

Algebra Lineare e Geometria Analitica

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Spazi Vettoriali	1
1.0.1 Nota bene	2
1.1 Vettori	2
1.1.1 Esercizio	2
1.2 Combinazione Lineare	2
1.3 Applicazione Lineare	3
1.4 Sottospazio Vettoriale	3
1.4.1 Teorema 1	3
1.4.2 Teorema 2	3
1.5 Condizioni per sottospazio	4
1.6 Indipendenza e dipendenza lineare	4
1.6.1 Sistema Libero o Legato	4
1.7 Sistema di generatori di uno spazio vettoriale	4
1.7.1 Copertura Lineare = Sottospazio	4
1.8 Insieme di generatori	5
1.8.1 Lemma	5
1.8.2 Teorema	5
1.9 Lemma di Steinitz	5
1.10 Base	5
1.10.1 Dimostrazione	5
1.11 Dimensione	5
1.12 Componenti	5
1.12.1 Corollario	6
1.12.2 Proposizione	6
1.12.3 Proposizione	6
1.13 Teorema del completamento di una base	6
1.14 Intersezione e somma di sottospazi	6
1.14.1 Proposizione	6
1.15 Somma	6
1.15.1 Proposizione	6
1.16 Somma diretta	6

1 Spazi Vettoriali

Siano K un campo e V un insieme. Si dice che V è uno spazio vettoriale sul campo K , se sono definite due operazioni: un'operazione interna binaria su V , detta somma, $+: V \times V \rightarrow V$ e un'operazione esterna, detta prodotto esterno o prodotto per scalari, $\bullet: K \times V \rightarrow V$, tali che:

1. $(V, +)$ sia un gruppo abeliano;
2. il prodotto esterno \bullet soddisfi le seguenti proprietà:
 - (a) $(h \cdot k) \bullet \bar{v} = h \bullet (k \bullet \bar{v}) \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
 - (b) $(h + k) \bullet \bar{v} = h \bullet \bar{v} + k \bullet \bar{v} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$
 - (c) $h \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = h \bullet \bar{v} + h \bullet \bar{w} \quad \forall h, k \in K \quad \text{e} \quad \forall \bar{v} \in V$

(d) $1 \bullet \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$ ove 1 è l'unità del campo K

$V(K) = (V, K, + : V \times V \rightarrow V, \bullet : K \times V \rightarrow V) \implies$ struttura algebrica

Gli elementi dell'insieme V sono detti **vettori** gli elementi del campo K sono detti **scalari**.

1.0.1 Nota bene

Sia \mathbb{K} un campo, indichiamo con $\mathbb{K}_{[x]} = \{a_0 + a_1x + \dots \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ l'insieme di tutti i polinomi in x a coefficienti in \mathbb{K} .

1.1 Vettori

I vettori sono segmenti orientati con **verso**, **direzione** e **lunghezza**.

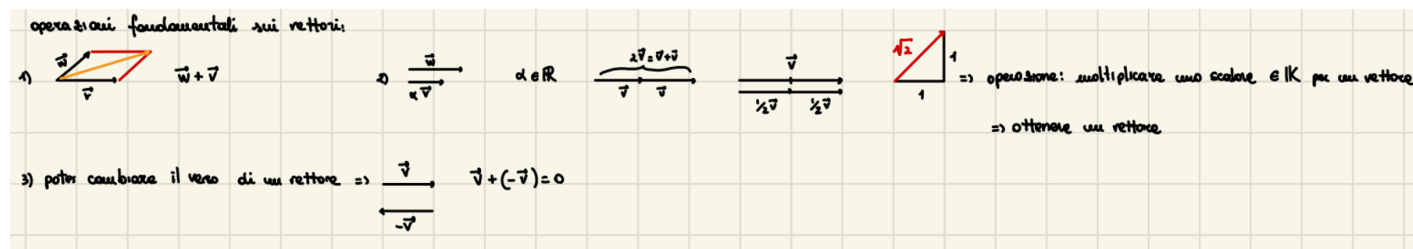


Figure 1: Vettori

1.1.1 Esercizio

Sia \mathbb{R}^2 con le operazioni di somma componente per componente $\implies (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e prodotto per scalare campo per campo $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ è uno spazio vettoriale reale.

1. Far vedere che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano:

- (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (0, 0) + (a, b)$
- (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \exists (-a, -b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = (-a + a, -b + b) = (-a, -b) + (a, b)$
- (c) $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$
- (d) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$

Abbiamo verificato che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano.

