} \text{ (M è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : M - \varepsilon < a \quad \textbf{(2)} \text{ (M è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

Analogamente:

2.3.2 Estremo inferiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che m è l'**estremo inferiore** di A se m è il massimo dei minoranti di A . In simboli:

$$m \text{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \quad (1) \text{ (m è minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : m + \varepsilon > a \quad (2) \text{ (m è il massimo dei minoranti)} \end{cases}$$

\implies Quindi se un insieme è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale. Altrimenti:

- L'estremo superiore è $+\infty$ se A non è limitato superiormente
- L'estremo inferiore è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente

$$\begin{cases} \sup A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} & \exists a \in A : M < a \\ \inf A = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} & \exists a \in A : m > a \end{cases}$$

Ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

2.3.3 Osservazione

Assioma di completezza (punto di partenza) \implies Esistenza dell'estremo superiore.

3 Successioni e Limiti

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n . Una successione è una funzione di $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- $1 \rightarrow a_1$
- $2 \rightarrow a_2$
- $3 \rightarrow a_3$
- $n \rightarrow a_n$

Simbolo: (a_n) oppure più semplicemente a_n

A noi interessa il comportamento della successione per n grande, più precisamente il **limite** della successione a_n , cioè un numero reale ($a \in \mathbb{R}$) che sia "vicino" ai termini della successione che hanno l'indice n "grande".

Consideriamo a_n con a limite della successione ($a \in \mathbb{R}$). a è il limite della successione se comunque si scelga un intervallo

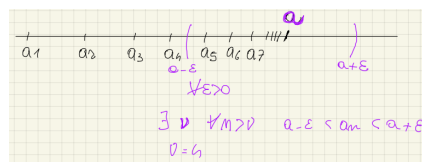


Figure 4: Intorno

di numeri intorno ad a , diciamo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice ν , tale che $\forall n > \nu$ a_n sta nell'intervallo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

3.1 Limiti

Un numero reale a è il limite della successione a_n (si dice che a_n tende o converge ad a) e si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} a$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν tale che:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

Osservazione: $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può scrivere $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$.

3.2 Proposizione

Se esiste il limite $a \in \mathbb{R}$ della successione a_n , allora è unico.

Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che:

$$a_n \rightarrow a \quad \text{e} \quad a_n \rightarrow b \quad \text{con} \quad a \neq b$$

Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1$$

$$\exists \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Prendo $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0$ e ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, (1) e (2) valgono contemporaneamente. Allora:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

Ma allora $|a - b| < |a - b|$, ASSURDO! ♣

Una successione a_n ha limite $+\infty$ (si dice anche che tende o diverge a $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

se, qualunque sia $M > 0 \in \mathbb{R}$, esiste un numero ν tale che:

$$a_n > M \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n > \nu$$

Analogamente si definisce il limite $-\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M < 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n < M \quad \forall n > \nu$$

Osservazione:

- Le successioni che ammettono limite finito si dicono **convergenti**
- Le successioni che ammettono limite infinito si dicono **divergenti**

- Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**
- Una successione che tende a zero si dice anche **infinitesima**
- Una successione divergente si dice anche **infinita**

3.3 Successioni Limitate

a_n si dice **limitata** se $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$|a_n| \leq M$$

Osservazione: In particolare $a_n = (-1)^n$ è un esempio di successione limitata che non ammette limite. Viceversa, ogni successione che ammette limite finito, è limitata. Vale il seguente:

3.4 Teorema

Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione: Sia a_n una successione convergente e supponiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

Allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Posso prendere $\varepsilon = 1 \implies |a_n - a| < 1$, valuto $|a_n|$:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n > \nu$$

posso prendere $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_\nu|, 1 + |a|\}$ ♣.

3.5 Operazioni con i limiti

Supponiamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$

Si dimostra anche che:

- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \rightarrow a (\neq 0) \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n \cdot b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty$ entrambe con lo stesso segno $\implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$ e $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow \pm a \quad b_n \rightarrow \pm 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

3.6 Forme infeterminate o di indecisione

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- ∞^0
- $1^{\pm\infty}$
- 0^0

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che non esiste, ma che occorre togliere, se possibile, l'indeterminazione, mediante semplificazioni o trasformazioni.

3.7 Teoremi di confronto

3.7.1 Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > 0 \quad \forall n > \nu$.

Esempio: $a_n = \frac{n-12}{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 > 0$, ma i primi termini della successione sono negativi. $a_n = 0$ per $n = 12$, quindi se prendo $\nu = 12$, e $n > \nu$ allora $a_n > 0$.

Dimostrazione: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$
 $a > 0$, quindi posso prendere $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ e:

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0 \quad \forall n > \nu \quad \clubsuit$$

Corollario (viceversa)

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ e $a_n \geq 0$ (vale anche $a_n > 0$), allora $a \geq 0$.

3.7.2 Teorema dei carabinieri

Si consideriamo tre successioni a_n, b_n, c_n con la proprietà che:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Se risulta che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$, allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$ (per ipotesi $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow a$).

Dimostrazione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Definisco $\nu_3 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ e per ipotesi $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \implies |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_3 \implies c_n \rightarrow a \quad \clubsuit$

Osservazione: Valgono per i limiti infiniti:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \implies b_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow -\infty \implies a_n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Dal teorema dei Carabinieri, segue il seguente risultato molto importante per le applicazioni e gli esercizi:

3.7.3 Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se a_n è limitata e b_n è infinitesima, allora $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ **Dimostrazione:** Considero $|a_n \cdot b_n| \Rightarrow$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$$

Per la proprietà del valore assoluto $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

$$-M|b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M|b_n| \quad \text{per ipotesi } b_n \rightarrow 0$$

\Rightarrow Per il Teorema dei Carabinieri $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ ♣

3.8 Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a = 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

3.9 Limiti relativi alle funzioni trigonometriche

- $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sin a_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \cos a_n \rightarrow 1$

Ad esempio, se $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$ e $\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1$.

- $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (1) \frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1$
- $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (2) \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\text{Infatti } \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{(1 - \cos a_n)(1 + \cos a_n)}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{1 - \cos^2 a_n}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos a_n} = \frac{1}{2}$$

3.10 Successione notevole importante

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1^{+\infty}$$

Confrontiamola con altre successioni b_n, c_n :

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^n = a^n \rightarrow +\infty \quad \text{con } a > 1$$

Quindi a_n è una **forma indeterminata** $1^{+\infty}$, che da una parte, vuole tendere ad 1, dall'altra a $+\infty$, arriverà quindi ad un 'punto di mezzo'. Si definisce e il **numero di Nepero** tale che:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dove $e \simeq 2,718281828459\dots$

Si dimostra che la successione a_n è strettamente crescente e limitata.

3.11 Successioni Monotone

- a_n strettamente crescente $\iff a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n strettamente decrescente $\iff a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n crescente $\iff a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n decrescente $\iff a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione si dice **monotona** se si verifica una delle quattro condizioni.

Una successione si dice **costante** se $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$ con a numero reale. Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

3.12 Teorema sulle successioni monotone

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito.

Osservazione: Naturalmente non è che ogni successione convergente è monotona. Ad esempio $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente ($\rightarrow 0$), ma non è monotona.

Dimostrazione: (1) Sia, ad esempio, a_n crescente e limitata.

Poniamo $l = \sup a_n$ (teorema di esistenza dell'estremo superiore: esiste il sup ed è finito perchè a_n è limitata).

Allora, per le proprietà dell'estremo superiore (data che è il minimo dei maggioranti)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : l - \varepsilon < a_\nu \quad (\star)$$

Ma a_n è monotona (crescente), quindi $\forall n > \nu \quad a_\nu \leq a_n$, da (\star)

$$l - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq l < l + \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \clubsuit$$

(2) Sia ora a_n crescente e non limitata. Fissiamo $M > 0$, allora esiste ν tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente $\forall n > \nu$

$$a_n \geq a_\nu > M$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \clubsuit$$

Osservazione: Assioma di completezza \implies Esistenza dell'estremo superiore \implies Esistenza del limite delle successioni monotone

Osservazione: Si dimostra che $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è strettamente crescente e limitata. Quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per $n \rightarrow +\infty$ di a_n , che è e .

3.13 Limiti Notevoli

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$

Più in generale:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$ con $a_n \rightarrow +\infty$, $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ con $\varepsilon \rightarrow 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x\varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e^x$ con $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in \mathbb{R}$

Osservazione: Abbiamo visto, nell'ambito dei **limiti notevoli**, la successione esponenziale a^n , con $a > 1$ e la successione potenza n^b , con $b > 0$.

