Analisi Teoremi e Dimostrazioni Esame

Andrea Bellu

2023/2024

Contents

1 Assiomi dei numeri reali

- Assiomi relativi alle operazioni
- Assiomi relativi all'ordinamento
- Assioma di completezza

1.1 Assiomi relativi alle operazioni

Sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione tra coppie di numeri reali e valgono le proprietà:

- **Proprietà associativa**
- **Proprietà commutativa**
- **Proprietà distributiva**
- **Esistenza degli elementi neutri**
- **Esisstenza degli opposti**
- **Esistenza degli inversi**

1.2 Assiomi relativi all'ordinamento

E' definita la relazione di Minore o Uguale $\leq$.

- **Dicotomia**
- **Proprietà Assimetrica**
- **Assioma di completezza**

1.2.1 Assioma di completezza

$$\forall a \in A, \forall b \in A, a \leq b \implies \exists c \in A : a \leq c \leq b$$

Esempi:

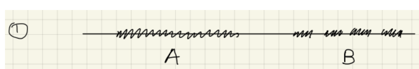

Figure 1: Esempio 1

Esistono infiniti c.

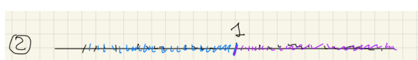

Figure 2: Esempio 2

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \implies c = 1$$

Osservazione: Non tutti gli insiemi hanno il più grande o il più piccolo elemento. Ad esempio:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

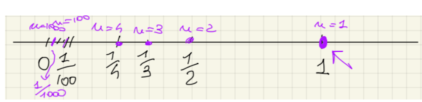

Figure 3: Esempio 3

Non ha un elemento più piccolo. (Invece c'è il più grande che è 1).

1.3 Denso

Si dimostra che $\mathbb{Q}$ è denso sulla retta reale (nel senso che fra due numeri razionali è sempre possibile trovare un terzo, anzi infiniti).

$$a = \frac{m_1}{n_1} \quad b = \frac{m_2}{n_2}$$

faccio la media $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}{2} = \frac{m_1n_2+m_2n_1}{2n_1n_2} \implies \in \mathbb{Q}$

1.3.1 $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ non si può rappresentare come numero razionale.
Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo, supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ posso supporre che $m.n$ siano primi tra loro e che al più uno tra loro sia pari. Allora $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2(\star)$
$\implies m^2$ deve essere pari e quindi m è pari.
Posso esprimere m nella forma: $m = 2k$ con k intero.
Ricavo che $\implies 2n^2 = m^2 = 4k^2$ semplifico per 2 e ottengo $n^2 = 2k^2$
Ripeto il ragionamento precedente $\implies n^2$ pari e quindi anche n pari. Ma allora sia m che n risultano pari, ASSURDO! Avevo supposto che fossero primi ed (al più) uno dei due pari. ♣

Per capire meglio guarda esempi della Francy nella prima lezione.

2 Complementi ai numeri reali

2.1 Massimo, Minimo, Estremo Superiore, Estremo Inferiore

$$\text{Def: M è il massimo di A} \begin{cases} M \in A & (1) \\ M \geq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il massimo di un insieme di numeri reali A quindi, se esiste, è un numero M dell'insieme A, che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme A.

$$\text{Def: m è il minimo di A} \begin{cases} m \in A & (1) \\ m \leq a \quad \forall a \in A & (2) \end{cases}$$

Il minimo di A analogamente, se esiste, è un numero m di A, che è minore o uguale ad ogni altro elemento di A.

2.1.1 Il massimo e il minimo sono unici

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.
Dimostrazione: Siano M_1 e M_2 due massimi di A.
Ma allora per definizione di massimo,

$$(1)\ M_1 \geq a \quad (2)\ M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Sempre per definizione, M_1, M_2 sono elementi di A.
Quindi da (1) se $a = M_2$, ottengo $M_1 \geq M_2$
Da (2) se $a = M_1$, ottengo $M_2 \geq M_1$
Segue che $M_1 = M_2$ ♣.

2.1.2 Osservazione

Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più grande elemento di A è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.
- $B = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, il più piccolo elemento di B è 0, che è il minimo, il più grande non c'è.