NB: abbiamo usato solamente che \mathbb{R} è un campo \implies abbiamo usato solo le proprietà della somma

1. Ora dobbiamo verificare che il prodotto esterno soddisfi le proprietà dello spazio vettoriale:

- (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2 : 1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) \implies$ elemento neutro
- (b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 : (\alpha\beta) \cdot (a, b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) = (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) = \alpha(\beta a, \beta b) = \alpha(\beta \cdot (a, b)) \implies$ pseudo associativa
- (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta)(a, b) = ((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = \alpha(a, b) + \beta(a, b) \implies$ pseudo distributiva
- (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R} (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 : \alpha((a, b) + (c, d)) = \alpha(a + c, b + d) = (\alpha a, \alpha c, \alpha b, \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \alpha(a, b) + \alpha(c, d)$

1.2 Combinazione Lineare

Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \in V(\mathbb{K})$ vettori, α_1, α_n scalari, si dice combinazione lineare di $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ con α_1, α_k il vettore $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_k$.

1.3 Applicazione Lineare

Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su \mathbb{K} . Si dice applicazione lineare da $V(\mathbb{K})$ in $W(\mathbb{K})$ una funzione $f : V \rightarrow W$ tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \bar{w} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{w}) + \beta f(\bar{v})$$

Un'applicazione lineare è una funzione che manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari con i medesimi coefficienti. Se $V(\mathbb{K})$ è spazio vettoriale e $f : V \rightarrow W$ è applicazione lineare $\implies f(V)$ immagine di V mediante f è uno spazio vettoriale.

1.4 Sottospazio Vettoriale

Sia $W(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, sia anche $X \subseteq W$ sottoinsieme $x \neq 0$, allora X è detto **sottospazio** di W se X rispetta le operazioni di somma di vettori ristretta ad $X \times X$ e troncata ad X e di prodotto per scalari di W ristretta a $\mathbb{K} \times X$ e troncata ad X soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

In tale caso scriviamo $X \leq W$. X è sottospazio vettoriale se:

1. la somma di due qualsiasi vettori di X è un vettore di X
2. il prodotto di un qualsiasi vettore di X per uno scalare è ancora un vettore di X

1.4.1 Teorema 1

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , allora:

1. $\forall \bar{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \iff \alpha = 0 \vee \bar{v} = \underline{0}$
2. $\forall \bar{v} \in V \quad (-1)\bar{v} = -\bar{v}$

Dimostrazione:

1. Consideriamo $0 \cdot \bar{v} = (0 + 0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0$ sommando a destra e a sinistra $-(0 \cdot \bar{v})$ si ottiene $-(0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) = -(0 \cdot \bar{v}) + 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 + 0 + 0 \cdot \bar{v} \implies 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} \quad \alpha = 0 \implies \alpha \bar{v} = \underline{0}$.
Supponiamo $\alpha \bar{v} = \underline{0}$ con $\alpha \neq 0 \implies \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \text{ e } \alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$
 $\alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
 $\alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \alpha^{-1}(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} + \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$ sommando come prima $-(\alpha^{-1} \underline{0})$ a dx e sx
 $\alpha^{-1} \underline{0} = \underline{0} \implies$ in particolare $\bar{v} = \underline{0}$
2. $(-1)\bar{v} + \bar{v} = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = (-1+1)\bar{v} = 0 \cdot \underline{0} = \underline{0}$ pertanto sommando a dx e sx $(-\bar{v})$ otteniamo $-1\bar{v} = -1\bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v} = \underline{0} + (-\bar{v}) = \underline{0} + (-\bar{v}) = -\bar{v}$

1.4.2 Teorema 2

$X \leq V(\mathbb{K}) \iff X \subseteq V(\mathbb{K})$ ed X è chiuso rispetto le combinazioni lineari di suoi elementi mediante le equazioni di V . In altre parole:

$$\star) \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$$

Osservazione: \star è equivalente a dire:

$$\bullet) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in X : \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X \text{ \& } \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{v} + \bar{w} \in X$$

Verifichiamo che se vale \star allora $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v} + \underline{0} = \alpha \bar{v} \in X$ e $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X : 1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} \in X$.

