La **traiettoria** di un punto P in moto, è in generale una *linea curva*.

0.1 Posizione

Dato un sistema di riferimento cartesiano con origine in O e assi x, y, z, la posizione di un punto P è definita da un vettore $\bar{r}$ che congiunge l'origine con un punto P. Dato che il punto P si muove, la posizione è una funzione del tempo:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

r può essere espresso in forma cartesiana attraverso le sue componenti x, y, z:

$$\bar{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z$$

Conoscere $r(t)$ significa conoscere $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$: le leggi orarie.

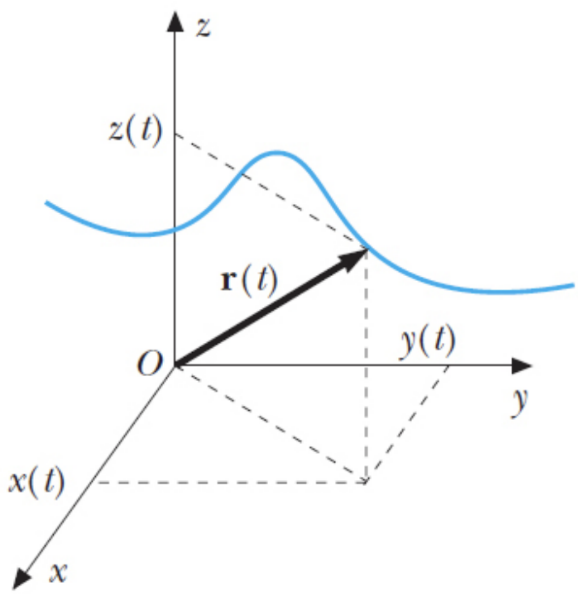


Figure 1: Traiettoria di un punto

$\bar{r}(t)$ o $\overline{OP}$ vettore posizione o raggio vettore.

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z \quad \textit{Legge oraria}$$

0.2 Velocità

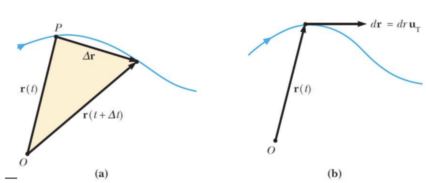
Consideriamo due posizioni occupate dal punto P in due istanti di tempo diversi t e $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r}$. Il vettore:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

è il **vettore spostamento** del punto P nell'intervallo di tempo Δt.
La velocità media è definita come:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

La velocità media è un vettore parallelo allo spostamento, ed esprime la rapidità con cui il punto P si sposta da un punto all'altro. Essa dà informazioni complessive senza fornire nessuna indicazione di come avviene il moto nell'intervallo di



◀ Figura 1.2 Spostamento finito (*a*) e spostamento infinitesimo (*b*) di un punto.

tempo Δt.
Per ovviare a questa indeterminazione si può ridurre l'intervallo di tempo Δt fino a renderlo infinitesimo, ottenendo la **velocità istantanea**:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

La velocità è anch'essa un vettore e rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t.

Osserviamo che (figura 0.2) al limite l'incremento $d\bar{r}$ infinitesimo del raggio vettore risulta in *direzione tangente alla traiettoria nel punto* P.
La velocità è sempre tangente alla traiettoria:

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} \quad \textit{Velocità media}$$

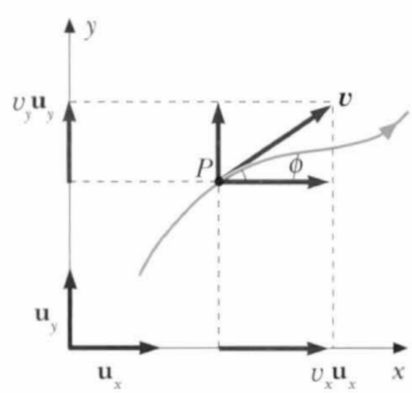
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \textit{Derivata del vettore posizione}$$

0.3 Componenti cartesiane della velocità

Poichè $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$:

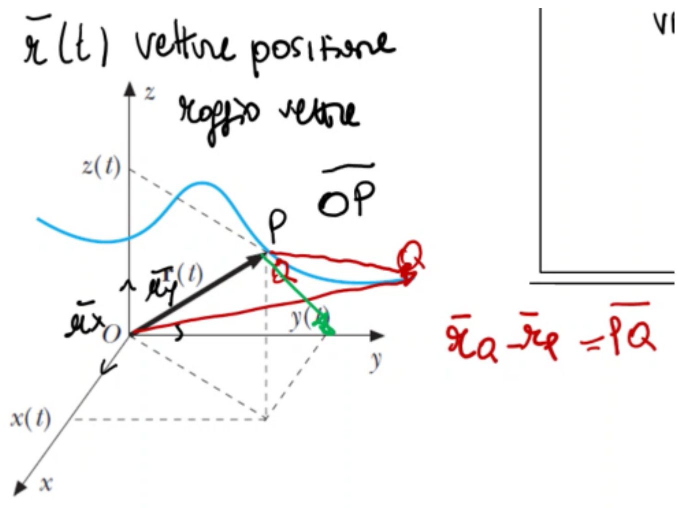
$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z = v_x\bar{u}_x + v_y\bar{u}_y + v_z\bar{u}_z$$

La velocità è determinata se sono note le derivare delle tre coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.



▲ Figura 1.3 Coordinate cartesiane del vettore velocità nel caso bidimensionale.

Per esempio posso ottenere $v_x = v\cos\phi_x$. Nel caso bidimensionale è necessario un solo angolo. Lo spostamento può essere trovato come differenza tra il vettore di posizione finale e quello iniziale:



$$\overline{r_q} - \overline{r_p} = \overline{PQ}$$

Se conosco la velocità posso ricavare il vettore posizione:

$$dr = \bar{v}dt \implies \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} dr = \int_{t_0}^{t} \bar{v}dt = \bar{r} - \bar{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{v}dt \implies$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v_x} dt \bar{u}_x \dots$$

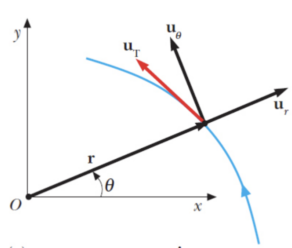
0.4 Accelerazione

0.5 Componenti cartesiane dell'accelerazione

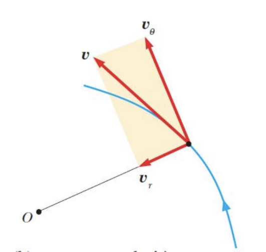
0.6 Coordinate polari

Nel moto su di un piano la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani, le coordinate cartesiane $x(t)$, $y(t)$ oppure le coordinate polari $r(t)$, $\theta(t)$. Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



(a) versori



(b) velocità

▲ Figura 1.4 Sistema di coordinate polari in un piano (a) e componenti polari del vettore velocità (b).

0.7 Componenti polari della velocità

I vettori $\bar{u}_r$ e $\bar{u}_\theta$, sono versori della direzione di $\bar{r}$ e versore ortogonale alla stessa: si noti che questi versori cambiano verso durante il moto.
Il raggio vettore $\bar{r}$ può essere espresso come $r\bar{r}_r$ e pertanto:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} \implies \bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

$$u_\theta = \ \textit{versore trasverso}$$

$$u_r = \ \textit{versore radiale}$$