

# Analisi I

Andrea Bellu

2023/2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Assiomi dei numeri reali</b>	<b>3</b>
1.1	Assiomi relativi alle operazioni . . . . .	3
1.2	Assiomi relativi all'ordinamento . . . . .	3
1.2.1	Assioma di completezza . . . . .	3
1.3	Denso . . . . .	4
1.3.1	$\sqrt{2}$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Complementi ai numeri reali</b>	<b>4</b>
2.1	Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore . . . . .	4
2.1.1	Il massimo e il minimo sono unici . . . . .	4
2.1.2	Osservazione . . . . .	4
2.2	Maggiorante e Minorante . . . . .	5
2.3	Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore . . . . .	5
2.3.1	Estremo superiore . . . . .	5
2.3.2	Estremo inferiore . . . . .	5
2.3.3	Osservazione . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Successioni e Limiti</b>	<b>6</b>
3.1	Limiti . . . . .	6
3.2	Proposizione . . . . .	6
3.3	Successioni Limitate . . . . .	7
3.4	Teorema . . . . .	7
3.5	Operazioni con i limiti . . . . .	7
3.6	Forme infeterminate o di indecisione . . . . .	8
3.7	Teoremi di confronto . . . . .	8
3.7.1	Teorema della permanenza del segno . . . . .	8
3.7.2	Teorema dei carabinieri . . . . .	8
3.7.3	Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima . . . . .	9
3.8	Alcuni limiti notevoli . . . . .	9
3.9	Limiti relativi alle funzioni trigonometriche . . . . .	9
3.10	Successione notevole importante . . . . .	9
3.11	Successioni Monotone . . . . .	10
3.12	Teorema sulle successioni monotone . . . . .	10
3.13	Limiti Notevoli . . . . .	10
3.13.1	Infiniti di ordine crescente . . . . .	11
3.14	Criterio del rapporto per le successioni . . . . .	11
3.15	Successioni estratte . . . . .	11
3.16	Teorema di Bolzano-Weierstrass . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Funzioni</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Partizioni</b>	<b>11</b>
5.1	Osservazione . . . . .	12

<b>6</b>	<b>Integrale definito</b>	<b>13</b>
6.1	Funzione non integrabile secondo Riemann . . . . .	13
6.2	Proprietà . . . . .	15
6.2.1	Additività integrale rispetto all'intervallo . . . . .	15
6.2.2	Linearità dell'integrale . . . . .	15
6.2.3	Confronto tra gli integrali . . . . .	15
6.2.4	Integrabilità delle funzioni continue . . . . .	15
6.3	Teorema della media . . . . .	15
6.4	Interpretazione geometrica del teorema della media . . . . .	16
6.4.1	Dimostrazione del teorema della media . . . . .	16
6.5	Integrabilità delle funzioni monotone . . . . .	17
6.5.1	Osservazioni . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Integrali Indefiniti</b>	<b>18</b>
7.1	Funzione integrale . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Serie Numeriche</b>	<b>18</b>
8.1	Somma parziale . . . . .	19
8.1.1	Esempio 1 . . . . .	19
8.1.2	Esempio 2 . . . . .	19
8.2	Definizione di Serie Numerica Astratta . . . . .	19
8.2.1	Osservazione . . . . .	19
8.3	Condizione necessaria di convergenza di una serie . . . . .	19
8.3.1	Dimostrazione . . . . .	20
8.4	Serie geometrica . . . . .	20
8.4.1	Osservazione . . . . .	20
8.4.2	Esercizio del compito (21/06/21) . . . . .	20
8.5	La serie armonica . . . . .	21
8.6	La serie armonica generalizzata (con esponente) . . . . .	21
8.7	Serie a termini non negativi . . . . .	21
8.7.1	Teorema sulle serie a termini non negativi . . . . .	21
8.8	Criteri di convergenza per serie a termini non negativi . . . . .	21
8.8.1	Criterio del rapporto: . . . . .	22
8.8.2	Criterio della radice: . . . . .	22
8.8.3	Criterio del confronto mediante i limiti . . . . .	22
8.8.4	Esempi . . . . .	23
8.9	Serie alternate . . . . .	24
8.10	Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz) . . . . .	24
8.10.1	Esempi . . . . .	24
8.10.2	Esercizio del compito 20 07 21 . . . . .	25
8.11	Convergenza Assoluta . . . . .	25
8.12	Teorema . . . . .	25
8.12.1	Esercizio del compito (precedente) . . . . .	25
8.12.2	Esercizi di compito a fine pdf (da fare) . . . . .	25
<b>9</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>25</b>
9.1	Osservazione . . . . .	26
9.2	Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine . . . . .	26
9.2.1	Domanda . . . . .	26
9.3	Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico . . . . .	26
9.4	Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale . . . . .	27
9.5	. . . . .	27
9.6	Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare . . . . .	27
9.7	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine . . . . .	27
9.8	Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti . . . . .	27
9.9	Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti . . . . .	28
9.9.1	Esempio . . . . .	28
9.9.2	Esempio 2 . . . . .	28
9.10	Esempio 3 . . . . .	28

9.11	Equazioni differenziali lineari non omogenee . . . . .	28
9.11.1	Esempio . . . . .	29
9.11.2	Esempio 2 . . . . .	29
9.11.3	Osservazione . . . . .	29
9.11.4	Esempio . . . . .	29

1    Assiomi dei numeri reali

- Assiomi relativi alle operazioni
- Assiomi relativi all’ordinamento
- Assioma di completezza

1.1    Assiomi relativi alle operazioni

Sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione tra coppie di numeri reali e valgono le proprietà:

- **Proprietà associativa**
- **Proprietà commutativa**
- **Proprietà distributiva**
- **Esistenza degli elementi neutri**
- **Esistenza degli opposti**
- **Esistenza degli inversi**

1.2    Assiomi relativi all’ordinamento

E’ definita la relazione di Minore o Uguale  $\leq$ .

- **Dicotomia**
- **Proprietà Assimetrica**
- **Assioma di completezza**

1.2.1    Assioma di completezza

$$\forall a \in A, \forall b \in A, a \leq b \implies \exists c \in A : a \leq c \leq b$$

Esempi:

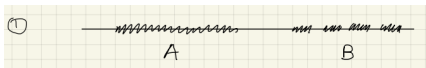


Figure 1: Esempio 1

Esistono infiniti c.