Entrambe divergono a $+\infty$. Spesso tali successioni vengono confrontate con $\log n$, $n!$ e con n^n , che pure divergono a $+\infty$.

3.13.1 Infiniti di ordine crescente

$\log n$, n^b , a^n , $n!$, n^n , da cui:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

3.14 Criterio del rapporto per le successioni

Sia a_n una successione a termini positivi.

Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a$, se $a \in [0, 1)$, allora la successione a_n converge a zero.

Se $a \in (1, +\infty)$, allora la successione a_n diverge a $+\infty$.

Osservazione: Il caso $a = 1$ non è contemplato nell'enunciato.

3.15 Successioni estratte

Considero a_n successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali.

La successione a_{n_k}

$$k \in \mathbb{N} \rightarrow a_{n_k}$$

prende il nome di **successione estratta da** a_n di indici n_k .

Osservazione: Si dimostra che se a_n converge ad a , allora ogni successione estratta a_{n_k} converge ad a .

Osservazione: Abbiamo dimostrato che ogni successione a_n convergente è limitata. Il viceversa non è vero, ma vale il seguente notevole risultato:

3.16 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.

4 Funzioni

Dati A, B insieme di numeri reali, una **funzione** da A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B .

$$f : A \rightarrow B \quad A \text{ dominio o insieme di definizione} \quad f(A) \text{ codominio}$$

$y = f(x) \iff \text{esiste almeno un } x \in A \text{ tale che } y = f(x) \in B$

Valgono le seguenti:

- f si dice **suriettiva** se $\forall y \in B$, esiste almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$, ovvero $f(A) = B$
- f si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- f si dice **biunivoca** se è sia suriettiva che iniettiva

4.1 Funzione inversa

$f : A \rightarrow B$ biunivoca. Allora esiste una funzione **inversa**:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

è la funzione che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

4.2 Funzione monotona

f si dice **monotona** in un insieme A , se verifica una delle seguenti condizioni:

$\forall x_1, x_2 \in A$:

- f strettamente crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- f strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- f decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

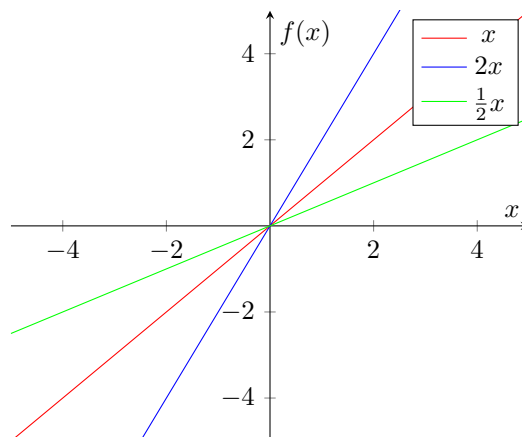
4.3 Criterio di invertibilità

f è strettamente monotona, allora è anche invertibile.

4.4 Funzione lineare

$$y = mx + q$$

- m è il coefficiente angolare
- se $m = 0$, risulta $y = q$ costante



4.5 Funzione potenza

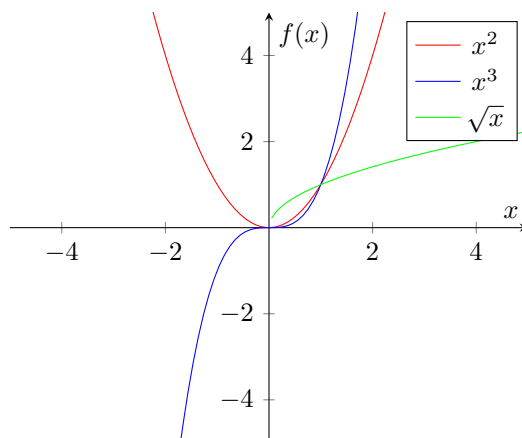
$y = x^n$ con $n \in \mathbb{R}$

Strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$$

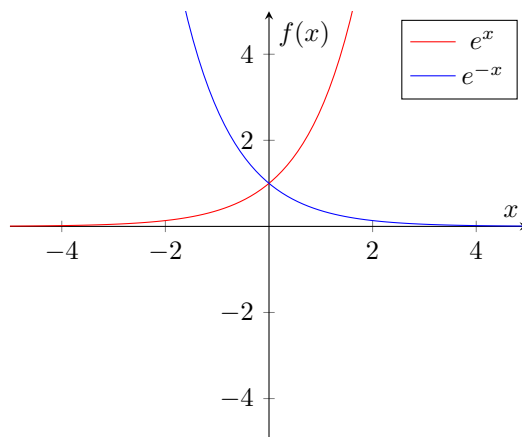
(Ad esempio per $n = 2$ se $0 \leq x_1 \leq x_2$ moltiplicando per x_1 e x_2 si ha $x_1^2 < x_1x_2$ e $x_1x_2 < x_2^2 \implies x_1^2 < x_2^2$) e quindi è invertibile e l'inversa è:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad x \geq 0$$



4.6 Funzione esponenziale

$f(x) = a^x$ con a numero reale positivo, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

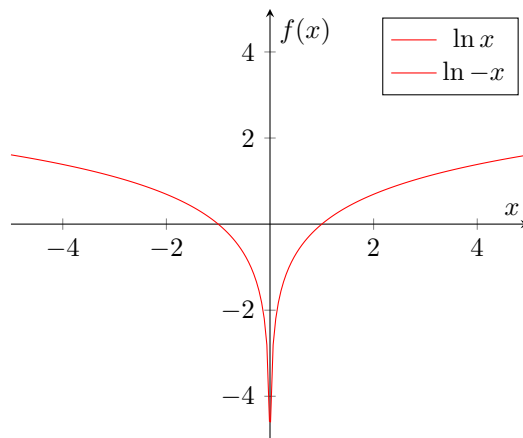


Se $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale è invertibile, la funzione inversa è:

4.7 Funzione logaritmo

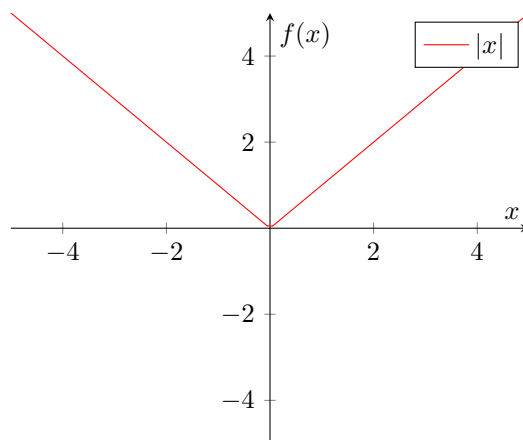
$f(x) = \log_a x$.

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$



4.8 Funzione valore assoluto

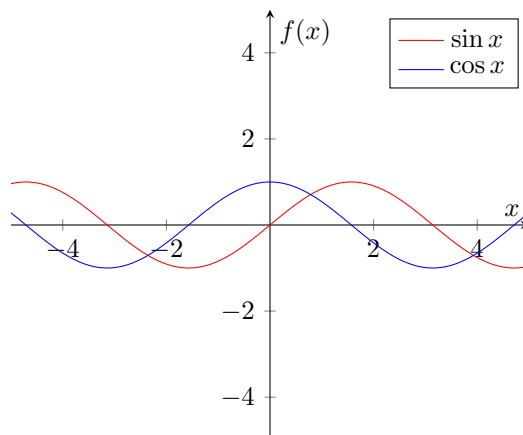
- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2$



4.9 Funzioni trigonometriche

$y = \sin x, \cos x$

- $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



E' interessante vedere la combinazione di funzioni elementari.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ definita per $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. E' una funzione **pari**, cioè $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \text{dominio}$, simmetrica rispetto all'asse y .

(**Dispari** se $f(x) = -f(-x)$, simmetrica rispetto all'origine).

