0.1 Grandezze scalari e vettoriali

Le grandezze scalari sono quelle che si possono rappresentare con un numero (temperatura, numero dei piedi), mentre quelle vettoriali sono grandezze che esprimono con tre numeri uno spostamento per esempio.

0.1.1 Richiami di Analisi

Differenziale:

$$df = f'(x)dx$$

Svilippi di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0) + \dots \quad \textit{che solitamente in fisica si rimuovo perchè piccolossimi}$$

Integrali doppi e equazioni differenziali.

0.2 Vettori

Quando si parla di vettori è importante indicare la **direzione** (la retta sulla quale ci si muove), il **verso** (la freccia) e il **modulo** (la lunghezza). Il vettore si chiama **applicato** se si indica la sua origine.

0.2.1 Operazioni con i vettori

- **Prodotto di un vettore per uno scalare**: stessa direzione, stesso verso e modulo moltiplicato per lo scalare. $\vec{a} = \lambda\vec{b} : \lambda \in \mathbb{R}$
- **Versore**: vettore che ha la stessa direzione e verso di un vettore $\vec{a}$ ma modulo 1. Si indica con $\bar{u}_a$
- **Vettore nullo**: vettore con modulo 0, di cui non si può dire né direzione né verso. Si può ottenere sommando un vettore con il suo opposto. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- **Vettore opposto**: vettore con la stessa direzione e verso ma modulo opposto. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- **Regola del parallelogramma (somma)**: se si sommano due vettori si può ottenere il vettore risultante disegnando un parallelogramma con i due vettori come lati.

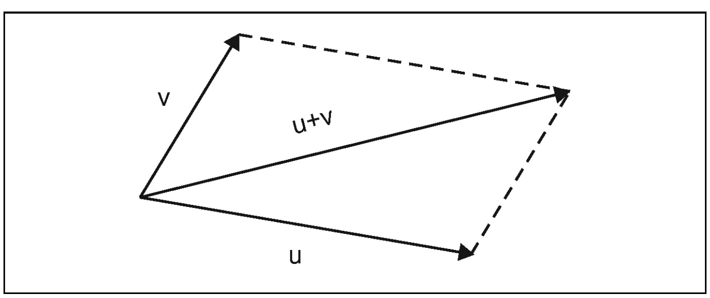


Figure 1: Regola del parallelogramma

0.2.2 Proprietà dei vettori

- **Commutativa**: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- **Differenza di vettori**: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Per sottrarre un vettore devo cambiare il verso del vettore che sto sottraendo.
- **Somma di più vettori**: vale la proprietà **associativa**. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

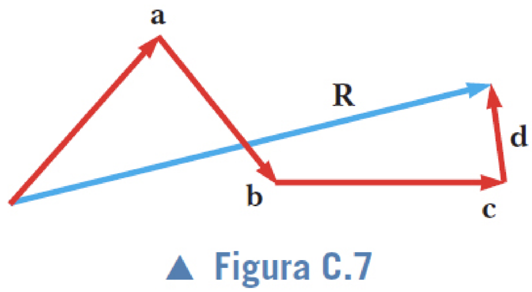


Figure 2: Somma di più vettori

- **?**: $\vec{a_1} = a_1 \cdot \bar{u}_a$, $\vec{a} = a_2 \cdot \bar{u}_{a_2}$, $\vec{a_1} + \vec{a_2} = (a_1 + a_2) \cdot \bar{u}_a$

0.2.3 Scomposizione di un vettore

Ho un vettore che non è applicato in nessun punto, ponendolo all'interno del piano cartesiano posso scomporlo.

$$\vec{v} = \vec{v}_{xy} + \vec{v}_z = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \cdot \bar{u}_x + v_y \cdot \bar{u}_y + v_z \cdot \bar{u}_z$$

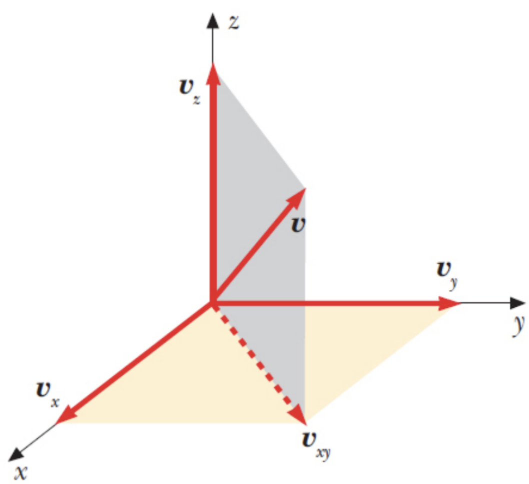


Figure 3: Scomposizione di un vettore

Il vettore iniziale viene scomposto in componenti e ottengo una scrittura cartesiana del vettore.

- **Vettore componente lungo l'asse** x: $\vec{v}_x$
- **Componente lungo l'asse** x: v_x

Una volta scomposto il vettore si può effettuare la somma dei vettori in maniera analitica. Per ciascuno ottengo le sue componenti cartesiane e successivamente sommo le componenti.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \cdot \bar{u}_x + a_y \cdot \bar{u}_y + a_z \cdot \bar{u}_z) + (b_x \cdot \bar{u}_x + b_y \cdot \bar{u}_y + b_z \cdot \bar{u}_z) = (a_x + b_x) \cdot \bar{u}_x + (a_y + b_y) \cdot \bar{u}_y + (a_z + b_z) \cdot \bar{u}_z$$

0.2.4 Prodotto scalare

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \ Scalare \quad |\vec{a}| = \ Modulo = ab\cos(\theta)$$

Prodotto scalare tra due vettori:

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta)$$

Il prodotto scalare è nullo quando i due vettori sono perpendicolari, il $\cos(\theta)$ è 0.

