1 Lavoro, Energia e Momenti

$$dW = dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ lavoro infinitesimo compiuto da } \vec{F}$$

$$F(x, y, z) \text{ lavoro compiuto dalla forza } F \text{ quando è andato da A a B lungo } \Gamma$$

Dove Γ è la curva che congiunge A e B.
Il lavoro è la somma di tutti i lavori infinitesimi:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_T ds$$

$$F_T = F \cos\theta$$

Integrale di linea del lavoro di una forza lungo una curva Γ.

$$W_1 = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} \quad W_2 = \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} \quad W_3 = \int_A^B \vec{F}_3 \cdot d\vec{s} \implies \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \implies W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_1 + W_2 + W_3$$

$$[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

1.1 Potenza

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{s})}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_T v$$

$$[\text{Potenza}] = \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = W$$

$$P_m = \frac{L_{\text{totale}}}{\Delta t}$$

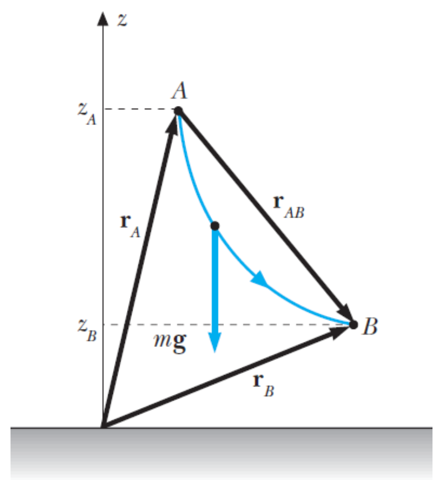
1.2 Teorema per il 18 - Th energia cinetica

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_T \cdot ds = ma_T ds = m\frac{dv}{dt} \cdot ds = m \cdot vdv$$

$$\boxed{W = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

dove $\frac{1}{2}mv^2$ è l'energia cinetica e la differenza tra l'energia cinetica finale e quella iniziale si indica con ΔE_k.

1.3 Lavoro della forza peso



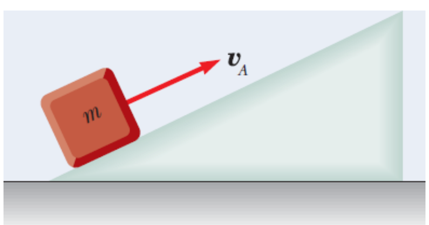
$$W = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \int_A^B d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{r}_{AB} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB} = -mg(z_B - z_A) \implies -(mgz_B - mgz_A)$$

La forza peso è una **forza conservativa**, perchè il lavoro non dipende dal percorso.

1.4 Esempio 4.1

Un punto di massa m si trova alla base di un piano inclinato liscio; se la velocità iniziale vale v_A ed è diretta come in Figura, calcolare qual è l'altezza rispetto alla base della posizione in cui il punto si ferma.



▲ Figura 4.4

Durante la salita la componente della forza peso parallela al piano inclinato si oppone al moto del punto, sviluppando il lavoro resistente

$$W = -(m\,g\,z - m\,g\,z_A) = -m\,g\,h,$$

con $h = z - z_A$ quota della posizione generica rispetto alla base (si provi a verificare il risultato utilizzando la definizione (4.2) e l'espressione della componente della forza peso).

Per il teorema dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W = -mgh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgh.$$

Il punto dunque riesce a salire alla quota h in quanto possiede un'energia cinetica iniziale: durante la salita l'energia cinetica diminuisce e la diminuzione è eguale al lavoro resistente della forza peso.

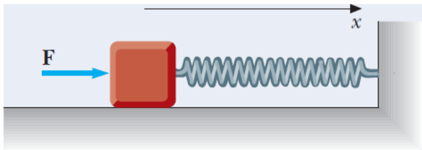
Il punto si ferma quando la sua energia cinetica è nulla, alla quota

$$h_B = \frac{v_A^2}{2g},$$

indipendente dall'angolo di inclinazione del piano. Abbiamo già trovato questo risultato per via cinematica ($x = v_A t - ½\,at^2$, $v = v_A - at$, con $a = g$ sen θ e $h_B = x_B$ sen θ). Il metodo appena visto è certamente più semplice.

1.5 Esempio 4.2

Un punto materiale fissato a una molla di costante elastica k è in quiete nell'origine, Figura. Si applica al punto una forza $\vec{F} = F\vec{u}_x$, costante in modulo, direzione e verso, e il punto si muove lungo x. Calcolare la velocità del punto in funzione di x e la posizione in cui il punto si ferma.