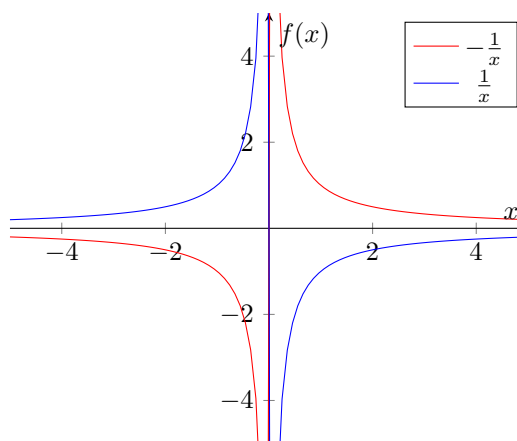
4.10 Esempio, Introduzione limiti

- $y = x, y = \sin x$ sono funzioni Dispari

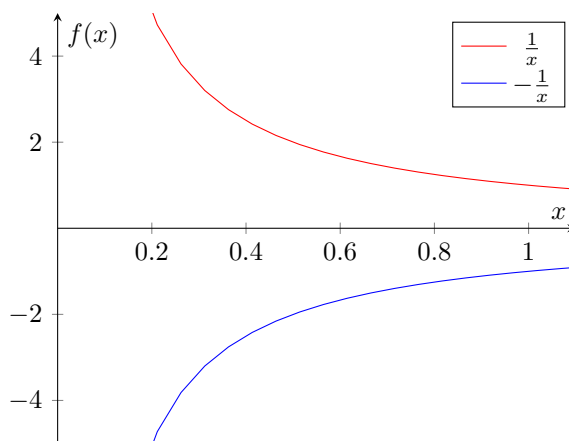
- $y = \cos x$ è una funzione Pari

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari, la disegniamo per $x \geq 0$.

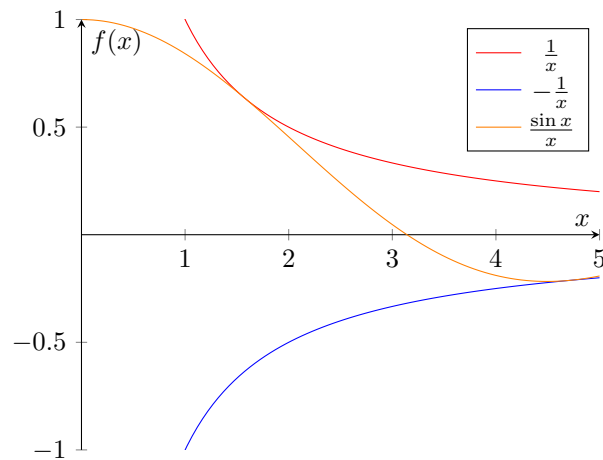
Osserviamo che $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e dividendo per x : $\Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$



e $y = \frac{\sin x}{x}$ sarà compresa tra i due rami di iperbole per $x > 0$:



per $x > 0, y = \frac{\sin x}{x}$ ha lo stesso segno di $\sin x$:



$x_n \rightarrow 0 \quad f(x_n) \rightarrow ?$

Non è definita per $x = 0$. Cosa succede per $x \rightarrow 0$?

- Tende a zero?
- Tende a $+\infty$?
- O tende a un valore intermedio?

Una formulazione rigorosa del comportamento di una funzione $f(x)$, per x vicino ad un punto x_0 , in questo caso $x_0 = 0$, è quella di considerare una generica successione x_n che converge ad x_0 (x_n è "vicino" ad x_0 se n è grande) e la corrispondente successione y_n costituita dai valori assunti dalla funzione $f(x)$ ($y_n = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

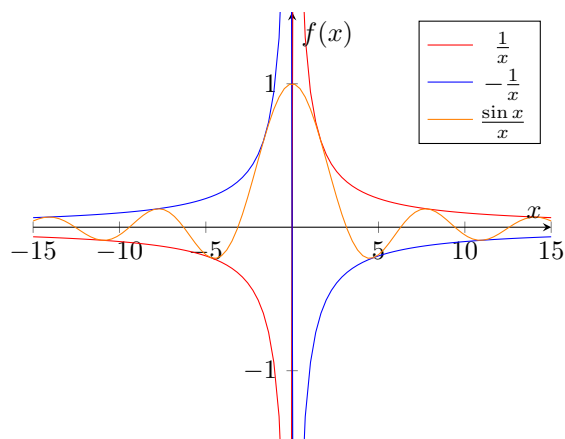
Se $y_n = f(x_n)$ converge ad un numero l (che è lo stesso $\forall x_n \rightarrow x_0$), allora si dice che $f(x)$ ammette limite uguale a l per $x \rightarrow x_0$.

Tornando all'esempio di $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_n}{x} = ?$$

è il limite notevole per le successioni, che sappiamo valere 1.

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



4.11 Definizione di limite

Sia A un intervallo, o unione finita di intervalli e sia $x_0 \in A$ (anche all'estremo).

Si dice che $f(x)$ ha limite uguale ad l (tende o converge ad l) per $x \rightarrow x_0$ se qualunque sia la successione $x_n \rightarrow x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0 \forall n$ risulta che $f(x_n) \rightarrow l$.

Si dimostra che questa definizione è equivalente alla seguente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

4.12 Teorema del legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, l \in \mathbb{R}$).

- $\forall x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in A \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow l$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Valgono anche le definizioni con i limiti infiniti:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in A \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow +\infty / \forall M > 0 \exists \delta > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall x_n \rightarrow +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : x > k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \rightarrow +\infty \quad x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow +\infty \iff \forall M > 0 \exists k : f(x) > M \quad \forall x \in A : x > k$

Osservazione: è utile considerare il **limite destro** $x \rightarrow x_0^+$ e il **limite sinistro** $x \rightarrow x_0^-$, quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0 , o solo minori.

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : 0 < x - x_0 < \delta$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : -\delta < x - x_0 < 0$

4.13 Operazioni con i limiti di funzioni

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente, di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle forme indeterminate.

4.14 Limiti Notevoli

Valgono i limiti notevoli visti per le successioni:

- $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
In particolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{b}{x})^x = e^b \quad \forall b \in \mathbb{R}$
In generale $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow e$ per $f(x) \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

4.15 Limiti di funzioni composte

Siano $g : x \rightarrow y$ e $f : y \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$$

ed esiste $\delta > 0$ tale che risulti $g(x) \neq y_0 \forall x \neq x_0$ dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, allora:

$$f \circ g : x \rightarrow \mathbb{R} \quad [f \circ g](x) = f(g(x))$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l$$

segue che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$$

Esempio: Applichiamo il precedente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Si può scrivere anche } 1 + y = t \implies \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t - 1} = 1$$

5 Funzioni continue

Una funzione f è continua in un punto x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(cioè se il valore limite, per x che tende a x_0 , è uguale al valore della funzione in x_0).

Una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$. (se $x_0 = a$ si considera il limite destro, se $x_0 = b$ si considera il limite sinistro).

Abbiamo visto, ad esempio, che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$; \implies le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue per $x = 0$ ed anche per ogni altro $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dimostra anche che tutte le funzioni elementari sono continue. Potrei avere una discontinuità quando ho un denominatore come $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ che non è definita in $x = 0$.

5.1 Punti di discontinuità

I punti di discontinuità sono i punti in cui la funzione non è continua.

5.1.1 Discontinuità eliminabile

x_0 è il punto di **discontinuità eliminabile** se esiste il limite di f in x_0 e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

5.1.2 Discontinuità di prima specie

$f(x)$ presenta in x_0 una **discontinuità di prima specie** se esistono finiti i limiti destro e sinistro di f in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

5.1.3 Discontinuità di seconda specie

$f(x)$ presenta in x_0 una **discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti non esiste o è infinito.

5.2 Teoremi sulle funzioni continue

5.2.1 Teorema della permanenza del segno

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$).

Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dimostrazione: la funzione è continua in x_0 , cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ quindi per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, quindi:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \implies -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Corollario: Se $f(x)$ è continua in x_0 e $f(x) \geq 0$ o $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ allora $f(x_0) \geq 0$.

5.2.2 Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$.

Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione: troppo lunga guarda pagine 11-25 lez 06.

5.2.3 Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. **Dimostrazione:** Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$.

Dobbiamo provare che $\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \exists x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

- Se $y_0 = f(a)$, possiamo prendere $x_0 = a$ e analogamente se $y_0 = f(b)$ possiamo prendere $x_0 = b$.
- Se $y_0 \in (f(a), f(b))$, consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - y_0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e calcolata in $x = a$ e $x = b$

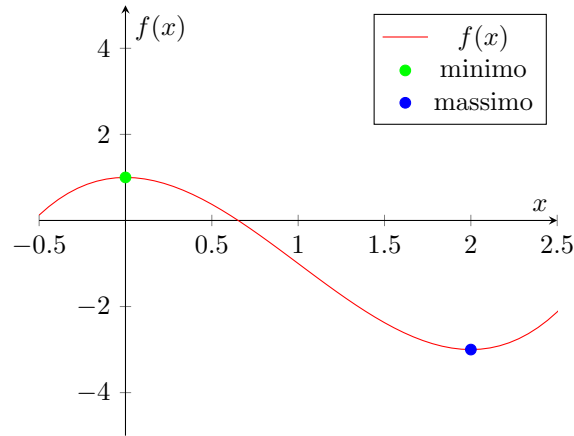
$$g(a) = f(a) - y_0 \quad g(b) = f(b) - y_0 \implies g(a) < 0 \quad g(b) > 0$$

Applicando quindi il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione $g(x) \implies$

$$\exists x_0 \in (a, b) : g(x_0) = 0 \implies f(x_0) = y_0 \quad \clubsuit$$

5.2.4 Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume minimo e massimo in $[a, b]$. Cioè esistono x_1, x_2 in $[a, b]$ che sono detti rispettivamente punti di minimo e di massimo per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. I corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti **minimo** e **massimo** di $f(x)$ in $[a, b]$.