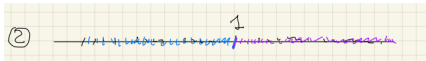


Figure 2: Esempio 2

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \implies c = 1$$

**Osservazione:** Non tutti gli insiemi hanno il più grande o il più piccolo elemento. Ad esempio:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Non ha un elemento più piccolo. (Invece c’è il più grande che è 1).

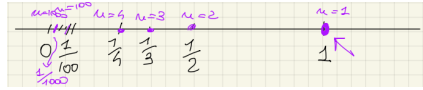


Figure 3: Esempio 3

### 1.3 Denso

Si dimostra che  $\mathbb{Q}$  è denso sulla retta reale (nel senso che fra due numeri razionali è sempre possibile trovare un terzo, anzi infiniti).

$$a = \frac{m_1}{n_1} \quad b = \frac{m_2}{n_2}$$

faccio la media  $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}{2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{2n_1 n_2} \implies \in \mathbb{Q}$

#### 1.3.1 $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$  non si può rappresentare come numero razionale.

**Dimostrazione:** Ragioniamo per assurdo, supponiamo che  $\sqrt{2}$  sia un numero razionale, cioè  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  posso supporre che  $m, n$  siano primi tra loro e che al più uno tra loro sia pari. Allora  $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2 (\star)$   
 $\implies m^2$  deve essere pari e quindi  $m$  è pari.

Posso esprimere  $m$  nella forma:  $m = 2k$  con  $k$  intero.

Ricavo che  $\implies 2n^2 = m^2 = 4k^2$  semplifico per 2 e ottengo  $n^2 = 2k^2$

Ripeto il ragionamento precedente  $\implies n^2$  pari e quindi anche  $n$  pari. Ma allora sia  $m$  che  $n$  risultano pari, ASSURDO! Avevo supposto che fossero primi ed (al più) uno dei due pari. ♣

Per capire meglio guarda esempi della Francy nella prima lezione.

## 2 Complementi ai numeri reali

### 2.1 Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore

$$\text{Def: } M \text{ è il massimo di } A \begin{cases} M \in A & (1) \\ M \geq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il massimo di un insieme di numeri reali  $A$  quindi, se esiste, è un numero  $M$  dell'insieme  $A$ , che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme  $A$ .

$$\text{Def: } m \text{ è il minimo di } A \begin{cases} m \in A & (1) \\ m \leq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il minimo di  $A$  analogamente, se esiste, è un numero  $m$  di  $A$ , che è minore o uguale ad ogni altro elemento di  $A$ .

#### 2.1.1 Il massimo e il minimo sono unici

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.

**Dimostrazione:** Siano  $M_1$  e  $M_2$  due massimi di  $A$ .

Ma allora per definizione di massimo,

$$(1) M_1 \geq a \quad (2) M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Sempre per definizione,  $M_1, M_2$  sono elementi di  $A$ .

Quindi da (1) se  $a = M_2$ , ottengo  $M_1 \geq M_2$

Da (2) se  $a = M_1$ , ottengo  $M_2 \geq M_1$

Segue che  $M_1 = M_2$  ♣.

#### 2.1.2 Osservazione

Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , il più grande elemento di  $A$  è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.
- $B = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , il più piccolo elemento di  $B$  è 0, che è il minimo, il più grande non c'è.

## 2.2 Maggiorante e Minorante

$L$  si dice **maggiorante** per un insieme  $A$  se

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$

$l$  si dice **minorante** per un insieme  $A$  se

$$l \leq a \quad \forall a \in A$$

**Non** sempre un insieme  $A$  ammette maggioranti e minoranti.

L'insieme  $A$  si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.

L'insieme  $A$  si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.

L'insieme  $A$  si dice **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente, in simboli:

$$l \leq a \leq L \quad \forall a \in A \implies \exists M : |a| \leq M \quad \forall a \in A$$

## 2.3 Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di  $A$ .

$$A = \{a \in A\} \quad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

Applichiamo l'assioma di completezza di due insiemi  $A$  e  $B$ , quindi esiste  $c$  numero reale tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Dato che  $c \geq a \quad \forall a \in A$ ,  $c$  è un maggiorante di  $A$ , cioè  $c \in B$ .

Ma  $c$  è anche tale che  $c \leq b$  (minore o uguale a tutti gli elementi di  $B$ ).  $\implies c$  è un minimo. ♣

Allora possiamo dare la seguente definizione:

### 2.3.1 Estremo superiore

**Def:** Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che  $M \in \mathbb{R}$  è l'**estremo superiore** di  $A$  se  $M$  è il minimo dei maggioranti di  $A$ . In simboli:

$$M \text{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} M \geq a & \forall a \in A \quad \textbf{(1)} \text{ (M è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : M - \varepsilon < a \quad \textbf{(2)} \text{ (M è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

Analogamente:

### 2.3.2 Estremo inferiore

**Def:** Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che  $m$  è l'**estremo inferiore** di  $A$  se  $m$  è il massimo dei minoranti di  $A$ . In simboli:

$$m \text{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \quad \textbf{(1)} \text{ (m è minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : m + \varepsilon > a \quad \textbf{(2)} \text{ (m è il massimo dei minoranti)} \end{cases}$$

$\implies$  Quindi se un insieme è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale. Altrimenti:

- L'estremo superiore è  $+\infty$  se  $A$  non è limitato superiormente
- L'estremo inferiore è  $-\infty$  se  $A$  non è limitato inferiormente

$$\begin{cases} \sup A = +\infty & \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : M < a \\ \inf A = -\infty & \iff \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : m > a \end{cases}$$

Ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

### 2.3.3 Osservazione

Assioma di completezza (punto di partenza)  $\implies$  Esistenza dell'estremo superiore.

### 3 Successioni e Limiti

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale  $n$  fa corrispondere uno ed un solo numero reale  $a_n$ . Una successione è una funzione di  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ .

- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- $1 \rightarrow a_1$
- $2 \rightarrow a_2$
- $3 \rightarrow a_3$
- $n \rightarrow a_n$

Simbolo:  $(a_n)$  oppure più semplicemente  $a_n$

A noi interessa il comportamento della successione per  $n$  grande, più precisamente il **limite** della successione  $a_n$ , cioè un numero reale ( $a \in \mathbb{R}$ ) che sia "vicino" ai termini della successione che hanno l'indice  $n$  "grande".

Consideriamo  $a_n$  con  $a$  limite della successione ( $a \in \mathbb{R}$ ).  $a$  è il limite della successione se comunque si scelga un intervallo

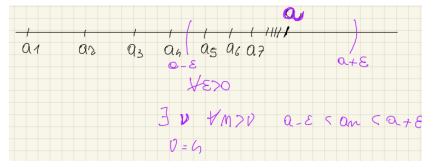


Figure 4: Intorno

di numeri intorno ad  $a$ , diciamo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , allora esiste un indice  $\nu$ , tale che  $\forall n > \nu$   $a_n$  sta nell'intervallo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , cioè  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ .

#### 3.1 Limiti

Un numero reale  $a$  è il limite della successione  $a_n$  (si dice che  $a_n$  tende o converge ad  $a$ ) e si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} a$$

se, qualunque sia  $\varepsilon > 0$ , esiste un numero  $\nu$  tale che:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

**Osservazione:**  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  si può scrivere  $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ .

#### 3.2 Proposizione

Se esiste il limite  $a \in \mathbb{R}$  della successione  $a_n$ , allora è unico.

**Dimostrazione:** Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che:

$$a_n \rightarrow a \quad \text{e} \quad a_n \rightarrow b \quad \text{con} \quad a \neq b$$

Allora  $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1$$

$$\exists \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Prendo  $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0$  e ponendo  $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ , (1) e (2) valgono contemporaneamente. Allora:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

Ma allora  $|a - b| < |a - b|$ , ASSURDO! ♣

Una successione  $a_n$  ha limite  $+\infty$  (si dice anche che tende o diverge a  $+\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

se, qualunque sia  $M > 0 \in \mathbb{R}$ , esiste un numero  $\nu$  tale che:

$$a_n > M \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n > \nu$$

Analogamente si definisce il limite  $-\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M < 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n < M \quad \forall n > \nu$$

**Osservazione:**

- Le successioni che ammettono limite finito si dicono **convergenti**
- Le successioni che ammettono limite infinito si dicono **divergenti**
- Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**
- Una successione che tende a zero si dice anche **infinitesima**
- Una successione divergente si dice anche **infinita**

### 3.3 Successioni Limitate

$a_n$  si dice **limitata** se  $\exists M \in \mathbb{R}$  :

$$|a_n| \leq M$$

**Osservazione:** In particolare  $a_n = (-1)^n$  è un esempio di successione limitata che non ammette limite. Viceversa, ogni successione che ammette limite finito, è limitata. Vale il seguente:

### 3.4 Teorema

Ogni successione convergente è limitata.

**Dimostrazione:** Sia  $a_n$  una successione convergente e supponiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

Allora  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Posso prendere  $\varepsilon = 1 \implies |a_n - a| < 1$ , valuto  $|a_n|$ :

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n > \nu$$

posso prendere  $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_\nu|, 1 + |a|\}$  ♣.

### 3.5 Operazioni con i limiti

Supponiamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Allora:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$  se  $b \neq 0$

Si dimostra anche che:

- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$

- $a_n \rightarrow a (\neq 0) \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n \cdot b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty$  entrambe con lo stesso segno  $\implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$  e  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow \pm a \quad b_n \rightarrow \pm 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

### 3.6 Forme infeterminate o di indecisione

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $\infty^0$
- $1^{\pm\infty}$
- $0^0$

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che non esiste, ma che occorre togliere, se possibile, l'indeterminazione, mediante semplificazioni o trasformazioni.

### 3.7 Teoremi di confronto

#### 3.7.1 Teorema della permanenza del segno

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$ , esiste un numero  $\nu$  tale che  $a_n > 0 \quad \forall n > \nu$ .

**Esempio:**  $a_n = \frac{n-12}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 > 0$ , ma i primi termini della successione sono negativi.

$a_n = 0$  per  $n = 12$ , quindi se prendo  $\nu = 12$ , e  $n > \nu$  allora  $a_n > 0$ .

**Dimostrazione:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

$a > 0$ , quindi posso prendere  $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$  e:

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0 \quad \forall n > \nu \quad \clubsuit$$

**Corollario (viceversa)**

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  e  $a_n \geq 0$  (vale anche  $a_n > 0$ ), allora  $a \geq 0$ .

#### 3.7.2 Teorema dei carabinieri

Si consideriamo tre successioni  $a_n, b_n, c_n$  con la proprietà che:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Se risulta che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ , allora anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$  (per ipotesi  $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow a$ ).

**Dimostrazione:**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Definisco  $\nu_3 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$  e per ipotesi  $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \implies |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_3 \implies c_n \rightarrow a \quad \clubsuit$

**Osservazione:** Valgono per i limiti infiniti:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \implies b_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow -\infty \implies a_n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Dal teorema dei Carabinieri, segue il seguente risultato molto importante per le applicazioni e gli esercizi:



### 3.7.3 Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se  $a_n$  è limitata e  $b_n$  è infinitesima, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$  **Dimostrazione:** Considero  $|a_n \cdot b_n| \Rightarrow$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$$

Per la proprietà del valore assoluto  $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

$$-M|b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M|b_n| \quad \text{per ipotesi } b_n \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Per il Teorema dei Carabinieri  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$  ♣

### 3.8 Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a < -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

### 3.9 Limiti relativi alle funzioni trigonometriche

- $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sin a_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \cos a_n \rightarrow 1$

Ad esempio, se  $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$  e  $\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1$ .

