1 Funzioni

Dati A, B insieme di numeri reali, una **funzione** da A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrsipondere uno ed un solo elemento di B.

$$f : A \to B \qquad A \text{ dominio o insieme di definizione} \qquad f(A) \text{ codominio}$$

$$y = f(x) \iff textadognielementox \in A \text{ corrispone tramite la funzione f, l'elemento } y = f(x) \in B$$

Valgono le seguenti:

- f si dice **suriettiva** se $\forall y \in B$, esiste almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$, ovvero $f(A) = B$
- f si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- f si dice **biunivoca** se è sia suriettiva che iniettiva

1.1 Funzione inversa

$f : A \to B$ biunivoca. Allora esiste una funzione **inversa**:

$$f^{-1} : B \to A$$

è la funzione che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

1.2 Funzione monotona

f si dice **monotona** in un insieme A, se verifica una delle seguenti condizioni:
$\forall x_1, x_2 \in A$:

- f strettamente crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- f strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- f decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

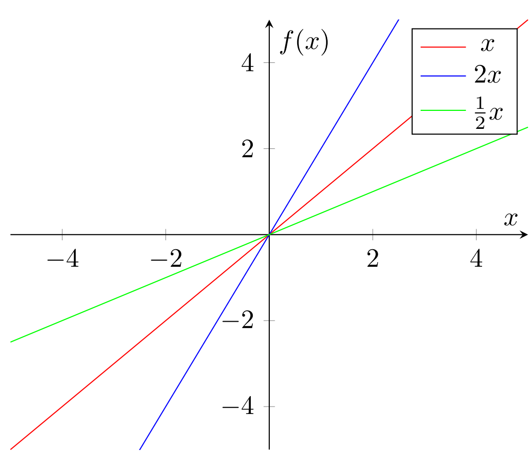
1.3 Criterio di invertibilità

f è strettamente monotona, allora è anche invertibile.

1.4 Funzione lineare

$y = mx + q$

- m è il coefficiente angolare
- se $m = 0$, risulta $y = q$ costante



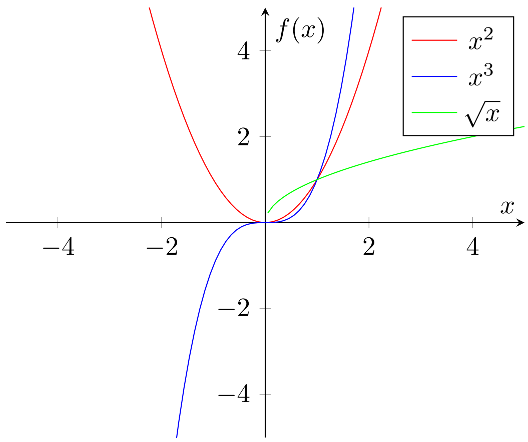
1.5 Funzione potenza

$y = x^n$ con $n \in \mathbb{R}$
Strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$$

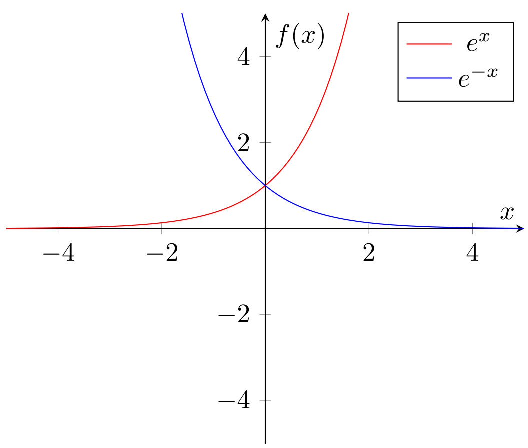
(Ad esempio per $n = 2$ se $0 \leq x_1 \leq x_2$ moltiplicando per x_1 e x_2 si ha $x_1^2 < x_1 x_2$ e $x_1 x_2 < x_2^2 \implies x_1^2 < x_2^2$) e quindi è invertibile e l'inversa è:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad x \geq 0$$



1.6 Funzione esponenziale

$f(x) = a^x$ con a numero reale positivo, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

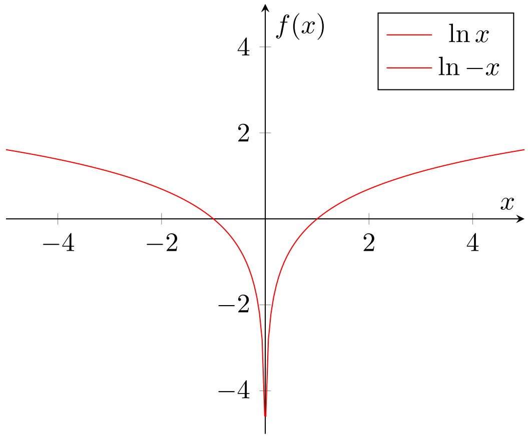


Se $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale è invertibile, la funzione inversa è:

