Algebra Lineare e Geometria Analitica

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Spazi Vettoriali

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno spazio vettoriale sul campo K, se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V, detta somma, $+ : V \times V\mathbb{R} \to V$ e un'operazione esterna, detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\bullet : K \times V\mathbb{R} \to V$, tali che:

1. $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
2. il prodotto esterno $\bullet$ soddisfi le seguenti proprietà:
   (a) $(h \cdot k) \bullet \bar{v} = h \bullet (h \bullet \bar{v}) \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
   (b) $(h + k) \bullet \bar{v} = h \bullet \bar{v} + k \bullet \bar{v} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
   (c) $h \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = h \bullet \bar{v} + h \bullet \bar{w} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
   (d) $1 \bullet \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$ ove 1 è l'unità del campo K

$V(K) = (V, K, + : V \times V\mathbb{R} \to V, \bullet : K \times V\mathbb{R} \to V) \implies$ struttura algebrica
Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori** gli elementi del campo K sono detti **scalari**.

1.0.1 Nota bene

Sia $\mathbb{K}$ un campo, indichiamo con $\mathbb{K}_{[x]} = \{a_0 + a_1 x + \cdots \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ l'insieme di tutti i polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{K}$.

1.1 Vettori

I vettori sono segmenti orientati con **verso, direzione e lunghezza**.

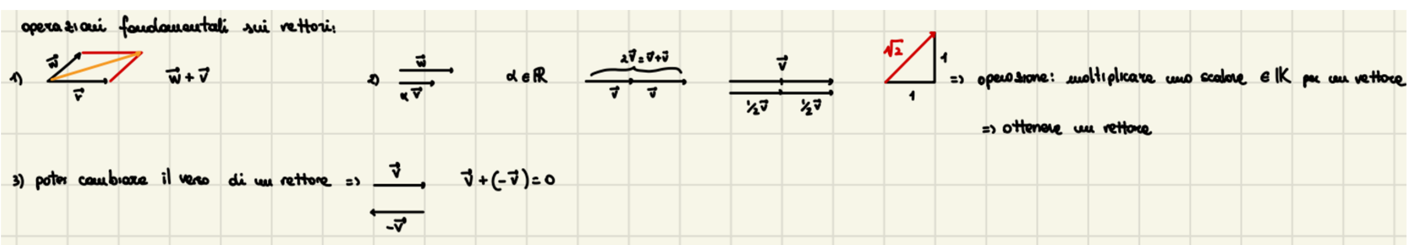

Figure 1: Vettori

1.1.1 Esercizio

Sia $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma componente per componente $\implies (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e prodotto per scalare campo per campo $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ è uno spazio vettoriale reale.

1. Far vedere che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano:
   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (0, 0) + (a, b)$
   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \;\; \exists\, (-a, -b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = (-a + a, -b + b) = (-a, -b) + (a, b)$
   (c) $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$
   (d) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$

Abbiamo verificato che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano.
NB: abbiamo usato solamente che $\mathbb{R}$ è un campo $\implies$ abbiamo usato solo le proprietà della somma

1. Ora dobbiamo verificare che il prodotto esterno soddisfi le proprietà dello spazio vettoriale:

   (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2 : 1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) \implies$ elemento neutro

   (b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 = (\alpha\beta) \cdot (a, b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) = (\alpha(\beta a, \alpha(\beta b)) = \alpha(\beta a, \beta b) = \alpha(\beta \cdot (a, b)) \implies$ pseudo associativa

   (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta)(a, b) = ((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = \alpha(a, b) + \beta(a, b) \implies$ pseudo distributiva

   (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 : \alpha((a, b) + (c, d)) = \alpha(a + c, b + d) = (\alpha a, \alpha c, \alpha b, \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \alpha(a, b) + \alpha(c, d)$

1.2 Combinazione Lineare

Siano $\bar{v_1} \dots \bar{v_k} \in V(\mathbb{K})$ vettori, α_1, α_n scalari, si dice combinazione lineare di $(\bar{v_1} \dots \bar{v_k})$ con α_1, α_k il vettore $\alpha_1\bar{v_1} + \cdots + \alpha_n\bar{v_k}$.

