

Algebra Lineare e Geometria Analitica

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1	Spazi Vettoriali	2
1.0.1	Nota bene	2
1.1	Vettori	2
1.1.1	Esercizio	2
1.2	Combinazione Lineare	3
1.3	Applicazione Lineare	3
1.4	Sottospazio Vettoriale	3
1.4.1	Teorema 1	3
1.4.2	Teorema 2	4
1.5	Condizioni per sottospazio	4
1.6	Indipendenza e dipendenza lineare	4
1.6.1	Sistema Libero o Legato	4
1.7	Sistema di generatori di uno spazio vettoriale	5
1.7.1	Copertura Lineare = Sottospazio	5
1.8	Insieme di generatori	5
1.8.1	Lemma	5
1.8.2	Teorema	5
1.9	Lemma di Steinitz	5
1.10	Base	5
1.10.1	Dimostrazione	6
1.11	Metodo degli scarti successivi	6
1.11.1	Lemma	6
1.12	Dimensione	6
1.13	Componenti	6
1.13.1	Corollario	6
1.13.2	Proposizione	6
1.13.3	Proposizione	7
1.14	Teorema del completamento di una base	7
1.15	Legami fra sequenze libere, basi e matrici	7
1.15.1	Dimostrazione	7
1.16	Teorema	7
1.16.1	Dimostrazione	7
1.17	Intersezione e somma di sottospazi	8
1.17.1	Proposizione	8
1.18	Somma	8
1.18.1	Proposizione	8
1.19	Somma diretta	8
1.19.1	Proposizione	8
1.19.2	Corollario	8
1.20	Formula di Grassmann	8
1.21	Definizione	8

2 Sistemi Lineari	8
2.1 Determinante	8
2.1.1 Proprietà	9
2.2 Eliminazione di Gauss	9
2.3 Complemento algebrico	10
2.4 Teorema di Laplace I	10
2.5 Teorema di Laplace II	10
2.6 Teorema di Binet	10
2.7 Matrici Invertibili	10
2.7.1 Teorema	10
2.8 Dipendenza lineare e determinanti	10

1 Spazi Vettoriali

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno spazio vettoriale sul campo K , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V , detta somma, $+$: $V \times V \rightarrow V$ e un'operazione esterna, detta prodotto esterno o prodotto per scalari, \bullet : $K \times V \rightarrow V$, tali che:

- $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
- il prodotto esterno \bullet soddisfi le seguenti proprietà:
 - $(h \cdot k) \bullet \bar{v} = h \bullet (k \bullet \bar{v}) \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
 - $(h + k) \bullet \bar{v} = h \bullet \bar{v} + k \bullet \bar{v} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
 - $h \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = h \bullet \bar{v} + h \bullet \bar{w} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
 - $1 \bullet \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$ ove 1 è l'unità del campo K

$V(K) = (V, K, + : V \times V \rightarrow V, \bullet : K \times V \rightarrow V) \implies$ struttura algebrica

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori** gli elementi del campo K sono detti **scalari**.

1.0.1 Nota bene

Sia \mathbb{K} un campo, indichiamo con $\mathbb{K}_{[x]} = \{a_0 + a_1x + \dots \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ l'insieme di tutti i polinomi in x a coefficienti in \mathbb{K} .

1.1 Vettori

I vettori sono segmenti orientati con **verso**, **direzione** e **lunghezza**.