Dimostrazione: Hp: funzione continua in un intervallo chiuso e limitato.

Poniamo $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ esiste, potrebbe essere $M < +\infty$ o $M = +\infty$.

Verifichiamo ora che $\exists x_n \in [a, b] : \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M(\star)$.

- Se $M = +\infty$, per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$. Per il teorema di confronto $f(x_n) \rightarrow M = +\infty$.
- Se invece $M < +\infty$, sempre per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]$ tale che $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ e quindi $f(x_n) \rightarrow M$ per il teorema dei carabinieri. $(\star) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$
- Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, da $x_n \subset [a, b]$ (limitate), esiste una estratta x_{nk} convergente ad un punto $x_0 \in [a, b]$.

$$x_{nk} \rightarrow x_0$$

Ma poichè la funzione è continua:

$$f(x_{nk}) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Allora

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{nk}) = f(x_0) \implies M = f(x_0)$$

Quindi abbiamo dimostrato che M è un massimo perchè:

$$f(x_0) = M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ è un massimo } \clubsuit$$

Conseguenza: La funzione è limitata, dal massimo e minimo.

Possiamo ora dare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

5.2.5 Teorema di esistenza dei valori intermedi (formulazione II)

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ ammette tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo. Tra i risultati sulle funzioni continue, si dimostra come applicazione, anche il seguente:

5.2.6 Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.

6 Derivate

Supponiamo di dover percorrere una strada da A a B e indichiamo con $s(t)$ lo spazio percorso in funzione del tempo.

$$\text{Velocità media?} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

Velocità istantanea?

$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ velocità media. Devo fare il limite per $h \rightarrow 0$.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ occorre calcolare il **limite di un rapporto incrementale**, così chiamato perchè al denominatore c'è l'incremento h della variabile indipendente e al numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.

\Rightarrow la velocità istantanea è l'interpretazione fisica della derivata.

6.1 Definizione di derivata

Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b) e sia $x \in (a, b)$. Si dice che la funzione f è derivabile nel punto x , se esiste **finito** il **limite del rapporto incrementale**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tale limite è la **derivata** di f .

In simboli:

$$f'(x), Df(x), \frac{df}{dx}, y', Dy$$

- f derivabile in (a, b) , se è derivabile in ogni punto di (a, b)
- f definita in $[a, b]$ è derivabile in $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$ e se f ammette derivata destra (per $h \rightarrow 0^+$) in $x = a$ e derivata sinistra (per $h \rightarrow 0^-$) in $x = b$ (intesi come limite destro e sinistro).

6.2 Derivabilità e continuità

Ogni funzione derivabile in x è continua in x .

$$\text{Derivabilità} \implies \text{Continuità}$$

Dimostrazione: $f(x)$ continua in x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

se $x_0 = x$ e $x = x + h$ equivalentemente

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

Quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) + f(x+h) - f(x) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = f(x)$$

Quindi ogni funzione derivabile in x è continua in x , il viceversa non è vero.

6.3 Derivate di ordine superiore

Se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo (a, b) , allora la sua derivata $f'(x)$ è una funzione definita in (a, b) . Se questa funzione è a sua volta derivabile, diremo che la derivata $(f')'$ è la derivata seconda.

$$f'' \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \frac{d^2}{dx^2} y'' \quad D^2 f \quad D^2 y$$

Osservazione: $g(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$ costante $\implies g'(x) = 0$ infatti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

NB: $\frac{0}{h}$ non è una forma indeterminata.

Quindi il limite del rapporto incrementale vale zero. ♣

6.4 Operazioni con le derivate

Se f e g sono due funzioni derivabili in x , allora:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

6.4.1 Dimostrazione regola del prodotto

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

la funzione g è derivabile in x per ipotesi \implies è anche continua e $g(x+h) \rightarrow g(x)$ per cui, passando al limite per $h \rightarrow 0$
 $\implies \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ ♣

6.5 Derivazione delle funzioni composte

se $y = f(z)$ funzione di z e $z = g(x)$ funzione di x allora $y = f(g(x))$ è una funzione composta risultante.

6.6 Teorema di derivazione delle funzioni composte

Se g è derivabile in x e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x e si ha:

$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dimostrazione: Consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \quad (\star)$$

è il limite del rapporto incrementale di f nel punto $g(x)$.

Pongo $k = g(x+h) - g(x)$, allora $k \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ perchp g è derivabile in x e quindi continua $g(x+h) \rightarrow g(x)$

$$\implies (\star) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)) \implies Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \clubsuit$$

Osservazione criterio di invertibilità: una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.

6.7 Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in un punto $x \in (a, b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e la derivata vale:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$f : x \rightarrow y \text{ e } f^{-1} : y \rightarrow x.$$

6.8 Principali forme di derivazione

- $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$
- $D \ln x = \frac{1}{x}$
- $D \sin x = \cos x$
- $D \cos x = -\sin x$
- $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $De^x = e^x$

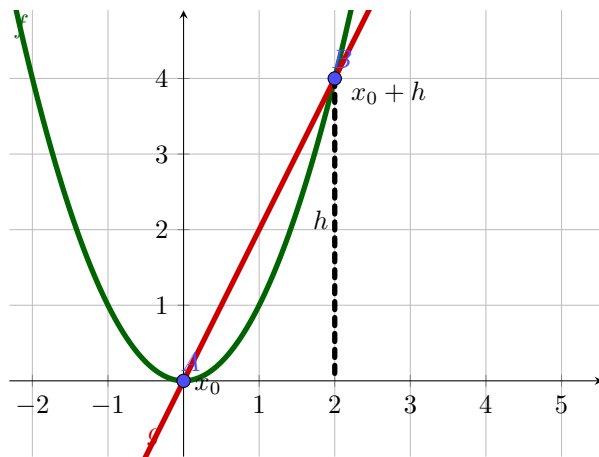
6.9 Significato geometrico della derivata: retta tangente

La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in un punto e misura la **pendenza** del grafico.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e si consideri il grafico della funzione nel piano x, y .

Vogliamo determinare l'equazione della **retta tangente** al grafico della funzione f nel punto p_0 .

Per calcolare la retta tangente, è opportuno preliminarmente determinare l'equazione di una **retta secante** il grafico della funzione f nei punti $p_0 = (x, f(x_0))$ e $p = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.



L'equazione di una generica retta non verticale è:

$$y = mx + q$$

Determiniamo m e q in modo che la retta passi per i punti p e p_0 :

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q \text{ passaggio per } p_0 \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q \text{ passaggio per } p \end{cases}$$

\Rightarrow Sistema di due equazioni, due incognite, m e q . \Rightarrow sottraendo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = m(x_0 + h) - m(x_0) \Rightarrow m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e si ricava q dalla prima equazione:

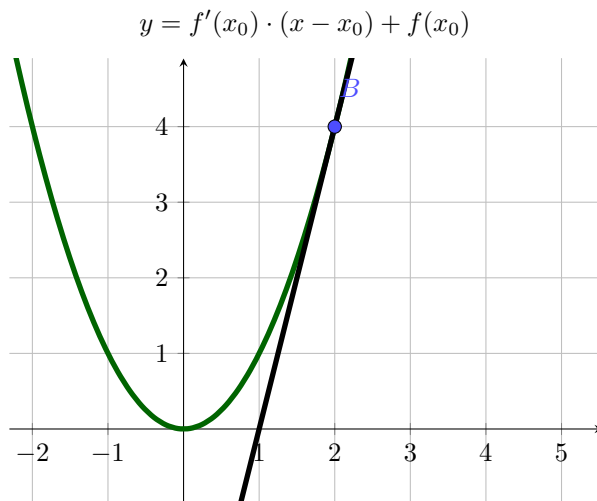
$$q = f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot x_0$$

\Rightarrow l'equazione della retta secante, risulta essere quindi:

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

l'equazione della retta tangente, quando esiste, è il limite per $h \rightarrow 0$ dell'equazione della retta secante.

Quindi se f è derivabile in x_0 , si ottiene



$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Significato geometrico: misura la pendenza del grafico della funzione.

7 Applicazioni alle derivate

7.1 Studio di funzioni

Definiamo i punti di massimo e di minimo relativo.