1.7 Funzione logaritmo

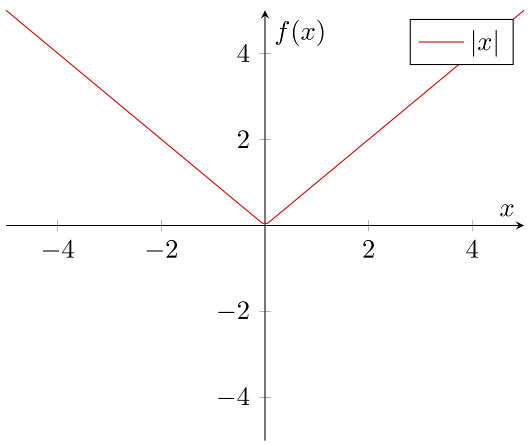
$f(x) = \log_a x$.

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$



1.8 Funzione valore assoluto

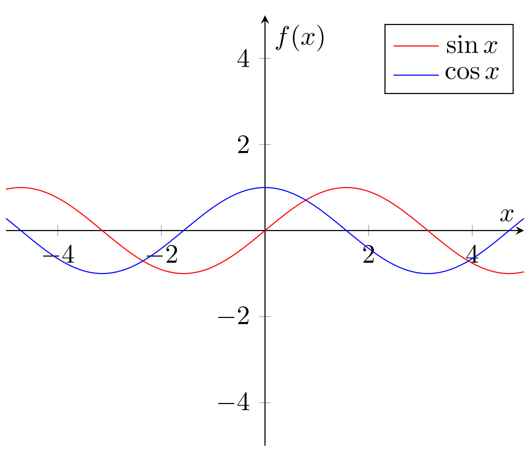
- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2$



1.9 Funzioni trigonometriche

$y = \sin x, \cos x$

- $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



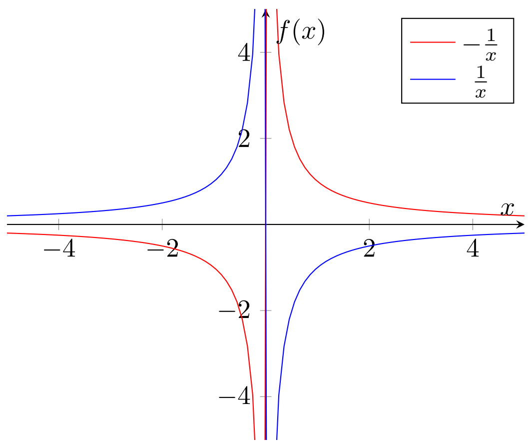
E' interessante vedere la combinazione di funzioni elementari.
Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ definita per $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. E' una funzione **pari**, cioè $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in$ dominio,

simmetrica rispetto all'asse y.
(**Dispari** se $f(x) = -f(-x)$, simmetrica rispetto all'origine).

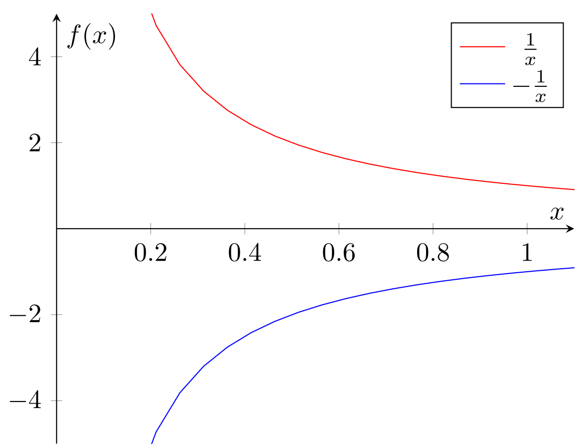
1.10 Esempio, Introduzione limiti

- $y = x$, $y = \sin x$ sono funzioni Dispari
- $y = \cos x$ è una funzione Pari

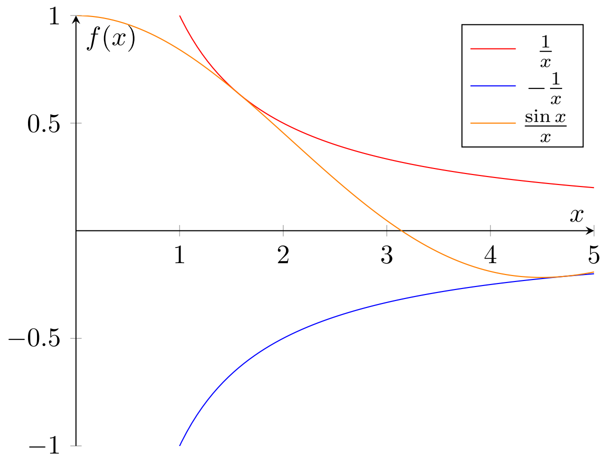
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è una funzione pari, la disegniamo per $x \geq 0$.
Osserviamo che $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e dividendo per x: $\implies -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \quad \forall x > 0$



e $y = \dfrac{\sin x}{x}$ sarà compresa tra i due rami di iperbole per $x > 0$:



per $x > 0$, $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ha lo stesso segno di $\sin x$:



$x_n \to 0 \quad f(x_n) \to ?$
Non è definita per $x = 0$. Cosa succede per $x \to 0$?

