1 Applicazioni Lineari

Quando due insiemi sono dotati di struttura algebrica, tra le applicazioni che è possibile definire tra essi, assumono particolare significato quelle che rispettano tale struttura algebrica. Oggetto di questo capitolo sono le applicazioni tra spazi vettoriali, che conservano la struttura di spazio vettoriale, dette applicazioni lineari o omomorfismi.
Siano $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, un'applicazione

$$f : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \to W$$

si dice **lineare** o **omomorfismo** quando

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v'} \in \mathbb{V}(\mathbb{K}), f(\mathbf{v} + \mathbf{v'}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v'})$
2. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$

1.1 Definizioni

Nel seguito, se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, diremo che f è un'applicazione lineare **iniettiva**, o che f è un **monomorfismo**, se è iniettiva come applicazione. Analogamente, diremo che f è un'applicazione lineare **suriettiva**, ovvero che è un **epimorfismo**, se è suriettiva come applicazione. Un'applicazione lineare che sia biiettiva si dice anche **isomorfismo**. Si dice **endomorfismo** un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale V in sé, **automorfismo** un endomorfismo biiettivo.
Tra le applicazioni lineari notevoli vi sono:

- **L'applicazione lineare nulla:** $\Theta : V \to W$, che associa a ogni vettore di V il vettore nullo di W.
- **L'applicazione identica:** ι_v: $V \to V$, definita da $\iota_V(\mathbf{v}) = \mathbf{V}\ \forall \mathbf{v} \in V$, che è un automorfismo di V.