- $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (1) \frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1$
- $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (2) \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\text{Infatti } \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{(1 - \cos a_n)(1 + \cos a_n)}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{1 - \cos^2 a_n}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos a_n} = \frac{1}{2}$$

### 3.10 Successione notevole importante

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1^{+\infty}$$

Confrontiamola con altre successioni  $b_n, c_n$ :

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^n = a^n \rightarrow +\infty \quad \text{con } a > 1$$

Quindi  $a_n$  è una **forma indeterminata**  $1^{+\infty}$ , che da una parte, vuole tendere ad 1, dall'altra a  $+\infty$ , arriverà quindi ad un 'punto di mezzo'. Si definisce  $e$  il **numero di Nepero** tale che:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dove  $e \simeq 2,718281828459 \dots$

Si dimostra che la successione  $a_n$  è strettamente crescente e limitata.

### 3.11 Successioni Monotone

- $a_n$  strettamente crescente  $\iff a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n$  strettamente decrescente  $\iff a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n$  crescente  $\iff a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n$  decrescente  $\iff a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione si dice **monotona** se si verifica una delle quattro condizioni.

Una successione si dice **costante** se  $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$  con  $a$  numero reale. Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

### 3.12 Teorema sulle successioni monotone

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito.

**Osservazione:** Naturalmente non è che ogni successione convergente è monotona. Ad esempio  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  è convergente ( $\rightarrow 0$ ), ma non è monotona.

**Dimostrazione:** (1) Sia, ad esempio,  $a_n$  crescente e limitata.

Poniamo  $l = \sup a_n$  (teorema di esistenza dell'estremo superiore: esiste il sup ed è finito perchè  $a_n$  è limitata).

Allora, per le proprietà dell'estremo superiore (data che è il minimo dei maggioranti)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : l - \varepsilon < a_\nu \quad (\star)$$

Ma  $a_n$  è monotona (crescente), quindi  $\forall n > \nu \quad a_\nu \leq a_n$ , da  $(\star)$

$$l - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq l < l + \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \clubsuit$$

(2) Sia ora  $a_n$  crescente e non limitata. Fissiamo  $M > 0$ , allora esiste  $\nu$  tale che  $a_\nu > M$ . Dato che  $a_n$  è crescente  $\forall n > \nu$

$$a_n \geq a_\nu > M$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \clubsuit$$

**Osservazione:** Assioma di completezza  $\implies$  Esistenza dell'estremo superiore  $\implies$  Esistenza del limite delle successioni monotone

**Osservazione:** Si dimostra che  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  è strettamente crescente e limitata. Quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $a_n$ , che è  $e$ .

### 3.13 Limiti Notevoli

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$  con  $x \in \mathbb{R}$

Più in generale:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{a_n})^{a_n} = e^x$  con  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x\varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e^x$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Osservazione:** Abbiamo visto, nell'ambito dei **limiti notevoli**, la successione esponenziale  $a^n$ , con  $a > 1$  e la successione potenza  $n^b$ , con  $b > 0$ .

Entrambe divergono a  $+\infty$ . Spesso tali successioni vengono confrontate con  $\log n$ ,  $n!$  e con  $n^n$ , che pure divergono a  $+\infty$ .

### 3.13.1 Infiniti di ordine crescente

$\log n$ ,  $n^b$ ,  $a^n$ ,  $n!$ ,  $n^n$ , da cui:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

### 3.14 Criterio del rapporto per le successioni

Sia  $a_n$  una successione a termini positivi.

Sia  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a$ , se  $a \in [0, 1)$ , allora la successione  $a_n$  converge a zero.

Se  $a \in (1, +\infty)$ , allora la successione  $a_n$  diverge a  $+\infty$ .

**Osservazione:** Il caso  $a = 1$  non è contemplato nell'enunciato.

### 3.15 Successioni estratte

Considero  $a_n$  successione di numeri reali e sia  $n_k$  una successione strettamente crescente di numeri naturali.

La successione  $a_{n_k}$

$$k \in \mathbb{N} \rightarrow a_{n_k}$$

prende il nome di **successione estratta da**  $a_n$  di indici  $n_k$ .

**Osservazione:** Si dimostra che se  $a_n$  converge ad  $a$ , allora ogni successione estratta  $a_{n_k}$  converge ad  $a$ .

**Osservazione:** Abbiamo dimostrato che ogni successione  $a_n$  convergente è limitata. Il viceversa non è vero, ma vale il seguente notevole risultato:

### 3.16 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia  $a_n$  una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.

## 4 Funzioni

Dati  $A, B$  insieme di numeri reali, una **funzione** da  $A$  in  $B$  è una legge che ad ogni elemento di  $A$  fa corrispondere uno ed un solo elemento di  $B$ .

$$f : A \rightarrow B$$

## 5 Partizioni

Quindi per ogni partizione  $P$ , poniamo

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un minimo)

e poniamo

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un massimo)

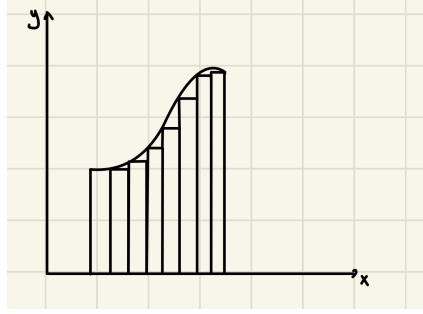


Figure 5: Inf

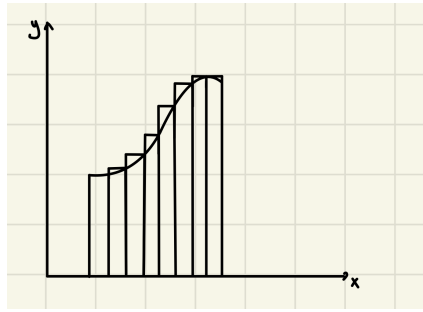
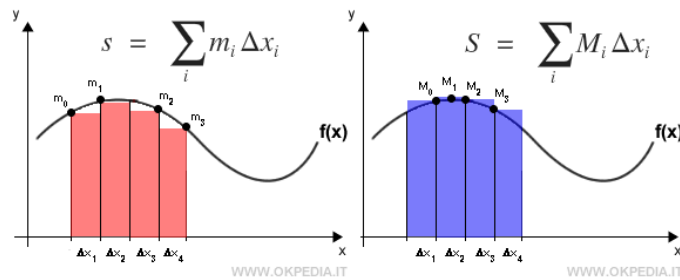


Figure 6: Sup

Ad esempio:



In entrambe le figure sono rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Sono aree per difetto e per eccesso della regione che voglio stimare.