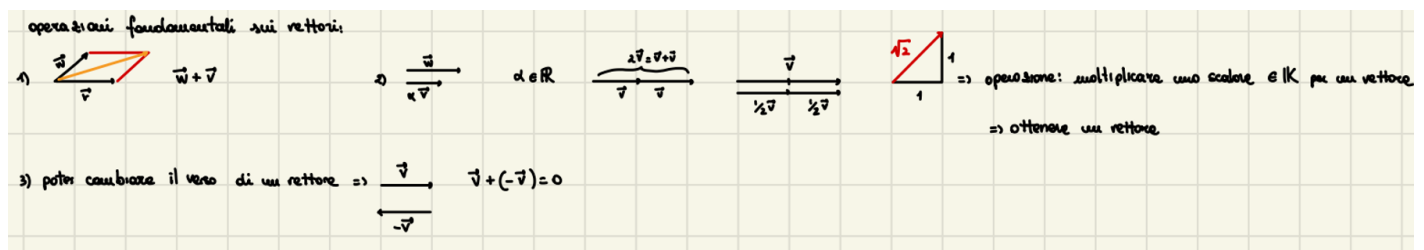


Figure 1: Vettori

1.1.1 Esercizio

Sia \mathbb{R}^2 con le operazioni di somma componente per componente $\implies (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e prodotto per scalare campo per campo $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ è uno spazio vettoriale reale.

- Far vedere che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano:
 - $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (0, 0) + (a, b)$
 - $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \quad \exists (-a, -b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = (-a + a, -b + b) = (-a, -b) + (a, b)$

- (c) $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$
- (d) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$

Abbiamo verificato che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano.

NB: abbiamo usato solamente che \mathbb{R} è un campo \implies abbiamo usato solo le proprietà della somma

1. Ora dobbiamo verificare che il prodotto esterno soddisfi le proprietà dello spazio vettoriale:

- (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2 : 1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) \implies$ elemento neutro
- (b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 = (\alpha\beta) \cdot (a, b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) = (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) = \alpha(\beta a, \beta b) = \alpha(\beta \cdot (a, b)) \implies$ pseudo associativa
- (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta)(a, b) = ((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = \alpha(a, b) + \beta(a, b) \implies$ pseudo distributiva
- (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 : \alpha((a, b) + (c, d)) = \alpha(a + c, b + d) = (\alpha a, \alpha c, \alpha b, \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \alpha(a, b) + \alpha(c, d)$

1.2 Combinazione Lineare

Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \in V(\mathbb{K})$ vettori, α_1, α_n scalari, si dice combinazione lineare di $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ con α_1, α_k il vettore $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_k$.

1.3 Applicazione Lineare

Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su \mathbb{K} . Si dice applicazione lineare da $V(\mathbb{K})$ in $W(\mathbb{K})$ una funzione $f : V \rightarrow W$ tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \bar{w} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{w}) + \beta f(\bar{v})$$

Un'applicazione lineare è una funzione che manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari con i medesimi coefficienti. Se $V(\mathbb{K})$ è spazio vettoriale e $f : V \rightarrow W$ è applicazione lineare $\implies f(V)$ immagine di V mediante f è uno spazio vettoriale.

1.4 Sottospazio Vettoriale

Sia $W(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, sia anche $X \subseteq W$ sottoinsieme $x \neq 0$, allora X è detto **sottospazio** di W se X rispetta le operazioni di somma di vettori ristretta ad $X \times X$ e troncata ad X e di prodotto per scalari di W ristretta a $\mathbb{K} \times X$ e troncata ad X soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

In tale caso scriviamo $X \leq W$. X è sottospazio vettoriale se:

- la somma di due qualsiasi vettori di X è un vettore di X
- il prodotto di un qualsiasi vettore di X per uno scalare è ancora un vettore di X

1.4.1 Teorema 1

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , allora:

- $\forall \bar{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \iff \alpha = 0 \vee \bar{v} = \underline{0}$
- $\forall \bar{v} \in V = (-1)\bar{v} = -\bar{v}$

Dimostrazione:

