Analisi I

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Partizioni

Quindi per ogni partizione P, poniamo

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un minimo)
e poniamo

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un massimo)

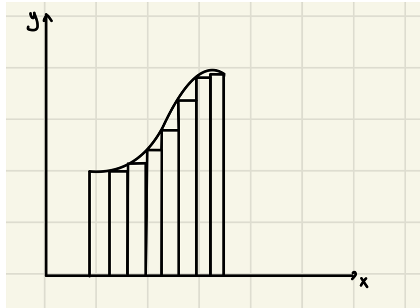


Figure 1: Inf

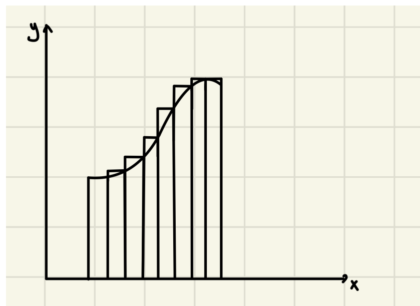
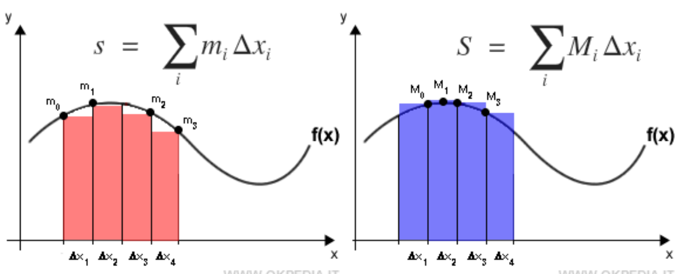


Figure 2: Sup

Ad esempio:



In entrambe le figure sono rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Sono aree per difetto e per eccesso della regione che voglio stimare.
Definisco le SOMME INTEGRALI INFERIORI: Somma delle aree dei rettangoli inscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

e le SOMME INTEGRALI SUPERIORI: Somma delle aree dei rettangoli circoscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

1.1 Osservazione

Se $f(x)$ è positiva, queste somme integrali sono la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (sono definite a prescindere dal segno)

Si dimostra che:

$$S(P) \leq S(P)$$

e indicando con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori (P) al variare delle partizioni P dell'intervallo $[a, b]$ e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\} \quad B = \{S(P)\}$$

si dimostra che A e B sono insiemi SEPARATI, cioè $A \leq B$:

$$a \leq b \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall b \in B$$

$\Longrightarrow$ Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

$$a \leq c \leq b$$

In generale questo elemento non è unico, e vale la seguente:

2 Integrale definito

Se l'elemento di separazione tra A e B è unico, allora si dice che f(x) è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in $[a, b]$ e l'elemento si chiama con:

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si chiama INTEGRALE DEFINITO di f in $[a, b]$. Quindi posto:

$$S(f) = sup\{s(P) : P \;\; partizione \;\; di \;\; [a, b]\}$$

$$S(f) = inf\{S(P) : P \;\; partizione \;\; di \;\; [a, b]\}$$

se $s(f) = S(P) \to$ allora f(x) è integrabile secondo Riemann.

2.1 Funzione non integrabile secondo Riemann

Funzione di Dirichlet:

$$f(x)\colon \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

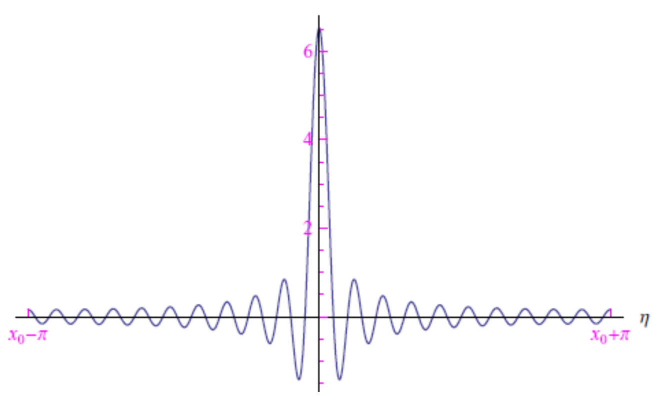


Figure 3: Funzione di Dirichlet

In ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ cadono sia punti razionali che irrazionali:

$$m_k = inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

Allora: (somma integrali inferiori)

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$
\begin{aligned}
S(P) &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_n - x_0 = b - a
\end{aligned}
$$

$\rightarrow S(P) = 0 \; \forall \; P \wedge S(P) = b - a \; \forall P$
Non è integrabile secondo Riemann. (lo sarà secondo LEBESGUE)

