1 Equazioni differenziali

Sia
$$y'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$
dove $g(x)$ è una funzione di una variabile reale, continua in un intervallo $[a,b] \in \mathbb{R}$.
Per il **teorema fondamentale del calcolo integrale** sappiamo trovare una **primitiva** $G(x)$ di $g(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, data da:
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$
dove x_0 è un numero reale fissato in $[a,b]$.
Quindi possiamo rappresentare ogni soluzione dell'equazione differenziale
$$y'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b] \quad (\star)$$
Integrando entrambi i membri di $(\star)$ tra x_0 e x otteniamo:
$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$
e rappresentiamo la soluzione nella forma:
$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad x \in [a,b]$$
Questo è un esempio molto particolare di equazione differenziale, si dice che $y(x)$ è soluzione del **problema di Cauchy**:
$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
in quanto $y(x)$ è soluzione ed inoltre soddisfa la **condizione iniziale** nel punto $x = x_0$:
$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} g(t)\,dt = y_0$$

1.1 Osservazione

L'equazione differenziale considerata si dice del **primo ordine**, poichè l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

1.2 Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine

Sia
$$y'(x) = \lambda y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
dove λ è un parametro reale fissato.
Dobbiamo trovare una soluzione di questa equazione differenziale, cioè una funzione $y = y(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, tale che
$$y'(x) = \lambda y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
Una soluzione è data da:
$$y(x) = ce^{\lambda x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
dove c è una costante arbitrariamente fissata in $\mathbb{R}$.
Si verifica subito che è soluzione, infatti derivando si ottiene:
$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

1.2.1 Domanda

Tutte le possibile soluzoni sono della forma $y(x) = ce^{\lambda x}$? Sì, ma non lo dimostriamo.

1.3 Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico

$$y''(x) + \omega^2 y = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove $\omega \neq 0$ è un parametro reale fissato.
Una famiglia di soluzioni è data da:

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti in $\mathbb{R}$.
Verifica:

$$y'(x) = -c_1 \omega \sin \omega x + c_2 \omega \cos \omega x$$
$$y''(x) = -c_1 \omega^2 \cos \omega x - c_2 \omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) = -\omega^2 y(x)$$
$$\implies y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico sono nella forma $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$? Sì, ma non lo dimostriamo.