Sia $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$.

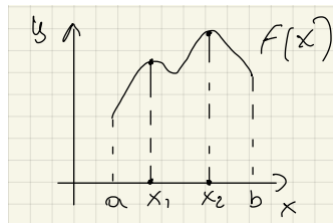


Figure 5: $f(x)$

- $x_1 \in [a, b]$ è un punto di **massimo relativo** per f nell'intervallo $[a, b]$ se il valore $f(x_1)$ è più grande dei valori $f(x)$ per ogni x nell'intervallo $[a, b]$ vicino ad x_1 . Più precisamente se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_1) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ tale che $|x - x_1| < \delta$.
- x_2 è un punto di **massimo assoluto** per f se $f(x_2) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Analogamente per i punti di minimo con \leq al posto di \geq .

Osservazione: Tutti i punti di massimo o minimo interni all'intervallo $[a, b]$ (cioè $\in (a, b)$) hanno retta tangente orizzontale in quel punto cioè del tipo:

$$y = q$$

(Non vale per gli estremi per gli estremi dell'intervallo $x = a, b$, ma con $x_0 \in (a, b)$).

Ricordando la retta tangente al grafico di una funzione in x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

questa retta è orizzontale $\iff f'(x_0) = 0$.

7.2 Teorema di Fermat

Sia f una funzione definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0 , allora risulta:

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione: Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo, quindi $\exists \delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad (\star) \quad \forall h \mid |h| < \delta \iff f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

Valuto il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

il numeratore è sempre negativo perchè x_0 è **massimo** in (\star) .

E risulta:

$$\begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0^\pm$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

(f derivabile per ipotesi, quindi i due limiti devono coincidere).

Quindi $f'(x_0) = 0$. ♣

Osservazione: Quindi conseguenza del teorema di Fermat è che l'annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto x_0 del dominio è condizione **necessaria** affinché x_0 sia un punto di massimo o di minimo per la funzione.

7.3 Teorema di Rolle

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Sia f una funzione continua in $[a, b]$ quindi per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo in $[a, b]$, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\star)$$

Se almeno uno fra x_1 e x_2 è un punto interno all'intervallo $[a, b]$ allora per il teorema di Fermat $f'(x_0) = 0$.

Rimane da esaminare il caso in cui entrambi i punti x_1 e x_2 non sono interni, cioè:

$$x_1 = a \text{ e } x_2 = b$$

Quindi da (★):

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ma dato che per ipotesi $f(a) = f(b)$, \implies significa che $f(x)$ è costante e la sua derivata è ovunque nulla.

♣

7.4 Interpretazione geometrica

$f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) con $f(a) = f(b)$, \implies esiste un punto con tangente orizzontale.

Situazione più generale:

\exists un punto $x_0 \in (a, b)$, in cui la retta tangente è parallela alla corda che congiunge gli estremi del grafico ($f(a)$ con $f(b)$).

- $f'(x_0)$ coefficiente angolare della retta tangente in x_0 .
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ coefficiente angolare della corda.

7.5 Teorema di Lagrange

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione: Si considera la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

$$\text{in } x = a \quad g(a) = f(a) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)] = 0$$

$$\text{in } x = b \quad g(b) = f(b) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)] = 0$$

$$\implies g(a) = g(b) = 0$$

Posso quindi utilizzare il teorema di Rolle,

$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ tale che } g'(x_0) = 0$$

e

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a, b)$$

in $x_0 \implies$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \clubsuit$$

7.6 Conseguenze del teorema di Lagrange

7.6.1 Criterio di monotonia

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora:

$$\bullet f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è crescente in } [a, b]$$

$$\bullet f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è decrescente in } [a, b]$$

Dimostrazione (per la prima): Supponiamo che $f'(x) \geq 0$ in $(a, b) \quad \forall x \in (a, b)$, dobbiamo dimostrare che se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ risulta $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Applichiamo il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \text{ tale che } f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dato che $f'(x) \geq 0$ e $x_2 > x_1$ risulta $f(x_2) \geq f(x_1)$ e quindi f è crescente.

Ora supponiamo f crescente in $[a, b]$ e consideriamo x e $x + h \in (a, b) \quad (h > 0)$ allora $f(x + h) \geq f(x)$ per ipotesi e quindi:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

e passando al limite:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \clubsuit$$

7.6.2 Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo

Una funzione è costante in un intervallo $[a, b] \iff$ è derivabile in $[a, b]$ e la derivata è ovunque nulla.

Dimostrazione: Hp: $f(x)$ è costante in $[a, b] \implies f'(x) = 0$, lo abbiamo già visto con il rapporto incrementale

$$\frac{c - c}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = 0$$

(\iff) Se $f'(x) = 0$ allora la funzione è costante.

Applico il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[a, x] \implies \exists x_0 \in (a, x)$ tale che:

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies f(x) = f(a) \quad \text{cioè è costante} \quad \clubsuit$$

7.7 Funzioni concave e convesse

Si dice che una funzione è **convessa** in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$, il grafico della funzione è **al di sopra** della retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$

Si dice che una funzione è **concava** in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione è **al di sotto** della retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$.

$$f \text{ convessa in } [a, b] \iff$$

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \forall x \in [a, b] \end{cases}$$

$$f \text{ concava in } [a, b] \iff$$

$$\begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \forall x \in [a, b] \end{cases}$$

Un punto in cui $f(x)$ cambia la sua concavità è detto **punto di flesso**.

7.7.1 Criterio di convessità

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a, b]$ e che ammetta derivata seconda in (a, b) . Allora:

$f(x)$ è convessa in $[a, b] \iff$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Osservazione: $\iff f(x)$ è crescente in $[a, b]$ per il criterio di monotonia.

7.8 Criterio per determinare se un punto è di massimo o minimo relativo per una funzione derivabile due volte

- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies x_0$ è un punto di minimo relativo.
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \implies x_0$ è un punto di massimo relativo.

Vediamo la prima, $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Supponendo che la derivata seconda sia continua in un intorno di x_0 (per il teorema della permanenza del segno) $f''(x)$ è positiva in un intorno di x_0 , cioè in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$.

\implies Quindi f è convessa in tale intorno, per il criterio di convessità.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$\implies x_0$ è un punto di minimo relativo per f . ♣

7.9 Metodo di Newton per il calcolo delle radici di un'equazione

E' un metodo per calcolare le radici di un'equazione $f(x) = 0$ con $f(x)$ funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

7.10 Metodo di Newton per il calcolo numerico approssimato degli zeri di una funzione

In $[a, b]$, si sceglie un punto x_1 e si traccia la retta tangente al grafico della funzione per $x = x_1$.

Tale retta tangente incontrerà l'asse x in un punto x_2 , che sarà una approssimazione dello "zero" x_0 di $f(x)$.

L'equazione della retta tangente per $x = x_1$,

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Come si determina x_2 ? E' soluzione di

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\implies x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Iteriamo. A partire da x_2 si considera nuovamente l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ per $x = x_2$:

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$$

e si determina il punto x_3 , dove questa retta tangente interseca l'asse x , come prima:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si determina quindi una successione x_n di approssimazioni del punto x_0 .

In ipotesi abbastanza generali si dimostra che $x_n \rightarrow x_0$ per $n \rightarrow \infty$.

Si tratta di una successione **definita per ricorrenza**.

Applichiamo il metodo di Newton al calcolo approssimato delle cifre decimali di $\sqrt{2}$.

7.11 Applicazione del metodo di Newton

7.11.1 Step 1

Scegliamo, ad esempio, $x_1 = 2$ in $[0, 4]$, $f(x) = x^2 - 2$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$\Rightarrow x_2 = 1.5$ è un'approssimazione per eccesso di $x_0 = \sqrt{2}$, cioè $x_2 > x_0$ perchè $f(x)$ è **convessa** ($f'(x) = 2$) e il suo grafico è **al di sopra** di ogni sua retta tangente.

7.11.2 Step 2

Ripartiamo da $x_2 = 1.5$ e calcoliamo x_3 :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = \frac{17}{12} = 1.416666666666667$$

7.11.3 Step n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

con $f(x) = x^2 - 2$ si trovano i valori:

x_n	<i>approx</i>
x_1	2
x_2	1.5
x_3	1.416666666666667
x_4	1.4142156862745097
x_5	1.4142135623746899
x_6	1.414213562373095

La convergenza di x_n a x_0 , per $n \rightarrow \infty$ è molto rapida.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$$

7.12 Teorema

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a, b]$, con derivata continua e sia convessa in tale intervallo. Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora la successione definita per ricorrenza

$$x_1 = b \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge decrescendo all'unica soluzione $x_0 \in [a, b]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

Nel caso studiato per il calcolo delle cifre decimali di $\sqrt{2}$, la successione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \text{ con } f(x) = x^2 - 2 \text{ e } f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \end{cases} \quad (*)$$

Verifichiamo che, se x_n ammette limite finito, allora il limite è $\sqrt{2}$.