1.3 Applicazione Lineare

Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Si dice applicazione lineare da $V(\mathbb{K})$ in $W(\mathbb{K})$ una funzione $f : V \to W$ tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha\bar{w} + \beta\bar{v}) = \alpha f(\bar{w}) + \beta f(\bar{v})$$

Un'applicazione lineare è una funzione che manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari con i medesimi coefficienti. Se $V(\mathbb{K})$ è spazio vettoriale e $f : V \to W$ è applicazione lineare $\implies f(V)$ immagine di V mediante f è uno spazio vettoriale.

1.4 Sottospazio Vettoriale

Sia $W(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, sia anche $X \subseteq W$ sottoinsieme $x \neq 0$, allora X è detto **sottospazio** di W se X rispetta le operazioni di somma di vettori ristretta ad $X \times X$ e troncata ad X e di prodotto per scalari di W ristretta a $\mathbb{K} \times X$ e troncata ad X soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.
In tale caso scriviamo $X \leqslant W$. X è sottospazio vettoriale se:

1. la somma di due qualsiasi vettori di X è un vettori di X

2. il prodotto di un qualsiasi vettore di X per uno scalare è ancora un vettore di X

1.4.1 Teorema 1

Sia $\mathbb{V}(\mathbf{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, allora:

1. $\forall \bar{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \iff \alpha = 0 \ \vee \ \bar{v} = \underline{0}$

2. $\forall \bar{v} \in V = (-1)\bar{v} = -\bar{v}$

Dimostrazione:

1. Consideriamo $0 \cdot \bar{v} = (0 + 0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0$ sommando a destra e a sinistra $-(0 \cdot \bar{v})$ si ottiene $-(0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) = -(0 \cdot \bar{v}) + 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 + 0 + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$ $\alpha = 0 \implies \alpha\bar{v} = \underline{0}$.
   Supponiamo $\alpha\bar{v} = \underline{0}$ con $\alpha = 0 \implies \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ e $\alpha^{-1}(\alpha\bar{v}) = \alpha^{-1}1 \cdot \underline{0}$
   $\alpha^{-1}(\alpha\bar{v}) = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
   $\alpha^{-1}1 \cdot \underline{0} = \alpha^{-1}(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$ $\alpha^{-1}1 \cdot \underline{0} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$ sommando come prima $-(\alpha^{-1}\underline{0})$ a dx e sx
   $\alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0} \implies$ in particolare $\bar{v} = \underline{0}$

2. $(-1)\bar{v} + \bar{v} = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = (-1+1)\bar{v} = 0 \cdot \underline{0} = \underline{0}$ pertanto sommando a dx e sx $(-\bar{v})$ otteniamo $-1\bar{v} = -1\bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v} = \underline{0} + (-\bar{v}) = \underline{0} + (-\bar{v}) = -\bar{v}$

1.4.2 Teorema 2

$X \leq V(\mathbb{K}) \iff X \subseteq V(\mathbb{K})$ ed X è chiuso rispetto le combinazioni lineari di suoi elementi mediante le equazioni di V. In altre parole:

$$\star)\ \forall \bar{v}, \bar{w} \in X\ \forall \alpha\beta \in \mathbb{K} : \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in X$$

Osservazione: $\star$ è equivalente a dire:

$$\bullet)\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ \ \forall \bar{v} \in X : \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in X\ \&\ \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{v} + \bar{w} \in X$$

Verifichiamo che se vale $\star$ allora $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha\bar{v} + \underline{0} = \alpha\bar{v} \in X$ e $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X : 1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} \in X$.
Viceversa se vale $\bullet \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha\bar{v}, \beta\bar{w} \in X \implies \bar{v}' = \alpha\bar{v}, \bar{w} = \beta\bar{w} \in X \quad \bar{v}' + \bar{w}' \in X \implies \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in X$
Se vale $\bullet$ o $\star$ (stessa cosa) allora X è sottospazio. Osserviamo che molte delle proprietà di spazio vettoriale valgono automaticamente per le restrizioni applicate a qualsiasi $X \subseteq V(\mathbb{K})$:

1. se $\forall \bar{v} \in V : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \implies \forall \bar{v} \in X : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{v} \in V : (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v}) \implies$ vale anche per $\forall \bar{v} \in X$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{v} \in V : (\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$
4. $\forall \bar{v}, \bar{w}\ \forall \alpha \in \mathbb{K} = \alpha(\bar{v} + \bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w}$

1, 2, 3, 4 valgono tutte anche sulla restrizione. Vale anche sulle restrizioni che $\forall \bar{u}\bar{v}\bar{w} \in V : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \implies$ $\implies \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ e similmente: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{w} \implies \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{w}$
Cosa potrebbe non funzionare?