Definisco le SOMME INTEGRALI INFERIORI: Somma delle aree dei rettangoli inscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le SOMME INTEGRALI SUPERIORI: Somma delle aree dei rettangoli circoscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

## 5.1 Osservazione

Se  $f(x)$  è positiva, queste somme integrali sono la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (sono definite a prescindere dal segno)

Si dimostra che:

$$S(P) \leq S(P)$$

e indicando con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori ( $P$ ) al variare delle partizioni  $P$  dell'intervallo  $[a, b]$  e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\} \quad B = \{S(P)\}$$

si dimostra che A e B sono insiemi SEPARATI, cioè  $A \leq B$ :

$$a \leq b \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall b \in B$$

$\Rightarrow$  Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale  $c$  maggiore uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

$$a \leq c \leq b$$

In generale questo elemento non è unico, e vale la seguente:

## 6 Integrale definito

Se l'elemento di separazione tra A e B è unico, allora si dice che  $f(x)$  è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in  $[a, b]$  e l'elemento si chiama con:

$$\int_a^b f(x) dx$$

e si chiama INTEGRALE DEFINITO di  $f$  in  $[a, b]$ . Quindi posto:

$$S(f) = \sup\{s(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

$$S(f) = \inf\{S(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

se  $s(f) = S(P) \rightarrow$  allora  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann.

### 6.1 Funzione non integrabile secondo Riemann

Funzione di Dirichlet:

$$f(x): \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

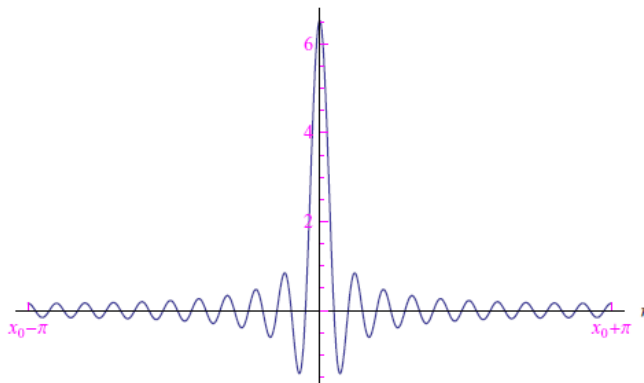


Figure 7: Funzione di Dirichlet

In ogni intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$  cadono sia punti razionali che irrazionali:

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

Allora: (somma integrali inferiori)

$$S(P) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 S(P) &= \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\
 &= x_n - x_0 = b - a
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow S(P) = 0 \vee P \wedge S(P) = b - a \vee P$$

Non è integrabile secondo Riemann. (lo sarà secondo LEBESGUE)

## 6.2 Proprietà

### 6.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo

Se  $a, b, c$  sono tre punti di un intervallo dove la funzione  $f(x)$  è integrabile, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

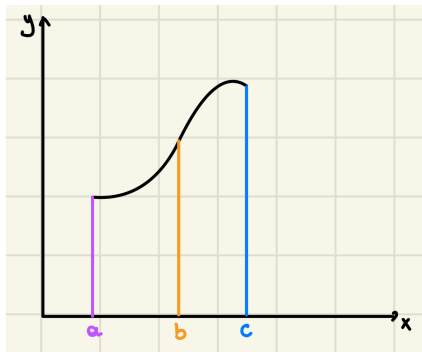


Figure 8: Grafico additività integrale

### 6.2.2 Linearità dell'integrale

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni integrabili in  $[a, b]$ , anche  $f + g$  è integrabile in  $[a, b]$ . Dato  $c$  numero reale, anche  $c \cdot f$  è integrabile in  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b c \cdot f(x)dx &= c \cdot \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

### 6.2.3 Confronto tra gli integrali

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni integrabili in  $[a, b]$  e se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

### 6.2.4 Integrabilità delle funzioni continue

Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ .

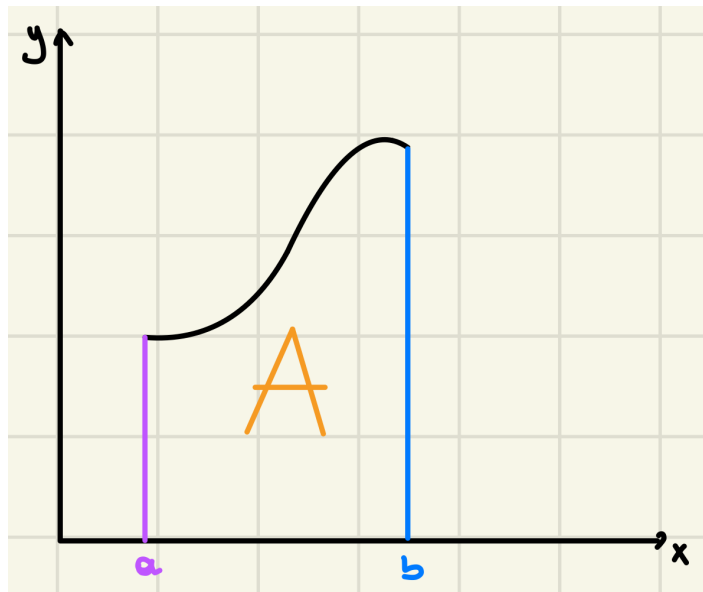
## 6.3 Teorema della media

Se  $f(x)$  è continua in  $[a, b]$ , esiste un punto  $x_0 \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

## 6.4 Interpretazione geometrica del teorema della media

$f(x)$  continua in  $[a, b]$ , ad esempio:



Voglio calcolare l'area del rettangolo A. Il teorema della media afferma che  $\exists$  un valore opportuno (cioè un valore non scelto a caso, ma in base alla particolare funzione considerata)  $f(x_0)$ , tale che:

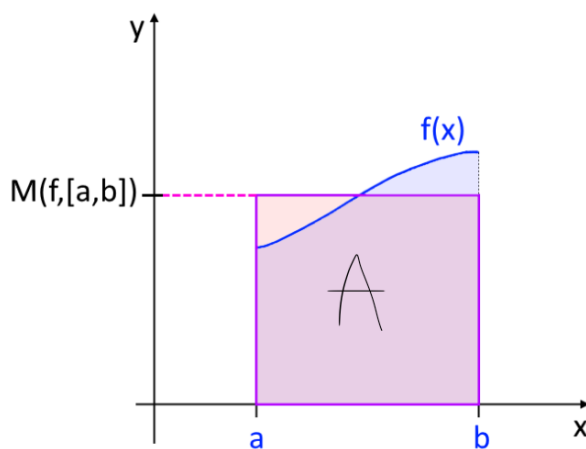


Figure 9: Teorema della media

Per cui  $\text{area } A = \text{area } B$ , dove B è un rettangolo che ha per base l'intervallo  $[a, b]$  e per altezza  $f(x_0)$ .

