Analisi I

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Partizioni

Quindi per ogni partizione P, poniamo

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

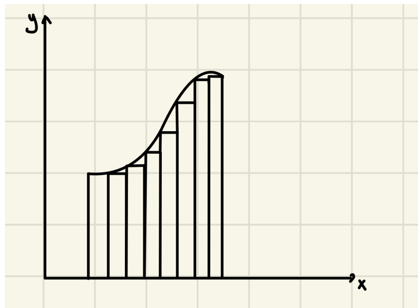


Figure 1: Inf

(In questo caso è un minimo)
e poniamo

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

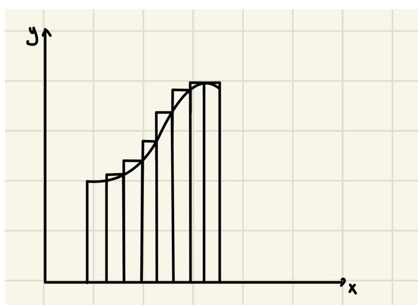
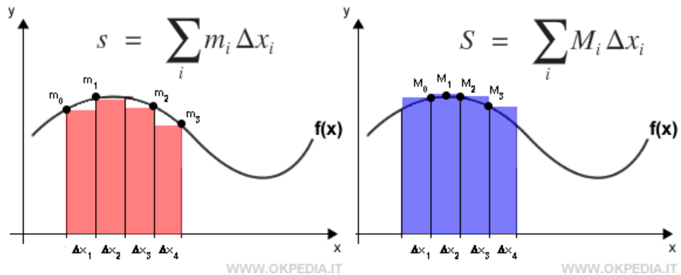


Figure 2: Sup

(In questo caso è un massimo)

Ad esempio:



In entrambe le figure sono rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Sono aree per difetto e per eccesso della regione che voglio stimare.
Definisco le SOMME INTEGRALI INFERIORI: Somma delle aree dei rettangoli inscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

e le SOMME INTEGRALI SUPERIORI: Somma delle aree dei rettangoli circoscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

1.1 Osservazione

Se $f(x)$ è positiva, queste somme integrali sono la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (sono definite a prescindere dal segno)

Si dimostra che:

$$S(P) \leq S(P)$$

e indicando con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori (P) al variare delle partizioni P dell'intervallo $[a, b]$ e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\} \quad B = \{S(P)\}$$

si dimostra che A e B sono insiemi SEPARATI, cioè $A \leq B$:

$$a \leq b \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall b \in B$$

$\Longrightarrow$ Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

$$a \leq c \leq b$$

In generale questo elemento non è unico, e vale la seguente:

2 Integrale definito

Se l'elemento di separazione tra A e B è unico, allora si dice che f(x) è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in $[a, b]$ e l'elemento si chiama con:

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si chiama INTEGRALE DEFINITO di f in $[a, b]$. Quindi posto:

$$S(f) = sup\{s(P) : P \ \ partizione \ \ di \ \ [a, b]\}$$

$$S(f) = inf\{S(P) : P \ \ partizione \ \ di \ \ [a, b]\}$$

se $s(f) = S(P) \rightarrow$ allora f(x) è integrabile secondo Riemann.

2.1 Funzione non integrabile secondo Riemann

Funzione di Dirichlet:

$$f(x)\colon \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

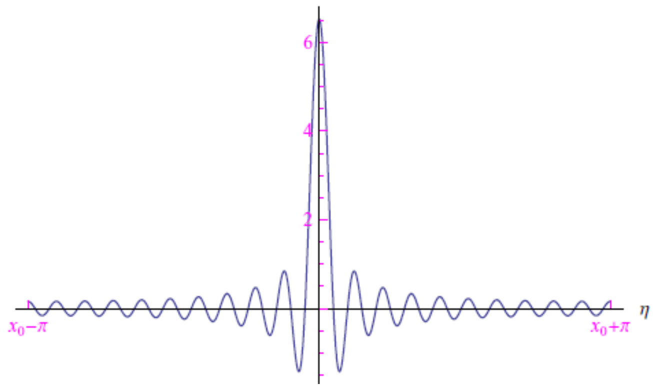


Figure 3: Funzione di Dirichlet

In ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ cadono sia punti razionali che irrazionali:

$$m_k = inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

Allora: (somma integrali inferiori)