1. **Proprietà commutativa**: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
2. $\vec{a} = \vec{b} \implies \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|^2$
3. La proprietà associativa non vale perchè il prodotto scalare è definito solo tra vettori.
4. **Proprietà distributiva**: $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
5. $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} \implies$ Teorema di Carnot.
6. $\vec{a} \bullet \vec{b} = (a_x \cdot \bar{u}_x + a_y \cdot \bar{u}_y + a_z \cdot \bar{u}_z) \bullet (b_x \cdot \bar{u}_x + b_y \cdot \bar{u}_y + b_z \cdot \bar{u}_z) = FINIRE$
7. $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \implies \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

0.2.5 Prodotto vettoriale

Il prodotto tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore che giace al piano perpendicolare individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|c| = |a||b|\sin(\theta)$$

Regola della mano destra oppure vite destrorsa.

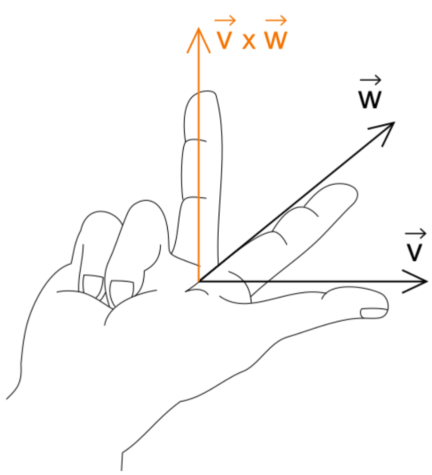


Figure 4: Regola della mano destra

Il prodotto vettoriale non è commutitativo. E' **anticommutativo**; il vettore risultante ha la stessa direzione e lo stesso modulo ma verso opposto.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Vale la **proprietà distributiva**.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Non vale la proprietà **associativa**.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

⋆ Vedi il prodotto vettoriale di versori.

0.3 Formuletta del profe

Il prodotto vettoriale si può calcolare utilizzando le matrici.

$$A = \vec{c} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\det A = \vec{c} = \bar{u}_x(-1)^2(a_y b_z - a_z b_y) + \bar{u}_y(-1)^3(a_x b_z - a_z b_x) + \bar{u}_z(-1)^4(a_x b_y - a_y b_x)$$

0.4 Derivata di un vettore

Per continuità possiamo definire la derivata di un vettore come la derivata a cui siamo abituati.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \textit{per gli scalari}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \textit{per i vettori}$$

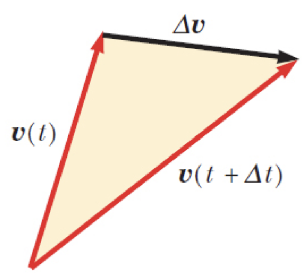


Figure 5: Derivata di un vettore

- $\frac{d(\vec{a} + \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$
- $\frac{d}{dt} k\vec{a} = k\frac{d\vec{a}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(k\vec{a}) = \frac{dk}{dt}\vec{a} + k\frac{d\vec{a}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \bullet \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \frac{d\vec{b}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$
- se ho la scrittura cartesiana del vettore $\vec{a} = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$ allora $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\bar{u}_x + \frac{da_y}{dt}\bar{u}_y + \frac{da_z}{dt}\bar{u}_z$

0.5 Derivata di un versore

La derivata del versore è differente in quanto nel tempo solo la direzione e il verso cambiano, non il modulo.

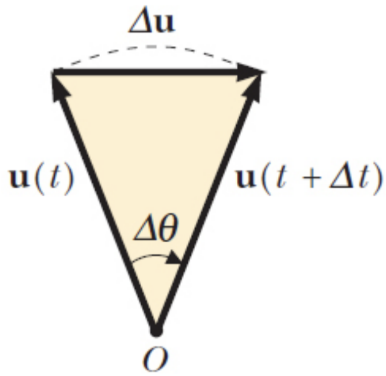


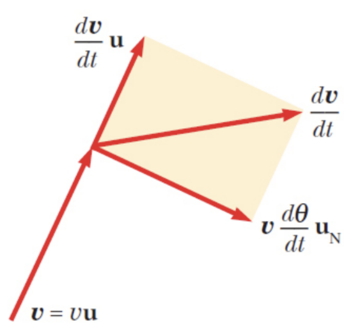
Figure 6: Derivata di un versore

$$\Delta\bar{u} = \bar{u}(t + \Delta t) - \bar{u}(t)$$

$$du = d\theta \cdot |u(t)|$$

$$d\bar{u} = d\theta \cdot \bar{u}_n$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{u}_n$$



$$\vec{v} = v \cdot \bar{u} \implies \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\bar{u})}{dt} + v\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d(v\bar{u})}{dt} + v\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_n$$

$$|\frac{d\vec{v}}{dt}| = \sqrt{(\frac{dv}{)}dt)^2 + (\frac{vd\theta}{dt})^2}$$

0.6