Infatti se $x_n \rightarrow x_0$, anche $x_{n+1} \rightarrow x_0$ e passando al limite in (*):

$$x_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{x_0} \implies 2x_0^2 = x_0^2 + 2 \implies x_0^2 = 2$$

\implies Quindi $x_0 = \pm\sqrt{2}$, ma essendo una successione a termini positivi (se $x_n > 0 \implies x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} > 0$)

$\implies x_0 = \sqrt{2}$. ♣

7.13 Teorema di l'Hôpital

Siano f e g funzioni derivabili in un intorno di x_0 (eventualmente anche non in x_0) tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Allora:

$$\frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se risulta $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 , $x \neq x_0$ e purchè esista il secondo limite.

Osservazione: Vale anche per forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. (Se $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow x_0$).

7.14 Studio del grafico di una funzione

1. Determinare il Dominio della funzione

2. Verificare la presenza di simmetria

- $f(x) = f(-x)$ funzione pari
- $f(-x) = -f(x)$ funzione dispari
- $f(x + T) = f(x)$ funzione periodica

3. Si determinano gli eventuali asintoti

7.14.1 Asintoti Verticali

Una funzione ammette asintoto verticale, se calcolando il limite per $x \rightarrow x_0$ (oppure $x \rightarrow x_0^+$ e $x \rightarrow x_0^-$) si ottiene $\pm\infty$.

$$x = x_0 \text{ asintoto verticale} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

7.14.2 Asintoti Orizzontali

Una funzione ammette asintoto orizzontale, se calcolando il limite per $x \rightarrow \pm\infty$ si ottiene un valore finito.

$$y = l \text{ asintoto orizzontale} \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

7.14.3 Asintoti Obliqui

Un asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$ è una retta di equazione

$$y = mx + q$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \quad (\star)$$

(cioè per $x \rightarrow \pm\infty$ il grafico della funzione è vicino alla retta).

Dobbiamo determinare m e q .

Se $(\star) \rightarrow 0$, anche

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \\ \implies m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ \implies q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] \end{aligned}$$

Osservazione: Se $f(x)$ ammette asintoto orizzontale allora non può ammettere asintoto obliquo, infatti:

$$\text{HP} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} = l \text{ ammette asintoto orizzontale}$$

allora

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \implies q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \end{aligned}$$

4. Determinare gli intervalli dove la funzione è crescente o decrescente, i punti di massimo e di minimo relativo, **studiando il segno della derivata prima.**
5. Si determinano gli intervalli dove la funzione è convessa o concava e gli eventuali punti di flesso, studiando il segno della derivata seconda.

8 Partizioni

Quindi per ogni partizione P , poniamo

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un minimo)

e poniamo

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un massimo)

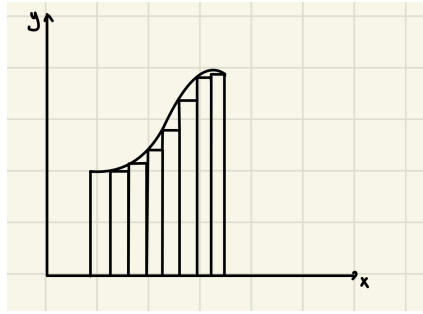


Figure 6: Inf

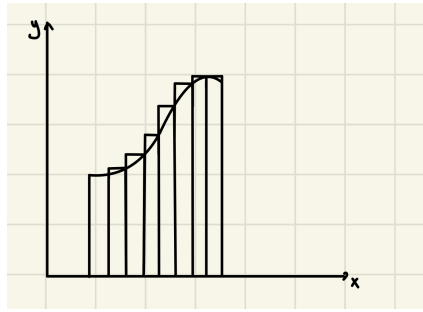
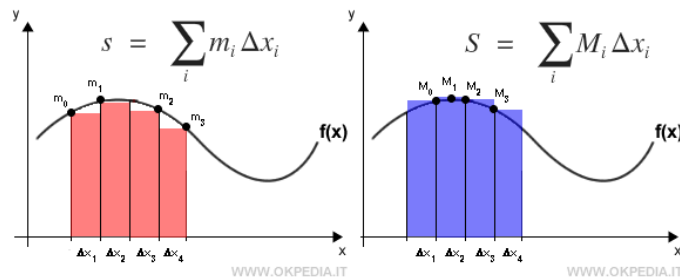


Figure 7: Sup

Ad esempio:



In entrambe le figure sono rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Sono aree per difetto e per eccesso della regione che voglio stimare.

Definisco le SOMME INTEGRALI INFERIORI: Somma delle aree dei rettangoli inscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le SOMME INTEGRALI SUPERIORI: Somma delle aree dei rettangoli circoscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

8.1 Osservazione

Se $f(x)$ è positiva, queste somme integrali sono la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (sono definite a prescindere dal segno)

Si dimostra che:

$$S(P) \leq S(P)$$

e indicando con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori (P) al variare delle partizioni P dell'intervallo $[a, b]$ e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\} \quad B = \{S(P)\}$$

si dimostra che A e B sono insiemi SEPARATI, cioè $A \leq B$:

$$a \leq b \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall b \in B$$

\Rightarrow Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

$$a \leq c \leq b$$

In generale questo elemento non è unico, e vale la seguente:

9 Integrale definito

Se l'elemento di separazione tra A e B è unico, allora si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in $[a, b]$ e l'elemento si chiama con:

$$\int_a^b f(x) dx$$

e si chiama INTEGRALE DEFINITO di f in $[a, b]$. Quindi posto:

$$S(f) = \sup\{s(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

$$S(f) = \inf\{S(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

se $s(f) = S(P) \rightarrow$ allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann.

9.1 Funzione non integrabile secondo Riemann

Funzione di Dirichlet:

$$f(x): \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

In ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ cadono sia punti razionali che irrazionali:

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

Allora: (somma integrali inferiori)

$$S(P) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = b - a \end{aligned}$$

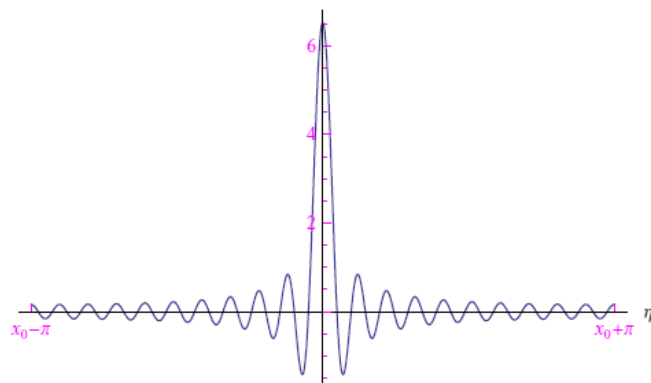


Figure 8: Funzione di Dirichlet

$$\rightarrow S(P) = 0 \quad \forall P \wedge S(P) = b - a \quad \forall P$$

Non è integrabile secondo Riemann. (lo sarà secondo LEBESGUE)

9.2 Proprietà

9.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo

Se a, b, c sono tre punti di un intervallo dove la funzione $f(x)$ è integrabile, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

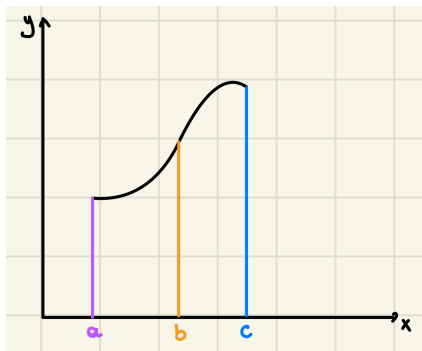


Figure 9: Grafico additività integrale

9.2.2 Linearità dell'integrale

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$, anche $f + g$ è integrabile in $[a, b]$. Dato c numero reale, anche $c \cdot f$ è integrabile in $[a, b]$.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b c \cdot f(x)dx &= c \cdot \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