### 6.4.1 Dimostrazione del teorema della media

$f$  una funzione continua in  $[a, b]$  per ipotesi. Per il teorema di Weierstrass  $f(x)$  assume massimo e minimo in  $[a, b]$ , cioè esistono  $m$  e  $M$  tali che: (teor. esistenza valori intermedi)

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$$

Consideriamo ora una partizione  $P$  di  $[a, b]$ , la più semplice possibile, cioè:

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

Le relative somme integrali inferiori e superiori sono date quindi da:

$$s(P) = m(b - a)$$



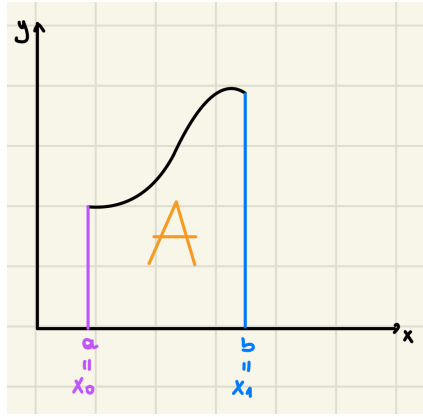


Figure 10: Enter Caption

$$S(P) = M(b - a)$$

// grafico

L'integrale definito è, per definizione, l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori (qualunque sia la partizione P di  $[a, b]$ ). Quindi:

$$s(P) \leq \int_b^a f(x)dx \leq S(P)$$

$$\rightarrow m(b - a) \leq \int_b^a f(x)dx \leq M(b - a)$$

se e solo se

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

$y_0$  è un numero compreso tra m ed M, minimo e massimo di  $f(x)$   $\implies$  per il teorema di esistenza dei valori intermedi,  $\exists x_0 \in [a, b]$  t.c.

$$f(x_0) = y_0$$

$$\implies f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx = (b - a)f(x_0)$$

## 6.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Sia  $f(x)$  una funzione monotona in  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  (indipendente dalle discontinuità)

### 6.5.1 Osservazioni

In vista di andare a definire gli **INTEGRALI INDEFINITI**, concludiamo con alcune notazioni e definizioni. Abbiamo definito l'integrale definito come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove a e b sono gli estremi di integrazione, la funzione f si dice funzione **integranda**, la variabile x, si dice **variabile di integrazione**.

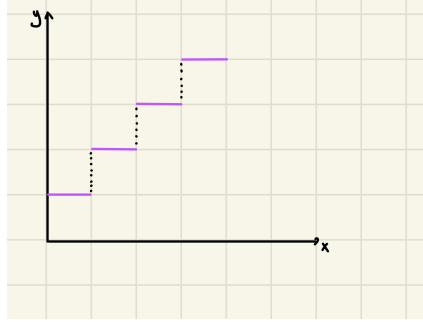


Figure 11: funzione a scalini

Notiamo che il risultato dell'integrazione non dipende da  $x$ , ma è un numero reale. Poniamo inoltre per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

## 7 Integrali Indefiniti

Mettiamo ora in evidenza, ma dei risultati più importanti che lega le derivate con gli integrali. Preliminarmente definiamo la FUNZIONE INTEGRALE.

### 7.1 Funzione integrale

Data  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$ , definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

qui " $x$ " è impegnato.

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

## 8 Serie Numeriche

Consideriamo una successione  $a_n$  di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \quad \forall n$$

Ovvio che il risultato è  $+\infty$ .

Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

Ovvio che il risultato è...?

Potrebbe essere:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

oppure:

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.

Allora come si procede?

Si introduce la somma  $S_n$  dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

## 8.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$   
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

### 8.1.1 Esempio 1

$$a_k = 1 \quad \forall k$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \dots, S_n = n$$

$$\implies S_n \rightarrow \infty$$

### 8.1.2 Esempio 2

$$a_k = (-1)^{k+1}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \dots$$

$S_n$  oscilla fra 0 e 1 quindi:  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  non esiste!.

## 8.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

**Notazione:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  Somma o Serie per  $k$  che va da 1 a  $+\infty$  di  $a_k$ . Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

- Se il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $S_n$  esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $S_n$  è  $\pm\infty$ , la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $S_n$ , si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamentto della serie si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

### 8.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$  è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \dots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è  $a_n = (-1)^n$  che non converge a zero. Questo è un motivo per escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

## 8.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge, allora la successione  $a_n$  tende a zero, per  $n \rightarrow \infty$ .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

### 8.3.1 Dimostrazione

Sia  $S_n$  la successione delle somme parziali e sia  $S \in \mathbb{R}$ , la somma ( $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ) della serie. Abbiamo che:

$$(\star) S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione  $S_n$  il termine  $a_{n+1}$ , ottengo la successione  $S_{n+1}$ . (Per definizione di successione di somme parziali)

Allora da  $(\star)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0 \\ &\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Osservazione:** E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.

Vediamo due esempi di serie modello:

## 8.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$ , consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione**  $x$  (argomento elevato alla  $k$ ).

Calcoliamo la somma parziale  $S_n$ :

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$ .

**Formula Risolutiva:**  $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

### 8.4.1 Osservazione

La formula vale  $\forall x \neq 1$ , cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece  $x = 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione  $x$ ):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \text{ (}|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

### 8.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$ , la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di  $x$ , calcolare la somma della serie.

! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.

