

# Analisi I

Andrea Bellu

2023/2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Assiomi dei numeri reali</b>	<b>5</b>
1.1	Assiomi relativi alle operazioni . . . . .	5
1.2	Assiomi relativi all'ordinamento . . . . .	5
1.2.1	Assioma di completezza . . . . .	5
1.3	Denso . . . . .	6
1.3.1	$\sqrt{2}$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Complementi ai numeri reali</b>	<b>6</b>
2.1	Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore . . . . .	6
2.1.1	Il massimo e il minimo sono unici . . . . .	6
2.1.2	Osservazione . . . . .	7
2.2	Maggiorante e Minorante . . . . .	7
2.3	Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore . . . . .	7
2.3.1	Estremo superiore . . . . .	7
2.3.2	Estremo inferiore . . . . .	8
2.3.3	Osservazione . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Successioni e Limiti</b>	<b>8</b>
3.1	Limiti . . . . .	9
3.2	Proposizione . . . . .	9
3.3	Successioni Limitate . . . . .	10
3.4	Teorema . . . . .	10
3.5	Operazioni con i limiti . . . . .	10
3.6	Forme infeterminate o di indecisione . . . . .	11
3.7	Teoremi di confronto . . . . .	11
3.7.1	Teorema della permanenza del segno . . . . .	11
3.7.2	Teorema dei carabinieri . . . . .	11
3.7.3	Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima . . . . .	12
3.8	Alcuni limiti notevoli . . . . .	12
3.9	Limiti relativi alle funzioni trigonometriche . . . . .	12
3.10	Successione notevole importante . . . . .	12
3.11	Successioni Monotone . . . . .	13
3.12	Teorema sulle successioni monotone . . . . .	13
3.13	Limiti Notevoli . . . . .	13
3.13.1	Infiniti di ordine crescente . . . . .	14
3.14	Criterio del rapporto per le successioni . . . . .	14

3.15	Successioni estratte . . . . .	14
3.16	Teorema di Bolzano-Weierstrass . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Funzioni</b>	<b>14</b>
4.1	Funzione inversa . . . . .	15
4.2	Funzione monotona . . . . .	15
4.3	Criterio di invertibilità . . . . .	15
4.4	Funzione lineare . . . . .	15
4.5	Funzione potenza . . . . .	16
4.6	Funzione esponenziale . . . . .	16
4.7	Funzione logaritmo . . . . .	16
4.8	Funzione valore assoluto . . . . .	17
4.9	Funzioni trigonometriche . . . . .	17
4.10	Esempio, Introduzione limiti . . . . .	18
4.11	Definizione di limite . . . . .	20
4.12	Teorema del legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni . . . . .	20
4.13	Operazioni con i limiti di funzioni . . . . .	20
4.14	Limiti Notevoli . . . . .	20
4.15	Limiti di funzioni composte . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Funzioni continue</b>	<b>21</b>
5.1	Punti di discontinuità . . . . .	21
5.1.1	Discontinuità eliminabile . . . . .	21
5.1.2	Discontinuità di prima specie . . . . .	22
5.1.3	Discontinuità di seconda specie . . . . .	22
5.2	Teoremi sulle funzioni continue . . . . .	22
5.2.1	Teorema della permanenza del segno . . . . .	22
5.2.2	Teorema dell'esistenza degli zeri . . . . .	22
5.2.3	Teorema dell'esistenza dei valori intermedi . . . . .	22
5.2.4	Teorema di Weierstrass . . . . .	23
5.2.5	Teorema di esistenza dei valori intermedi (formulazione II) . . . . .	23
5.2.6	Criterio di invertibilità . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Derivate</b>	<b>24</b>
6.1	Definizione di derivata . . . . .	24
6.2	Derivabilità e continuità . . . . .	24
6.3	Derivate di ordine superiore . . . . .	24
6.4	Operazioni con le derivate . . . . .	25
6.4.1	Dimostrazione regola del prodotto . . . . .	25
6.5	Derivazione delle funzioni composte . . . . .	25
6.6	Teorema di derivazione delle funzioni composte . . . . .	25
6.7	Teorema di derivazione delle funzioni inverse . . . . .	25
6.8	Principali forme di derivazione . . . . .	26
6.9	Significato geometrico della derivata: retta tangente . . . . .	26

<b>7</b>	<b>Applicazioni alle derivate</b>	<b>27</b>
7.1	Studio di funzioni . . . . .	27
7.2	Teorema di Fermat . . . . .	28
7.3	Teorema di Rolle . . . . .	28
7.4	Interpretazione geometrica . . . . .	29
7.5	Teorema di Lagrange . . . . .	29
7.6	Conseguenze del teorema di Lagrange . . . . .	30
7.6.1	Criterio di monotonia . . . . .	30
7.6.2	Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo . . . . .	30
7.7	Funzioni concave e convesse . . . . .	30
7.7.1	Criterio di convessità . . . . .	31
7.8	Criterio per determinare se un punto è di massimo o minimo relativo per una funzione derivabile due volte . . . . .	31
7.9	Metodo di Newton per il calcolo delle radici di un'equazione . . . . .	31
7.10	Metodo di Newton per il calcolo numerico approssimato degli zeri di una funzione . . . . .	31
7.11	Applicazione del metodo di Newton . . . . .	32
7.11.1	Step 1 . . . . .	32
7.11.2	Step 2 . . . . .	32
7.11.3	Step n . . . . .	32
7.12	Teorema . . . . .	32
7.13	Teorema di l'Hôpital . . . . .	33
7.14	Studio del grafico di una funzione . . . . .	33
7.14.1	Asintoti Verticali . . . . .	33
7.14.2	Asintoti Orizzontali . . . . .	34
7.14.3	Asintoti Obliqui . . . . .	34
<b>8</b>	<b>Partizioni</b>	<b>34</b>
8.1	Osservazione . . . . .	35
<b>9</b>	<b>Integrale definito</b>	<b>36</b>
9.1	Funzione non integrabile secondo Riemann . . . . .	36
9.2	Proprietà . . . . .	38
9.2.1	Additività integrale rispetto all'intervallo . . . . .	38
9.2.2	Linearità dell'integrale . . . . .	38
9.2.3	Confronto tra gli integrali . . . . .	38
9.2.4	Integrabilità delle funzioni continue . . . . .	38
9.3	Teorema della media . . . . .	38
9.4	Interpretazione geometrica del teorema della media . . . . .	39
9.4.1	Dimostrazione del teorema della media . . . . .	39
9.5	Integrabilità delle funzioni monotone . . . . .	40
9.5.1	Osservazioni . . . . .	41
<b>10</b>	<b>Integrali Indefiniti</b>	<b>41</b>
10.1	Funzione integrale . . . . .	41
<b>11</b>	<b>Serie Numeriche</b>	<b>41</b>
11.1	Somma parziale . . . . .	42
11.1.1	Esempio 1 . . . . .	42
11.1.2	Esempio 2 . . . . .	42

11.2	Definizione di Serie Numerica Astratta . . . . .	43
11.2.1	Osservazione . . . . .	43
11.3	Condizione necessaria di convergenza di una serie . . . . .	43
11.3.1	Dimostrazione . . . . .	43
11.4	Serie geometrica . . . . .	44
11.4.1	Osservazione . . . . .	44
11.4.2	Esercizio del compito (21/06/21) . . . . .	44
11.5	La serie armonica . . . . .	45
11.6	La serie armonica generalizzata (con esponente) . . . . .	45
11.7	Serie a termini non negativi . . . . .	45
11.7.1	Teorema sulle serie a termini non negativi . . . . .	45
11.8	Criteri di convergenza per serie a termini non negativi . . . . .	45
11.8.1	Criterio del rapporto: . . . . .	46
11.8.2	Criterio della radice: . . . . .	46
11.8.3	Criterio del confronto mediante i limiti . . . . .	46
11.8.4	Esempi . . . . .	47
11.9	Serie alternate . . . . .	48
11.10	Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz) . . . . .	48
11.10.1	Esempi . . . . .	49
11.10.2	Esercizio del compito 20 07 21 . . . . .	49
11.11	Convergenza Assoluta . . . . .	49
11.12	Teorema . . . . .	49
11.12.1	Esercizio del compito (precedente) . . . . .	49
11.12.2	Esercizi di compito a fine pdf (da fare) . . . . .	49
<b>12</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>49</b>
12.1	Osservazione . . . . .	50
12.2	Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine . . . . .	50
12.2.1	Domanda . . . . .	51
12.3	Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico . . . . .	51
12.4	Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale . . . . .	51
12.5	. . . . .	51
12.6	Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare . . . . .	51
12.7	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine . . . . .	51
12.8	Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti . . . . .	52
12.9	Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti . . . . .	52
12.9.1	Esempio . . . . .	52
12.9.2	Esempio 2 . . . . .	53
12.10	Esempio 3 . . . . .	53
12.11	Equazioni differenziali lineari non omogenee . . . . .	53
12.11.1	Esempio . . . . .	54
12.11.2	Esempio 2 . . . . .	54
12.11.3	Osservazione . . . . .	55
12.11.4	Esempio . . . . .	55

# 1 Assiomi dei numeri reali

- Assiomi relativi alle operazioni
- Assiomi relativi all'ordinamento
- Assioma di completezza

## 1.1 Assiomi relativi alle operazioni

Sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione tra coppie di numeri reali e valgono le proprietà:

- Proprietà associativa
- Proprietà commutativa
- Proprietà distributiva
- Esistenza degli elementi neutri
- Esistenza degli opposti
- Esistenza degli inversi

## 1.2 Assiomi relativi all'ordinamento

E' definita la relazione di Minore o Uguale  $\leq$ .

- Dicotomia
- Proprietà Assimetrica
- Assioma di completezza

### 1.2.1 Assioma di completezza

$$\forall a \in A, \forall b \in A, a \leq b \implies \exists c \in A : a \leq c \leq b$$

Esempi:

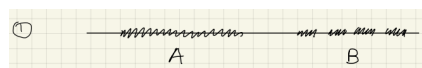


Figure 1: Esempio 1

Esistono infiniti c.

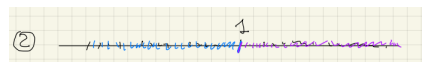


Figure 2: Esempio 2

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \implies c = 1$$

**Osservazione:** Non tutti gli insiemi hanno il più grande o il più piccolo elemento. Ad esempio:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

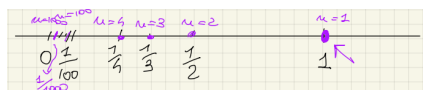


Figure 3: Esempio 3

Non ha un elemento più piccolo. (Invece c'è il più grande che è 1).

### 1.3 Denso

Si dimostra che  $\mathbb{Q}$  è denso sulla retta reale (nel senso che fra due numeri razionali è sempre possibile trovare un terzo, anzi infiniti).

$$a = \frac{m_1}{n_1} \quad b = \frac{m_2}{n_2}$$

faccio la media  $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}{2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{2 n_1 n_2} \implies \in \mathbb{Q}$

#### 1.3.1 $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$  non si può rappresentare come numero razionale.

**Dimostrazione:** Ragioniamo per assurdo, supponiamo che  $\sqrt{2}$  sia un numero razionale, cioè  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  posso supporre che  $m, n$  siano primi tra loro e che al più uno tra loro sia pari. Allora  $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2 (*)$   
 $\implies m^2$  deve essere pari e quindi  $m$  è pari.

Posso esprimere  $m$  nella forma:  $m = 2k$  con  $k$  intero.

Ricavo che  $\implies 2n^2 = m^2 = 4k^2$  semplifico per 2 e ottengo  $n^2 = 2k^2$

Ripeto il ragionamento precedente  $\implies n^2$  pari e quindi anche  $n$  pari. Ma allora sia  $m$  che  $n$  risultano pari, ASSURDO! Avevo supposto che fossero primi ed (al più) uno dei due pari. ♣

Per capire meglio guarda esempi della Francy nella prima lezione.