9.2.3 Confronto tra gli integrali

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

9.2.4 Integrabilità delle funzioni continue

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

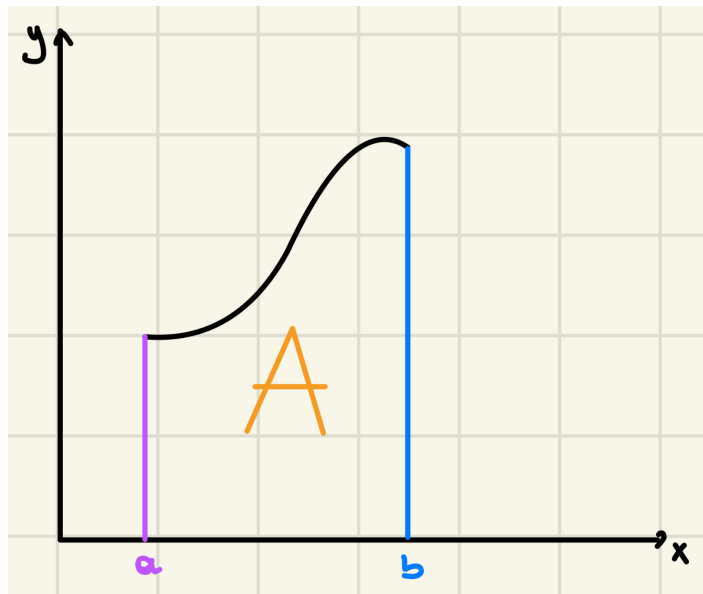
9.3 Teorema della media

Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

9.4 Interpretazione geometrica del teorema della media

$f(x)$ continua in $[a, b]$, ad esempio:



Voglio calcolare l'area del rettangolo A. Il teorema della media afferma che \exists un valore opportuno (cioè un valore non scelto a caso, ma in base alla particolare funzione considerata) $f(x_0)$, tale che:

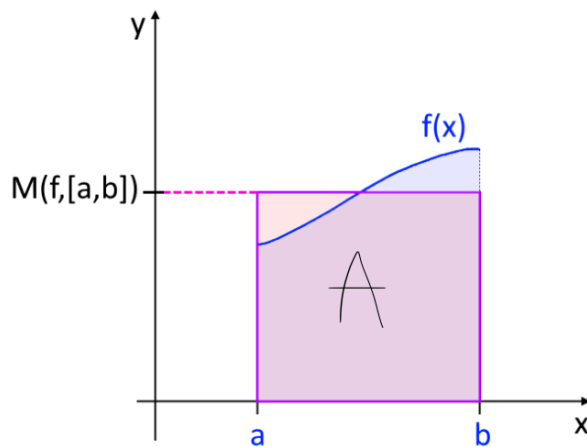


Figure 10: Teorema della media

Per cui $\text{area } A = \text{area } B$, dove B è un rettangolo che ha per base l'intervallo $[a, b]$ e per altezza $f(x_0)$.

9.4.1 Dimostrazione del teorema della media

f una funzione continua in $[a, b]$ per ipotesi. Per il teorema di Weierstrass $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono m e M tali che: (teo esistenza valori intermedi)

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$$

Consideriamo ora una partizione P di $[a, b]$, la più semplice possibile, cioè:

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

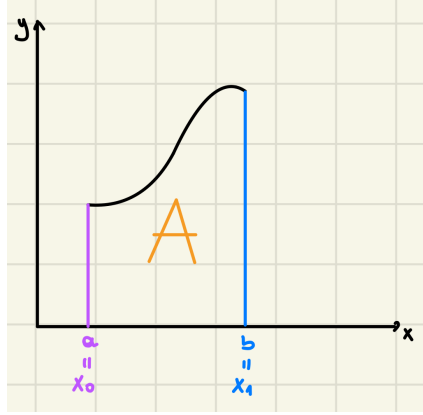


Figure 11: Enter Caption

Le relative somme integrali inferiori e superiori sono date quindi da:

$$s(P) = m(b - a)$$

$$S(P) = M(b - a)$$

// grafico

L'integrale definito è, per definizione, l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori (qualunque sia la partizione P di $[a, b]$). Quindi:

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(P)$$

$$\rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

se e solo se

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

y_0 è un numero compreso tra m ed M, minimo e massimo di $f(x)$ \implies per il teorema di esistenza dei valori intermedi, $\exists x_0 \in [a, b]$ t.c.

$$f(x_0) = y_0$$

$$\implies f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx = (b - a)f(x_0)$$

9.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Sia $f(x)$ una funzione monotona in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ (indipendente dalle discontinuità)

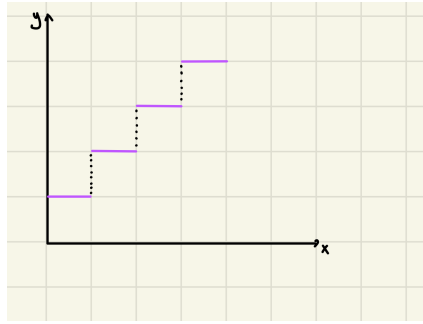


Figure 12: funzione a scalini

9.5.1 Osservazioni

In vista di andare a definire gli **INTEGRALI INDEFINITI**, concludiamo con alcune notazioni e definizioni. Abbiamo definito l'integrale definito come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove a e b sono gli estremi di integrazione, la funzione f si dice funzione **integranda**, la variabile x , si dice **variabile di integrazione**.

Notiamo che il risultato dell'integrazione non dipende da x , ma è un numero reale. Poniamo inoltre per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

e

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

10 Integrali Indefiniti

Mettiamo ora in evidenza, ma dei risultati più importanti che lega le derivate con gli integrali. Preliminarmente definiamo la FUNZIONE INTEGRALE.

10.1 Funzione integrale

Data f una funzione continua in $[a, b]$, definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

qui " x " è impegnato.

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

11 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \quad \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.

Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

Ovvio che il risultato è...?

Potrebbe essere:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

oppure:

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.

Allora come si procede?

Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

11.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

11.1.1 Esempio 1

$$a_k = 1 \quad \forall k$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \dots, S_n = n$$

$$\implies S_n \rightarrow \infty$$

11.1.2 Esempio 2

$$a_k = (-1)^{k+1}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \dots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ non esiste!.

11.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k . Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

- Se il limite per $n \rightarrow \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \rightarrow \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ di S_n , si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamentto della serie si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

11.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \dots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo per escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

11.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \rightarrow \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

11.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star) \quad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1} , ottengo la successione S_{n+1} . (Per definizione di successione di somme parziali)

Allora da (\star) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0 \\ &\implies a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.

Vediamo due esempi di serie modello:

11.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).

Calcoliamo la somma parziale S_n :

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$.

Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

11.4.1 Osservazione

La formula vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

11.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di x , calcolare la somma della serie.

! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.

! Capisco che è geometrica perchè dipende da $x-4$

Risoluzione:

- è una serie geometrica di ragione $x-4$.
- la serie geometrica data converge per:

$$|x-4| < 1 \iff -1 < x-4 < 1 \iff 3 < x < 5$$

- la somma della serie è data da: $\frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2 - 8x + 16}{5-x}$$

$$-1 = 1^\circ \text{ termine della serie} = (x-4)^0 = 1$$

11.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.

! Non si conosce la somma.

Osservazione E' un esempio di serie dove $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è **divergente**.

11.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la serie armonica generalizzata è:

- **convergente** per $p > 1$
- **divergente** per $p \leq 1$

11.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini non negativi se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 0$.

Diremo che una serie è a termini positivi se $a_n > 0, \forall n$.

11.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente positivamente.

Dimostrazione: La successione delle somme parziali S_n di una serie a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).

Infatti, poichè $a_{n+1} \geq 0, \forall n$, risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

\Rightarrow Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:

”Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito.”

$\Rightarrow S_n$ ammette limite (eventualmente a $+\infty$) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

11.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni **criteri** per stabilire il **carattere** di una serie: (non sempre si riesce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

11.8.1 Criterio del rapporto:

Si utilizza solitamente per il fattoriale.

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L < 1$, la serie converge.
- Se $L \geq 1$, la serie diverge.

Osservazione Nel caso: $0 \leq L < 1$ quindi per il criterio del rapporto $a_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Esempi:

da fare

11.8.2 Criterio della radice:

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L < 1$, la serie converge.
- Se $L \geq 1$, la serie diverge.

Esempi:

da fare

Esercizio appello

11.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$:

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

11.8.4 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ quindi $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ e considero $b_n = \frac{1}{n^p}$ con p ?
valuto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

– $b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è una serie convergente, quindi non riesco a concludere.

– $b_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^3 = +\infty$, stesso problema di prima e non riesco a concludere.

– $b_n = \frac{1}{\frac{3}{n^2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{3}{n^2}}$ converge e quindi concludo con il criterio del **confronto mediante limiti** e la serie data converge.