Il lavoro motore compiuto dalla forza **F** per uno spostamento x è semplicemente Fx, mentre il lavoro resistente della forza elastica vale

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\frac{1}{2}kx^2,$$

essendo $x_A = 0$ e $x_B = x$. Quindi, dato che la velocità iniziale è nulla,

$$Fx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sqrt{\frac{x}{m}(2F - kx)}.$$

Il punto si ferma quando la sua velocità è nulla, il che avviene nell'origine, secondo l'ipotesi, e nella posizione

$$x = \frac{2F}{k}.$$

Questa è la massima deformazione della molla (purché x sia inferiore alla lunghezza a riposo della molla). Si osservi che non si tratta della posizione di equilibrio statico ($F = kx_s$, $x_s = F/k$): tale situazione si otterrebbe ad esempio comprimendo la molla con altri mezzi fino alla deformazione x_s, mantenendola ferma e applicando poi la forza **F**. Invece, nel nostro caso, da $x = 0$ a $x = x_s$, F è maggiore del modulo della forza elastica e il punto acquista energia cinetica, che poi perde nel successivo tratto da $x = x_s$ a $x = 2x_s = 2F/k$, in cui F è minore del modulo della forza elastica. Nella **Figura 4.6** sono mostrati i moduli delle forze in funzione di x. *L'area sotto ciascuna curva $F(x)$ è data dall'integrale $\int F(x)dx$ ed è quindi eguale al lavoro*: si vede subito che da zero a x_s il lavoro motore è maggiore di quello resistente e che il contrario succede da x_s a $2x_s$; alla fine le due aree sono eguali, cioè i due lavori sono eguali in modulo,ed essendo di segno opposto si annullano. Sotto il grafico delle forze è mostrata l'energia cinetica, pari alla somma algebrica dei lavori. Si verifichi che essa è massima in x_s con valore $F^2/2k$; si verifichi anche come la formula di $v(x)$ si ottenga applicando la (1.23).

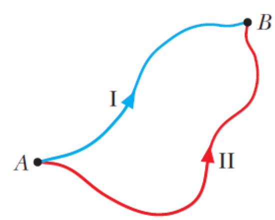
1.6 Esempio 4.3

1.7 Forze conservative

Lavoro della forza peso:

$$L = -mg(h_B - h_A)$$

Una forza è detta conservativa se il lavoro compiuto da essa non dipende dal percorso.



$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s})_{\mathrm{I}} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s})_{\mathrm{II}}$$

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} = W_{AB}$$

Se invece percorressi il percorso I all'andata e il percorso II al ritorno:

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I = -\int_B^A (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II}$$

Di conseguenza il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ **lungo un percorso chiuso è nullo**:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

1.8 Energia potenziale

Se la forza è conservativa e quindi il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso, scegliendo a piacere una posizione di riferimento O nello spazio, allora il lavoro che la forza compirebbe nello spostamento tra la posizione di riferimento O e la posizione generica P:

$$W = \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = -(U_P - U_O), U_O = 0 \implies = -U_P,\ E_{p,P} = -\int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^O \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -U_A + U_B$$

L'energia potenziale è la capacità di un sistema di compiere lavoro.

$$L_{AB} = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

Dove U è l'energia potenziale ed è una funzione $U = f(x, y, z)$.

$$U = mgz$$

definita a meno di una costante.

1.8.1 Energia potenziale della forza elastica

$$W_{AB} = \int_A^B kxdx = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2) \implies U = \frac{1}{2}kx^2$$

quindi

$$W_{AB} = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

1.9 Conservazione dell'energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative allora l'energia cinetica sommata all'energia potenziale nel punto iniziale è uguale all'energia cinetica sommata all'energia potenziale nel punto finale:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -(U_B - U_A) \implies \frac{1}{2}mv_B^2 + U_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + U_A$$

Tale somma si chiama **energia meccanica**.
Se agiscono solo forze conservative l'energia meccanica si conserva (è costante).
Prendendo un corpo su un piano inclinato, la relazione rimane valida solo in assenza di attrito: se c'è attrito, possiamo ancora applicare il teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} W_c + W_{nc} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ W_c = -(U_B - U_A) \end{cases} \implies \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -(U_B - U_A) + W_{nc} \implies (\frac{1}{2}mv_B^2 + U_B) - (\frac{1}{2}mv_A^2 + U_A) = W_{nc}$$

Se ci sono forze non conservative abbiamo che:

$$E_{m_B} - E_{m_A} = W_{nc} < 0$$