## 2 Complementi ai numeri reali

### 2.1 Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore

$$\text{Def: } M \text{ è il massimo di } A \begin{cases} M \in A & (1) \\ M \geq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il massimo di un insieme di numeri reali  $A$  quindi, se esiste, è un numero  $M$  dell'insieme  $A$ , che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme  $A$ .

$$\text{Def: } m \text{ è il minimo di } A \begin{cases} m \in A & (1) \\ m \leq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il minimo di  $A$  analogamente, se esiste, è un numero  $m$  di  $A$ , che è minore o uguale ad ogni altro elemento di  $A$ .

#### 2.1.1 Il massimo e il minimo sono unici

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.

**Dimostrazione:** Siano  $M_1$  e  $M_2$  due massimi di  $A$ .

Ma allora per definizione di massimo,

$$(1) M_1 \geq a \quad (2) M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Sempre per definizione,  $M_1, M_2$  sono elementi di  $A$ .

Quindi da (1) se  $a = M_2$ , ottengo  $M_1 \geq M_2$

Da (2) se  $a = M_1$ , ottengo  $M_2 \geq M_1$

Segue che  $M_1 = M_2$  ♣.

### 2.1.2 Osservazione

Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , il più grande elemento di  $A$  è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.
- $B = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , il più piccolo elemento di  $B$  è 0, che è il minimo, il più grande non c'è.

## 2.2 Maggiorante e Minorante

$L$  si dice **maggiorante** per un insieme  $A$  se

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$

$l$  si dice **minorante** per un insieme  $A$  se

$$l \leq a \quad \forall a \in A$$

**Non** sempre un insieme  $A$  ammette maggioranti e minoranti.

L'insieme  $A$  si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.

L'insieme  $A$  si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.

L'insieme  $A$  si dice **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente, in simboli:

$$l \leq a \leq L \quad \forall a \in A \implies \exists M : |a| \leq M \quad \forall a \in A$$

## 2.3 Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di  $A$ .

$$A = \{a \in A\} \quad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

Applichiamo l'assioma di completezza di due insiemi  $A$  e  $B$ , quindi esiste  $c$  numero reale tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Dato che  $c \geq a \quad \forall a \in A$ ,  $c$  è un maggiorante di  $A$ , cioè  $c \in B$ .

Ma  $c$  è anche tale che  $c \leq b$  (minore o uguale a tutti gli elementi di  $B$ ).  $\implies c$  è un minimo. ♣

Allora possiamo dare la seguente definizione:

### 2.3.1 Estremo superiore

**Def:** Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che  $M \in \mathbb{R}$  è l'**estremo superiore** di  $A$  se  $M$  è il minimo dei maggioranti di  $A$ . In simboli:

$$M \text{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} M \geq a & \forall a \in A \quad \textbf{(1)} \text{ (M è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : M - \varepsilon < a \quad \textbf{(2)} \text{ (M è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

Analogamente:

### 2.3.2 Estremo inferiore

**Def:** Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che  $m$  è l'**estremo inferiore** di  $A$  se  $m$  è il massimo dei minoranti di  $A$ . In simboli:

$$m \text{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \quad (1) \text{ (m è minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists a \in A : m + \varepsilon > a \quad (2) \text{ (m è il massimo dei minoranti)} \end{cases}$$

$\implies$  Quindi se un insieme è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale. Altrimenti:

- L'estremo superiore è  $+\infty$  se  $A$  non è limitato superiormente
- L'estremo inferiore è  $-\infty$  se  $A$  non è limitato inferiormente

$$\begin{cases} \sup A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} & \exists a \in A : M < a \\ \inf A = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} & \exists a \in A : m > a \end{cases}$$

Ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

### 2.3.3 Osservazione

Assioma di completezza (punto di partenza)  $\implies$  Esistenza dell'estremo superiore.

## 3 Successioni e Limiti

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale  $n$  fa corrispondere uno ed un solo numero reale  $a_n$ . Una successione è una funzione di  $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$ .

- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- $1 \rightarrow a_1$
- $2 \rightarrow a_2$
- $3 \rightarrow a_3$
- $n \rightarrow a_n$

Simbolo:  $(a_n)$  oppure più semplicemente  $a_n$

A noi interessa il comportamento della successione per  $n$  grande, più precisamente il **limite** della successione  $a_n$ , cioè un numero reale ( $a \in \mathbb{R}$ ) che sia "vicino" ai termini della successione che hanno l'indice  $n$  "grande".

Consideriamo  $a_n$  con  $a$  limite della successione ( $a \in \mathbb{R}$ ).  $a$  è il limite della successione se comunque si scelga un intervallo

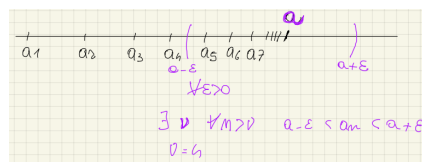


Figure 4: Intorno

di numeri intorno ad  $a$ , diciamo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , allora esiste un indice  $\nu$ , tale che  $\forall n > \nu$   $a_n$  sta nell'intervallo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , cioè  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ .



### 3.1 Limiti

Un numero reale  $a$  è il limite della successione  $a_n$  (si dice che  $a_n$  tende o converge ad  $a$ ) e si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} a$$

se, qualunque sia  $\varepsilon > 0$ , esiste un numero  $\nu$  tale che:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

**Osservazione:**  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  si può scrivere  $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ .

### 3.2 Proposizione

Se esiste il limite  $a \in \mathbb{R}$  della successione  $a_n$ , allora è unico.

**Dimostrazione:** Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che:

$$a_n \rightarrow a \quad \text{e} \quad a_n \rightarrow b \quad \text{con} \quad a \neq b$$

Allora  $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1$$

$$\exists \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Prendo  $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0$  e ponendo  $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ , (1) e (2) valgono contemporaneamente. Allora:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

Ma allora  $|a - b| < |a - b|$ , ASSURDO! ♣

Una successione  $a_n$  ha limite  $+\infty$  (si dice anche che tende o diverge a  $+\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

se, qualunque sia  $M > 0 \in \mathbb{R}$ , esiste un numero  $\nu$  tale che:

$$a_n > M \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n > \nu$$

Analogamente si definisce il limite  $-\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M < 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n < M \quad \forall n > \nu$$

**Osservazione:**

- Le successioni che ammettono limite finito si dicono **convergenti**
- Le successioni che ammettono limite infinito si dicono **divergenti**

- Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**
- Una successione che tende a zero si dice anche **infinitesima**
- Una successione divergente si dice anche **infinita**

### 3.3 Successioni Limitate

$a_n$  si dice **limitata** se  $\exists M \in \mathbb{R}$  :

$$|a_n| \leq M$$

**Osservazione:** In particolare  $a_n = (-1)^n$  è un esempio di successione limitata che non ammette limite. Viceversa, ogni successione che ammette limite finito, è limitata. Vale il seguente:

### 3.4 Teorema

Ogni successione convergente è limitata.

**Dimostrazione:** Sia  $a_n$  una successione convergente e supponiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

Allora  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Posso prendere  $\varepsilon = 1 \implies |a_n - a| < 1$ , valuto  $|a_n|$ :

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n > \nu$$

posso prendere  $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_\nu|, 1 + |a|\}$  ♣.

### 3.5 Operazioni con i limiti

Supponiamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Allora:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$  se  $b \neq 0$

Si dimostra anche che:

- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \rightarrow a (\neq 0) \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n \cdot b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty$  entrambe con lo stesso segno  $\implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$  e  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow \pm a \quad b_n \rightarrow \pm 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

### 3.6 Forme infeterminate o di indecisione

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $\infty^0$
- $1^{\pm\infty}$
- $0^0$

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che non esiste, ma che occorre togliere, se possibile, l'indeterminazione, mediante semplificazioni o trasformazioni.

### 3.7 Teoremi di confronto

#### 3.7.1 Teorema della permanenza del segno

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$ , esiste un numero  $\nu$  tale che  $a_n > 0 \quad \forall n > \nu$ .

**Esempio:**  $a_n = \frac{n-12}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 > 0$ , ma i primi termini della successione sono negativi.  $a_n = 0$  per  $n = 12$ , quindi se prendo  $\nu = 12$ , e  $n > \nu$  allora  $a_n > 0$ .

**Dimostrazione:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$   
 $a > 0$ , quindi posso prendere  $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$  e:

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0 \quad \forall n > \nu \quad \clubsuit$$

**Corollario (viceversa)**

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  e  $a_n \geq 0$  (vale anche  $a_n > 0$ ), allora  $a \geq 0$ .

#### 3.7.2 Teorema dei carabinieri

Si consideriamo tre successioni  $a_n, b_n, c_n$  con la proprietà che:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Se risulta che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ , allora anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$  (per ipotesi  $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow a$ ).

**Dimostrazione:**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_2$$

Definisco  $\nu_3 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$  e per ipotesi  $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \implies |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_3 \implies c_n \rightarrow a \quad \clubsuit$

**Osservazione:** Valgono per i limiti infiniti:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \implies b_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow -\infty \implies a_n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Dal teorema dei Carabinieri, segue il seguente risultato molto importante per le applicazioni e gli esercizi:

### 3.7.3 Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se  $a_n$  è limitata e  $b_n$  è infinitesima, allora  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$  **Dimostrazione:** Considero  $|a_n \cdot b_n| \Rightarrow$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$$

Per la proprietà del valore assoluto  $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

$$-M|b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M|b_n| \quad \text{per ipotesi } b_n \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Per il Teorema dei Carabinieri  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$  ♣

### 3.8 Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a = 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

### 3.9 Limiti relativi alle funzioni trigonometriche

- $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sin a_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \cos a_n \rightarrow 1$

Ad esempio, se  $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$  e  $\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1$ .

- $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (1) \frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1$
- $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \quad \forall n \quad (2) \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\text{Infatti } \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{(1 - \cos a_n)(1 + \cos a_n)}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{1 - \cos^2 a_n}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos a_n} = \frac{1}{2}$$

### 3.10 Successione notevole importante

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1^{+\infty}$$

Confrontiamola con altre successioni  $b_n, c_n$ :

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^n = a^n \rightarrow +\infty \quad \text{con } a > 1$$

Quindi  $a_n$  è una **forma indeterminata**  $1^{+\infty}$ , che da una parte, vuole tendere ad 1, dall'altra a  $+\infty$ , arriverà quindi ad un 'punto di mezzo'. Si definisce  $e$  il **numero di Nepero** tale che:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dove  $e \simeq 2,718281828459\dots$

Si dimostra che la successione  $a_n$  è strettamente crescente e limitata.

### 3.11 Successioni Monotone

- $a_n$  strettamente crescente  $\iff a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n$  strettamente decrescente  $\iff a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n$  crescente  $\iff a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n$  decrescente  $\iff a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione si dice **monotona** se si verifica una delle quattro condizioni.

Una successione si dice **costante** se  $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$  con  $a$  numero reale. Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

### 3.12 Teorema sulle successioni monotone

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito.

**Osservazione:** Naturalmente non è che ogni successione convergente è monotona. Ad esempio  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  è convergente ( $\rightarrow 0$ ), ma non è monotona.

**Dimostrazione:** (1) Sia, ad esempio,  $a_n$  crescente e limitata.

Poniamo  $l = \sup a_n$  (teorema di esistenza dell'estremo superiore: esiste il sup ed è finito perchè  $a_n$  è limitata).

Allora, per le proprietà dell'estremo superiore (data che è il minimo dei maggioranti)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : l - \varepsilon < a_\nu \quad (\star)$$

Ma  $a_n$  è monotona (crescente), quindi  $\forall n > \nu \quad a_\nu \leq a_n$ , da  $(\star)$

$$l - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq l < l + \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \clubsuit$$

(2) Sia ora  $a_n$  crescente e non limitata. Fissiamo  $M > 0$ , allora esiste  $\nu$  tale che  $a_\nu > M$ . Dato che  $a_n$  è crescente  $\forall n > \nu$

$$a_n \geq a_\nu > M$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \clubsuit$$

**Osservazione:** Assioma di completezza  $\implies$  Esistenza dell'estremo superiore  $\implies$  Esistenza del limite delle successioni monotone

**Osservazione:** Si dimostra che  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  è strettamente crescente e limitata. Quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $a_n$ , che è  $e$ .