- Consideriamo $0 \cdot \bar{v} = (0 + 0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0$ sommando a destra e a sinistra $-(0 \cdot \bar{v})$ si ottiene $-(0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) = -(0 \cdot \bar{v}) + 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 + 0 + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} \quad \alpha = 0 \implies \alpha \bar{v} = \underline{0}$.
Supponiamo $\alpha \bar{v} = \underline{0}$ con $\alpha \neq 0 \implies \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \text{ e } \alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$
 $\alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
 $\alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \alpha^{-1}(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$ sommando come prima $-(\alpha^{-1} \underline{0})$ a dx e sx
 $\alpha^{-1} \underline{0} = \underline{0} \implies$ in particolare $\bar{v} = \underline{0}$
- $(-1)\bar{v} + \bar{v} = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = (-1 + 1)\bar{v} = 0 \cdot \underline{0} = \underline{0}$ pertanto sommando a dx e sx $(-\bar{v})$ otteniamo $-1\bar{v} = -1\bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v}) = \underline{0} + (-\bar{v}) = \underline{0} + (-\bar{v}) = -\bar{v}$

1.4.2 Teorema 2

$X \leq V(\mathbb{K}) \iff X \subseteq V(\mathbb{K})$ ed X è chiuso rispetto le combinazioni lineari di suoi elementi mediante le equazioni di V . In altre parole:

$$\star) \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$$

Osservazione: \star è equivalente a dire:

$$\bullet) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in X : \alpha \bar{v} + \underline{0} \in X \quad \& \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{v} + \bar{w} \in X$$

Verifichiamo che se vale \star allora $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v} + \underline{0} = \alpha \bar{v} \in X$ e $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X : 1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} \in X$.

Viceversa se vale $\bullet \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v}, \beta \bar{w} \in X \implies \bar{v}' = \alpha \bar{v}, \bar{w}' = \beta \bar{w} \in X \quad \bar{v}' + \bar{w}' \in X \implies \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$

Se vale \bullet o \star (stessa cosa) allora X è sottospazio. Osserviamo che molte delle proprietà di spazio vettoriale valgono automaticamente per le restrizioni applicate a qualsiasi $X \subseteq V(\mathbb{K})$:

1. se $\forall \bar{v} \in V : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \implies \forall \bar{v} \in X : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in V : (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v}) \implies$ vale anche per $\forall \bar{v} \in X$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in V : (\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$
4. $\forall \bar{v}, \bar{w} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} = \alpha(\bar{v} + \bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w}$

1, 2, 3, 4 valgono tutte anche sulla restrizione. Vale anche sulle restrizioni che $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \implies \implies \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ e similmente: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} \implies \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

Cosa potrebbe non funzionare?

1. $\underline{0} \in X$
2. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} \in X$
3. $(-\bar{u}) \in X$ se $\bar{u} \in X$
4. $\alpha \bar{u} \in X$ se $\bar{u} \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Se valgono a, b, c, d possiamo troncare le operazioni ad $X \implies$ abbiamo un sottospazio.

b+d \implies significa che si può troncare.

a+b+c $\implies (X, +)$ un gruppo.

1.5 Condizioni per sottospazio

Se vale la condizione \star : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in X$

1. $0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in X$
2. $1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \in X$
3. $(-1)\bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = -\bar{u} + \underline{0} = -\bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$
4. $\alpha \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \alpha \bar{u} + \underline{0} = \alpha \bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$

X è un sottospazio, viceversa se X sottospazio allora ogni combinazione lineare di suoi vettori deve stare in $X \implies$ vale \star .

1.6 Indipendenza e dipendenza lineare

Siano $v_1, v_2 \dots v_n$ vettori di uno spazio vettoriale e $a_1, a_2 \dots a_n$ elementi del campo \mathbb{K} . Si dice **combinazione lineare** dei vettori $v_1, v_2 \dots v_n$ con coefficienti $a_1, a_2 \dots a_n$ il vettore di \mathbb{V} .

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

1.6.1 Sistema Libero o Legato

$\mathbb{V}(\mathbb{K})$ spazio vettoriale e un sistema $\mathbb{A} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ si dice **libero**, ovvero i suoi vettori sono **linearmente indipendenti**, se l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli. Viceversa il sistema è **legato** e i suoi vettori sono **linearmente dipendenti**.