1. $\underline{0} \in X$
2. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} \in X$
3. $(-\bar{u}) \in X$ se $\bar{u} \in X$
4. $\alpha\bar{u} \in X$ se $\bar{u} \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Se valgono a, b, c, d possiamo troncare le operazioni ad $X \implies$ abbiamo un sottospazio.
b+d $\implies$ significa che si può troncare.
a+b+c $\implies$ $(X, +)$ un gruppo.

1.5 Condizioni per sottospazio

Se vale la condizione $\star$: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in X$

1. $0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in X$
2. $1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \in X$
3. $(-1)\bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = -\bar{u} + \underline{0} = -\bar{u} \in X\ \ \forall \bar{u} \in X$
4. $\alpha\bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \alpha\bar{u} + \underline{0} = \alpha\bar{u} \in X\ \forall \bar{u} \in X$

X è un sottospazio, viceversa se X sottospazio allora ogni combinazione lineare di suoi vettori deve stare in $X \implies$ vale $\star$.

1.6 Indipendenza e dipendenza lineare

Siano $v_1, v_2 \cdots v_n$ vettori di uno spazio vettoriale e $a_1, a_2 \cdots a_n$ elementi del campo $\mathbb{K}$. Si dice **combinazione lineare** dei vettori $v_1, v_2 \cdots v_n$ con coefficienti $a_1, a_2 \cdots a_n$ il vettore di $\mathbb{V}$.

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

1.6.1 Sistema Libero o Legato

$\mathbb{V}(\mathbb{K})$ spazio vettoriale e un sistema $\mathbb{A} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ si dice **libero**, ovvero i suoi vettori sono **linearmente indipendenti**, se l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli. Viceversa il sistema è **legato** e i suoi vettori sono **linearmente dipendenti**.

1.7 Sistema di generatori di uno spazio vettoriale

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $\mathbb{A}$ un sistema o un insieme non vuoto di vettori di $\mathbb{V}$. Si dice **copertura lineare** di $\mathbb{A}$, e si indica $\text{span}(\mathbb{A})$, l'insieme dei vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ che si possono esprimere come combinazioni lineari, di un numero finito, di vettori di $\mathbb{A}$ (tutte le possibili combinazioni lineari).

$$\text{span}(A) = \{v \in \mathbb{V} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, a_iv_n, a_1 \in \mathbb{K}, v_i \in \mathbb{A}\}$$

1.7.1 Copertura Lineare = Sottospazio

La copertura lineare $\text{span}(A)$ di un sistema o di un insieme $\mathbb{A}$, non vuoto, di vettori $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.
Dimostrazione: si osserva che la somma di un numero finito di vettori di $\mathbb{A}$ è sempre una combinazione lineare di un numero finito di vettori a $\mathbb{A}$ e, analogamente, il prodotto di un elemento del campo $\mathbb{K}$, per una combinazione lineare di vettori di $\mathbb{A}$, è ancora una combinazione lineare di un numero finito di vettori di $\mathbb{A}$. Quindi, $\text{span}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. Pertanto, dire che $\text{span}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, la copertura lineare di un insieme o di un sistema $\mathbb{A}$ di vettori si suole chiamare **spazio generato** da $\mathbb{A}$.
Osservazione: Diremo, talvolta, che la copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A})$ di un sistema o di un insieme $\mathbb{A}$, non vuoto, di vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è **il più piccolo sottospazio vettoriale** che contiene $\mathbb{A}$, nel senso che $\text{span}(\mathbb{A})$ è contenuto in ogni sottospazio vettoriale che contenga $\mathbb{A}$. E' immediato, infatti osservare che, ogni sottospazio vettoriale che contiene $\mathbb{A}$ deve contentere tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di vettori di $\mathbb{A}$ e, quindi, anche $\text{span}(\mathbb{A})$.
Si può facilmente dimostrare che:

1. $\text{span}(\text{span}(\mathbb{A})) = \text{span}(\mathbb{A})$
2. $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \iff \mathbb{A}$ è un sottospazio vettoriale.