### 3.13 Limiti Notevoli

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$  con  $x \in \mathbb{R}$

Più in generale:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$  con  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x\varepsilon n)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e^x$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Osservazione:** Abbiamo visto, nell'ambito dei **limiti notevoli**, la successione esponenziale  $a^n$ , con  $a > 1$  e la successione potenza  $n^b$ , con  $b > 0$ .

Entrambe divergono a  $+\infty$ . Spesso tali successioni vengono confrontate con  $\log n$ ,  $n!$  e con  $n^n$ , che pure divergono a  $+\infty$ .

### 3.13.1 Infiniti di ordine crescente

$\log n$ ,  $n^b$ ,  $a^n$ ,  $n!$ ,  $n^n$ , da cui:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

## 3.14 Criterio del rapporto per le successioni

Sia  $a_n$  una successione a termini positivi.

Sia  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a$ , se  $a \in [0, 1)$ , allora la successione  $a_n$  converge a zero.

Se  $a \in (1, +\infty)$ , allora la successione  $a_n$  diverge a  $+\infty$ .

**Osservazione:** Il caso  $a = 1$  non è contemplato nell'enunciato.

## 3.15 Successioni estratte

Considero  $a_n$  successione di numeri reali e sia  $n_k$  una successione strettamente crescente di numeri naturali.

La successione  $a_{n_k}$

$$k \in \mathbb{N} \rightarrow a_{n_k}$$

prende il nome di **successione estratta da**  $a_n$  di indici  $n_k$ .

**Osservazione:** Si dimostra che se  $a_n$  converge ad  $a$ , allora ogni successione estratta  $a_{n_k}$  converge ad  $a$ .

**Osservazione:** Abbiamo dimostrato che ogni successione  $a_n$  convergente è limitata. Il viceversa non è vero, ma vale il seguente notevole risultato:

## 3.16 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia  $a_n$  una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.

# 4 Funzioni

Dati  $A, B$  insieme di numeri reali, una **funzione** da  $A$  in  $B$  è una legge che ad ogni elemento di  $A$  fa corrispondere uno ed un solo elemento di  $B$ .

$$f : A \rightarrow B \quad A \text{ dominio o insieme di definizione} \quad f(A) \text{ codominio}$$

$y = f(x) \iff \text{esiste almeno un } x \in A \text{ tale che } y = f(x) \in B$

Valgono le seguenti:

- $f$  si dice **suriettiva** se  $\forall y \in B$ , esiste almeno un  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ , ovvero  $f(A) = B$
- $f$  si dice **iniettiva** se  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f$  si dice **biunivoca** se è sia suriettiva che iniettiva

#### 4.1 Funzione inversa

$f : A \rightarrow B$  biunivoca. Allora esiste una funzione **inversa**:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

è la funzione che ad ogni  $y \in B$  fa corrispondere l'unico  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ .

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

#### 4.2 Funzione monotona

$f$  si dice **monotona** in un insieme  $A$ , se verifica una delle seguenti condizioni:

$\forall x_1, x_2 \in A$ :

- $f$  strettamente crescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f$  strettamente decrescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f$  decrescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f$  crescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

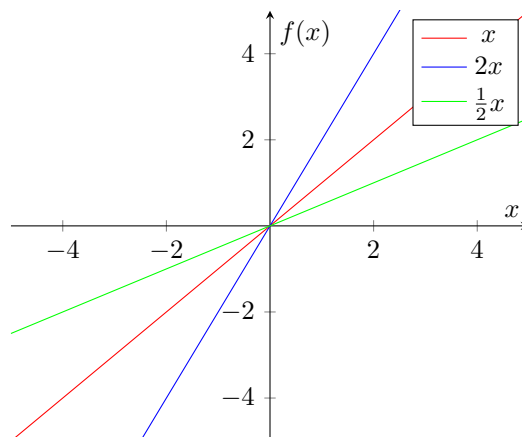
#### 4.3 Criterio di invertibilità

$f$  è strettamente monotona, allora è anche invertibile.

#### 4.4 Funzione lineare

$$y = mx + q$$

- $m$  è il coefficiente angolare
- se  $m = 0$ , risulta  $y = q$  costante



## 4.5 Funzione potenza

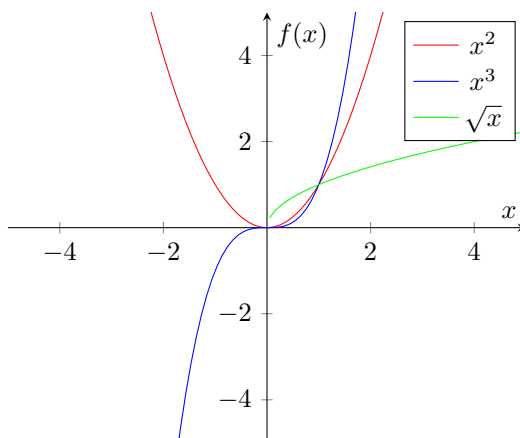
$y = x^n$  con  $n \in \mathbb{R}$

Strettamente crescente per  $x \geq 0$ , cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$$

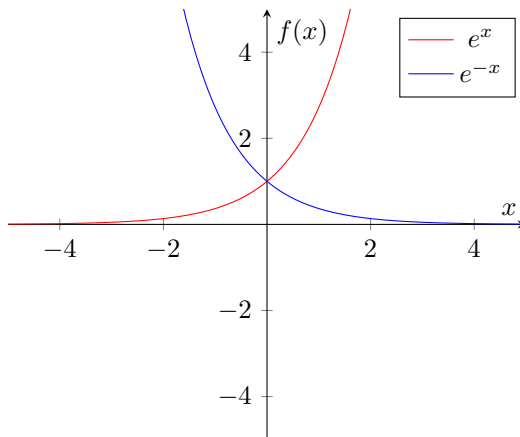
(Ad esempio per  $n = 2$  se  $0 \leq x_1 \leq x_2$  moltiplicando per  $x_1$  e  $x_2$  si ha  $x_1^2 < x_1x_2$  e  $x_1x_2 < x_2^2 \implies x_1^2 < x_2^2$ ) e quindi è invertibile e l'inversa è:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad x \geq 0$$



## 4.6 Funzione esponenziale

$f(x) = a^x$  con  $a$  numero reale positivo, definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$



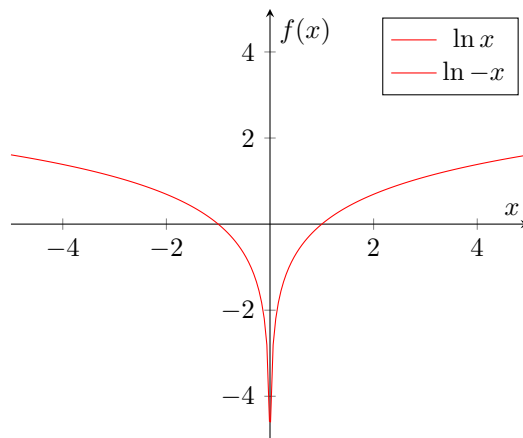
Se  $a \neq 1$ , allora la funzione esponenziale è invertibile, la funzione inversa è:

## 4.7 Funzione logaritmo

$f(x) = \log_a x$ .

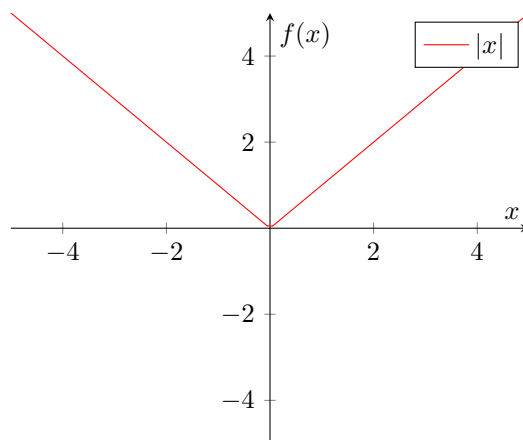
$$y = \log_a x \iff a^y = x$$





#### 4.8 Funzione valore assoluto

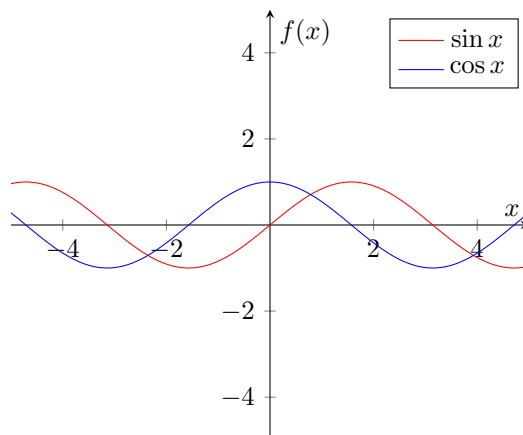
- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2$



#### 4.9 Funzioni trigonometriche

$y = \sin x, \cos x$

- $-1 \leq \sin x \leq 1$  e  $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



E' interessante vedere la combinazione di funzioni elementari.

Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  definita per  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . E' una funzione **pari**, cioè  $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \text{dominio}$ , simmetrica rispetto all'asse  $y$ .

(**Dispari** se  $f(x) = -f(-x)$ , simmetrica rispetto all'origine).

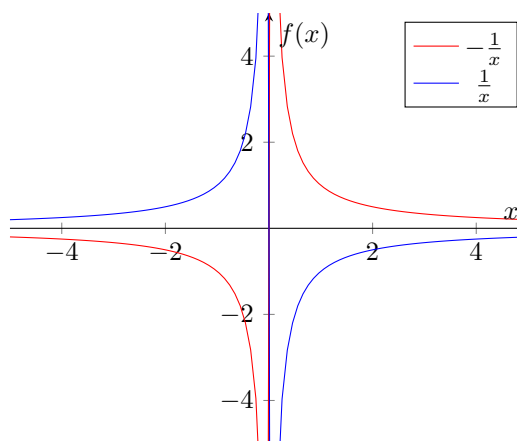
#### 4.10 Esempio, Introduzione limiti

- $y = x, y = \sin x$  sono funzioni Dispari

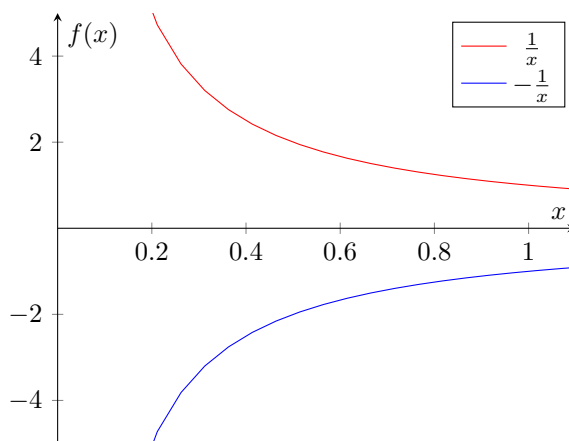
- $y = \cos x$  è una funzione Pari

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  è una funzione pari, la disegniamo per  $x \geq 0$ .

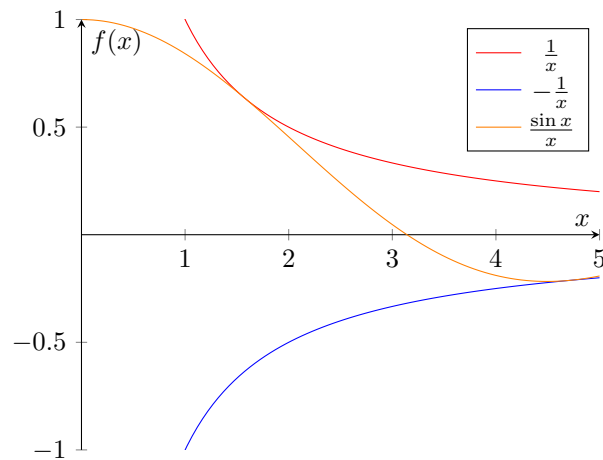
Osserviamo che  $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  e dividendo per  $x$ :  $\implies -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$



e  $y = \frac{\sin x}{x}$  sarà compresa tra i due rami di iperbole per  $x > 0$ :



per  $x > 0, y = \frac{\sin x}{x}$  ha lo stesso segno di  $\sin x$ :



$x_n \rightarrow 0 \quad f(x_n) \rightarrow ?$

Non è definita per  $x = 0$ . Cosa succede per  $x \rightarrow 0$ ?