! Capisco che è geometrica perchè dipende da  $x - 4$

**Risoluzione:**

- è una serie geometrica di ragione  $x - 4$ .

- la serie geometrica data converge per:

$$|x - 4| < 1 \iff -1 < x - 4 < 1 \iff 3 < x < 5$$

- la somma della serie è data da:  $\frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2 - 8x + 16}{5-x}$$

$$-1 = \text{I}^\circ \text{ termine della serie} = (x-4)^0 = 1$$

## 8.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.

! Non si conosce la somma.

Osservazione E' un esempio di serie dove  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , ma la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  è **divergente**.

## 8.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots + \frac{1}{n^p} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la serie armonica generalizzata è:

- **convergente** per  $p > 1$
- **divergente** per  $p \leq 1$

## 8.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  è a termini non negativi se  $\forall n \in \mathbb{N}$  risulta  $a_n \geq 0$ .

Diremo che una serie è a termini positivi se  $a_n > 0, \forall n$ .

### 8.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente positivamente.

**Dimostrazione:** La successione delle somme parziali  $S_n$  di una serie a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).

Infatti, poichè  $a_{n+1} \geq 0, \forall n$ , risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

$\implies$  Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:

”Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito.”

$\implies S_n$  ammette limite (eventualmente a  $+\infty$ ) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

## 8.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni **criteri** per stabilire il **carattere** di una serie: (non sempre si riesce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

### 8.8.1 Criterio del rapporto:

Si utilizza solitamente per il fattoriale.

Data  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con  $a_n > 0 \forall n$ . Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se  $0 \leq L \leq 1$ , la serie converge.
- Se  $1 < L \leq +\infty$ , la serie diverge.

**Osservazione** Nel caso:  $0 \leq L \leq 1$  quindi per il criterio del rapporto  $a_n \rightarrow 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.

**Esempi:**

da fare

### 8.8.2 Criterio della radice:

Data  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con  $a_n > 0 \forall n$ . Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se  $0 \leq L < 1$ , la serie converge.
- Se  $1 < L \leq +\infty$ , la serie diverge.

**Esempi:**

da fare

**Esercizio appello**

### 8.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con  $a_n \geq 0 \forall n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  con  $b_n > 0 \forall n$ :

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ , allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.
- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge.

### 8.8.4 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  quindi  $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$  e considero  $b_n = \frac{1}{n^p}$  con  $p$ ?  
valuto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

–  $b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$  ma  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  è una serie convergente, quindi non riesco a concludere.

–  $b_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^3 = +\infty$ , stesso problema di prima e non riesco a concludere.

–  $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge e quindi concludo con il criterio del **confronto mediante limiti** e la serie data converge.

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3})$$

$$a_n = \sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3} \cdot \frac{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{6n^3+1-6n^3}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6n^3+1} + \sqrt{6n^3}}$$

Utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti e prendiamo  $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{6}}$  (per  $n \rightarrow +\infty$ ) quindi

la serie data si comporta come la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3})$$

$$a_n = n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3}) = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$

prendiamo  $b_n = \frac{1}{n^3}$  e utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti. Allora, cerchiamo di ricondurci al limite notevole  $\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

- Stabilire, per  $x \geq 0$ , il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x^n(n-1)!}{(n-1)!n x^{n-1}} = \frac{x}{n} \rightarrow 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \text{la serie converge } \forall x > 0$$

- Stabilire, per  $x > 0$  il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n}$$

utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} x \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^2 \rightarrow \frac{x}{4} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Quindi se  $0 < x < 4$ , allora la serie converge. Se  $x > 4$ , allora la serie diverge a  $+\infty$ .

Se  $x = 4$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n} = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \right]^{\varepsilon_n \cdot 2n} = \dots = e^3$$

$a_n \not\rightarrow 0$  e poichè è una serie a termini positivi  $\implies$  diverge a  $+\infty$ .

- Stabilire per quali valori di  $\alpha$  la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot \left( \sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

Utilizziamo lo sviluppo (Taylor):

$$\sin \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

Inoltre:

$$\sqrt{1 + \varepsilon_n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

$$\implies \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\implies a_n = n^\alpha \left( \sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = n^\alpha \left( \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$a_n$  si comporta come  $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$  converge  $\iff 2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$ . Per il criterio del confronto mediante i limiti, la serie data converge  $\iff \alpha < 1$ .

## 8.9 Serie alternate

Consideriamo serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{con } a_n > 0$$

Vale il seguente criterio:

### 8.10 Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)

Sia  $a_n$  una successione tale che:

- $a_n \geq 0$
- infinitesima ( $a_n \rightarrow 0$ )
- decrescente ( $a_n \geq a_{n+1} \forall n$ )

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

#### 8.10.1 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$



### 8.10.2 Esercizio del compito 20 07 21

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3 + 5}$$

La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \rightarrow 0$
- $a_n$  decrescente, infatti  $\frac{1}{n^3 + 5}$  è decrescente e la funzione  $g(x) = \sin x$  è crescente per  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

### 8.11 Convergenza Assoluta

Una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  si dice **assolutamente convergente** se risulta convergente la serie dei valori assoluti  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ . In generale, una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente.

Ad esempio:  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  è convergente per il criterio di Leibniz, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è la serie armonica che diverge.

### 8.12 Teorema

Una serie assolutamente convergente, è convergente.

#### 8.12.1 Esercizio del compito (precedente)

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3 + 5}$  è anche assolutamente convergente. Infatti:

$$a_n = \sin \left( \frac{1}{n^3 + 5} \right) \cong \frac{1}{n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right)$$

e la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  converge.

#### 8.12.2 Esercizi di compito a fine pdf (da fare)

## 9 Equazioni differenziali

Sia

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

dove  $g(x)$  è una funzione di una variabile reale, continua in un intervallo  $[a, b] \in \mathbb{R}$ .

Per il **teorema fondamentale del calcolo integrale** sappiamo trovare una **primitiva**  $G(x)$  di  $g(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$ , data da:

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

dove  $x_0$  è un numero reale fissato in  $[a, b]$ .