Viceversa se vale $\bullet \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v}, \beta \bar{w} \in X \implies \bar{v}' = \alpha \bar{v}, \bar{w} = \beta \bar{w} \in X \quad \bar{v}' + \bar{w}' \in X \implies \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$

Se vale \bullet o \star (stessa cosa) allora X è sottospazio. Osserviamo che molte delle proprietà di spazio vettoriale valgono automaticamente per le restrizioni applicate a qualsiasi $X \subseteq V(\mathbb{K})$:

1. se $\forall \bar{v} \in V : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \implies \forall \bar{v} \in X : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in V : (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v}) \implies$ vale anche per $\forall \bar{v} \in X$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \bar{v} \in V : (\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$
4. $\forall \bar{v}, \bar{w} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} = \alpha(\bar{v} + \bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w}$

1, 2, 3, 4 valgono tutte anche sulla restrizione. Vale anche sulle restrizioni che $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \implies \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ e similmente: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} \implies \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

Cosa potrebbe non funzionare?

1. $\underline{0} \in X$
2. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} \in X$
3. $(-\bar{u}) \in X$ se $\bar{u} \in X$
4. $\alpha \bar{u} \in X$ se $\bar{u} \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Se valgono a, b, c, d possiamo troncare le operazioni ad $X \implies$ abbiamo un sottospazio.

b+d \implies significa che si può troncare.

a+b+c $\implies (X, +)$ un gruppo.

1.5 Condizioni per sottospazio

Se vale la condizione \star : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in X$

1. $0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in X$
2. $1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \in X$
3. $(-1)\bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = -\bar{u} + \underline{0} = -\bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$
4. $\alpha \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \alpha \bar{u} + \underline{0} = \alpha \bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$

X è un sottospazio, viceversa se X sottospazio allora ogni combinazione lineare di suoi vettori deve stare in $X \implies$ vale \star .

1.6 Indipendenza e dipendenza lineare

Siano v_1, v_2, \dots, v_n vettori di uno spazio vettoriale e a_1, a_2, \dots, a_n elementi del campo \mathbb{K} . Si dice **combinazione lineare** dei vettori v_1, v_2, \dots, v_n con coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n il vettore di \mathbb{V} .

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

1.6.1 Sistema Libero o Legato

$\mathbb{V}(\mathbb{K})$ spazio vettoriale e un sistema $\mathbb{A} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ si dice **libero**, ovvero i suoi vettori sono **linearmente indipendenti**, se l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli. Viceversa il sistema è **legato** e i suoi vettori sono **linearmente dipendenti**.

1.7 Sistema di generatori di uno spazio vettoriale

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia \mathbb{A} un sistema o un insieme non vuoto di vettori di \mathbb{V} . Si dice **copertura lineare** di \mathbb{A} , e si indica $\text{span}(\mathbb{A})$, l'insieme dei vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ che si possono esprimere come combinazioni lineari, di un numero finito, di vettori di \mathbb{A} (tutte le possibili combinazioni lineari).

$$\text{span}(\mathbb{A}) = \{v \in \mathbb{V} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, a_i v_n, a_1 \in \mathbb{K}, v_i \in \mathbb{A}\}$$

1.7.1 Copertura Lineare = Sottospazio

La copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A})$ di un sistema o di un insieme \mathbb{A} , non vuoto, di vettori $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione: si osserva che la somma di un numero finito di vettori di \mathbb{A} è sempre una combinazione lineare di un numero finito di vettori a \mathbb{A} e, analogamente, il prodotto di un elemento del campo \mathbb{K} , per una combinazione lineare di vettori di \mathbb{A} , è ancora una combinazione lineare di un numero finito di vettori di \mathbb{A} . Quindi, $\text{span}(\mathbb{A})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. Pertanto, dire che $\text{span}(\mathbb{A})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, la copertura lineare di un insieme o di un sistema \mathbb{A} di vettori si suole chiamare **spazio generato** da \mathbb{A} .

Osservazione: Diremo, talvolta, che la copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A})$ di un sistema o di un insieme \mathbb{A} , non vuoto, di vettori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è il **più piccolo sottospazio vettoriale** che contiene \mathbb{A} , nel senso che $\text{span}(\mathbb{A})$ è contenuto in ogni sottospazio

vettoriale che contenga \mathbb{A} . E' immediato, infatti osservare che, ogni sottospazio vettoriale che contiene \mathbb{A} deve contenere tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di vettori di \mathbb{A} e, quindi, anche $\text{span}(\mathbb{A})$.

Si può facilmente dimostrare che:

1. $\text{span}(\text{span}(\mathbb{A})) = \text{span}(\mathbb{A})$
2. $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \iff \mathbb{A}$ è un sottospazio vettoriale.