- Tende a zero?
- Tende a  $+\infty$ ?
- O tende a un valore intermedio?

Una formulazione rigorosa del comportamento di una funzione  $f(x)$ , per  $x$  vicino ad un punto  $x_0$ , in questo caso  $x_0 = 0$ , è quella di considerare una generica successione  $x_n$  che converge ad  $x_0$  ( $x_n$  è "vicino" ad  $x_0$  se  $n$  è grande) e la corrispondente successione  $y_n$  costituita dai valori assunti dalla funzione  $f(x)$  ( $y_n = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

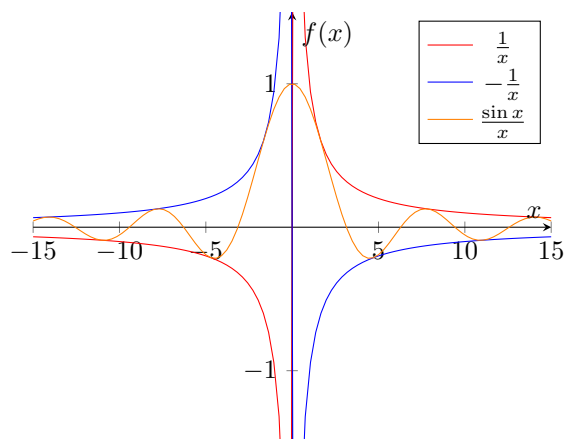
Se  $y_n = f(x_n)$  converge ad un numero  $l$  (che è lo stesso  $\forall x_n \rightarrow x_0$ ), allora si dice che  $f(x)$  ammette limite uguale a  $l$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Tornando all'esempio di  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_n}{x} = ?$$

è il limite notevole per le successioni, che sappiamo valere 1.

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



### 4.11 Definizione di limite

Sia  $A$  un intervallo, o unione finita di intervalli e sia  $x_0 \in A$  (anche all'estremo).

Si dice che  $f(x)$  ha limite uguale ad  $l$  (tende o converge ad  $l$ ) per  $x \rightarrow x_0$  se qualunque sia la successione  $x_n \rightarrow x_0$ , con  $x_n \in A$  e  $x_n \neq x_0 \forall n$  risulta che  $f(x_n) \rightarrow l$ .

Si dimostra che questa definizione è equivalente alla seguente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

### 4.12 Teorema del legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ( $x_0, l \in \mathbb{R}$ ).

- $\forall x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in A \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow l$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Valgono anche le definizioni con i limiti infiniti:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in A \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow +\infty / \forall M > 0 \exists \delta > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall x_n \rightarrow +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : x > k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \rightarrow +\infty \quad x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow +\infty \iff \forall M > 0 \exists k : f(x) > M \quad \forall x \in A : x > k$

**Osservazione:** è utile considerare il **limite destro**  $x \rightarrow x_0^+$  e il **limite sinistro**  $x \rightarrow x_0^-$ , quando ci si avvicina al punto  $x_0$  per valori di  $x \in A$  rispettivamente solo maggiori di  $x_0$ , o solo minori.

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : 0 < x - x_0 < \delta$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A : -\delta < x - x_0 < 0$

### 4.13 Operazioni con i limiti di funzioni

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente, di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle forme indeterminate.

### 4.14 Limiti Notevoli

Valgono i limiti notevoli visti per le successioni:

- $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$   
In particolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{b}{x})^x = e^b \quad \forall b \in \mathbb{R}$   
In generale  $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow e$  per  $f(x) \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

## 4.15 Limiti di funzioni composte

Siano  $g : x \rightarrow y$  e  $f : y \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni, tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \text{ e } \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$$

ed esiste  $\delta > 0$  tale che risulti  $g(x) \neq y_0 \forall x \neq x_0$  dell'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , allora:

$$f \circ g : x \rightarrow \mathbb{R} \quad [f \circ g](x) = f(g(x))$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l$$

segue che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$$

**Esempio:** Applichiamo il precedente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Si può scrivere anche } 1 + y = t \implies \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t - 1} = 1$$

## 5 Funzioni continue

Una funzione  $f$  è continua in un punto  $x_0$  se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(cioè se il valore limite, per  $x$  che tende a  $x_0$ , è uguale al valore della funzione in  $x_0$ ).

Una funzione è continua in un intervallo  $[a, b]$  se è continua in ogni punto  $x_0 \in [a, b]$ . (se  $x_0 = a$  si considera il limite destro, se  $x_0 = b$  si considera il limite sinistro).

Abbiamo visto, ad esempio, che  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$ ;  $\implies$  le funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$  sono continue per  $x = 0$  ed anche per ogni altro  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Si dimostra anche che tutte le funzioni elementari sono continue. Potrei avere una discontinuità quando ho un denominatore come  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  che non è definita in  $x = 0$ .

### 5.1 Punti di discontinuità

I punti di discontinuità sono i punti in cui la funzione non è continua.

#### 5.1.1 Discontinuità eliminabile

$x_0$  è il punto di **discontinuità eliminabile** se esiste il limite di  $f$  in  $x_0$  e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

### 5.1.2 Discontinuità di prima specie

$f(x)$  presenta in  $x_0$  una **discontinuità di prima specie** se esistono finiti i limiti destro e sinistro di  $f$  in  $x_0$  e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

### 5.1.3 Discontinuità di seconda specie

$f(x)$  presenta in  $x_0$  una **discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti non esiste o è infinito.

## 5.2 Teoremi sulle funzioni continue

### 5.2.1 Teorema della permanenza del segno

Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $x_0$  e sia continua in  $x_0$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ).

Se  $f(x_0) > 0$  allora esiste un numero  $\delta > 0$  con la proprietà che  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

**Dimostrazione:** la funzione è continua in  $x_0$ , cioè  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  quindi per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

scelgo  $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ , quindi:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \implies -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

**Corollario:** Se  $f(x)$  è continua in  $x_0$  e  $f(x) \geq 0$  o  $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  allora  $f(x_0) \geq 0$ .

### 5.2.2 Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia  $f(x)$  una funzione continua in un intervallo  $[a, b]$ .

Se  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$  allora esiste almeno un punto  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

**Dimostrazione:** troppo lunga guarda pagine 11-25 lez 06.

### 5.2.3 Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo  $[a, b]$  assume tutti valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . **Dimostrazione:** Consideriamo il caso in cui  $f(a) \leq f(b)$ .

Dobbiamo provare che  $\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \exists x_0 \in [a, b]$  tale che  $f(x_0) = y_0$ .

- Se  $y_0 = f(a)$ , possiamo prendere  $x_0 = a$  e analogamente se  $y_0 = f(b)$  possiamo prendere  $x_0 = b$ .
- Se  $y_0 \in (f(a), f(b))$ , consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - y_0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e calcolata in  $x = a$  e  $x = b$

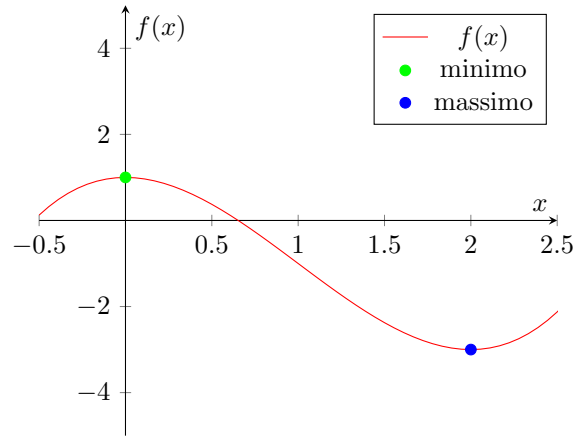
$$g(a) = f(a) - y_0 \quad g(b) = f(b) - y_0 \implies g(a) < 0 \quad g(b) > 0$$

Applicando quindi il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione  $g(x) \implies$

$$\exists x_0 \in (a, b) : g(x_0) = 0 \implies f(x_0) = y_0 \quad \clubsuit$$

### 5.2.4 Teorema di Weierstrass

Sia  $f(x)$  una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  assume minimo e massimo in  $[a, b]$ . Cioè esistono  $x_1, x_2$  in  $[a, b]$  che sono detti rispettivamente punti di minimo e di massimo per  $f(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$ . I corrispondenti valori  $m = f(x_1)$  e  $M = f(x_2)$  sono detti **minimo** e **massimo** di  $f(x)$  in  $[a, b]$ .



**Dimostrazione:** Hp: funzione continua in un intervallo chiuso e limitato.

Poniamo  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  esiste, potrebbe essere  $M < +\infty$  o  $M = +\infty$ .

Verifichiamo ora che  $\exists x_n \in [a, b] : \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M(\star)$ .

- Se  $M = +\infty$ , per le proprietà dell'estremo superiore,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$ . Per il teorema di confronto  $f(x_n) \rightarrow M = +\infty$ .
- Se invece  $M < +\infty$ , sempre per le proprietà dell'estremo superiore,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]$  tale che  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$  e quindi  $f(x_n) \rightarrow M$  per il teorema dei carabinieri.  $(\star) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$
- Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, da  $x_n \subset [a, b]$  (limitate), esiste una estratta  $x_{nk}$  convergente ad un punto  $x_0 \in [a, b]$ .

$$x_{nk} \rightarrow x_0$$

Ma poichè la funzione è continua:

$$f(x_{nk}) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Allora

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{nk}) = f(x_0) \implies M = f(x_0)$$

Quindi abbiamo dimostrato che  $M$  è un massimo perchè:

$$f(x_0) = M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ è un massimo } \clubsuit$$

**Conseguenza:** La funzione è limitata, dal massimo e minimo.

Possiamo ora dare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

### 5.2.5 Teorema di esistenza dei valori intermedi (formulazione II)

Una funzione continua in un intervallo  $[a, b]$  ammette tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo. Tra i risultati sulle funzioni continue, si dimostra come applicazione, anche il seguente:

### 5.2.6 Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo  $[a, b]$  è invertibile in tale intervallo.

## 6 Derivate

Supponiamo di dover percorrere una strada da  $A$  a  $B$  e indichiamo con  $s(t)$  lo spazio percorso in funzione del tempo.

$$\text{Velocità media?} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

**Velocità istantanea?**

$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$  velocità media. Devo fare il limite per  $h \rightarrow 0$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$  occorre calcolare il **limite di un rapporto incrementale**, così chiamato perchè al denominatore c'è l'incremento  $h$  della variabile indipendente e al numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.

$\Rightarrow$  la velocità istantanea è l'interpretazione fisica della derivata.

### 6.1 Definizione di derivata

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $(a, b)$  e sia  $x \in (a, b)$ . Si dice che la funzione  $f$  è derivabile nel punto  $x$ , se esiste **finito** il **limite del rapporto incrementale**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tale limite è la **derivata** di  $f$ .

In simboli:

$$f'(x), Df(x), \frac{df}{dx}, y', Dy$$

- $f$  derivabile in  $(a, b)$ , se è derivabile in ogni punto di  $(a, b)$
- $f$  definita in  $[a, b]$  è derivabile in  $[a, b]$  se è derivabile in ogni punto  $x \in (a, b)$  e se  $f$  ammette derivata destra (per  $h \rightarrow 0^+$ ) in  $x = a$  e derivata sinistra (per  $h \rightarrow 0^-$ ) in  $x = b$  (intesi come limite destro e sinistro).

### 6.2 Derivabilità e continuità

Ogni funzione derivabile in  $x$  è continua in  $x$ .

$$\text{Derivabilità} \implies \text{Continuità}$$

**Dimostrazione:**  $f(x)$  continua in  $x_0$  se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

se  $x_0 = x$  e  $x = x + h$  equivalentemente

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

Quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) + f(x+h) - f(x) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = f(x)$$

Quindi ogni funzione derivabile in  $x$  è continua in  $x$ , il viceversa non è vero.