1.7 Sistema di generatori di uno spazio vettoriale

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia \mathbb{A} un sistema o un insieme non vuoto di vettori di \mathbb{V} . Si dice **copertura lineare** di \mathbb{A} , e si indica $\text{span}(\mathbb{A})$, l'insieme dei vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ che si possono esprimere come combinazioni lineari, di un numero finito, di vettori di \mathbb{A} (tutte le possibili combinazioni lineari).

$$\text{span}(A) = \{v \in \mathbb{V} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n, a_i v_n, a_1 \in \mathbb{K}, v_i \in \mathbb{A}\}$$

1.7.1 Copertura Lineare = Sottospazio

La copertura lineare $\text{span}(A)$ di un sistema o di un insieme \mathbb{A} , non vuoto, di vettori $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione: si osserva che la somma di un numero finito di vettori di \mathbb{A} è sempre una combinazione lineare di un numero finito di vettori a \mathbb{A} e, analogamente, il prodotto di un elemento del campo \mathbb{K} , per una combinazione lineare di vettori di \mathbb{A} , è ancora una combinazione lineare di un numero finito di vettori di \mathbb{A} . Quindi, $\text{span}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. Pertanto, dire che $\text{span}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, la copertura lineare di un insieme o di un sistema \mathbb{A} di vettori si suole chiamare **spazio generato** da \mathbb{A} .

Osservazione: Diremo, talvolta, che la copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A})$ di un sistema o di un insieme \mathbb{A} , non vuoto, di vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è il **più piccolo sottospazio vettoriale** che contiene \mathbb{A} , nel senso che $\text{span}(\mathbb{A})$ è contenuto in ogni sottospazio vettoriale che contenga \mathbb{A} . E' immediato, infatti osservare che, ogni sottospazio vettoriale che contiene \mathbb{A} deve contenere tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di vettori di \mathbb{A} e, quindi, anche $\text{span}(\mathbb{A})$.

Si può facilmente dimostrare che:

1. $\text{span}(\text{span}(\mathbb{A})) = \text{span}(\mathbb{A})$
2. $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \iff \mathbb{A}$ è un sottospazio vettoriale.

1.8 Insieme di generatori

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{V}$. Il sottoinsieme \mathbb{A} si dice **sistema o insieme di generatori** di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ se la sua copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{V}(\mathbb{K})$, cioè se **ogni vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si può esprimere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di \mathbb{A}** . (Si dice che X è un **insieme di generatori** per $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ se $\text{span}(X) = V$). Ogni spazio vettoriale ammette un insieme di generatori, ma si distinguono due casi:

1. **finitamente generato:** se \exists un almeno un sistema di generatori con un numero finito di vettori;

$$\exists X \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{K}) \quad |X| = n : \text{span}(X) = V$$

2. **non finitamente generato:** se ogni sistema di generatori ha un numero infinito di vettori.

1.8.1 Lemma

Se $S = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ e uno dei suoi vettori v_i , dipende linearmente dagli altri, allora $S \setminus v_i$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

1.8.2 Teorema

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ finitamente generato non banale ammette almeno un sistema libero di generatori.

1.9 Lemma di Steinitz

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale f.g., sia $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un suo sistema di generatori e sia $A = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ un sistema libero di vettori di \mathbb{V} . Allora $m \leq n$, cioè $|A| \leq |B|$.

NB: fra i vettori di A e quelli di B non c'è nessuna relazione.

La dimostrazione non va studiata.

1.10 Base

Si dice **base** di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ f.g. una **sequenza libera** di generatori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

Tutte la basi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ hanno la stessa *cardinalità*.

1.10.1 Dimostrazione

Ci basta far vedere che ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base.

Supponiamo $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ e B sequenza libera di generatori.

$$\bar{v} \in \text{span}(B) \quad \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n.$$

Supponiamo anche $\bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n$.