Quindi possiamo rappresentare ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\star)$$

Integrando entrambi i membri di  $(\star)$  tra  $x_0$  e  $x$  otteniamo:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

e rappresentiamo la soluzione nella forma:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad x \in [a, b]$$

Questo è un esempio molto particolare di equazione differenziale, si dice che  $y(x)$  è soluzione del **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in quanto  $y(x)$  è soluzione ed inoltre soddisfa la **condizione iniziale** nel punto  $x = x_0$ :

$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} g(t) dt = y_0$$

## 9.1 Osservazione

L'equazione differenziale considerata si dice del **primo ordine**, poichè l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

## 9.2 Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine

Sia

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove  $\lambda$  è un parametro reale fissato.

Dobbiamo trovare una soluzione di questa equazione differenziale, cioè una funzione  $y = y(x)$ , derivabile in  $\mathbb{R}$ , tale che

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una soluzione è data da:

$$y(x) = ce^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove  $c$  è una costante arbitrariamente fissata in  $\mathbb{R}$ .

Si verifica subito che è soluzione, infatti derivando si ottiene:

$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

### 9.2.1 Domanda

Tutte le possibili soluzioni sono della forma  $y(x) = ce^{\lambda x}$ ? Sì, ma non lo dimostriamo.

## 9.3 Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico

$$y''(x) + \omega^2 y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove  $\omega \neq 0$  è un parametro reale fissato.

Una famiglia di soluzioni è data da:

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  costanti in  $\mathbb{R}$ .

**Verifica:**

$$y'(x) = -c_1 \omega \sin \omega x + c_2 \omega \cos \omega x$$

$$y''(x) = -c_1 \omega^2 \cos \omega x - c_2 \omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) = -\omega^2 y(x)$$

$$\implies y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico sono nella forma  $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ ? Sì, ma non lo dimostriamo.

## 9.4 Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

dove  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$  sono coefficienti e  $g(x)$  è il termine noto. (funzioni continue in un intervallo  $[a, b] \in \mathbb{R}$ ).  
Se  $g(x) = 0$  l'equazione (1) si dice **omogenea**.

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

## 9.5

Una soluzione dell'equazione differenziale (1) o (2) è una funzione  $y = y(x)$ , derivabile n volte in  $[a, b]$ , che soddisfa la condizione (1) o (2)  $\forall x \in [a, b]$ . Le soluzioni delle equazioni differenziali lineari sono dette anche **integrali** e l'insieme di tutte le soluzioni è detto **integrale generale**.

## 9.6 Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare

L'integrale generale di un'operazione differenziale **non omogenea** è dato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea, sommate ad una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

## 9.7 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = g(x)$$

con  $a(x), b(x), g(x)$  funzioni continue in un intervallo  $[a, b]$ .  
Consideriamo inizialmente l'equazione omogenea associata:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$$

Una soluzione è una funzione  $y = y(x)$ , derivabile due volte in  $[a, b]$ , che soddisfa l'equazione differenziale.  
Considereremo equazioni differenziali di questo tipo, a coefficienti costanti.

## 9.8 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  costanti.

Associamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

equazione di secondo grado dove:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \Delta > 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2} \quad \Delta = 0$$

E se il discriminante è negativo?

Ricordiamoci come si calcola la radice quadrata di un numero negativo:

$$\sqrt{\Delta} \text{ con } \Delta < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1(-\Delta)} = \pm i\sqrt{-\Delta}$$

e quindi le soluzioni complesse nel caso  $\Delta < 0$  sono:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\text{cioè } \lambda_1, \lambda_2 = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\lambda_1 = \alpha - i\beta$$

$$\lambda_2 = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

## 9.9 Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

Tutte le soluzioni sono date da:

- $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \Delta > 0$
- $(c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \quad \Delta = 0$
- $e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \Delta < 0$

Al variare delle costanti  $c_1, c_2$ .

### 9.9.1 Esempio

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

L'equazione differenziale ha come equazione caratteristica, l'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \implies \lambda_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

$\implies$  L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

### 9.9.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

Posso trovare i  $\alpha$  e  $\beta$ , ma mi conviene utilizzare direttamente la formula del  $\Delta$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i \implies \lambda_1 = 1 - i \quad \lambda_2 = 1 + i$$

L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

## 9.10 Esempio 3

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

e l'integrale generale è dato da:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^x$$

## 9.11 Equazioni differenziali lineari non omogenee

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

L'integrale generale delle soluzioni è dato da:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

al variare delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ .  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  sono due soluzioni dell'omogenea associata in  $[a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , (che abbiamo visto nel caso di coefficienti costanti) e  $\bar{y}(x)$  è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Ci sono casi particolari in cui è possibile ricavare una soluzione in modo diretto (nel caso di equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti).

### 9.11.1 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 \quad (*)$$

Come primo passo consideriamo l'omogenea associata e quindi, essendo a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

per cui l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da:

$$(c_1 + c_2x)e^{-x}$$

al variare delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ .

Ora ricerchiamo una soluzione particolare  $\bar{y}(x)$  e poichè il termine noto dell'equazione differenziale è una equazione di secondo grado, la ricerchiamo nella forma:

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + C$$

Sostituendo  $\bar{y}(x)$  nell'equazione differenziale  $(*)$  otteniamo:

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = x^2 + 4x - 1 \implies \bar{y}(x) = ax^2 + bx + c \quad \bar{y}' = 2ax + b \quad \bar{y}'' = 2a$$

$$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 4x - 1 \implies ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = x^2 + 4x - 1$$

Quindi occorre che:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 4 \\ 2a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

da cui  $a = 1, b = 0, c = -3$ .

Quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(x) = x^2 - 3$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale iniziale è dato da:

$$(c_1 + c_2x)e^{-x} + x^2 - 3$$

### 9.11.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale non omogenea:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

$\implies$  l'integrale generale dell'omogenea associata è dato quindi da:

...

### 9.11.3 Osservazione

Abbiamo visto un metodo per trovare una soluzione, quando il termine noto è un polinomio.

Ora vediamo un esempio, in cui:

$$g(x) = a \sin x + b \cos x$$

### 9.11.4 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + y' + 2y = 2 \cos x$$

Consideriamo prima l'equazione caratteristica dell'omogenea associata:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \implies \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

L'integrale generale è dato da:

$$c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$$