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = b - a \end{aligned}$$

$\rightarrow S(P) = 0 \ \forall \ P \land S(P) = b - a \ \forall P$
Non è integrabile secondo Riemann. (lo sarà secondo LEBESGUE)

2.2 Proprietà

2.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo

Se a,b,c sono tre punti di un intervallo dove la funzione f(x) è integrabile, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

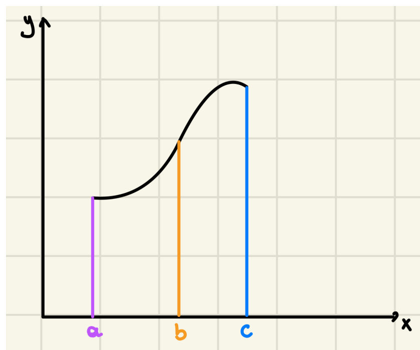


Figure 4: Grafico additività integrale

2.2.2 Linearità dell'integrale

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$, anche $f + g$ è integrabile in $[a, b]$. Dato c numero reale, anche $c \cdot f$ è integrabile in $[a, b]$.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2.2.3 Confronto tra gli integrali

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2.2.4 Integrabilità delle funzioni continue

Sia f(x) una funzione continua in $[a, b]$. Allora f(c) è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

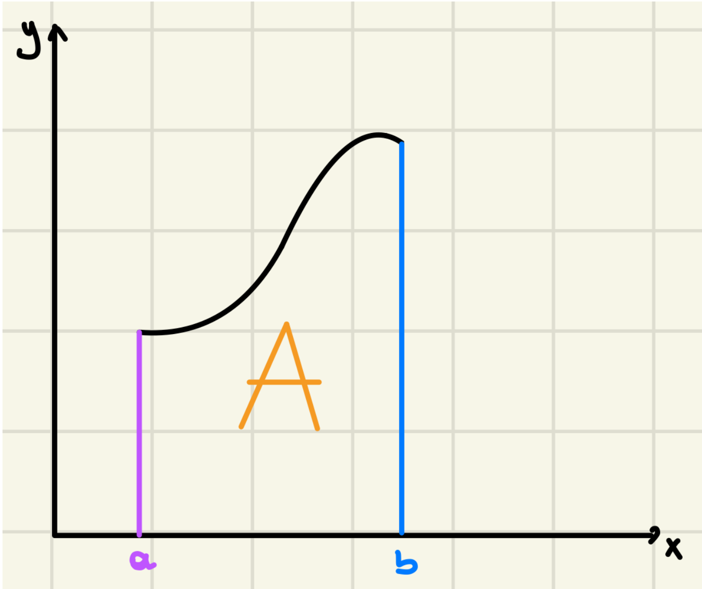
2.3 Teorema della media

Se f(x) è continua in $[a, b]$, esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

2.4 Interpretazione geometrica del teorema della media

f(x) continua in $[a, b]$, ad esempio:



Voglio calcolare l'area del rettangolo A. Il teorema della media afferma che $\exists$ un valore opportuno (cioè un valore non scelto a caso, ma in base alla particolare funzione considerata) f(x_0), tale che:

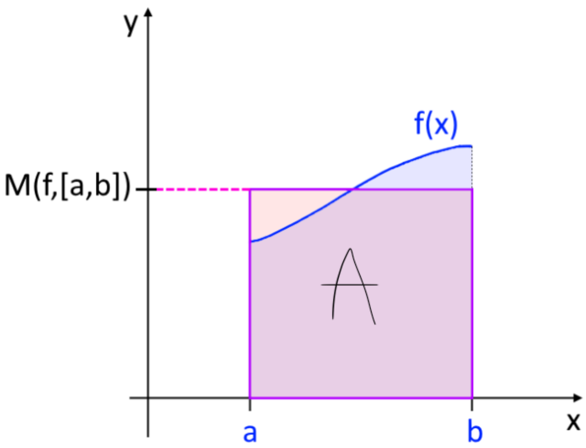


Figure 5: Teorema della media

Per cui area A = area B, dove B è un rettangolo che ha per base l'intervallo $[a, b]$ e per altezza $f(x_0)$.