### 6.3 Derivate di ordine superiore

Se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo  $(a, b)$ , allora la sua derivata  $f'(x)$  è una funzione definita in  $(a, b)$ . Se questa funzione è a sua volta derivabile, diremo che la derivata  $(f')'$  è la derivata seconda.

$$f'' \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \frac{d^2}{dx^2} y'' \quad D^2 f \quad D^2 y$$

**Osservazione:**  $g(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$  costante  $\implies g'(x) = 0$  infatti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



**NB:**  $\frac{0}{h}$  non è una forma indeterminata.

Quindi il limite del rapporto incrementale vale zero. ♣

## 6.4 Operazioni con le derivate

Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili in  $x$ , allora:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

### 6.4.1 Dimostrazione regola del prodotto

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

la funzione  $g$  è derivabile in  $x$  per ipotesi  $\implies$  è anche continua e  $g(x+h) \rightarrow g(x)$  per cui, passando al limite per  $h \rightarrow 0$   
 $\implies \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$  ♣

## 6.5 Derivazione delle funzioni composte

se  $y = f(z)$  funzione di  $z$  e  $z = g(x)$  funzione di  $x$  allora  $y = f(g(x))$  è una funzione composta risultante.

## 6.6 Teorema di derivazione delle funzioni composte

Se  $g$  è derivabile in  $x$  e se  $f$  è una funzione derivabile nel punto  $g(x)$ , allora la funzione composta  $f(g(x))$  è derivabile in  $x$  e si ha:

$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**Dimostrazione:** Consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \quad (\star)$$

è il limite del rapporto incrementale di  $f$  nel punto  $g(x)$ .

Pongo  $k = g(x+h) - g(x)$ , allora  $k \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  perchp  $g$  è derivabile in  $x$  e quindi continua  $g(x+h) \rightarrow g(x)$

$$\implies (\star) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)) \implies Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \clubsuit$$

**Osservazione criterio di invertibilità:** una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo  $[a, b]$  è invertibile in tale intervallo.

## 6.7 Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Sia  $f(x)$  una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo  $[a, b]$ . Se  $f$  è derivabile in un punto  $x \in (a, b)$  e se  $f'(x) \neq 0$ , allora anche  $f^{-1}$  è derivabile nel punto  $y = f(x)$  e la derivata vale:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$f : x \rightarrow y$  e  $f^{-1} : y \rightarrow x$ .

## 6.8 Principali forme di derivazione

- $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$
- $D \ln x = \frac{1}{x}$
- $D \sin x = \cos x$
- $D \cos x = -\sin x$
- $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $De^x = e^x$

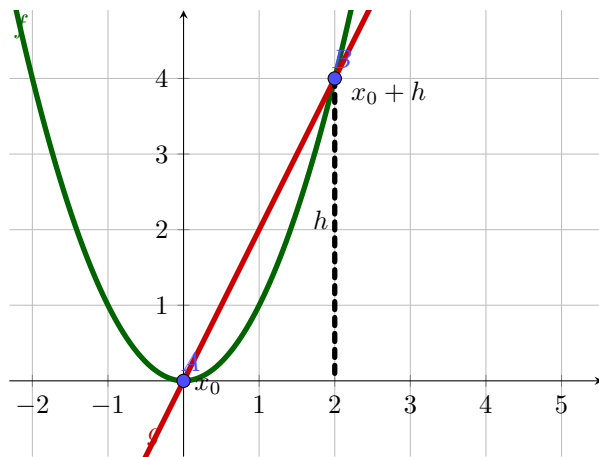
## 6.9 Significato geometrico della derivata: retta tangente

La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in un punto e misura la **pendenza** del grafico.

Sia  $f(x)$  una funzione definita in un intorno di un punto  $x_0$  e si consideri il grafico della funzione nel piano  $x, y$ .

Vogliamo determinare l'equazione della **retta tangente** al grafico della funzione  $f$  nel punto  $p_0$ .

Per calcolare la retta tangente, è opportuno preliminarmente determinare l'equazione di una **retta secante** il grafico della funzione  $f$  nei punti  $p_0 = (x, f(x_0))$  e  $p = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ .



L'equazione di una generica retta non verticale è:

$$y = mx + q$$

Determiniamo  $m$  e  $q$  in modo che la retta passi per i punti  $p$  e  $p_0$ :

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q \text{ passaggio per } p_0 \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q \text{ passaggio per } p \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Sistema di due equazioni, due incognite,  $m$  e  $q$ .  $\Rightarrow$  sottraendo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = m(x_0 + h) - m(x_0) \Rightarrow m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e si ricava  $q$  dalla prima equazione:

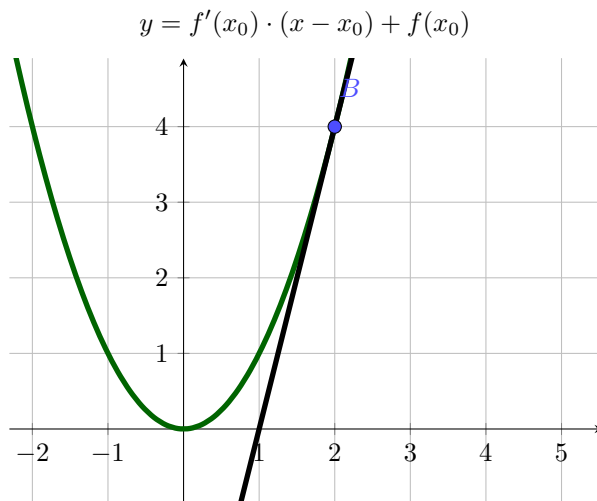
$$q = f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot x_0$$

$\Rightarrow$  l'equazione della retta secante, risulta essere quindi:

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

l'equazione della retta tangente, quando esiste, è il limite per  $h \rightarrow 0$  dell'equazione della retta secante.

Quindi se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , si ottiene



$f'(x_0)$  è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .

**Significato geometrico:** misura la pendenza del grafico della funzione.

## 7 Applicazioni alle derivate

### 7.1 Studio di funzioni

Definiamo i punti di massimo e di minimo relativo.

Sia  $f(x)$  definita in un intervallo  $[a, b]$ .

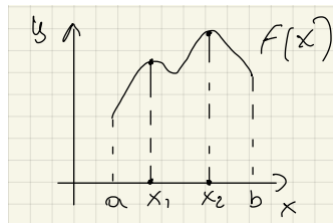


Figure 5:  $f(x)$

- $x_1 \in [a, b]$  è un punto di **massimo relativo** per  $f$  nell'intervallo  $[a, b]$  se il valore  $f(x_1)$  è più grande dei valori  $f(x)$  per ogni  $x$  nell'intervallo  $[a, b]$  vicino ad  $x_1$ . Più precisamente se  $\exists \delta > 0$  tale che  $f(x_1) \geq f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$  tale che  $|x - x_1| < \delta$ .
- $x_2$  è un punto di **massimo assoluto** per  $f$  se  $f(x_2) \geq f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Analogamente per i punti di minimo con  $\leq$  al posto di  $\geq$ .

**Osservazione:** Tutti i punti di massimo o minimo interni all'intervallo  $[a, b]$  (cioè  $\in (a, b)$ ) hanno retta tangente orizzontale in quel punto cioè del tipo:

$$y = q$$

(Non vale per gli estremi per gli estremi dell'intervallo  $x = a, b$ , ma con  $x_0 \in (a, b)$ ).

Ricordando la retta tangente al grafico di una funzione in  $x_0$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

questa retta è orizzontale  $\iff f'(x_0) = 0$ .

## 7.2 Teorema di Fermat

Sia  $f$  una funzione definita in  $[a, b]$  e sia  $x_0$  un punto di massimo o di minimo relativo interno ad  $[a, b]$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora risulta:

$$f'(x_0) = 0$$

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $x_0$  sia un punto di massimo relativo, quindi  $\exists \delta > 0$  tale che:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad (\star) \quad \forall h \mid |h| < \delta \iff f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$$

Valuto il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

il numeratore è sempre negativo perchè  $x_0$  è **massimo** in  $(\star)$ .

E risulta:

$$\begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

e passando al limite per  $h \rightarrow 0^\pm$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

( $f$  derivabile per ipotesi, quindi i due limiti devono coincidere).

Quindi  $f'(x_0) = 0$ . ♣

**Osservazione:** Quindi conseguenza del teorema di Fermat è che l'annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto  $x_0$  del dominio è condizione **necessaria** affinché  $x_0$  sia un punto di massimo o di minimo per la funzione.

## 7.3 Teorema di Rolle

Sia  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ .

Se  $f(a) = f(b)$ , allora  $\exists x_0 \in (a, b)$  tale che  $f'(x_0) = 0$ .

**Dimostrazione:** Sia  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$  quindi per il teorema di Weierstrass  $f$  ammette massimo e minimo in  $[a, b]$ , cioè  $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$  tali che:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\star)$$

Se almeno uno fra  $x_1$  e  $x_2$  è un punto interno all'intervallo  $[a, b]$  allora per il teorema di Fermat  $f'(x_0) = 0$ .

Rimane da esaminare il caso in cui entrambi i punti  $x_1$  e  $x_2$  non sono interni, cioè:

$$x_1 = a \text{ e } x_2 = b$$

Quindi da (★):

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ma dato che per ipotesi  $f(a) = f(b)$ ,  $\implies$  significa che  $f(x)$  è costante e la sua derivata è ovunque nulla.

♣

## 7.4 Interpretazione geometrica

$f(x)$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$  con  $f(a) = f(b)$ ,  $\implies$  esiste un punto con tangente orizzontale.

**Situazione più generale:**

$\exists$  un punto  $x_0 \in (a, b)$ , in cui la retta tangente è parallela alla corda che congiunge gli estremi del grafico ( $f(a)$  con  $f(b)$ ).

- $f'(x_0)$  coefficiente angolare della retta tangente in  $x_0$ .
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  coefficiente angolare della corda.

## 7.5 Teorema di Lagrange

Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Esiste un punto  $x_0 \in (a, b)$  per cui

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Dimostrazione:** Si considera la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

$$\text{in } x = a \quad g(a) = f(a) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)] = 0$$

$$\text{in } x = b \quad g(b) = f(b) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)] = 0$$

$$\implies g(a) = g(b) = 0$$

Posso quindi utilizzare il teorema di Rolle,

$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ tale che } g'(x_0) = 0$$

e

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a, b)$$

in  $x_0 \implies$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \clubsuit$$

## 7.6 Conseguenze del teorema di Lagrange

### 7.6.1 Criterio di monotonia

Sia  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ , allora:

$$\bullet f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è crescente in } [a, b]$$

$$\bullet f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è decrescente in } [a, b]$$

**Dimostrazione (per la prima):** Supponiamo che  $f'(x) \geq 0$  in  $(a, b) \quad \forall x \in (a, b)$ , dobbiamo dimostrare che se  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  risulta  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Applichiamo il Teorema di Lagrange nell'intervallo  $[x_1, x_2]$ :

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \text{ tale che } f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dato che  $f'(x) \geq 0$  e  $x_2 > x_1$  risulta  $f(x_2) \geq f(x_1)$  e quindi  $f$  è crescente.

Ora supponiamo  $f$  crescente in  $[a, b]$  e consideriamo  $x$  e  $x + h \in (a, b)$  ( $h > 0$ ) allora  $f(x + h) \geq f(x)$  per ipotesi e quindi:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

e passando al limite:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \clubsuit$$

### 7.6.2 Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo

Una funzione è costante in un intervallo  $[a, b] \iff$  è derivabile in  $[a, b]$  e la derivata è ovunque nulla.

**Dimostrazione:** Hp:  $f(x)$  è costante in  $[a, b] \implies f'(x) = 0$ , lo abbiamo già visto con il rapporto incrementale

$$\frac{c - c}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = 0$$

( $\iff$ ) Se  $f'(x) = 0$  allora la funzione è costante.

Applico il Teorema di Lagrange nell'intervallo  $[a, x] \implies \exists x_0 \in (a, x)$  tale che:

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies f(x) = f(a) \quad \text{cioè è costante} \quad \clubsuit$$

## 7.7 Funzioni concave e convesse

Si dice che una funzione è **convessa** in un intervallo  $[a, b]$ , se per ogni punto  $x_0 \in [a, b]$ , il grafico della funzione è **al di sopra** della retta tangente al grafico nel punto  $(x_0, f(x_0))$

Si dice che una funzione è **concava** in un intervallo  $[a, b]$ , se per ogni punto  $x_0 \in [a, b]$  il grafico della funzione è **al di sotto** della retta tangente al grafico nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .

$$f \text{ convessa in } [a, b] \iff$$

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \forall x \in [a, b] \end{cases}$$

$$f \text{ concava in } [a, b] \iff$$

$$\begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \forall x \in [a, b] \end{cases}$$

Un punto in cui  $f(x)$  cambia la sua concavità è detto **punto di flesso**.