2.2 Maggiorante e Minorante

L si dice **maggiorante** per un insieme A se

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$

l si dice **minorante** per un insieme A se

$$l \leq a \quad \forall a \in A$$

Non sempre un insieme A ammette maggioranti e minoranti.
L'insieme A si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.
L'insieme A si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.
L'insieme A si dice **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente, in simboli:

$$l \leq a \leq L \quad \forall a \in A \implies \exists M : |a| \leq M \quad \forall a \in A$$

2.3 Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

$$A = \{a \in A\} \quad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

Applichiamo l'assioma di completezza di due insiemi A e B, quindi esiste c numero reale tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Dato che $c \geq a \quad \forall a \in A$, c è un maggiorante di A, cioè $c \in B$.
Ma c è anche tale che $c \leq b$ (minore o uguale a tutti gli elementi di B). $\implies$ c è un minimo. ♣
Allora possiamo dare la seguente definizione:

2.3.1 Estremo superiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se M è il minimo dei maggioranti di A. In simboli:

$$M \text{ estremo superiore di } A \iff \begin{cases} M \geq a \quad \forall a \in A \;\; (\mathbf{1}) \text{ (M è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : M - \varepsilon < a \;\; (\mathbf{2}) \text{ (M è il minimo dei maggioranti)} \end{cases}$$

Analogamente:

2.3.2 Estremo inferiore

Def: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che m è l'**estremo inferiore** di A se m è il massimo dei minoranti di A. In simboli:

$$m \text{ estremo inferiore di } A \iff \begin{cases} m \leq a \quad \forall a \in A \;\; (\mathbf{1}) \text{ (m è minorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : m + \varepsilon > a \;\; (\mathbf{2}) \text{ (m è il massimo dei minoranti)} \end{cases}$$

$\implies$ Quindi se un insieme è limitato superiormente allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale. Altrimenti:

- L'estremo superiore è $+\infty$ se A non è limitato superiormente
- L'estremo inferiore è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente

$$\begin{cases} \sup A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : M < a \\ \inf A = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : m > a \end{cases}$$

Ongi insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

2.3.3 Osservazione

Assioma di completezza (punto di partenza) $\implies$ Esistenza dell'estremo superiore.

3 Successioni e Limiti

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n. Una successione è una funzione di $\mathbb{N} in \mathbb{R}$.

- $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- $1 \to a_1$
- $2 \to a_2$
- $3 \to a_3$
- $n \to a_n$

Simbolo: (a_n) oppure più semplicemente a_n
A noi interessa il comportamento della successione per n grande, più precisamente il **limite** della successione a_n, cioè un numero reale ($a \in \mathbb{R}$) che sia "vicino" ai termini della successione che hanno l'indice n "grande".
Consideriamo a_n con a limite della successione ($a \in \mathbb{R}$). a è il limite della successione se comunque si scelga un intervallo

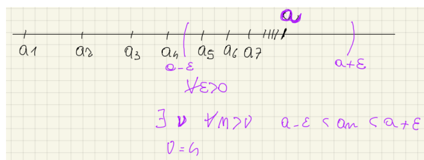

Figure 4: Intorno

di numeri intorno ad a, diciamo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice ν, tale che $\forall n > \nu$ a_n sta nell'intervallo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, cioè $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$.

3.1 Limiti

Un numero reale a è il limite della succesione a_n (si dice che a_n tende o converge ad a) e si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \text{o } a_n \to_{n\to+\infty} a$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν tale che:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \qquad \exists\nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu$$

Osservazione: $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ si può scrivere $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$.

3.2 Proposizione

Se esiste il limite $a \in \mathbb{R}$ della successione a_n, allora è unico.
Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che:

$$a_n \to a \qquad \text{e} \qquad a_n \to b \qquad \text{con } a \neq b$$

Allora $\forall\varepsilon > 0$

$$\exists\nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_1$$

$$\exists\nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_2$$

Prendo $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$ e ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, (1) e (2) valgono contemporaneamente. Allora:

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|$$

Ma allora $|a-b|<|a-b|$, ASSURDO! ♣
Una succesisone a_n ha limite $+\infty$ (si dice anche che tende o diverge a $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

se, qualunque sia $M > 0 \in \mathbb{R}$, esiste un numero ν tale che:

$$a_n > M \quad \forall n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n > \nu$$

Analogamente si definisce il limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M < 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : a_n < M \quad \forall n > \nu$$

Osservazione:

- Le successioni che ammettono limite finito si dicono **convergenti**
- Le successioni che ammettono limite infinito si dicono **divergenti**
- Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**
- Una successione che tende a zero si dice anche **infinitesima**
- Una successione divergente si dice anche **infinita**

3.3 Successioni Limitate

a_n si dice **limitata** se $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$|a_n| \leq M$$

Osservazione: In particolare $a_n = (-1)^n$ è un esempio di successione limitata che non ammette limite. Viceversa, ogni successione che ammette limite finito, è limitata. Vale il seguente:

3.4 Teorema

Ogni successione convergente è limitata.
Dimostrazione: Sia a_n una successione convergente e supponiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

Allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$
Posso predere $\varepsilon = 1 \implies |a_n - a| < 1$, valuto $|a_n|$:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n > \nu$$

posso prendere $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_\nu|, 1 + |a|\}$ ♣.