Allora $\bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n) - (\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n) = (\alpha_1 - \beta_1) \bar{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \bar{b}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{b}_n$. Se B libera \implies deve essere $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ perchè tutti i coefficienti sono necessariamente 0

$\implies B$ libera e di generatori $\iff B$ base.

1.11 Metodo degli scarti successivi

Algoritmo che data una sequenza finita dei generatori per uno spazio vettoriale produce \emptyset oppure una sottosequenza libera di generatori. S è di generatori se $S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ ed ogni $\bar{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$ si scrive come combinazione lineare di un numero finito di vettori di S . $V = \text{span}(S)$

1.11.1 Lemma

Sia $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una sequenza di generatori per uno spazio vettoriale W legato, allora esiste $\bar{v}_i \in S : S \setminus \{\bar{v}_i\}$ genera W ("Possiamo sempre scartare almeno un vettore da S ed otteniamo ancora una sequenza di generatori").

Dimostrazione: S legata $\implies \exists \bar{v}_i \in S : \bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j$

Sia $\bar{w} \in \text{span}(S) \implies \exists \beta_j \dots j = 1 \dots n$ tali che $\bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \sum_{j \neq i} (\beta_j + \beta_i \alpha_j) \bar{v}_j$.

$\implies \bar{w}$ è combinazione lineare di un numero finito di vettori di $S \setminus \{\bar{v}_i\}$

$\implies \text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \text{span}(S)$

Viceversa ogni vettore di $\text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$ è anche un vettore di $\text{span}(S) \implies \text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \text{span}(S) \implies$

$\text{span}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \text{span}(S)$.

1.12 Dimensione

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ ha **dimensione n**, e scriveremo $\dim \mathbb{V}(\mathbb{K}) = n$, se n è il numero di vettori che compongono una sua qualunque base.

1.13 Componenti

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ una sua base. $\forall v \in \mathbb{V}$ si dicono **componenti di v**, rispetto alla base B , i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Cambiando l'ordine dei vettori che compaiono in una base, anche se si ottiene ancora una base, si tratta di una base diversa.

1.13.1 Corollario

In $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, spazio vettoriale di dimensione n ,

1. m vettori v_1, v_2, \dots, v_m con $m > n$ sono l.d.;
2. m vettori v_1, v_2, \dots, v_m con $m < n$ non possono generare $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$;
3. una sequenza di n generatori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ risulta essere anche libera, e quindi, individua una base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$;
4. una sequenza libera di n vettori risulta essere anche un sistema di generatori e, quindi, individua una base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$.

Dimostrazione:

1. Dal lemma di Steinitz, se uno spazio vettoriale ha dimensione n , **il massimo numero di vettori l.d.** che si possono trovare in $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è proprio n .
2. Il **minimo numero di vettori che occorrono per generare** $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ è proprio n .

1.13.2 Proposizione

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ di dimensione n contiene sottospazi di dimensione $m \forall 0 \leq m \leq n$.

1.13.3 Proposizione

Se U e W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ e U è contenuto in W , allora:

1. $\dim U \leq \dim W$;
2. $U = W \iff \dim U = \dim W$

1.14 Teorema del completamento di una base

Sia $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, ove $m \leq n$, una sequenza libera di vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$. Allora, in una qualunque base B di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$.

1.15 Legami fra sequenze libere, basi e matrici

Se $B = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n]$ e $B' = [\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n]$ sono due basi di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ allora:

1. Esse hanno la stessa cardinalità [per Steinitz $n \leq m$ e $m \leq n \implies m = n$ prendendo prima B come libera e B' come di generatori e poi viceversa].

Definizione: si dice dimensione di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ il numero di vettori di qualunque base.

