1 Derivate

Supponiamo di dover percorrere una strada da A a B e indichiamo con $s(t)$ lo spazio percorso in funzione del tempo.
Velocità media? $= \dfrac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \dfrac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$

Velocità istantanea?
$\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$ velocità media. Devo fare il limite per $h \to 0$.
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$ occorre calcolare il **limite di un rapporto incrementale**, così chiamato perchè al denominatore c'è l'incremento h della variabile indipendente e al numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.
$\implies$ la velocità istantanea è l'interpretazione fisica della deriviata.

1.1 Definizione di derivata

Sia $f(x)$ una funzione definita in (a,b) e sia $x \in (a,b)$. Si dice che la funzione f è derivabile nel punto x, se esiste **finito il limite del rapporto incrementale**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tale limite è la **derivata** di f.
In simboli:

$$f'(x),\ Df(x),\ \frac{df}{dx},\ y',\ Dy$$

- f derivabile in (a,b), se è derivabile in ogni punto di (a,b)
- f definita in $[a,b]$ è derivabile in $[a,b]$ se è derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$ e se f ammette derivata destra (per $h \to 0^+$) in $x=a$ e derivata sinistra (per $h \to 0^-$) in $x=b$ (intesi come limite destro e sinistro).

1.2 Derivabilità e continuità

Ogni funzione derivabile in x è continua in x.

$$\text{Derivabilità} \implies \text{Continuità}$$

Dimostrazione: $f(x)$ continua in x_0 se:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
se $x_0 = x$ e $x = x+h$ equivalentemente

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Quindi:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} f(x) + f(x+h) - f(x) = f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h = f(x)$$

Quindi ogni funzione derivabile in x è continua in x, il viceversa non è vero.

1.3 Derivate di ordine superiore

Se una funzione è dereivabile in tutti i punti di un intervallo (a,b), allora la sua derivata $f'(x)$ è una funzione definita in (a,b). Se questa funzione è a sua volta derivabile, diremo che la derivata $(f')'$ è la derivata seconda.

$$f'' \ \frac{d^2f}{dx^2} \ \frac{d^2y}{dx^2} \ \frac{d^2}{dx^2} \ y'' \ D^2f \ D^2y$$

Osservazione: $g(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$ costante $\implies g'(x) = 0$ infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

NB: $\frac{0}{h}$ non è una forma indeterminata.

Quindi il limite del rapporto incrementale vale zero. ♣

1.4 Operazioni con le derivate

Se f e g sono due funzioni derivabili in x, allora:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g) = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

1.4.1 Dimostrazione regola del prodotto

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

la funzione g è derivabile in x per ipotesi $\implies$ è anche continua e $g(x+h) \to g(x)$ per cui, passando al limite per $h \to 0$ $\implies \lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$♣

1.5 Derivazione delle funzioni composte

se $y = f(z)$ funzione di z e $z = g(x)$ funzione di x allora $y = f(g(x))$ è una funzione composta risultante.

1.6 Teorema di derivazione delle funzioni composte

Se g è derivabile in x e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x e si ha:

$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dimostrazione: Consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \quad (\star)$$

è il limite del rapporto incrementale di f nel punto $g(x)$.
Pongo $k = g(x+h) - g(x)$, allora $k \to 0$ per $h \to 0$ perchp g è derivabile in x e quindi continua $g(x+h) \to g(x)$

$$\implies (\star) = \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)) \implies Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad ♣$$

Osservazione criterio di invertibilità: una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.

1.7 Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo $[a,b]$. Se f è derivabile in un punto $x \in (a,b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e la derivata vale:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

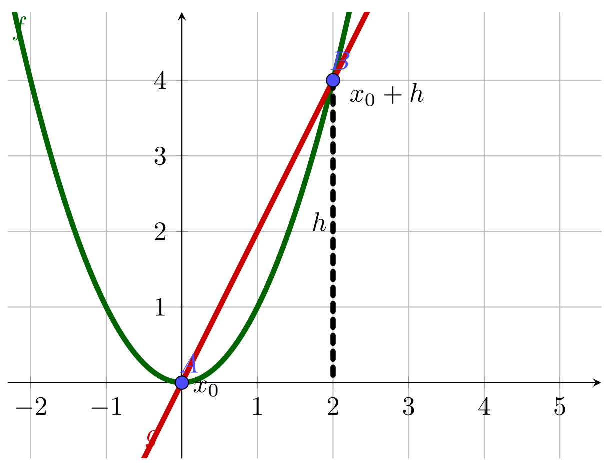
$f : x \to y$ e $f^{-1} : y \to x$.

1.8 Principali forme di derivazione

- $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$
- $D \ln x = \dfrac{1}{x}$
- $D \sin x = \cos x$
- $D \cos x = -\sin x$
- $D \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $De^x = e^x$

1.9 Significato geometrico della derivata: retta tangente

La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in un punto e misura la **pendenza** del grafico.
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e si consideri il grafico della funzione nel piano x, y.
Vogliamo determinare l'equazione della **retta tangente** al grafico della funzione f nel punto p_0.
Per calcolare la retta tangente, è opportuno preliminarmente determinare l'equazione di una **retta secante** il grafico della funzione f nei punti $p_0 = (x, f(x_0))$ e $p = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.



L'equazione di una generica retta non verticale è:

$$y = mx + q$$

Determiniamo m e q in modo che la retta passi per i punti p e p_0:

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q \text{ passaggio per } p_0 \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q \text{ passaggio per } p \end{cases}$$

$\implies$ Sistema di due equazioni, due incognite, m e q. $\implies$ sottrendo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = m(x_0 + h) - m(x_0) \implies m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e si ricava q dalla prima equazione:

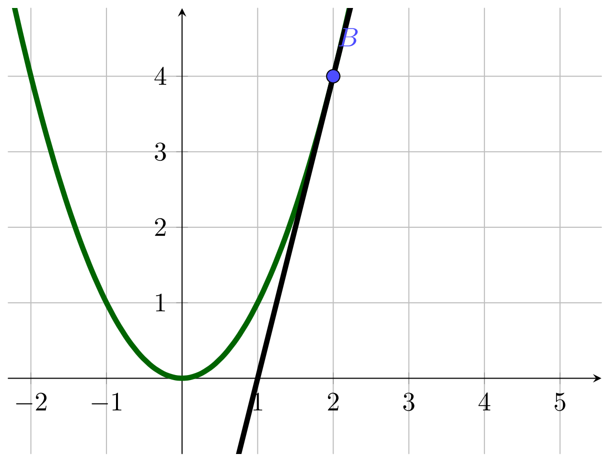
$$q = f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot x_0$$

$\Longrightarrow$ l'equazione della retta secante, risulta essere quindi:

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

l'equazione della retta tangente, quando esiste, è il limite per $h \to 0$ dell'equazione della retta secante.
Quindi se f è derivabile in x_0, si ottiene

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.
Significato geometrico: misura la pendenza del grafico della funzione.