1.8 Insieme di generatori

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{V}$. Il sottoinsieme $\mathbb{A}$ si dice **sistema o insieme di generatori** di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ se la sua copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{V}(\mathbb{K})$, cioè se **ogni vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si può esprimere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di** $\mathbb{A}$. (Si dice che X è un **insieme di generatori** per $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ se $\text{span}(X) = V$).
Ogni spazio vettoriale ammette un insieme di generatori, ma si distinguono due casi:

1. **finitamente generato:** se $\exists$ un almeno un sistema di generatori con un numero finito di vettori;

$$\exists X \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{K}) \quad |X| = n \; : \; \text{span}(X) = V$$

2. **non finitamente generato:** se ogni sistema di generatori ha un numero infinito di vettori.

1.8.1 Lemma

Se $S = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$ è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ e uno dei suoi vettori v_i, dipende linearmente dagli altri, allora $S\ v_i$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

1.8.2 Teorema

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ finitamente generato non banale ammette almeno un sistema libero di generatori.

1.9 Lemma di Steinitz

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale f.g., sia $B = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ un suo sistema di generatori e sia $A = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$ un sistema libero di vettori di $\mathbb{V}$. Allora $m \leq n$, cioè $|A| \leq |B|$.
NB: fra i vettori di A e quelli di B non c'è nessuna relazione.
La dimostrazione non va studiata.

1.10 Base

Si dice **base** di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ f.g. una **sequenza** libera di generatori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.
Tutte la basi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ hanno la stessa *cardinalità*.

1.10.1 Dimostrazione

Ci basta far vedere che ogni vettori si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base.
Supponiamo $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ e B sequenza libera di generatori.
$\bar{v} \in \text{span}(B) \qquad \bar{v} = \alpha_1\bar{b_1} + \alpha_2\bar{b_2} + \cdots + \alpha_n\bar{b}_n$.
Supponiamo anche $\bar{v} = \beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2 + \cdots + \beta_n\bar{b}_n$.
Allora $\bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1\bar{b}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{b}_n) - (\beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2 + \cdots + \beta_n\bar{b}_n) = (\alpha_1 - \beta_1)\bar{b_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{b_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{v_n}$. Se B libera $\implies$ deve essere $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_n = \beta_n$ perchè tutti i coefficienti sono necessariemente 0
$\implies B$ libera e di generatori $\iff B$ base.

1.11 Metodo degli scarti successivi

Algoritmo che data una sequna finita dei generatori per uno spazio vettoriale produce $\underline{0}$ oppure una sottosequenza libera di generatori. S è di generatori se $S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ ed ogni $\bar{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$ si scrive come combinazione lineare di un numero finito di vettori di S. $V = \text{span}(S)$

1.11.1 Lemma

Sia $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una seuqenza di generatori per uno spazio vettoriale W legato, allora esiste $\bar{v}_i \in S : S \setminus \{\bar{v}_i\}$ genera W ("Possiamo sempre scartare almeno un vettore da S ed otteniamo ancora una sequenza di generatori").
Dimostrazione: S legata $\implies \exists \bar{v}_i \in S : \bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_i$
Sia $\bar{w} \in \text{span}(S) \implies \exists \beta_j \dots j = 1 \dots n$ tali che $\bar{w} = \beta_1\bar{v}_1 + \cdots + \beta_i\bar{v}_i + \cdots + \beta_n\bar{v}_n = \beta_1\bar{v}_1 + \cdots + \beta_i \sum_{j \neq i}(\beta_j + \beta_i\alpha_j)\bar{v}_j$.
$\implies \bar{w}$ è combinazione lineare di un numero finito di vettori di $S \setminus \{\bar{v}_i\}$
$\implies \text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \text{span}(S)$
Viceversa ogni vettore di $\text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$ è anche un vettore di $\text{span}(S) \implies \text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \text{span}(S) \implies$ $\boxed{\text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \text{span}(S)}$.