2. Ogni vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico in componenti rispetto una fissata base

$$B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \forall \bar{v} \in \mathbb{V}_n(\mathbb{K}) \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

$$3. \text{ Posto } E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \text{ e } E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ tale che } \implies E' = AE \implies .$$

(a) la matrice A è invertibile $\implies \det(A) \neq 0$

(b) se $\bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)E = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)E' \implies {}^tX = {}^tA {}^tX'$ cambiamento di base
 $[XE \implies X'E' = X'AE = {}^tX = {}^tA {}^tX']$

Osservazione:

1. Sia $S = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ una sequenza libera \implies ogni sottosequenza di S è libera
 2. Sia $T = (g_1, g_2, \dots, g_k)$ una sequenza di generatori \implies ogni sovrasequenza di T è di generatori.
- Se **aggiungo** vettori ad una **sequenza libera** ottengo ancora una sequenza libera (Teorema di completamento della base);
 - Se **tolgo** vettori ad una **sequenza libera** ottengo ancora una sequenza libera;
 - Se **aggiungo** vettori ad una **sequenza di generatori** ottengo una sequenza di generatori;
 - Se **tolgo** vettori ad una **sequenza di generatori** ottengo una sequenza di generatori (Metodo degli scarti successivi).

1.15.1 Dimostrazione

1. Sia S libera, supponiamo $S' \leq S$ legata $\implies S' = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_t) \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ tali che $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_t \bar{e}_t = \underline{0}$
 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) \neq (0 \dots 0) \implies \alpha \bar{e}_1 + \dots + \alpha_t \bar{e}_t + 0 \bar{e}_{t+1} + \dots + 0 \bar{e}_n = \underline{0}$ con $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, 0 \dots 0) \neq \underline{0} \implies S$ legata, **assurdo**.
2. Sia $T = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_k)$ di generatori e $U = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_r)$ vettori $\implies T \cup U$ è di generatori, perchè \forall vettore di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si scrive come $\beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_k \bar{g}_k = \beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_k \bar{g}_k + 0 \bar{h}_1 + \dots + 0 \bar{h}_r$

1.16 Teorema

Sia $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale con $\dim(V) = n$. Sia $X \subseteq \mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ con $|X| = n$. Allora $X = V$.

1.16.1 Dimostrazione

X ammette una base B' di n vettori \implies tale base consta di n vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ liberi \implies per le conseguenze di Steinitz tale sequenza deve essere di generatori per $V \implies \text{span}(B')X \subseteq \mathbb{V}_n(\mathbb{K}) = \text{span}(B') \implies X = V$.

La nozione di dimensione ci dice “quanto è grande” uno spazio vettoriale.

1.17 Intersezione e somma di sottospazi

Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, la loro **intersezione** e la loro **unione** sono, rispettivamente

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ and } v \in W\} \quad e \quad U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \text{ or } v \in W\}$$

1.17.1 Proposizione

Se U, W sono sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

1.18 Somma

Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. Si dice **somma** S di U, W

$$S = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

1.18.1 Proposizione

La somma S di due sottospazi U, W di uno spazio $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione: basta osservare che se v_1, v_2 sono vettori di $U + W$ anche $\alpha v_1 + \beta v_2$ appartiene a $U + W$. Infatti se $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$ allora $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2)$ e ciò dimostra l'asserto.

1.19 Somma diretta

La somma S di due sottospazi U, W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si dice **diretta**, e si scrive $U \oplus W$, se ogni vettore di S si può esprimere in modo unico, come somma di un vettore di U e di uno di W .

1.19.1 Proposizione

La somma di due sottospazi U, W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è diretta $\iff U \cap W = \{0\}$

Dimostrazione: supponiamo che la somma di U, W sia diretta e sia, per assurdo, $0 \neq x \in U \cap W$. Un qualunque vettore v di $U + W$ è $v = u + w$ ove $u \in U$ and $w \in W$, ma anche $v = (u + x) + (w - x)$ ove $u + x \in U$ e $w - x \in W$. Pertanto, v può essere espresso in più modi come somma di un elemento di U e di uno di W , e questo è assurdo.