### 7.7.1 Criterio di convessità

Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in  $[a, b]$  e che ammetta derivata seconda in  $(a, b)$ . Allora:

$f(x)$  è convessa in  $[a, b] \iff$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

**Osservazione:**  $\iff f(x)$  è crescente in  $[a, b]$  per il criterio di monotonia.

## 7.8 Criterio per determinare se un punto è di massimo o minimo relativo per una funzione derivabile due volte

- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies x_0$  è un punto di minimo relativo.
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \implies x_0$  è un punto di massimo relativo.

Vediamo la prima,  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ . Supponendo che la derivata seconda sia continua in un intorno di  $x_0$  (per il teorema della permanenza del segno)  $f''(x)$  è positiva in un intorno di  $x_0$ , cioè in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  con  $\delta > 0$ .

$\implies$  Quindi  $f$  è convessa in tale intorno, per il criterio di convessità.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$\implies x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ . ♣

## 7.9 Metodo di Newton per il calcolo delle radici di un'equazione

E' un metodo per calcolare le radici di un'equazione  $f(x) = 0$  con  $f(x)$  funzione continua in un intervallo  $[a, b]$  e tale che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ .

## 7.10 Metodo di Newton per il calcolo numerico approssimato degli zeri di una funzione

In  $[a, b]$ , si sceglie un punto  $x_1$  e si traccia la retta tangente al grafico della funzione per  $x = x_1$ .

Tale retta tangente incontrerà l'asse  $x$  in un punto  $x_2$ , che sarà una approssimazione dello "zero"  $x_0$  di  $f(x)$ .

L'equazione della retta tangente per  $x = x_1$ ,

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Come si determina  $x_2$ ? E' soluzione di

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\implies x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Iteriamo. A partire da  $x_2$  si considera nuovamente l'equazione della retta tangente al grafico di  $f(x)$  per  $x = x_2$ :

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$$

e si determina il punto  $x_3$ , dove questa retta tangente interseca l'asse  $x$ , come prima:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si determina quindi una successione  $x_n$  di approssimazioni del punto  $x_0$ .

In ipotesi abbastanza generali si dimostra che  $x_n \rightarrow x_0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Si tratta di una successione **definita per ricorrenza**.

Applichiamo il metodo di Newton al calcolo approssimato delle cifre decimali di  $\sqrt{2}$ .

## 7.11 Applicazione del metodo di Newton

### 7.11.1 Step 1

Scegliamo, ad esempio,  $x_1 = 2$  in  $[0, 4]$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$\Rightarrow x_2 = 1.5$  è un'approssimazione per eccesso di  $x_0 = \sqrt{2}$ , cioè  $x_2 > x_0$  perchè  $f(x)$  è **convessa** ( $f'(x) = 2$ ) e il suo grafico è **al di sopra** di ogni sua retta tangente.

### 7.11.2 Step 2

Ripartiamo da  $x_2 = 1.5$  e calcoliamo  $x_3$ :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = \frac{17}{12} = 1.4166666666666667$$

### 7.11.3 Step n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

con  $f(x) = x^2 - 2$  si trovano i valori:

$x_n$	<i>approx</i>
$x_1$	2
$x_2$	1.5
$x_3$	1.4166666666666667
$x_4$	1.4142156862745097
$x_5$	1.4142135623746899
$x_6$	1.414213562373095

La convergenza di  $x_n$  a  $x_0$ , per  $n \rightarrow \infty$  è molto rapida.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$$

## 7.12 Teorema

Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in  $[a, b]$ , con derivata continua e sia convessa in tale intervallo. Supponiamo che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Allora la successione definita per ricorrenza

$$x_1 = b \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



converge decrescendo all'unica soluzione  $x_0 \in [a, b]$  dell'equazione  $f(x) = 0$ .

Nel caso studiato per il calcolo delle cifre decimali di  $\sqrt{2}$ , la successione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \text{ con } f(x) = x^2 - 2 \text{ e } f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \end{cases} \quad (*)$$

Verifichiamo che, se  $x_n$  ammette limite finito, allora il limite è  $\sqrt{2}$ .

Infatti se  $x_n \rightarrow x_0$ , anche  $x_{n+1} \rightarrow x_0$  e passando al limite in (\*):

$$x_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{x_0} \implies 2x_0^2 = x_0^2 + 2 \implies x_0^2 = 2$$

$\implies$  Quindi  $x_0 = \pm\sqrt{2}$ , ma essendo una successione a termini positivi (se  $x_n > 0 \implies x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} > 0$ )

$\implies x_0 = \sqrt{2}$ . ♣

### 7.13 Teorema di l'Hôpital

Siano  $f$  e  $g$  funzioni derivabili in un intorno di  $x_0$  (eventualmente anche non in  $x_0$ ) tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Allora:

$$\frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se risulta  $g(x) \neq 0$  e  $g'(x) \neq 0$  in un intorno di  $x_0$ ,  $x \neq x_0$  e purchè esista il secondo limite.

**Osservazione:** Vale anche per forme indeterminate del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . (Se  $f(x), g(x) \rightarrow \infty$  per  $x \rightarrow x_0$ ).

### 7.14 Studio del grafico di una funzione

1. Determinare il Dominio della funzione

2. Verificare la presenza di simmetria

- $f(x) = f(-x)$  funzione pari
- $f(-x) = -f(x)$  funzione dispari
- $f(x + T) = f(x)$  funzione periodica

3. Si determinano gli eventuali asintoti

#### 7.14.1 Asintoti Verticali

Una funzione ammette asintoto verticale, se calcolando il limite per  $x \rightarrow x_0$  (oppure  $x \rightarrow x_0^+$  e  $x \rightarrow x_0^-$ ) si ottiene  $\pm\infty$ .

$$x = x_0 \text{ asintoto verticale} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

### 7.14.2 Asintoti Orizzontali

Una funzione ammette asintoto orizzontale, se calcolando il limite per  $x \rightarrow \pm\infty$  si ottiene un valore finito.

$$y = l \text{ asintoto orizzontale} \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

### 7.14.3 Asintoti Obliqui

Un asintoto obliquo per  $x \rightarrow \pm\infty$  è una retta di equazione

$$y = mx + q$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \quad (\star)$$

(cioè per  $x \rightarrow \pm\infty$  il grafico della funzione è vicino alla retta).

Dobbiamo determinare  $m$  e  $q$ .

Se  $(\star) \rightarrow 0$ , anche

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \\ \implies m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ \implies q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] \end{aligned}$$

**Osservazione:** Se  $f(x)$  ammette asintoto orizzontale allora non può ammettere asintoto obliquo, infatti:

$$\text{HP} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} = l \text{ ammette asintoto orizzontale}$$

allora

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \implies q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \end{aligned}$$

4. Determinare gli intervalli dove la funzione è crescente o decrescente, i punti di massimo e di minimo relativo, **studiando il segno della derivata prima.**
5. Si determinano gli intervalli dove la funzione è convessa o concava e gli eventuali punti di flesso, studiando il segno della derivata seconda.

## 8 Partizioni

Quindi per ogni partizione  $P$ , poniamo

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un minimo)

e poniamo

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(In questo caso è un massimo)

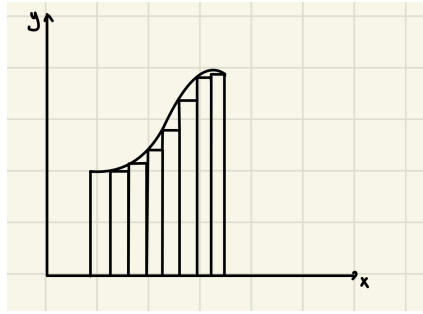


Figure 6: Inf

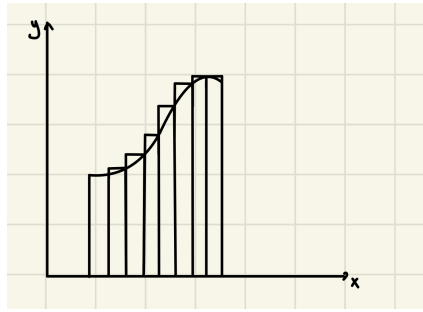
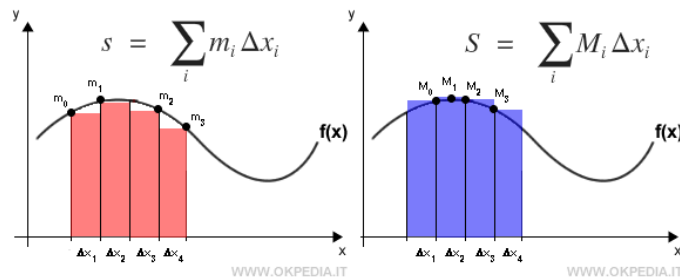


Figure 7: Sup

Ad esempio:



In entrambe le figure sono rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Sono aree per difetto e per eccesso della regione che voglio stimare.

Definisco le SOMME INTEGRALI INFERIORI: Somma delle aree dei rettangoli inscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le SOMME INTEGRALI SUPERIORI: Somma delle aree dei rettangoli circoscritti.

$$S(p) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

## 8.1 Osservazione

Se  $f(x)$  è positiva, queste somme integrali sono la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (sono definite a prescindere dal segno)

Si dimostra che:

$$S(P) \leq S(P)$$

e indicando con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori ( $P$ ) al variare delle partizioni  $P$  dell'intervallo  $[a, b]$  e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\} \quad B = \{S(P)\}$$

si dimostra che A e B sono insiemi SEPARATI, cioè  $A \leq B$ :

$$a \leq b \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall b \in B$$

$\Rightarrow$  Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un numero reale  $c$  maggiore uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

$$a \leq c \leq b$$

In generale questo elemento non è unico, e vale la seguente:

## 9 Integrale definito

Se l'elemento di separazione tra A e B è unico, allora si dice che  $f(x)$  è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN in  $[a, b]$  e l'elemento si chiama con:

$$\int_a^b f(x) dx$$

e si chiama INTEGRALE DEFINITO di  $f$  in  $[a, b]$ . Quindi posto:

$$S(f) = \sup\{s(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

$$S(f) = \inf\{S(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

se  $s(f) = S(P) \rightarrow$  allora  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann.

### 9.1 Funzione non integrabile secondo Riemann

Funzione di Dirichlet:

$$f(x): \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

In ogni intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$  cadono sia punti razionali che irrazionali:

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

Allora: (somma integrali inferiori)

$$S(P) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = b - a \end{aligned}$$

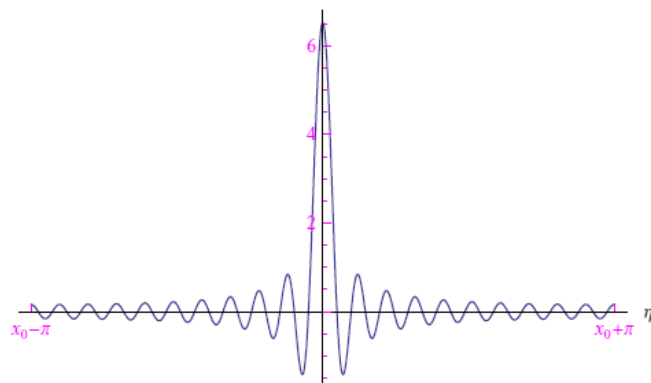


Figure 8: Funzione di Dirichlet

$$\rightarrow S(P) = 0 \quad \forall P \wedge S(P) = b - a \quad \forall P$$

Non è integrabile secondo Riemann. (lo sarà secondo LEBESGUE)

## 9.2 Proprietà

### 9.2.1 Additività integrale rispetto all'intervallo

Se  $a, b, c$  sono tre punti di un intervallo dove la funzione  $f(x)$  è integrabile, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

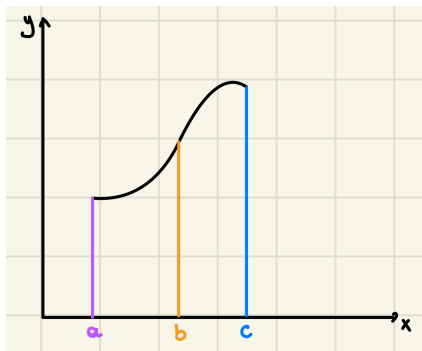


Figure 9: Grafico additività integrale

### 9.2.2 Linearità dell'integrale

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni integrabili in  $[a, b]$ , anche  $f + g$  è integrabile in  $[a, b]$ . Dato  $c$  numero reale, anche  $c \cdot f$  è integrabile in  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b c \cdot f(x)dx &= c \cdot \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

### 9.2.3 Confronto tra gli integrali

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni integrabili in  $[a, b]$  e se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

### 9.2.4 Integrabilità delle funzioni continue

Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ .

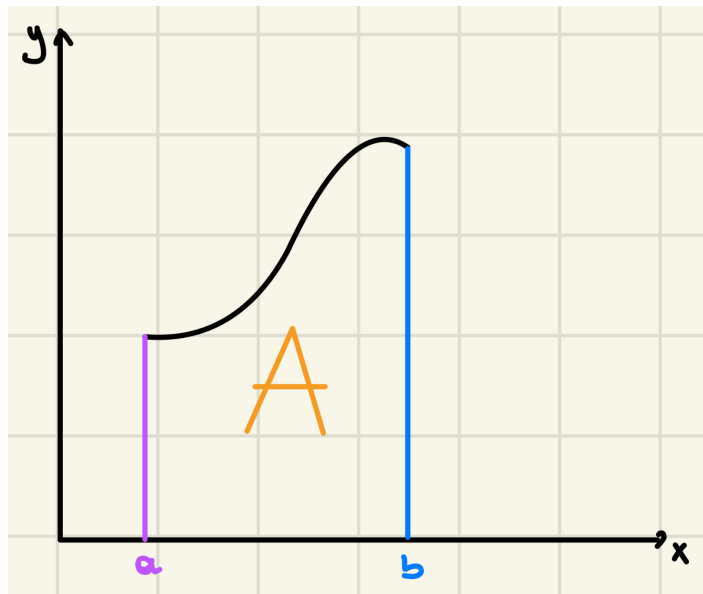
## 9.3 Teorema della media

Se  $f(x)$  è continua in  $[a, b]$ , esiste un punto  $x_0 \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

## 9.4 Interpretazione geometrica del teorema della media

$f(x)$  continua in  $[a, b]$ , ad esempio:



Voglio calcolare l'area del rettangolo A. Il teorema della media afferma che  $\exists$  un valore opportuno (cioè un valore non scelto a caso, ma in base alla particolare funzione considerata)  $f(x_0)$ , tale che:

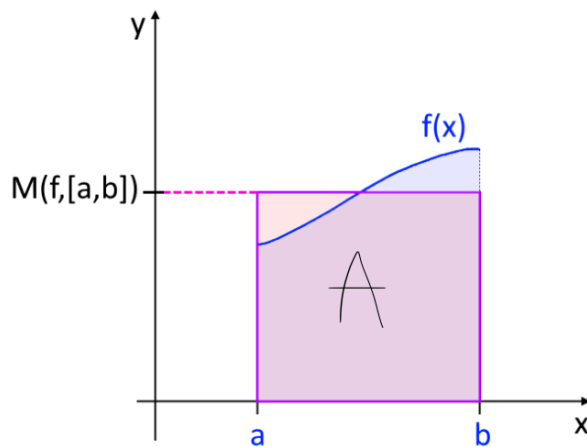


Figure 10: Teorema della media

Per cui  $\text{area } A = \text{area } B$ , dove B è un rettangolo che ha per base l'intervallo  $[a, b]$  e per altezza  $f(x_0)$ .

### 9.4.1 Dimostrazione del teorema della media

$f$  una funzione continua in  $[a, b]$  per ipotesi. Per il teorema di Weierstrass  $f(x)$  assume massimo e minimo in  $[a, b]$ , cioè esistono  $m$  e  $M$  tali che: (teo esistenza valori intermedi)

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$$

Consideriamo ora una partizione  $P$  di  $[a, b]$ , la più semplice possibile, cioè:

$$P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$$

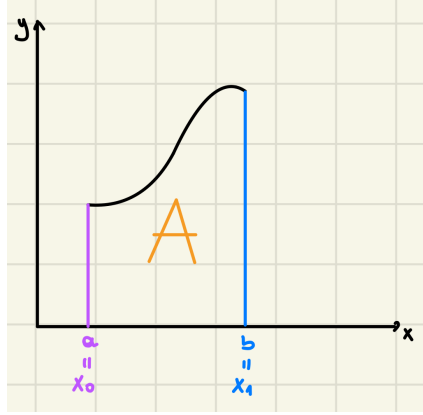


Figure 11: Enter Caption

Le relative somme integrali inferiori e superiori sono date quindi da:

$$s(P) = m(b - a)$$

$$S(P) = M(b - a)$$

// grafico

L'integrale definito è, per definizione, l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori (qualunque sia la partizione P di  $[a, b]$ ). Quindi:

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(P)$$

$$\rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

se e solo se

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

$y_0$  è un numero compreso tra m ed M, minimo e massimo di  $f(x)$   $\implies$  per il teorema di esistenza dei valori intermedi,  $\exists x_0 \in [a, b]$  t.c.

$$f(x_0) = y_0$$

$$\implies f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = y_0$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx = (b - a)f(x_0)$$

## 9.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Sia  $f(x)$  una funzione monotona in  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  (indipendente dalle discontinuità)



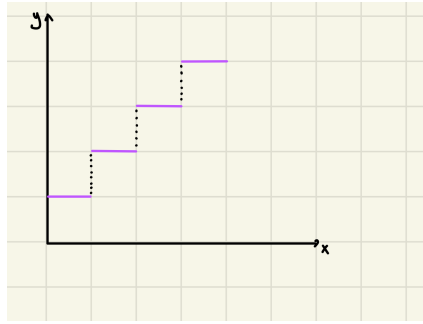


Figure 12: funzione a scalini

### 9.5.1 Osservazioni

In vista di andare a definire gli **INTEGRALI INDEFINITI**, concludiamo con alcune notazioni e definizioni. Abbiamo definito l'integrale definito come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove  $a$  e  $b$  sono gli estremi di integrazione, la funzione  $f$  si dice funzione **integranda**, la variabile  $x$ , si dice **variabile di integrazione**.

Notiamo che il risultato dell'integrazione non dipende da  $x$ , ma è un numero reale. Poniamo inoltre per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

e

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

## 10 Integrali Indefiniti

Mettiamo ora in evidenza, ma dei risultati più importanti che lega le derivate con gli integrali. Preliminarmente definiamo la FUNZIONE INTEGRALE.

### 10.1 Funzione integrale

Data  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$ , definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

qui " $x$ " è impegnato.

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

## 11 Serie Numeriche

Consideriamo una successione  $a_n$  di numeri reali. Vogliamo definire la "somma" di infiniti termini della successione, cioè:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Ora ad esempio, se consideriamo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad \text{Successione costante } a_n = 1 \quad \forall n$$

Ovvio che il risultato è  $+\infty$ .

Ma se consideriamo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

Ovvio che il risultato è...?

Potrebbe essere:

$$(\mathbf{1-1}) + (\mathbf{1-1}) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

oppure:

$$\mathbf{1} + (\mathbf{-1+1}) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 1$$

Quindi varia in base a come li accoppio.

Allora come si procede?

Si introduce la somma  $S_n$  dei primi termini della successione, detta **Somma Parziale o Ridotta Ennesima**.

## 11.1 Somma parziale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Vediamo ora cosa succede se sommiamo facciamo tendere a infinito la somma parziale.

### 11.1.1 Esempio 1

$$a_k = 1 \quad \forall k$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \dots, S_n = n$$

$$\implies S_n \rightarrow \infty$$

### 11.1.2 Esempio 2

$$a_k = (-1)^{k+1}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1, S_6 = 0, \dots$$

$S_n$  oscilla fra 0 e 1 quindi:  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  non esiste!.

## 11.2 Definizione di Serie Numerica Astratta

**Notazione:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  Somma o Serie per  $k$  che va da 1 a  $+\infty$  di  $a_k$ . Poniamo per definizione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

- Se il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $S_n$  esiste ed è un numero finito, la serie è **Convergente**.
- Se il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $S_n$  è  $\pm\infty$ , la serie è **Divergente**.
- Una serie convergente o divergente si dice **Regolare**.
- Se non esiste il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $S_n$ , si dice che la serie è **Indeterminata**.

Il comportamentto della serie si chiama **Carattere** della serie. Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

### 11.2.1 Osservazione

La serie che abbiamo visto  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$  è indeterminata.

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \dots$$

Si noti che la successione associata a queste serie è  $a_n = (-1)^n$  che non converge a zero. Questo è un motivo per escludere a priori che la serie converga. Vale infatti il seguente:

## 11.3 Condizione necessaria di convergenza di una serie

Se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge, allora la successione  $a_n$  tende a zero, per  $n \rightarrow \infty$ .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

L'implicazione inversa **non** è vera.

### 11.3.1 Dimostrazione

Sia  $S_n$  la successione delle somme parziali e sia  $S \in \mathbb{R}$ , la somma ( $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ) della serie. Abbiamo che:

$$(\star) \quad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aggiungendo alla successione  $S_n$  il termine  $a_{n+1}$ , ottengo la successione  $S_{n+1}$ . (Per definizione di successione di somme parziali)

Allora da  $(\star)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0 \\ &\implies a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Osservazione:** E' una condizione **Necessaria**, ma non sufficiente.

Vediamo due esempi di serie modello:

## 11.4 Serie geometrica

$\forall x \in \mathbb{R}$ , consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

che si chiama Serie geometrica di **ragione**  $x$  (argomento elevato alla  $k$ ).

Calcoliamo la somma parziale  $S_n$ :

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$ .

**Formula Risolutiva:**  $\forall x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

### 11.4.1 Osservazione

La formula vale  $\forall x \neq 1$ , cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

Se invece  $x = 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = +\infty$$

Riassumendo per la serie geometrica (di ragione  $x$ ):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \text{ divergente} \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 (|x| < 1) \text{ convergente} \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

### 11.4.2 Esercizio del compito (21/06/21)

Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$ , la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n$$

converge, e per tali valori di  $x$ , calcolare la somma della serie.

! L'unica serie che conosciamo di cui possiamo fare la somma è quella geometrica.

! Capisco che è geometrica perchè dipende da  $x-4$

**Risoluzione:**

- è una serie geometrica di ragione  $x-4$ .
- la serie geometrica data converge per:

$$|x-4| < 1 \iff -1 < x-4 < 1 \iff 3 < x < 5$$

- la somma della serie è data da:  $\frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x-4)^n = \frac{1}{1-(x-4)} - 1 - (x-4) = \frac{x^2 - 8x + 16}{5-x}$$

$$-1 = 1^\circ \text{ termine della serie} = (x-4)^0 = 1$$

## 11.5 La serie armonica

Data la somma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Si dimostra che la serie armonica è divergente.

! Non si conosce la somma.

Osservazione E' un esempio di serie dove  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , ma la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  è **divergente**.

## 11.6 La serie armonica generalizzata (con esponente)

Detta dalla somma:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Si dimostra che la serie armonica generalizzata è:

- **convergente** per  $p > 1$
- **divergente** per  $p \leq 1$

## 11.7 Serie a termini non negativi

Diremo che una serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  è a termini non negativi se  $\forall n \in \mathbb{N}$  risulta  $a_n \geq 0$ .

Diremo che una serie è a termini positivi se  $a_n > 0, \forall n$ .

### 11.7.1 Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. Può essere convergente o divergente positivamente.

**Dimostrazione:** La successione delle somme parziali  $S_n$  di una serie a termini non negativi è **crescente** (per definizione di successione di somme parziali).