3.5 Operazioni con i limiti

Supponiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

- $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ se $b \neq 0$

Si dimostra anche che:

- $a_n \to a \ b_n \to \pm\infty \implies a_n + b_n \to \pm\infty$

- $a_n \to a (\neq 0)$ $b_n \to \pm\infty \implies a_n \cdot b_n \to \pm\infty$
- $a_n \to a$ $b_n \to \pm\infty$ entrambe con lo stesso segno $\implies a_n + a_b \to \pm\infty$ e $a_n \cdot b_n \to +\infty$
- $a_n \to a$ $b_n \to \pm\infty \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to 0$
- $a_n \to \pm a$ $b_n \to \pm 0 \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$

3.6 Forme infeteterminate o di indecisione

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$
- ∞^0
- $1^{\pm\infty}$
- 0^0

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che non esiste, ma che occorre togliere, se possibile, l'indeterminazione, mediante semplificazioni o trasformazioni.

3.7 Teoremi di confronto

3.7.1 Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > 0 \quad \forall n > \nu$.
Esempio: $a_n = \dfrac{n-12}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 > 0$, ma i primi termini della successione sono negativi.
$a_n = 0$ per $n = 12$, quindi se prendo $\nu = 12$, e $n > \nu$ allora $a_n > 0$.
Dimostrazione: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$
$a > 0$, quindi posso prendere $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$ e:

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \quad \forall n > \nu \iff a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0 \quad \forall n > \nu \quad \clubsuit$$

Corollario (viceversa)

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $a_n \geq 0$ (vale anche $a_n > 0$), allora $a \geq 0$.

3.7.2 Teorema dei carabinieri

Si consideriamo tre successioni a_n, b_n, c_n con la proprietà che:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Se risulta che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$ (per ipotesi $a_n \to a$ $\;b_n \to a$).
Dimostrazione:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_1$$

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_2$$

Definisco $\nu_3 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ e per ipotesi $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \implies |c_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu_3 \quad \implies c_n \to a \quad \clubsuit$
Osservazione: Valgono per i limiti infiniti:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n \to +\infty \implies b_n \to +\infty \\ b_n \to -\infty \implies a_n \to -\infty \end{cases}$$

Dal teorema dei Carabinieri, segue il seguente risultato molto importante per le applicazioni e gli esercizi:

3.7.3 Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se a_n è limitata e b_n è infinitesima, allora $a_n \cdot b_n \to 0$ **Dimostrazione:** Considero $|a_n \cdot b_n| \implies$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$$

Per la proprietà del valore assoluto $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

$$-M|b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M|b_n| \quad \text{per ipotesi } b_n \to 0$$

$\implies$ Per il Teorema dei Carabinieri $a_n \cdot b_n \to 0$ $\clubsuit$

3.8 Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 \quad \text{se } -1 < a < 11 \quad \text{se } a = 1 \text{non esiste} \quad \text{se } a \leq -1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 \quad \text{se } b = 00 \quad \text{se } b < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

3.9 Limiti relativi alle funzioni trigonometriche

- $a_n \to 0 \implies \sin a_n \to 0$
- $a_n \to 0 \implies \cos a_n \to 1$

Ad esempio, se $a_n = \frac{1}{n} \implies \sin\frac{1}{n} \to 0$ e $\cos\frac{1}{n} \to 1$.

- $a_n \to 0, a_n \neq 0 \;\; \forall n \;\; (1)\dfrac{\sin a_n}{a_n} \to 1$
- $a_n \to 0, a_n \neq 0 \;\; \forall n \;\; (2)\dfrac{1-\cos a_n}{a_n^2} \to \dfrac{1}{2}$

Infatti $\dfrac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \dfrac{(1-\cos a_n)(1+\cos a_n)}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \dfrac{1-\cos^2 a_n}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \dfrac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos a_n} = \dfrac{1}{2}$

3.10 Successione notevole importante

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n \quad 1^{+\infty}$$

Confrontiamola con altre successioni b_n, c_n:

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^3 = (1+\frac{1}{n}) \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (1+\frac{1}{n}) \to 1$$

$$c_n = (1+\frac{1}{10})^n = (\frac{11}{10})^n = a^n \to +\infty \qquad \text{con } a > 1$$

Quindi a_n è una **forma indeterminata** $1^{+\infty}$, che da una parte, vuole tendere ad 1, dall'altra a $+\infty$, arriverà quindi ad un "punto di mezzo". Si definisce e il **numero di Nepero** tale che:

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

dove $e \simeq 2,718281828459045235360287471352662497757247093699995\ldots$
Si dimsotra che la succesisone a_n è strettamente crescente e limitata.

3.11 Successioni Monotòne

-