1 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \ \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.
Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

Ovvio che il risultato è...?
Potrebbe essere:

$$\textbf{(1-1)} + \textbf{(1-1)} + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

oppure:

$$\textbf{1} + \textbf{(-1+1)} + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.
Allora come si procede?
Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

1.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

1.1.1 Esempio 1

$a_k = 1 \ \forall k$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \ldots, S_n = n$$

$\implies S_n \to \infty$

1.1.2 Esempio 2

$a_k = (-1)^{k+1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \ldots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste!.

1.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k. Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \to \infty$ di S_n, si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamtento della seria si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una seria è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

1.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \ldots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo èer escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

1.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

1.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n\to\infty} S_= S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star)\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1}, ottengo la successione S_{n+1}. (Per definizione di successione di somme parziali)
Allora da $(\star)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$
$$\implies a_n \to 0$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.
Vediamo due esempi di serie modello:

1.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).
Calcoliamo la somma parziale S_n:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e $\lim_{n\to\infty} S_n = ?$.
Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

1.4.1 Osservazione

La formual vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} =$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1+1+1+\cdots+1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \ (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

1.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di x, calcolare la somma della serie.
! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.
! Capisco che è geometrica perchè dipende da $x-4$ **Risoluzione:**

- è una serie geometrica di ragione $x-4$.
- la serie geometrica data converge per:

$$|x-4| < 1 \iff -1 < x-4 < 1 \iff 3 < x < 5$$

- la somma della serie è data da: $\frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2-8x+16}{5-x}$$

$$-1 = \text{ I° termine della serie } = (x-4)^0 = 1$$

1.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.
! Non si conosce la somma.

Osservazione E' un esempio di serie dove $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è **divergente.**

1.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la seria armonica generalizzata è:

- **convergente** per $p > 1$
- **divergente** per $p \leq 1$

1.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini non negativi se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 0$.
Diremo che una serie è a termini positivi se $a_n > 0, \forall n$.

1.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente poisitivamente.
Dimostrazione: La successione delle somme parziali S_n di una seria a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).
Infatti, poichè $a_{n+1} \geq 0, \forall n$, risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

$\implies$ Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:
"Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito."
$\implies$ S_n ammette limite (eventualmente a $+\infty$) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

1.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni criteri per stabilire il carattere di una serie: (non sempre si risce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

1.8.1 Criterio del rapporto:

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L \leq 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \geq +\infty$, la serie diverge.

Osservazione Nel caso: $0 \leq L \leq 1$ quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
Esempi:
da fare

1.8.2 Criterio della radice:

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L < 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \leq +\infty$, la serie diverge.

Esempi:
da fare
Esercizio appello

1.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$:

- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

1.8.4 Esempi