Infatti, poichè  $a_{n+1} \geq 0, \forall n$ , risulta:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq 0 \geq S_n$$

$\Rightarrow$  Quindi per il teorema sulle successioni monotone, ovvero:

”Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata ammette limite finito.”

$\Rightarrow S_n$  ammette limite (eventualmente a  $+\infty$ ) e quindi la serie corrispondente può solo convergere o divergere, ma non essere indeterminata.

## 11.8 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Alcuni **criteri** per stabilire il **carattere** di una serie: (non sempre si riesce a calcolare esplicitamente la somma di una serie)

### 11.8.1 Criterio del rapporto:

Si utilizza solitamente per il fattoriale.

Data  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con  $a_n > 0 \forall n$ . Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- Se  $0 \leq L < 1$ , la serie converge.
- Se  $L \geq 1$ , la serie diverge.

**Osservazione** Nel caso:  $0 \leq L < 1$  quindi per il criterio del rapporto  $a_n \rightarrow 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.

**Esempi:**

da fare

### 11.8.2 Criterio della radice:

Data  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con  $a_n > 0 \forall n$ . Supponiamo che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- Se  $0 \leq L < 1$ , la serie converge.
- Se  $L \geq 1$ , la serie diverge.

**Esempi:**

da fare

**Esercizio appello**

### 11.8.3 Criterio del confronto mediante i limiti

Date  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con  $a_n \geq 0 \forall n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  con  $b_n > 0 \forall n$ :

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ , allora le due serie hanno lo stesso grado, quindi carattere, cioè convergono o divergono.
- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.
- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge.

### 11.8.4 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  quindi  $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$  e considero  $b_n = \frac{1}{n^p}$  con  $p$ ?  
valuto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

–  $b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$  ma  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  è una serie convergente, quindi non riesco a concludere.

–  $b_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^3 = +\infty$ , stesso problema di prima e non riesco a concludere.

–  $b_n = \frac{1}{\frac{3}{n^2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{3}{n^2}}$  converge e quindi concludo con il criterio del **confronto mediante limiti** e la serie data converge.

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{6n^3 + 1} - \sqrt{6n^3})$$

$$a_n = \sqrt{6n^3 + 1} - \sqrt{6n^3} \cdot \frac{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}}{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{6n^3 + 1 - 6n^3}{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6n^3 + 1} + \sqrt{6n^3}}$$

Utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti e prendiamo  $b_n = \frac{1}{\frac{3}{n^2}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{6}}$  (per  $n \rightarrow +\infty$ ) quindi

la serie data si comporta come la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{3}{n^2}}$

- **Determinare il carattere della serie:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3})$$

$$a_n = n^3 (1 - \cos \frac{1}{n^3}) = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$$

prendiamo  $b_n = \frac{1}{n^3}$  e utilizziamo il criterio del confronto mediante limiti. Allora, cerchiamo di ricondurci al limite notevole  $\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

- Stabilire, per  $x \geq 0$ , il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x^n (n-1)!}{(n-1)! n x^{n-1}} = \frac{x}{n} \rightarrow 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \text{la serie converge } \forall x > 0$$

- Stabilire, per  $x > 0$  il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n}$$

utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} x \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^2 \rightarrow \frac{x}{4} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Quindi se  $0 < x < 4$ , allora la serie converge. Se  $x > 4$ , allora la serie diverge a  $+\infty$ .

Se  $x = 4$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n} = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \right]^{\varepsilon_n \cdot 2n} = \dots = e^3$$

$a_n \not\rightarrow 0$  e poichè è una serie a termini positivi  $\implies$  diverge a  $+\infty$ .

- Stabilire per quali valori di  $\alpha$  la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot \left( \sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

Utilizziamo lo sviluppo (Taylor):

$$\sin \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

Inoltre:

$$\sqrt{1 + \varepsilon_n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

$$\implies \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\implies a_n = n^\alpha \left( \sqrt{1 + \sin \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = n^\alpha \left( \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$a_n$  si comporta come  $\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$  converge  $\iff 2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$ . Per il criterio del confronto mediante i limiti, la serie data converge  $\iff \alpha < 1$ .

## 11.9 Serie alternate

Consideriamo serie del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{con } a_n > 0$$

Vale il seguente criterio:

### 11.10 Criterio di convergenza per le serie alternate (Leibniz)

Sia  $a_n$  una successione tale che:

- $a_n \geq 0$
- infinitesima ( $a_n \rightarrow 0$ )
- decrescente ( $a_n \geq a_{n+1} \forall n$ )



$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

### 11.10.1 Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

### 11.10.2 Esercizio del compito 20 07 21

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3 + 5}$$

La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \rightarrow 0$
- $a_n$  decrescente, infatti  $\frac{1}{n^3 + 5}$  è decrescente e la funzione  $g(x) = \sin x$  è crescente per  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

## 11.11 Convergenza Assoluta

Una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  si dice **assolutamente convergente** se risulta convergente la serie dei valori assoluti  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ . In generale, una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente.

Ad esempio:  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  è convergente per il criterio di Leibniz, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è la serie armonica che diverge.

## 11.12 Teorema

Una serie assolutamente convergente, è convergente.

### 11.12.1 Esercizio del compito (precedente)

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^3 + 5}$  è anche assolutamente convergente. Infatti:

$$a_n = \sin \left( \frac{1}{n^3 + 5} \right) \cong \frac{1}{n^3} + o \left( \frac{1}{n^3} \right)$$

e la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  converge.

### 11.12.2 Esercizi di compito a fine pdf (da fare)

## 12 Equazioni differenziali

Sia

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

dove  $g(x)$  è una funzione di una variabile reale, continua in un intervallo  $[a, b] \in \mathbb{R}$ .

Per il **teorema fondamentale del calcolo integrale** sappiamo trovare una **primitiva**  $G(x)$  di  $g(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$ , data da:

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

dove  $x_0$  è un numero reale fissato in  $[a, b]$ .

Quindi possiamo rappresentare ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\star)$$

Integrando entrambi i membri di  $(\star)$  tra  $x_0$  e  $x$  otteniamo:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

e rappresentiamo la soluzione nella forma:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad x \in [a, b]$$

Questo è un esempio molto particolare di equazione differenziale, si dice che  $y(x)$  è soluzione del **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in quanto  $y(x)$  è soluzione ed inoltre soddisfa la **condizione iniziale** nel punto  $x = x_0$ :

$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} g(t) dt = y_0$$

## 12.1 Osservazione

L'equazione differenziale considerata si dice del **primo ordine**, poichè l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è il primo.

## 12.2 Ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine

Sia

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove  $\lambda$  è un parametro reale fissato.

Dobbiamo trovare una soluzione di questa equazione differenziale, cioè una funzione  $y = y(x)$ , derivabile in  $\mathbb{R}$ , tale che

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Una soluzione è data da:

$$y(x) = ce^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove  $c$  è una costante arbitrariamente fissata in  $\mathbb{R}$ .

Si verifica subito che è soluzione, infatti derivando si ottiene:

$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

### 12.2.1 Domanda

Tutte le possibile soluzioni sono della forma  $y(x) = ce^{\lambda x}$ ? Sì, ma non lo dimostriamo.

## 12.3 Esempio di equazione differenziale del secondo ordine: equazione del moto armonico

$$y''(x) + \omega^2 y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove  $\omega \neq 0$  è un parametro reale fissato.

Una famiglia di soluzioni è data da:

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  costanti in  $\mathbb{R}$ .

**Verifica:**

$$y'(x) = -c_1 \omega \sin \omega x + c_2 \omega \cos \omega x$$

$$y''(x) = -c_1 \omega^2 \cos \omega x - c_2 \omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) = -\omega^2 y(x)$$

$$\implies y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico sono nella forma  $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ ? Sì, ma non lo dimostriamo.

## 12.4 Equazioni differenziali lineari ordine n, di tipo normale

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

dove  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$  sono coefficienti e  $g(x)$  è il termine noto. (funzioni continue in un intervallo  $[a, b] \in \mathbb{R}$ ).

Se  $g(x) = 0$  l'equazione (1) si dice **omogenea**.

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

## 12.5

Una soluzione dell'equazione differenziale (1) o (2) è una funzione  $y = y(x)$ , derivabile n volte in  $[a, b]$ , che soddisfa la condizione (1) o (2)  $\forall x \in [a, b]$ . Le soluzioni delle equazioni differenziali lineari sono dette anche **integrali** e l'insieme di tutte le soluzioni è detto **integrale generale**.

## 12.6 Rappresentazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare

L'integrale generale di un'operazione differenziale **non omogenea** è dato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea, sommate ad una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

## 12.7 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = g(x)$$

con  $a(x), b(x), g(x)$  funzioni continue in un intervallo  $[a, b]$ .

Consideriamo inizialmente l'equazione omogenea associata:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$$

Una soluzione è una funzione  $y = y(x)$ , derivabile due volte in  $[a, b]$ , che soddisfa l'equazione differenziale. Considereremo equazioni differenziali di questo tipo, a coefficienti costanti.

## 12.8 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  costanti.

Associamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

equazione di secondo grado dove:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \Delta > 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2} \quad \Delta = 0$$

E se il discriminante è negativo?

Ricordiamoci come si calcola la radice quadrata di un numero negativo:

$$\sqrt{\Delta} \text{ con } \Delta < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1(-\Delta)} = \pm i\sqrt{-\Delta}$$

e quindi le soluzioni complesse nel caso  $\Delta < 0$  sono:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\text{cioè } \lambda_1, \lambda_2 = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\lambda_1 = \alpha - i\beta$$

$$\lambda_2 = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

## 12.9 Integrale generale delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

Tutte le soluzioni sono date da:

- $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \Delta > 0$
- $(c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \quad \Delta = 0$
- $e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \Delta < 0$

Al variare delle costanti  $c_1, c_2$ .

### 12.9.1 Esempio

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

L'equazione differenziale ha come equazione caratteristica, l'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \implies \lambda_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

$\implies$  L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

### 12.9.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

Posso trovare i  $\alpha$  e  $\beta$ , ma mi conviene utilizzare direttamente la formula del  $\Delta$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i \implies \lambda_1 = 1 - i \quad \lambda_2 = 1 + i$$

L'integrale generale è dato da:

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

### 12.10 Esempio 3

Risolvere l'equazione differenziale omogenea:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

e l'integrale generale è dato da:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^x$$

### 12.11 Equazioni differenziali lineari non omogenee

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

L'integrale generale delle soluzioni è dato da:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

al variare delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ .  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  sono due soluzioni dell'omogenea associata in  $[a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , (che abbiamo visto nel caso di coefficienti costanti) e  $\bar{y}(x)$  è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Ci sono casi particolari in cui è possibile ricavare una soluzione in modo diretto (nel caso di equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti).

### 12.11.1 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 \quad (\star)$$

Come primo passo consideriamo l'omogenea associata e quindi, essendo a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

per cui l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da:

$$(c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

al variare delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ .

Ora ricerchiamo una soluzione particolare  $\bar{y}(x)$  e poichè il termine noto dell'equazione differenziale è una equazione di secondo grado, la ricerchiamo nella forma:

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + C$$

Sostituendo  $\bar{y}(x)$  nell'equazione differenziale  $(\star)$  otteniamo:

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = x^2 + 4x - 1 \implies \bar{y}(x) = ax^2 + bx + c \quad \bar{y}' = 2ax + b \quad \bar{y}'' = 2a$$

$$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 4x - 1 \implies ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = x^2 + 4x - 1$$

Quindi occorre che:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 4 \\ 2a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

da cui  $a = 1, b = 0, c = -3$ .

Quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(x) = x^2 - 3$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale iniziale è dato da:

$$(c_1 + c_2 x)e^{-x} + x^2 - 3$$

### 12.11.2 Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale non omogenea:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

$\implies$  l'integrale generale dell'omogenea associata è dato quindi da:

...

### 12.11.3 Osservazione

Abbiamo visto un metodo per trovare una soluzione, quando il termine noto è un polinomio.

Ora vediamo un esempio, in cui:

$$g(x) = a \sin x + b \cos x$$

### 12.11.4 Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + y' + 2y = 2 \cos x$$

Consideriamo prima l'equazione caratteristica dell'omogenea associata:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \implies \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

L'integrale generale è dato da:

$$c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$$