2.2 Proprietà

2.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo

Se a,b,c sono tre punti di un intervallo dove la funzione f(x) è integrabile, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

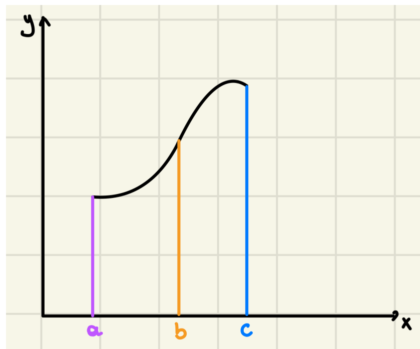


Figure 4: Grafico additività integrale

2.2.2 Linearità dell'integrale

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$, anche $f + g$ è integrabile in $[a, b]$. Dato c numero reale, anche $c \cdot f$ è integrabile in $[a, b]$.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2.2.3 Confronto tra gli integrali

Se f e g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2.2.4 Integrabilità delle funzioni continue

Sia f(x) una funzione continua in $[a, b]$. Allora f(c) è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

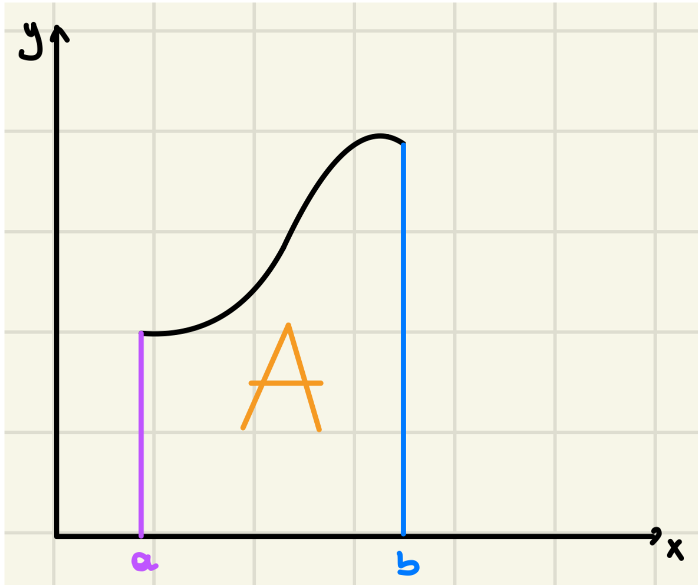
2.3 Teorema della media

Se f(x) è continua in $[a, b]$, esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

2.4 Interpretazione geometrica del teorema della media

f(x) continua in $[a, b]$, ad esempio:



Voglio calcolare l'area del rettangolo A. Il teorema della media afferma che $\exists$ un valore opportuno (cioè un valore non scelto a caso, ma in base alla particolare funzione considerata) f(x_0), tale che:

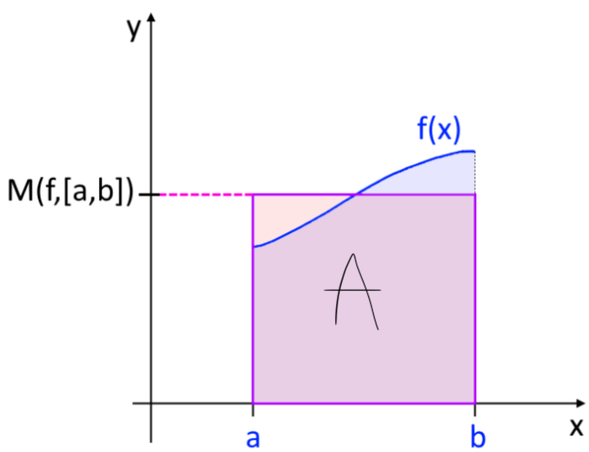


Figure 5: Teorema della media

Per cui area A = area B, dove B è un rettangolo che ha per base l'intervallo $[a, b]$ e per altezza $f(x_0)$.

