

# 1 Forme Bilineari e Prodotti Scalari

## 1.1 Forme Bilineari

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . Una **forma bilineare** su  $\mathbb{V}$  è un'applicazione

$$* : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \times \mathbb{V}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

tale che  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$  e  $k \in \mathbb{K}$

1.  $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) * \mathbf{w} = (\mathbf{v} * \mathbf{w}) + (\mathbf{u} * \mathbf{w})$
2.  $\mathbf{v} * (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} * \mathbf{u}) + (\mathbf{v} * \mathbf{w})$
3.  $(k\mathbf{v}) * \mathbf{u} = \mathbf{v} * (k\mathbf{u}) = k(\mathbf{v} * \mathbf{u})$

Si deduce che  $0 * \mathbf{v} = \mathbf{v} * 0 = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ .

## 1.2 Forma bilineare simmetrica

Una forma bilineare  $*$ , su uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , si dice **forma bilineare simmetrica o prodotto scalare** se, comunque si considerino due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  in  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , si ha:

$$\mathbf{v} * \mathbf{w} = \mathbf{w} * \mathbf{v}$$

## 1.3 Prodotti scalari e ortogonalità

In uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , con prodotto scalare "·", due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  si dicono **ortogonali** e si scrive  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$  se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ .

## 1.4 Complemento ortogonale

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e sia  $A$  un sottoinsieme, non vuoto, di  $\mathbb{V}$ . Si dice **complemento ortogonale** di  $A$  in  $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ , l'insieme (si legge  $A$  ortogonale)

$$A^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{w} \in A\}$$

### 1.4.1 Proposizione

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e sia  $\mathbf{w}$  un vettore di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  tale che  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \neq 0$ . Allora, ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  si può esprimere come somma di due vettori  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ , dove  $\mathbf{w}_1$  è ortogonale a  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}_2$  è proporzionale a  $\mathbf{w}$ .

**Dimostrazione:** Ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$  si può scrivere come:

$$\mathbf{v} = \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} \right) + \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} \right)$$

Un calcolo diretto dimostra che  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}$  è ortogonale a  $\mathbf{w}$  mentre, ovviamente,  $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}$  è proporzionale a  $\mathbf{w}$ , secondo lo scalare  $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$

## 1.5 Coefficiente di Fourier

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·" e sia  $\mathbf{w}$  un vettore di  $\mathbb{V}$  tale che  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \neq 0$ . Se  $\mathbf{v}$  è un vettore di  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ , si dice **coefficiente** o **componente di Fourier** di  $\mathbf{v}$  lungo  $\mathbf{w}$  il numero reale

$$\mathbf{v}_w = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

e si dice **proiezione** di  $\mathbf{v}$  su  $\mathbf{w}$  il vettore  $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_w \mathbf{w}$ .

## 1.6 Forme Quadratiche

Sia  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare "·". Si dice **forma quadratica**, associata al prodotto scalare "·", l'applicazione

$$q : \mathbb{V}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

## 1.7 Spazi con prodotto scalare definito positivo

Un prodotto scalare, assegnato in uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  su un campo ordinato, si dice **definito positivo** se  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Una forma quadratica si dice **definita positiva** se tale è il prodotto scalare cui essa è associata.

## 1.8 Norma

Dato un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^0(\mathbb{R})$  si dice **norma** di  $\mathbf{v}$  il numero reale positivo o nullo

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{q(\mathbf{v})}$$

## 1.9 Versore

Sia  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  un vettore di  $\mathbb{V}^0(\mathbb{R})$ , si dice **versore** di  $\mathbf{v}$  il vettore

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

## 1.10 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  due vettori di  $\mathbb{V}^0(\mathbb{R})$ . Allora

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{u}||$$

ove  $|v \cdot u|$  indica il valore assoluto di  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .

### 1.10.1 Dimostrazione

Siano non nulli i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Diversamente la tesi è immediata. Per ogni numero reale  $\alpha$  si ha

$$0 \leq (\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\alpha^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\alpha + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

e quindi, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il trinomio

$$||\mathbf{u}||^2 \alpha^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\alpha + ||\mathbf{v}||^2$$

è maggiore o al più uguale a zero. Il suo discriminante non può, pertanto, essere positivo perchè se lo fosse, al variare di  $\alpha$ , il trinomio cambierebbe segno. Risulta

$$\frac{\Delta}{4} = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 - ||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 \leq 0$$

## 1.11 Disuguaglianza triangolare

Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  due vettori di  $\mathbb{V}^0(\mathbb{R})$ . Allora

$$||\mathbf{v} + \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}||$$

### 1.11.1 Dimostrazione

Sono immediati i seguenti calcoli:

$$||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + ||\mathbf{v}||^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + ||\mathbf{v}||^2$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene la tesi:

$$||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 \leq ||\mathbf{u}||^2 + 2||\mathbf{u}|| ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{v}||^2 = (||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||)^2$$

### 1.12 Osservazione

: I vettori della base canonica  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , dello spazio euclideo reale  $\mathbb{R}^n$ , godono delle seguenti proprietà:

1. hanno norma unitaria, cioè,  $\|e_i\| = 1$  per  $i = 1, 2 \dots n$ ;
2. sono tra loro ortogonali, cioè,  $e_i \cdot e_j = 0$  per  $i \neq j$  ove  $i, j \in I_n$
3. la  $i$ -esima componente, di un qualunque vettore  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ , si ottiene moltiplicando scalarmente quel vettore per  $e_i$ .

Diremo che i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}^\circ(\mathbb{V})$ , tutti diversi dal vettore nullo, costituiscono un **sistema ortogonale** se  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ , per  $i \neq j$  e  $i, j \in I_r$ . Se, inoltre, hanno norma unitario, essi costituiscono un **sistema ortonormale**. Una base, che sia anche un sistema ortogonale. Una base, che sia anche un sistema ortogonale, si dice **base ortogonale** e, se i suoi vettori hanno norma unitaria tale base si dice **base ortonormale**. Ovviamente il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori di  $\mathbb{V}$ . Da un sistema (o da una base) ortogonale di  $\mathbb{V}$  si può sempre ricavare una base ortonormale di  $\mathbb{V}$ , dividendo ciascun vettore del sistema per la sua norma.

I vettori della base canonica, di uno spazio euclideo reale, costituiscono una base ortonormale, ma **possiamo dimostrare** che, in ogni spazio vettoriale f.g. con prodotto scalare definito positivo, è possibile costruire una base ortonormale che possiede le stesse proprietà che la base canonica ha negli spazi euclidei.

### 1.12.1 Lemma

In uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}^o(\mathbb{R})$ , se i vettori non nulli  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , costituiscono un sistema ortogonale, allora sono linearmente indipendenti.

Partendo da una qualsiasi base di  $\mathbb{V}^o(\mathbb{R})$ , possiamo ora costruire una base ortogonale seguendo il procedimento detto **processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**.

### 1.12.2 Teorema

Fissata una base  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  di  $V^\circ(\mathbb{R})$ , la sequenza  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  così costruita

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1}{\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1} \mathbf{e}'_1 \\ &\dots \quad \text{.....} \\ \mathbf{e}'_n &= \mathbf{e}_n - \frac{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}'_{n-1}}{\mathbf{e}'_{n-1} \cdot \mathbf{e}'_{n-1}} \mathbf{e}'_{n-1} - \cdots - \frac{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}'_1}{\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1} \mathbf{e}'_1 \end{aligned}$$

E' evidente che, volendo determinare una base ortonormale di uno spazio vettoriale con prodotto scalare definito positivo, basta normalizzare la base ottenuta applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a una base qualunque dello spazio.

### 1.13 Corollario

Se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{V}^\circ(\mathbb{R})$  allora:

$$(U^\perp)^\perp = U$$

### 1.13.1 Dimostrazione

Sia  $\dim V^\circ(\mathbb{R}) = n$  e  $\dim U = r$ . Dato che  $U \subseteq U^{\perp\perp}$ , si ha  $\dim U^{\perp\perp} = n - (n - r) = r = \dim U$ , si ha la tesi.

### 1.14 Teorema

L'insieme  $S$  delle soluzioni di  $AX = \mathbf{0}$ , sistema lineare omogeneo in  $m$  equazioni e  $n$  incognite, a coefficienti reali, è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$  di dimensione  $n - rK(A)$ .

### 1.14.1 Dimostrazione

Osserviamo che le righe della matrice  $A$  sono vettori di  $\mathbb{R}^R(\mathbb{R})$ , ricordiamo che, abbiamo chiamato  $\text{span}(R)$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$  generato dalla righe della matrice  $A$ . Inoltre,  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ , spazio euclideo reale, è dotato di prodotto scalare std. Pertanto il sistema  $AX = 0$  può essere scritto