Viceversa, sia $U \cap W = \{0\}$ e, per assurdo, esista un vettore v esprimibile in due modi diversi come somma di vettori di U e W ,

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

in questo caso il vettore $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ sarebbe un vettore non nullo di $U \cap W$ e ciò è contro l'ipotesi.

1.19.2 Corollario

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è somma diretta di due suoi sottospazi $U, W \iff V = U + W$ and $U \cap W = \{0\}$

1.20 Formula di Grassmann

Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ f.g. Allora:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

1.21 Definizione

Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ si dice **complemento diretto** di U in V , un sottospazio vettoriale W di V_n , tale che $U \oplus W = V$.

2 Sistemi Lineari

2.1 Determinante

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n , a elementi in un campo \mathbb{K} . Si dice **determinante**, e si indica con $\det(A)$ o $|A|$, la somma di tutti i suoi termini presi con il proprio segno. Cioè:

$$\det(A) = \sum_{\alpha \in S_n} \text{sgn}(\alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

2.1.1 Proprietà

1. Se una colonna (o una riga) di una matrice è nulla, allora il determinante è nullo.
2. $\det(A) = \det({}^tA)$, infatti, i termini estratti da tA sono tutti e soli i termini estratti da A . Sia $A = (a_{ij})$ e $B = ({}^tA) = (b_{ij})$ allora $b_{ij} = a_{ji}$. Se:

$$b_{1\alpha(1)}b_{2\alpha(2)} \cdots b_{n\alpha(n)}$$

è un termine estratto da tA , associato alla permutazione α , esso coincide con:

$$a_{\alpha(1)1}a_{\alpha(2)2} \cdots a_{\alpha(n)n}$$

che per definizione, è un termine estratto da A e individuato dalla permutazione α^{-1} . Dunque, poichè $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1})$, possiamo concludere che $\det(A) = \det({}^tA)$.

3. Se A' è ottenuta da A scambiando tra loro due righe (o colonne), allora $\det(A') = -\det(A)$. Basta osservare che, i termini della matrice A' si ottengono da quelli di A scambiando tra loro due termini, e quindi, il segno del determinante cambia. Infatti, se $A' = (b_{ij})$ è ottenuta da $A = (a_{ij})$ scambiando la k -esima riga con l' h -esima, allora ogni termine estratto da A'

$$b_{1\alpha(1)} \cdots b_{k\alpha(k)} \cdots b_{h\alpha(h)} \cdots b_{n\alpha(n)}$$

associato alla permutazione α , è uguale a:

$$a_{1\alpha(1)} \cdots a_{h\alpha(k)} \cdots a_{k\alpha(h)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

che risulta un termine di A associato alla permutazione $(\sigma \circ \alpha)$, dove, σ è lo scambio di k con h . Ma essendo $\operatorname{sgn}(\alpha) = -\operatorname{sgn}(\sigma \circ \alpha)$, risulta $|A'| = -|A|$

4. Se A ha due righe (o due colonne) uguali, allora $\det(A) = 0$. Infatti, se A ha due righe uguali, allora, scambiando tra loro queste due righe, non si altera la matrice A , e per la precedente proprietà, $\det(A) = -\det(A)$, da cui $\det(A) = 0$.
5. Se in A una colonna C_i è la somma di due n -uple X_i, Y_i , cioè se A è del tipo:

$$(C_1 \cdots X_i + Y_i \cdots C_n)$$

allora $|A| = |C_1 \cdots X_i \cdots C_n| + |C_1 \cdots Y_i \cdots C_n|$. Analogamente per le righe.

6. Se A' è una matrice ottenuta da $A = (C_1 \ C_2 \cdots C_n)$ moltiplicando per $k \in \mathbb{K}$ una sua colonna (o riga), allora

$$|A'| = |C_1 \cdots kC_i \cdots C_n| = k|C_1 \cdots C_i \cdots C_n| = k|A|$$

7. Se A ha due colonne (o due righe) proporzionali, allora $\det(A) = 0$.
8. Se A ha una colonna (o una riga) che è combinazione lineare di altre colonne (o righe), allora $\det(A) = 0$.
9. Se A' è una matrice ottenuta da A sommando ad una sua colonna (o riga) un multiplo di un'altra colonna (o riga), allora $|A'| = |A|$.