1.12 Dimensione

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ ha **dimensione n**, e scriveremo $\dim \mathbb{V}(\mathbb{K}) = n$, se n è il numero di vettori che compongono una sua qualunque base.

1.13 Componenti

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ una sua base. $\forall v \in \mathbb{V}$ si dicono **componenti di** v, rispetto alla base B, i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Cambiando l'ordine dei vettori che compaiono in una base, anche se si ottiene ancora una bse, si tratta di una base diversa.

1.13.1 Corollario

In $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, spazio vettoriale di dimensione n,

1. m vettori $v_1, v_2, \dots, v_m$ con $m > n$ sono l.d.;
2. m vettori $v_1, v_2, \dots, v_m$ con $m < n$ non possono generare $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$;
3. una sequenza di n generatori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ risulta essere anche libera, e quindi, individua una base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$;
4. una sequenza libera di n vettori risulta essere anche un sistema di generatori e, quindi, individua una base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$.

Dimostrazione:

1. Dal lemma di Steinitz, se uno spazio vettoriale ha dimensione n, **il massimo numero di vettori l.d.** che si possono trovare in $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è proprio n.
2. Il **minimo numero di vettori che occorrono per generare** $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ è proprio n.

1.13.2 Proposizione

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ di dimensione n contiene sottospazi di dimensione m $\forall\ 0 \leq m \leq n$.

1.13.3 Proposizione

Se U e W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ e U è contenuto in W, allora:

1. $\dim U \leq \dim W$;
2. $U = W \iff \dim U = \dim W$

1.14 Teorema del completamento di una base

Sia $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, ove $m \leq n$, una sequenza livera di vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$. Allora, in una qualunque base B di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$.

1.15 Legami fra sequenze libere, basi e matrici

Se $B = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n]$ e $B' = [\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n]$ sono due basi di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ allora:

1. Esse hanno la stessa cardinalità [per Steinitz $n \leq m$ e $m \leq n \implies m = n$ prendendo prima B come libera e B' come di generatori e poi viceversa].
   Definizione: si dice dimensione di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ il numero di vettori di qualunque base.
2. Ogni vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico in componenti rispetto una fissata base
   $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ $\forall \bar{v} \in \mathbb{V}_n(\mathbb{K}) \exists!(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1\bar{e}_1 + \cdots \alpha_n\bar{e}_n$
3. Posto $E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$ e $E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}$ tale che $\implies E' = AE \implies$.
   (a) la matrice A è invertibile $\implies \det(A) \neq 0$
   (b) se $\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)E = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)E' \implies {}^tX = {}^tA^tX'$ cambiamento di base
   $[XE \implies X'E' = X'AE = {}^tX = {}^tA^tX']$

Osservazione:

1. Sia $S = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ una sequenza libera $\implies$ ogni sottosequenza di S è libera
2. Sia $T = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ una sequenza di generatori $\implies$ ogni sovrasequenza di T è di generatori.

- Se **aggiungo** vettori ad una **sequenza libera** ottengo ancora una sequenza libera (Teorema di completamento della base);
- Se **tolgo** vettori ad una **sequenza libera** ottengo ancora una sequenza libera;
- Se **aggiungo** vettori ad ua **sequenza di generatori** ottengo una sequenza di generatori;
- Se **tolgo** vettori ad una **sequenza di generatori** ottengo una sequenza di generatori (Metodo degli scarti successivi).

1.15.1 Dimostrazione

1. Sia S libera, supponiamo $S' \leq S$ legata $\implies S' = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_t)$ $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ tali che $\alpha_1\bar{e}_1 + \ldots + \alpha_t\bar{e}_t = \underline{0}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t) \neq (0 \ldots 0) \implies \alpha\bar{e}_1 + \ldots \alpha_t\bar{e}_t + 0\bar{e}_{t+1} + \ldots + 0\bar{e}_n = \underline{0}$ con $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t 0\ 0 \ldots 0) \neq \underline{0} \implies S$ legata, **assurdo**.
2. Sia $T = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_k)$ di generatori e $U = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_r)$ vettori $\implies T \cup S$ è di generatori, perchè $\forall$ vettore di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si scrive come $\beta_1\bar{g}_1 + \ldots + \beta_k\bar{g}_k = \beta_1\bar{g}_1 + \ldots + \beta_k\bar{g}_k + 0\bar{h}_1 + \ldots + 0\bar{h}_r$

1.16 Teorema

Sia $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale con $\dim(V) = n$. Sia $X \subseteq \mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ con $|X| = n$. Allora $X = V$.