2.4.1 Dimostrazione del teorema della media

f una funzione continua in $[a, b]$ per ipotesi. Per il teorema di Weierstrass f(x) assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono m e M tali che: (teo esistenza valori intermedi)

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$$

Consideriamo ora una partizione P di $[a, b]$, la più semplice possibile, cioè:

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

Le relative somme integrali inferiori e superiori sono date quindi da:

$$s(P) = m(b - a)$$

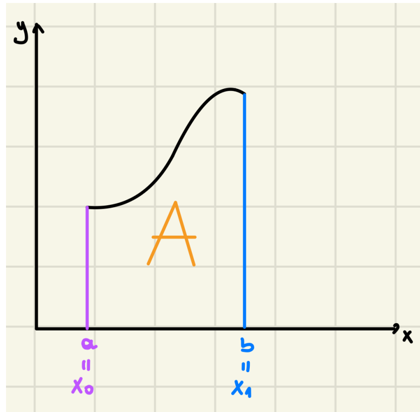


Figure 6: Enter Caption

$$S(P) = M(b-a)$$

// grafico

L'integrale definito è, per definizione, l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori (qualunque sia la partizione P di $[a, b]$). Quindi:

$$s(P) \leq \int_b^a f(x)dx \leq S(P)$$

$$\rightarrow m(b-a) \leq \int_b^a f(x)dx \leq M(b-a)$$

se e solo se

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

y_0 è un numero compreso tra m ed M, minimo e massimo di f(x) $\implies$ per il teorema di esistenza dei valori intermedi, $\exists x_0 \in [a, b]\ t.c.$

$$f(x_0) = y_0$$

$$\implies f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$$

2.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Sia f(x) una funzione monotona in $[a, b]$. Allora f(x) è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ (indipendente dalle discontinuità)

2.5.1 Osservazioni

In vista di andare a definire gli **INTEGRALI INDEFINITI**, concludiamo con alcune notazioni e definizioni. Abbiamo definito l'integrale definito come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove a e b sono gli estremi di integrazione, la funzione f si dice funzione **integranda**, la variabile x, si dice **variabile di integrazione**.

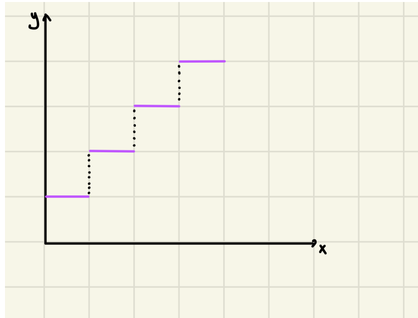


Figure 7: funzione a scalini

Notiamo che il risultato dell'integrazione non dipende da x, ma è un numero reale. Poniamo inoltre per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

e

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3 Integrali Indefiniti

Mettiamo ora in evidenza, ma dei risultati più importati che lega le derivate con gli integrali. Preliminarmente definiamo la FUNZIONE INTEGRALE.

3.1 Funzione integrale

Data f una funzione continua in $[a, b]$, definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f()$$

qui "x" è impegnato.

$$\implies F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

4 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \quad \text{Successione costante } a_n = 1\ \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.
Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

Ovvio che il risultato è...?
Potrebbe essere:

$$\textbf{(1-1)} + \textbf{(1-1)} + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

oppure:

$$\textbf{1} + \textbf{(-1+1)} + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.
Allora come si procede?
Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

4.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

4.1.1 Esempio 1

$a_k = 1 \ \forall k$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \ldots, S_n = n$$

$\implies S_n \to \infty$

4.1.2 Esempio 2

$a_k = (-1)^{k+1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \ldots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste!.