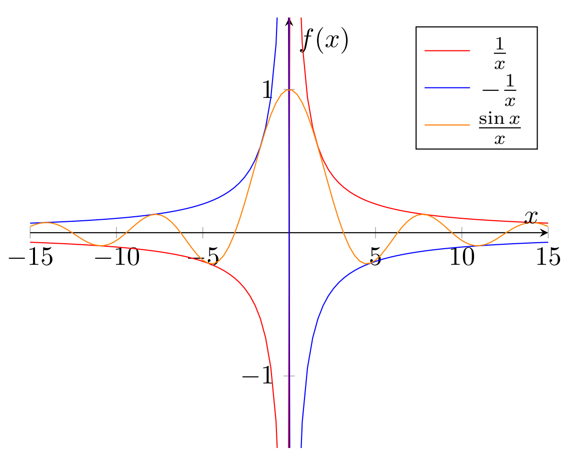
- Tende a zero?
- Tende a $+\infty$?
- O tende a un valore intermedio?

Una formulazione rigorosa del comportamento di una funzione $f(x)$, per x vicino ad un punto x_0, in questo caso $x_0 = 0$, è quella di considerare una generica successione x_n che converge ad x_0 (x_n è "vicino" ad x_0 se n è grande) e la corrispondente successione y_n costutuita dai valori assunti dalla funzione $f(x)$ ($y_n = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$).
Se $y_n = f(x_n)$ converge ad un numero l (che è lo stesso $\forall x_n \to x_0$), allora si dice che $f(x)$ ammette limite uguale a l per $x \to x_0$.

Tornando all'esempio di $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, calcolo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x_n) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x_n}{x} = ?$$

è il limite notevole per le successioni, che sappiamo valere 1.
$\implies \lim_{x \to +\infty} f(x_n) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \iff \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



1.11 Definizione di limite

Sia A un intervallo, o unione finita di intervalli e sia $x_0 \in A$ (anche all'estremo).
Si dice che $f(x)$ ha limite uguale ed l (tende o converge ad l) per $x \to x_0$ se qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$ risulta che $f(x_n) \to l$.
Si dimostra che questa definizione è equivalente alla seguente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \; : \; 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

1.12 Teorema del legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, l \in \mathbb{R}$).

- $\forall x_n \to x_0 \; x_n \in A \setminus \{x_0\} \; \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; x \in A, \; 0 \neq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Valgono anche le definizioni con i limiti infiniti:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to x_0 \; x_n \in A \setminus \{x_0\} \; \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to +\infty / iff \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \; : f(x) > M \quad \forall x \in A \; : \; 0 \neq |x - x_0| < \delta$
- $\lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff \forall x_n \to +\infty, \; x_n \in A, \; \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to l \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists k \; : \; |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \; : \; x > k$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to +\infty \; x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists k \; : \; f(x) > M \quad \forall x \in A \; : \; x > k$

Osservazione: è utile considerare il **limite destro** $x \to x_0^+$ e il **limite sinistro** $x \to x_0^-$, quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0, o solo minori.

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \; : \; |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \; : \; 0 < x - x_0 < \delta$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \; : \; |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \; : \; -\delta < x - x_0 < 0$

1.13 Operazioni con i limiti di funzioni

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente, di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quazionete (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle forme indeterminate.

1.14 Limiti Notevoli

Valgono i limiti notevoli visti per le successioni:

- $\lim_{x \to 0} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
  In particolare $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{b}{x})^x = e^b \quad \forall b \in \mathbb{R}$
  In generale $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \to e \quad$ per $f(x) \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

1.15 Limiti di funzioni composte

Siano $g : x \to y$ e $f : y \to \mathbb{R}$ due funzioni, tali che:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \to y_0} f(y) = l$$

ed esiste $\delta > 0$ tale che risulti $g(x) \neq y_0 \forall x \neq x_0$ dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, allora:

$$f \circ g : x \to \mathbb{R} \quad [f \circ g](x) = f(g(x))$$

si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = l$$

segue che:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = l$$

Esempio: Applichiamo il precedente risultato:
$\lim_{x \to \pm\infty} x \log(1 + \frac{1}{x}) = 1$
Si può scrivere anche $1 + y = t \implies \lim_{t \to 1} \dfrac{\log t}{t-1} = 1$