1.16.1 Dimostrazione

X ammette una base B' di n vettori $\implies$ tale base cobsta di n vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ liberi $\implies$ per le conseguenze di Steinitz take sequenza deve essere di generatori per $V \implies \text{span}(B')X \subseteq \mathbb{V}_n(\mathbb{K}) = \text{span}(B')$ ne segue $X = V$.
La nozione di dimensione ci dice "quanto è grande" uno spazio vettoriale.

1.17 Intersezione e somma di sottospazi

Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, la loro **intersezione** e la loro **unione** sono, rispettivamente

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ and } v \in W\} \;\; e \;\; U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \text{ or } v \in W\}$$

1.17.1 Proposizione

Se U, W sono sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

1.18 Somma

Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. Si dice **somma** S di U, W

$$S = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

1.18.1 Proposizione

La somma S di due sottospazi U, W di uno spazio $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.
Dimostrazione: basta osservare che se $v_1 e v_2$ sono vettori di $U + W$ anche $\alpha v_1 + \beta v_2$ appartiene a $U + W$. Infatti se $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$ allora $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2)$ e ciò dimostra l'asserto.

1.19 Somma diretta

La somma S di due sottospazi U, W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si dice **diretta**, e si scrive $U \oplus W$, se pgni vettore di S si può esprimere in modo unico, come somma di un vettore di U e di uno di W.

1.19.1 Proposizione

La somma di due sottospazi U, W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è diretta $\iff$ $U \cap W = \{0\}$
Dimostrazione: supponiamo che la somma di U, W sia diretta e sia, per assurdo, $\underline{0} \neq x \in U \cap W$. Un qualunque vettore v di $U + W$ è $v = u + w$ ove $u \in U$ and $w \in W$, ma anche $v = (u + x) + (w - x)$ ove $u + x \in U$ e $w - x \in W$. Pertanto, v può essere espresso in più modi come somma di un elemento di U e di uno di W, e questo è assurdo.
Viceversa, sia $U \cap W = \{\underline{0}\}$ e, per assurdo, esista un vettore v esprimibile in due modi diversi come somma di vettori di V e W,

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

in questo caso il vettore $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ sarebbe un vettore non nullo di $U \cap W$ e ciò è contro l'ipotesi.

1.19.2 Corollario

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è somma diretta di due suoi sottospazi $U, W \iff V = U + W$ and $U \cap W = \{\underline{0}\}$

1.20 Formula di Grassmann

Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ f.g. Allora:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

1.21 Definizione

Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ si dice **complemento diretto** di U in V, un sottospazio vettoriale W di V_n, tale che $U \oplus W = V$.

2 Sistemi Lineari

2.1 Determinante

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n, a elementi in un campo $\mathbb{K}$. Si dice **determinante**, e si indica con $\det(A)$ o $|A|$, la somma di tutti i suoi termini presi con il proprio segno. Cioè:

$$\det(A) = \sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

2.1.1 Proprietà

1. Se una colonna (o una riga) di una matrice è nulla, allora il determinante è nullo.

2. $\det(A) = \det({}^tA)$, infatti, i termini estratti da ${}^tA$ sono tutti e soli i termini estratti da A. Sia $A = (a_{ij})$ e $B = ({}^tA) = (b_{ij})$ allora $b_{ij} = a_{ji}$. Se:
$$b_{1\alpha(1)}b_{2\alpha(2)}\cdots b_{n\alpha(n)}$$
è un termine estratto da ${}^tA$, associato alla permutazione α, esso coincide con:
$$a_{\alpha(1)1}a_{\alpha(2)2}\cdots a_{\alpha(n)n}$$
che per definizione, è un termine estratto da A e individuato dalla permutazione α^{-1}. Dunquue, poichè $sgn(\alpha) = sgn(\alpha^{-1})$, possiamo concludere che $\det(A) = \det({}^tA)$.