2.4.1 Dimostrazione del teorema della media

f una funzione continua in $[a, b]$ per ipotesi. Per il teorema di Weierstrass f(x) assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono m e M tali che: (teo esistenza valori intermedi)

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$$

Consideriamo ora una partizione P di $[a, b]$, la più semplice possibile, cioè:

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

Le relative somme integrali inferiori e superiori sono date quindi da:

$$s(P) = m(b - a)$$

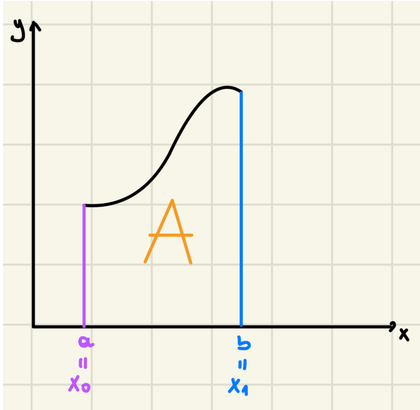


Figure 6: Enter Caption

$$S(P) = M(b-a)$$

// grafico

L'integrale definito è, per definizione, l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori (qualunque sia la partizione P di $[a, b]$). Quindi:

$$s(P) \leq \int_b^a f(x)dx \leq S(P)$$

$$\rightarrow m(b-a) \leq \int_b^a f(x)dx \leq M(b-a)$$

se e solo se

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = y_0$$

y_0 è un numero compreso tra m ed M, minimo e massimo di f(x) $\implies$ per il teorema di esistenza dei valori intermedi, $\exists x_0 \in [a, b]$ $t.c.$

$$f(x_0) = y_0$$

$$\implies f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = y_0$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$$

2.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Sia f(x) una funzione monotona in $[a, b]$. Allora f(x) è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ (indipendente dalle discontinuità)

2.5.1 Osservazioni

In vista di andare a definire gli **INTEGRALI INDEFINITI**, concludiamo con alcune notazioni e definizioni. Abbiamo definito l'integrale definito come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove a e b sono gli estremi di integrazione, la funzione f si dice funzione **integranda**, la variabile x, si dice **variabile di integrazione**.

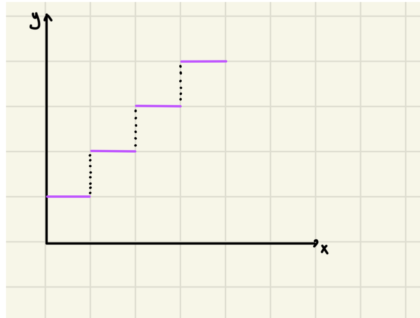


Figure 7: funzione a scalini

Notiamo che il risultato dell'integrazione non dipende da x, ma è un numero reale. Poniamo inoltre per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

e

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3 Integrali Indefiniti

Mettiamo ora in evidenza, ma dei risultati più importati che lega le derivate con gli integrali. Preliminarmente definiamo la FUNZIONE INTEGRALE.

3.1 Funzione integrale

Data f una funzione continua in $[a, b]$, definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f()$$

qui "x" è impegnato.

$$\implies F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

4 Serie Numeriche

Consideriamo una successione a_n di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \quad \text{Successione costante } a_n = 1\ \forall n$$

Ovvio che il risultato è $+\infty$.
Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

Ovvio che il risultato è...?
Potrebbe essere:

$$\mathbf{(1\text{-}1)} + \mathbf{(1\text{-}1)} + (1 - 1) + \cdots + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

oppure:

$$\mathbf{1} + \mathbf{(\text{-}1\text{+}1)} + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.
Allora come si procede?
Si introduce la somma S_n dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

4.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

4.1.1 Esempio 1

$a_k = 1 \ \forall k$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \ldots, S_n = n$$

$\implies S_n \to \infty$

4.1.2 Esempio 2

$a_k = (-1)^{k+1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \ldots$$

S_n oscilla fra 0 e 1 quindi: $\implies \lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste!.

4.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

Notazione: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Somma o Serie per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k. Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per $n \to \infty$ di S_n è $\pm\infty$, la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per $n \to \infty$ di S_n, si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamtento della seria si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una seria è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

4.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \ldots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero. Questo è un motivo èer escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

4.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la successione a_n tende a zero, per $n \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

4.3.1 Dimostrazione

Sia S_n la successione delle somme parziali e sia $S \in \mathbb{R}$, la somma ($\implies \lim_{n\to\infty} S_= S$) della serie. Abbiamo che:

$$(\star)\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione S_n il termine a_{n+1}, ottengo la successione S_{n+1}. (Per definizione di successione di somme parziali)
Allora da $(\star)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$
$$\implies a_n \to 0$$

Osservazione: E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.
Vediamo due esempi di serie modello:

4.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione** x (argomento elevato alla k).
Calcoliamo la somma parziale S_n:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e $\lim_{n\to\infty} S_n =?$.
Formula Risolutiva: $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

4.4.1 Osservazione

La formual vale $\forall x \neq 1$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione x):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1\ (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$