1.8 Insieme di generatori

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{V}$. Il sottoinsieme \mathbb{A} si dice **sistema o insieme di generatori** di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ se la sua copertura lineare $\text{span}(\mathbb{A}) = \mathbb{V}(\mathbb{K})$, cioè se **ogni vettore di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ si può esprimere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di \mathbb{A}** . (Si dice che X è un **insieme di generatori** per $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ se $\text{span}(X) = \mathbb{V}$). Ogni spazio vettoriale ammette un insieme di generatori, ma si distinguono due casi:

1. **finitamente generato:** se \exists un almeno un sistema di generatori con un numero finito di vettori;

$$\exists X \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{K}) \quad |X| = n : \text{span}(X) = \mathbb{V}$$

2. **non finitamente generato:** se ogni sistema di generatori ha un numero infinito di vettori.

1.8.1 Lemma

Se $S = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ e uno dei suoi vettori v_i , dipende linearmente dagli altri, allora $S \setminus v_i$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

1.8.2 Teorema

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ finitamente generato non banale ammette almeno un sistema libero di generatori.

1.9 Lemma di Steinitz

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale f.g., sia $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ un suo sistema di generatori e sia $A = [u_1, u_2, u_m]$ un sistema libero di vettori di \mathbb{V} . Allora $m \leq n$.

1.10 Base

Si dice **base** di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ f.g. una **sequenza** libera di generatori di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

Tutte le basi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ hanno la stessa *cardinalità*.

1.10.1 Dimostrazione

Ci basta far vedere che ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base.

Supponiamo $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ e B sequenza libera di generatori.

$$\bar{v} \in \text{span}(B) \quad \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n.$$

$$\text{Supponiamo anche } \bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n.$$

Allora $\bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n) - (\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n) = (\alpha_1 - \beta_1) \bar{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \bar{b}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{b}_n$. Se B libera \implies deve essere $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_n = \beta_n$ perchè tutti i coefficienti sono necessariamente 0

$\implies B$ libera e di generatori $\iff B$ base.

1.11 Dimensione

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ ha **dimensione n** , e scriveremo $\dim \mathbb{V}(\mathbb{K}) = n$, se n è il numero di vettori che compongono una sua qualunque base.

1.12 Componenti

Sia $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ una sua base. $\forall v \in \mathbb{V}$ si dicono **componenti di v** , rispetto alla base B , i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Cambiando l'ordine dei vettori che compaiono in una base, anche se si ottiene ancora una base, si tratta di una base diversa.

1.12.1 Corollario

In $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, spazio vettoriale di dimensione n ,

1. m vettori v_1, v_2, \dots, v_m con $m > n$ sono l.d.;
2. m vettori v_1, v_2, \dots, v_m con $m < n$ non possono generare $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$;
3. una sequenza di n generatori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ risulta essere anche libera, e quindi, individua una base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$;
4. una sequenza libera di n vettori risulta essere anche un sistema di generatori e, quindi, individua una base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$.

Dimostrazione:

1. Dal lemma di Steinitz, se uno spazio vettoriale ha dimensione n , **il massimo numero di vettori l.d.** che si possono trovare in $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è proprio n .
2. Il **minimo numero di vettori che occorrono per generare** $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ è proprio n .

1.12.2 Proposizione

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ di dimensione n contiene sottospazi di dimensione $m \forall 0 \leq m \leq n$.

1.12.3 Proposizione

Se U e W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ e U è contenuto in W , allora:

1. $\dim U \leq \dim W$;
2. $U = W \iff \dim U = \dim W$

1.13 Teorema del completamento di una base

Sia $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $A = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, ove $m \leq n$, una sequenza libera di vettori di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$. Allora, in una qualunque base B di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$, esiste una sequenza B' di vettori, tale che $A \cup B'$ è base di $\mathbb{V}_n(\mathbb{K})$.

1.14 Intersezione e somma di sottospazi

Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, la loro **intersezione** e la loro **unione** sono, rispettivamente

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ and } v \in W\} \quad e \quad U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \text{ or } v \in W\}$$

1.14.1 Proposizione

Se U, W sono sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

1.15 Somma

Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. Si dice **somma** S di U, W

$$S = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

1.15.1 Proposizione

La somma S di due sottospazi U, W di uno spazio $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale di $\mathbb{V}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione: basta osservare che se v_1, v_2 sono vettori di $U + W$ anche $\alpha v_1 + \beta v_2$ appartiene a $U + W$. Infatti se $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$ allora $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2)$ e ciò dimostra l'asserto.

1.16 Somma diretta