4.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k. Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \to \infty$ di S_n, si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamtento della seria si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una seria è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

4.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \ldots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo èer escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

4.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

4.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n\to\infty} S_= S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star)\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1}, ottengo la successione S_{n+1}. (Per definizione di successione di somme parziali)
Allora da ($\star$):

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$
$$\implies a_n \to 0$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.
Vediamo due esempi di serie modello:

4.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).
Calcoliamo la somma parziale S_n:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e $\lim_{n\to\infty} S_n =?$.
Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

4.4.1 Osservazione

La formual vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} \ldots \end{cases}$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1\ (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

4.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di x, calcolare la somma della serie.
! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.
! Capisco che è geometrica perchè dipende da $x - 4$
Risoluzione:

- è una serie geometrica di ragione $x - 4$.

- la serie geometrica data converge per:

$$|x-4|<1 \iff -1<x-4<1 \iff 3<x<5$$

- la somma della serie è data da: $\dfrac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2-8x+16}{5-x}$$

$$-1 = \text{ I° termine della serie } = (x-4)^0 = 1$$

4.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.
! Non si conosce la somma.

Osservazione E' un esempio di serie dove $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ è **divergente.**

4.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{n^p} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la seria armonica generalizzata è:

- **convergente** per $p>1$
- **divergente** per $p \leq 1$

4.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini non negativi se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 0$.
Diremo che una serie è a termini positivi se $a_n > 0, \forall n$.

4.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente poisitivamente.
Dimostrazione: La successione delle somme parziali S_n di una seria a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).
Infatti, poichè $a_{n+1} \geq 0, \forall n$, risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

$\implies$ Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:
"Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito."
$\implies$ S_n ammette limite (eventualmente a $+\infty$) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

4.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni **criteri** per stabilire il **carattere** di una serie: (non sempre si risce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

4.8.1 Criterio del rapporto:

Si utilizza solitamente per il fattoriale.
Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L \leq 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \geq +\infty$, la serie diverge.

Osservazione Nel caso: $0 \leq L \leq 1$ quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
Esempi:
da fare

4.8.2 Criterio della radice:

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0 \forall n$. Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se $0 \leq L < 1$, la serie converge.
- Se $1 < L \leq +\infty$, la serie diverge.

Esempi:
da fare
Esercizio appello

4.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$:

- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

4.8.4 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$ quindi $a_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ e considero $b_n = \dfrac{1}{n^p}$ con p?
  valuto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$
  - $b_n = \dfrac{1}{n^2} \implies \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ è una serie convergente, quindi non riesco a concludere.
  - $b_n = \dfrac{1}{n^3} \implies \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} \cdot n^3 = +\infty$, stesso problema di prima e non riesco a concludere.
  - $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge e quindi concludo con il criterio del **confronto mediante limiti** e la serie data converge.
- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{6n^3 + 1} - \sqrt{6n^3})$$

$$a_n = \sqrt{6n^3+1} - \sqrt{6n^3} \cdot \frac{\sqrt{6n^3+1}+\sqrt{6n^3}}{\sqrt{6n^3+1}+\sqrt{6n^3}} = \frac{6n^3+1-6n^3}{\sqrt{6n^3+1}+\sqrt{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6n^3+1}+\sqrt{6n^3}}$$

Utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti e prendiamo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies \frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (per $n \to +\infty$) quindi la serie data si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(1-\cos\frac{1}{n^3})$$

$$a_n = n^3(1-\cos\frac{1}{n^3}) = \frac{1-\cos\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$

prendiamo $b_n = \frac{1}{n^3}$ e utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti. Allora, cerchiamo di ricondurci al limite notevole $\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1-\cos\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}} \to \frac{1}{2}$$