3. Se A' è ottenuta da A scambiando tra loro due righe (o colonne), allora $\det(A') = -\det(A)$. Basta osservare che, i termini della matrice A' si ottengono da quelli di A scambiando tra loro due termini, e quindi, il segno del determinante cambia. Infatti, se $A' = (b_{ij})$ è ottenuta da $A = (a_{ij})$ scambiando la k-esima riga con l'h-esima, allora ogni termine estratto da A'
$$b_{1\alpha(1)} \cdot \ldots \cdot b_{k\alpha(k)} \cdot \ldots \cdot b_{h\alpha(h)} \cdot \ldots \cdot b_{n\alpha(n)}$$
associato alla permutazione α, è uguale a:
$$a_{1\alpha(1)} \cdot \ldots \cdot a_{h\alpha(k)} \cdot \ldots \cdot a_{k\alpha(h)} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha(n)}$$
che risulta un termine di A associato alla permutazione (σ o α), dove, σ è lo scambio di k con h. Ma essendo $sgn(\alpha) = -sgnS(\alpha\ o\ \sigma)$, risulta $|A'| = -|A|$

4. Se A ha due righe (o due colonne) uguali, allora $\det(A) = 0$. Infatti, se A ha due righe uguali, allora, scambiando tra loro queste due righe, non si altera la matrice A, e per la precendente proprietà, $\det(A) = -\det(A)$, da cui $\det(A) = 0$.

5. Se in A una colonna C_i è la somma di due n-uple X_i, Y_i, cioè se A è del tipo:
$$(C_1\ \cdots\ X_i + Y_i\ \cdots\ C_n)$$
allora $|A| = |C_1 \cdots X_i \cdots C_n| + |C_1 \cdots Y_i \cdots C_n|$. Analogamente per le righe.

6. Se A' è una matrice ottenuta da $A = (C_1\ C_2 \cdots C_n)$ moltiplicando per $k \in \mathbb{K}$ una sua colonna (o riga), allora
$$|A'| = |C_1\ \cdots\ kC_i\ \cdots\ C_n| = k|C_1\ \cdots\ C_i\ \cdots\ C_n| = k|A|$$

7. Se A ha due colonne (o due righe) proporzionali, allora $\det(A) = 0$.

8. Se A ha una colonna (o una riga) che è combinazione lineare di altre colonne (o righe), allora $\det(A) = 0$.

9. Se A' è una matrice ottenuta da A sommando ad una sua colonna (o riga) un multiplo di un'altra colonna (o riga), allora $|A'| = |A|$.

2.2 Eliminazione di Gauss

L'intendo del **metodo di eliminazione di Gauss** è quello di ridurre una matrice A ad una matrice A', detta **ridotta a gradini**, in quanto il determinante di quest'ultima può essere calcolato moltiplicando gli elementi presenti nella diagonale principale, che ha la forma:
$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Per farlo utilizziamo quelle che si chiamano **Mosse di Gauss**:

1. Scambiare tra loro due righe della matrice;

2. Moltiplicare una riga per un numero diverso da zero;

3. Sostituire ad una riga la somma di essa con un multiplo di un'altra riga.

Osservazione: le mosse di Gauss non alterano il determinante della matrice.
Passi dell'algoritmo di Gauss:
Indichiamo con A una matrice non ridotta a gradini con m righe e n colonne.

1. Sia C_k, con $1 \leq \ k \leq \ n$, la prima colonna a paritre da sinistra che contiene almeno un termine a non nullo.
   Detta R_1 la prima riga della matrice, possono presentarsi **due eventualità**:
   (a) Se a è un elemento di R_1, passiamo al punto 3
   (b) Se $a \notin \ R_1$. Controlliamo se la matrice ottenuta dopo lo scambio è ridotta a gradini: se lo è possiamo fermarci, in caso contrario procediamo oltre.
2. L'obiettivo è annullare tutti gli elementi della k-esima colonna al di sotto di a. Sostituiamo ogni riga R_i, con $i > 1$ e con k-esimo elemento non nullo, con $R_i + \lambda R_1, \lambda \in \mathbb{R} \ : \ R_i + \lambda R_1 = 0$.
3. Se la matrice risultante è ridotta a gradini, allora l'algoritmo termina, altrimenti ripetiamo i passi precedenti con la matrice ottenuta.

2.2.1 Algoritmo di Gauss in Julia