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{6n^3 + 1} - \sqrt{6n^3})$$

$$a_n = \sqrt{6n^3 + 1} - \sqrt{6n^3} \cdot \frac{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}}{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{6n^3 + 1 - 6n^3}{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}}$$

Utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti e prendiamo $b_n = \frac{1}{\frac{3}{n^2}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (per $n \rightarrow +\infty$) quindi

la serie data si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{3}{n^2}}$

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3})$$

$$a_n = n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3}) = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$

prendiamo $b_n = \frac{1}{n^3}$ e utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti. Allora, cerchiamo di ricondurci al limite notevole $\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

- Stabilire, per $x \geq 0$, il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x^n (n-1)!}{(n-1)! n x^{n-1}} = \frac{x}{n} \rightarrow 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \text{la serie converge } \forall x > 0$$

- Stabilire, per $x > 0$ il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n}$$

utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} x \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^2 \rightarrow \frac{x}{4} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Quindi se $0 < x < 4$, allora la serie converge. Se $x > 4$, allora la serie diverge a $+\infty$.

Se $x = 4$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n} = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \right]^{\varepsilon_n \cdot 2n} = \dots = e^3$$

$a_n \not\rightarrow 0$ e poichè è una serie a termini positivi \implies diverge a $+\infty$.

- Stabilire per quali valori di α la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot \left(\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

Utilizziamo lo sviluppo (Taylor):

$$\sin \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

Inoltre:

$$\sqrt{1 + \varepsilon_n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

$$\implies \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\implies a_n = n^\alpha \left(\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = n^\alpha \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

a_n si comporta come $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ converge $\iff 2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$. Per il criterio del confronto mediante i limiti, la serie data converge $\iff \alpha < 1$.

11.9 Serie alternate

Consideriamo serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{con } a_n > 0$$

Vale il seguente criterio:

11.10 Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)

Sia a_n una successione tale che:

- $a_n \geq 0$
- infinitesima ($a_n \rightarrow 0$)
- decrescente ($a_n \geq a_{n+1} \forall n$)

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

11.10.1 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

11.10.2 Esercizio del compito 20 07 21

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3 + 5}$$

La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \rightarrow 0$
- a_n decrescente, infatti $\frac{1}{n^3 + 5}$ è decrescente e la funzione $g(x) = \sin x$ è crescente per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

11.11 Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se risulta convergente la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. In generale, una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente.

Ad esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è la serie armonica che diverge.

11.12 Teorema

Una serie assolutamente convergente, è convergente.

11.12.1 Esercizio del compito (precedente)

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3 + 5}$ è anche assolutamente convergente. Infatti:

$$a_n = \sin \left(\frac{1}{n^3 + 5} \right) \cong \frac{1}{n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

11.12.2 Esercizi di compito a fine pdf (da fare)

12 Equazioni differenziali

Sia

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

dove $g(x)$ è una funzione di una variabile reale, continua in un intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$.

Per il **teorema fondamentale del calcolo integrale** sappiamo trovare una **primitiva** $G(x)$ di $g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, data da:

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

dove x_0 è un numero reale fissato in $[a, b]$.

Quindi possiamo rappresentare ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\star)$$

Integrando entrambi i membri di (\star) tra x_0 e x otteniamo:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

e rappresentiamo la soluzione nella forma:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad x \in [a, b]$$

Questo è un esempio molto particolare di equazione differenziale, si dice che $y(x)$ è soluzione del **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in quanto $y(x)$ è soluzione ed inoltre soddisfa la **condizione iniziale** nel punto $x = x_0$:

$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} g(t) dt = y_0$$

12.1 Osservazione

L'equazione differenziale considerata si dice del **primo ordine**, poichè l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

12.2 Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine

Sia

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove λ è un parametro reale fissato.

Dobbiamo trovare una soluzione di questa equazione differenziale, cioè una funzione $y = y(x)$, derivabile in \mathbb{R} , tale che

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una soluzione è data da:

$$y(x) = ce^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove c è una costante arbitrariamente fissata in \mathbb{R} .

Si verifica subito che è soluzione, infatti derivando si ottiene:

$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

12.2.1 Domanda

Tutte le possibile soluzioni sono della forma $y(x) = ce^{\lambda x}$? Sì, ma non lo dimostriamo.

12.3 Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico

$$y''(x) + \omega^2 y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove $\omega \neq 0$ è un parametro reale fissato.

Una famiglia di soluzioni è data da:

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti in \mathbb{R} .

Verifica:

$$y'(x) = -c_1 \omega \sin \omega x + c_2 \omega \cos \omega x$$

$$y''(x) = -c_1 \omega^2 \cos \omega x - c_2 \omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) = -\omega^2 y(x)$$

$$\implies y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico sono nella forma $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$? Sì, ma non lo dimostriamo.

12.4 Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

dove $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ sono coefficienti e $g(x)$ è il termine noto. (funzioni continue in un intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$).

Se $g(x) = 0$ l'equazione (1) si dice **omogenea**.

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

12.5

Una soluzione dell'equazione differenziale (1) o (2) è una funzione $y = y(x)$, derivabile n volte in $[a, b]$, che soddisfa la condizione (1) o (2) $\forall x \in [a, b]$. Le soluzioni delle equazioni differenziali lineari sono dette anche **integrali** e l'insieme di tutte le soluzioni è detto **integrale generale**.

12.6 Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare

L'integrale generale di un'operazione differenziale **non omogenea** è dato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea, sommate ad una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

12.7 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = g(x)$$

con $a(x), b(x), g(x)$ funzioni continue in un intervallo $[a, b]$.

Consideriamo inizialmente l'equazione omogenea associata:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$$

Una soluzione è una funzione $y = y(x)$, derivabile due volte in $[a, b]$, che soddisfa l'equazione differenziale. Considereremo equazioni differenziali di questo tipo, a coefficienti costanti.

12.8 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti.

Associamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

equazione di secondo grado dove:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \Delta > 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2} \quad \Delta = 0$$

E se il discriminante è negativo?

Ricordiamoci come si calcola la radice quadrata di un numero negativo:

$$\sqrt{\Delta} \text{ con } \Delta < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1(-\Delta)} = \pm i\sqrt{-\Delta}$$

e quindi le soluzioni complesse nel caso $\Delta < 0$ sono:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\text{cioè } \lambda_1, \lambda_2 = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\lambda_1 = \alpha - i\beta$$

$$\lambda_2 = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

12.9 Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

Tutte le soluzioni sono date da:

- $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \Delta > 0$
- $(c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \quad \Delta = 0$
- $e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \Delta < 0$

Al variare delle costanti c_1, c_2 .

12.9.1 Esempio

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

L'equazione differenziale ha come equazione caratteristica, l'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \implies \lambda_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

\implies L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

12.9.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

Posso trovare i α e β , ma mi conviene utilizzare direttamente la formula del Δ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i \implies \lambda_1 = 1 - i \quad \lambda_2 = 1 + i$$

L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

12.10 Esempio 3

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

e l'integrale generale è dato da:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^x$$

12.11 Equazioni differenziali lineari non omogenee

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

L'integrale generale delle soluzioni è dato da:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

al variare delle costanti c_1 e c_2 . $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni dell'omogenea associata in $[a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, (che abbiamo visto nel caso di coefficienti costanti) e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Ci sono casi particolari in cui è possibile ricavare una soluzione in modo diretto (nel caso di equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti).

12.11.1 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 \quad (\star)$$

Come primo passo consideriamo l'omogenea associata e quindi, essendo a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

per cui l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da:

$$(c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

al variare delle costanti c_1 e c_2 .

Ora ricerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ e poichè il termine noto dell'equazione differenziale è una equazione di secondo grado, la ricerchiamo nella forma:

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + C$$

Sostituendo $\bar{y}(x)$ nell'equazione differenziale (\star) otteniamo:

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = x^2 + 4x - 1 \implies \bar{y}(x) = ax^2 + bx + c \quad \bar{y}' = 2ax + b \quad \bar{y}'' = 2a$$

$$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 4x - 1 \implies ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = x^2 + 4x - 1$$

Quindi occorre che:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 4 \\ 2a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

da cui $a = 1, b = 0, c = -3$.

Quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(x) = x^2 - 3$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale iniziale è dato da:

$$(c_1 + c_2 x)e^{-x} + x^2 - 3$$

12.11.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale non omogenea:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

\implies l'integrale generale dell'omogenea associata è dato quindi da:

...

12.11.3 Osservazione

Abbiamo visto un metodo per trovare una soluzione, quando il termine noto è un polinomio.

Ora vediamo un esempio, in cui:

$$g(x) = a \sin x + b \cos x$$

12.11.4 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + y' + 2y = 2 \cos x$$

Consideriamo prima l'equazione caratteristica dell'omogenea associata:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \implies \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

L'integrale generale è dato da:

$$c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$$