- Stabilire, per $x \geq 0$, il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x^n(n-1)!}{(n-1)!nx^nx^{-1}} = \frac{x}{n} \to 0 \quad \forall x > 0 \implies \text{ la serie converge } \forall x > 0$$

- Stabilire, per $x > 0$ il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(\frac{n+1}{2n-1})^{2n}$$

utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n}x\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \to \frac{x}{4} \ (n \to +\infty)$$

Quindi se $0 < x < 4$, allora la serie converge. Se $x > 4$, allora la serie diverge a $+\infty$.
Se $x = 4$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n} = 1^\infty = \lim_{n\to+\infty}\left[(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right]^{\varepsilon_n \cdot 2n} = \cdots = e^3$$

$a_n \not\to 0$ e poichè è una serie a termini positivi $\implies$ diverge a $+\infty$.

- Stabilire per quali valori di α la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot (\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}}-1)$$

Utilizziamo lo sviluppo (Taylor):

$$\sin\varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

Inoltre:

$$\sqrt{1+\varepsilon_n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

$$\implies \sin\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\implies a_n = n^\alpha(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n^2}} - 1) = n^\alpha \left(\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$

a_n si comporta come $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$ converge $\iff 2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$. Per il criterio del confronto mediante i limiti, la serie data converge $\iff \alpha < 1$.

4.9 Serie alternate

Consideriamo serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad \text{con } a_n > 0$$

Vale il seguente criterio:

4.10 Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)

Sia a_n una sucessione tale che:

- $a_n \geq 0$
- infinitesima ($a_n \to 0$)
- decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$)$\forall n$

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ a_n \text{ converge}$$

4.10.1 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

4.10.2 Esercizio del compito 20 07 21

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^3+5}$$

La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \to 0$
- a_n decrescente, infatti $\frac{1}{n^3+5}$ è decrescente e la funzione $g(x) = \sin x$ è crescente per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

4.11 Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se risulta convergente la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. In generale, una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente.
Ad esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è la serie armonica che diverge.

4.12 Teorema

Una serie assolutamente convergenete, è convergente.

4.12.1 Esercizio del compito (predcedente)

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3+5}$ è anche assolutamente convergente. Infatti:

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n^3+5}\right) \cong \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

4.12.2 Esercizi di compito a fine pdf (da fare)

5 Equazioni differenziali

Sia

$$y'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

dove $g(x)$ è una funzione di una variabile reale, continua in un intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$.
Per il **teorema fondamentale del calcolo integrale** sappiamo trovare una **primitiva** $G(x)$ di $g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, data da:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

dove x_0 è un numero reale fissato in $[a, b]$.
Quindi possiamo rappresentare ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a, b] \quad (\star)$$

Integrando entrambi i membri di $(\star)$ tra x_0 e x otteniamo:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

e rappresentiamo la soluzione nella forma:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \quad x \in [a, b]$$

Questo è un esempio molto particolare di equazione differenziale, si dice che $y(x)$ è soluzione del **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in quanto $y(x)$ è soluzione ed inoltre soddisfa la **condizione iniziale** nel punto $x = x_0$:

$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} g(t)\, dt = y_0$$

5.1 Osservazione

L'equazione differenziale considerata si dice del **primo ordine**, poichè l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

5.2 Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine

Sia

$$y'(x) = \lambda y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove λ è un parametro reale fissato.
Dobbiamo trovare una soluzione di questa equazione differenziale, cioè una funzione $y = y(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, tale che

$$y'(x) = \lambda y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una soluzione è data da:

$$y(x) = ce^{\lambda x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove c è una costante arbitrariamente fissata in $\mathbb{R}$.
Si verifica subito che è soluzione, infatti derivando si ottiene:

$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

5.2.1 Domanda

Tutte le possibile soluzoni sono della forma $y(x) = ce^{\lambda x}$? Sì, ma non lo dimostriamo.