2.2 Eliminazione di Gauss

L'intento del **metodo di eliminazione di Gauss** è quello di ridurre una matrice A ad una matrice A' , detta **ridotta a gradini**, in quanto il determinante di quest'ultima può essere calcolato moltiplicando gli elementi presenti nella diagonale principale, che ha la forma:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Per farlo utilizziamo quelle che si chiamano **Mosse di Gauss**:

1. Scambiare tra loro due righe della matrice;
2. Moltiplicare una riga per un numero diverso da zero;
3. Sostituire ad una riga la somma di essa con un multiplo di un'altra riga.

Osservazione: le mosse di Gauss non alterano il determinante della matrice.

Passi dell'algoritmo di Gauss:

Indichiamo con A una matrice non ridotta a gradini con m righe e n colonne.

1. Sia C_k , con $1 \leq k \leq n$, la prima colonna a partire da sinistra che contiene almeno un termine a non nullo. Detta R_1 la prima riga della matrice, possono presentarsi **due eventualità**:
 - (a) Se a è un elemento di R_1 , passiamo al punto 3
 - (b) Se $a \notin R_1$. Controlliamo se la matrice ottenuta dopo lo scambio è ridotta a gradini: se lo è possiamo fermarci, in caso contrario procediamo oltre.
2. L'obiettivo è annullare tutti gli elementi della k -esima colonna al di sotto di a . Sostituiamo ogni riga R_i , con $i > 1$ e con k -esimo elemento non nullo, con $R_i + \lambda R_1$, $\lambda \in \mathbb{R} : R_i + \lambda R_1 = 0$.
3. Se la matrice risultante è ridotta a gradini, allora l'algoritmo termina, altrimenti ripetiamo i passi precedenti con la matrice ottenuta.

2.3 Complemento algebrico

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n , a elementi in un campo \mathbb{K} . Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk} , e si indica con Γ_{hk} , il determinante della matrice quadrata di ordine $n - 1$, ottenuta da A cancellando la riga h e la colonna k , preso con il segno $(-1)^{h+k}$.

2.4 Teorema di Laplace I

Data una matrice quadrata A di ordine n , la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna), per i rispettivi complementi algebrici, è il determinante di A . Pertanto, la formula del calcolo del determinante di $A = (a_{ij})$ rispetto alla i -esima riga è:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Rispetto alla j -esima colonna è:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

L'utilizzo dei complementi algebrici consente, quindi il calcolo del determinante di una matrice di ordine n calcolando determinanti di matrici di ordine inferiore.

2.5 Teorema di Laplace II

Sia A una matrice quadrata di ordine n . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) vale zero.

2.6 Teorema di Binet

Date due matrici quadrate di ordine n , A e B , il determinante della matrice prodotto AB è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici:

$$|AB| = |A||B|$$

2.7 Matrici Invertibili

Una matrice quadrata A di ordine n si dice **invertibile** se esiste una matrice B quadrata e dello stesso ordine, tale che $AB = BA = I_n$, dove I_n è la matrice identità di ordine n . In tal caso, la matrice B si dice **matrice inversa** di A e si indica con A^{-1} .

2.7.1 Teorema

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$, di ordine n , è invertibile $\iff |A| \neq 0$. In questo caso, la matrice inversa di A risulta essere $A^{-1} = |A|^{-1} {}^t A_a$ dove ${}^t A_a$ è la trasposta dell'aggiunta di A .

2.8 Dipendenza lineare e determinanti

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}(K)$ si dice **minore di ordine k** , estratto da A , una matrice quadrata di ordine k ()